KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPAKT-AÇIK TOPOLOJİ VE HOMEOMORFİZM GRUPLARI ÜZERİNDE KOMPAKT-AÇIK TOPOLOJİ YAPISI

İLKER AKKUŞ

ARALIK 2006

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

Doç. Dr. Gülay BAYRAMOĞLU

…/…/200…

Müdür V.

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA

Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL

ÖZET

KOMPAKT-AÇIK TOPOLOJİ VE HOMEOMORFİZM GRUPLARI ÜZERİNDE KOMPAKT-AÇIK TOPOLOJİ YAPISI

AKKUŞ, İlker

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Aralık 2006, 78 Sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde bazı temel tanımlar ve kavramlar ile kompakt-açık topoloji ve sağladığı bazı özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde topolojiler için karşılaştırmalı bir inceleme yapılmış ve bazı teoremlerin eşdeğerliği verilerek homeomorfizm gruplarına aktarılmıştır. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Nokta-açık topoloji, Kompakt-açık topoloji, Topolojik grup, Uniform yapı, Uniform yakınsaklık, Regüler yakınsaklık, Hemikompakt uzay, Yönlendirilmiş küme

ABSTRACT

COMPACT-OPEN TOPOLOGY AND ITS STRUCTURE ON

HOMEOMORPHISM GROUPS

AKKUŞ, İlker

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

DECEMBER 2006, 78 Pages

This thesis contains four chapters. First chapter is devoted to introduction. In the second chapter, some fundamental definitions and concepts with compact-open topology and its satisfied some properties are given for later use. In the third chapter comparative a study for some topologies and some theorems, also its equivalent to our theorems and to proved. However, some of the properties of the compact-open topology which we establish are homeomorphism groups. Then in the latest chapter is devoted to argue and consequence.

Key Words: Point-open topology, Compact-open topology, Topological group, Uniform structure, Uniform convergence, Regular convergence, Hemicompact Space, Directed Set

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK'e, yine çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen ve yüreklendiren Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve asistan arkadaşlarıma ve beni bugünlere kadar getiren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Fonksiyon uzayları ve fonksiyon kümeleri ile ilgili olarak ilk çalışmalar Ascoli (Le Curve di una Varieta Data di Curve), Arzela (Funzioni di Linee) ve Hadamard (Sur Certaines Applications Possibles de la Théorie des Ensembles) tarafından yapılmıştır. Ancak bu çalışmalar sadece fonksiyon uzay teorisi için değil genel topolojinin de başlangıcı olarak kabul edilir. Bundan sonra fonksiyon uzayları ile ilgili yeni problemler ortaya çıkmış ve bu problemlere cevap arayan Frechet, Riesz, Weyl ve Hausdorff ile birlikte çalışmalar devam etmiştir.

1935 yılında Tychonoff (Über einen Funktionenraum) fonksiyon uzayları üzerine inşa edilebilecek topolojik yapıları ve bu yapılarla birlikte sağladığı özellikleri incelemeye başlamıştır ki o bu çalışmasında noktasal yakınsaklığın topolojisi olan Y^X üzerindeki çarpım topolojisini elde etmiştir. "Fonksiyon uzayı" terimi ise Tychonoff dan daha önce fonksiyon kümelerinin topolojik karakteri hakkındaki bir sorudan (Birkhoff ve Kellog, Invariant Points in Function Spaces) ortaya çıkarak kullanılmaya başlanmıştır. Noktasal ve uniform yakınsaklık kavramları da açık bir şekilde Tukey (Convergence and Uniformity in Topology) tarafından verilmiştir. Fonksiyon uzayları için kompakt-açık topolojinin ilk olarak sistematik bir biçimde incelenmesi ise Fox (On Topologies for Function Spaces) ve Arens (A Topology for Spaces of Transformations) e dayanmaktadır. X den X e tanımlı sürekli fonksiyonların oluşturduğu $C(X)$ sınıfının metrikleşebilir olması da yine Fox ve Arens tarafından verilmiş, bunun sonucunda Nachbin (Topological Vector Spaces of Continuous Functions), Shirota (On Locally Convex Vector Spaces of Continuous Functions) ve Warner (The Topology of Compact Convergence and

Continuous Function Spaces) ise X uzayının üzerine konulan bazı özelliklerle birlikte $C(X)$ üzerindeki kompakt-açık topolojinin sahip olduğu diğer durumları ortaya çıkarmışlardır.

1.2.Kaynak Özetleri

Temel tanımlar ve kavramlar için Genel Topoloji (C. Yıldız), Genel Topoloji (Ş. Yüksel), Algebraic Topology (S. Lefschetz), Topological Groups (L. Pontrjagin), General Topology (S. Willard), Topology: A First Course (J.R. Munkres), Topologie Générale (N. Bourbaki) ve Topology (J. Dugundji) ve General Topology (S. Lipschutz) adlı kitaplardan yararlanılmıştır.

R.F. Arens in 1945 ve 1946 yıllarında yayınlanan (A Topology for Spaces of Transformations ve Topologies for Homeomorphism Groups) makalelerinden de kompakt-açık topoloji ve yapısı, admissible topoloji (joint continuity), uniform yapı, yönlendirilmiş küme, eşsüreklilik, regüler yapı ve lokal kompaktlılığın gerekliliği incelenmiştir.

Topolojilerin eşdeğerliliği konusunda ise R.H. Fox (On Topologies for Function Spaces) un makalesinden yararlanılmıştır. Son olarak homeomorfizm grupları üzerine yaptığımız aktarımlar için de yine Arens (Topologies for Homeomorphism Groups) in makalesinden faydalanılmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada fonksiyon uzayları üzerine konulan kompakt-açık topolojik yapının özellikleri incelenmiş, üzerinde çalışılan uzaylara ek şartlar konularak kompakt-açık topolojinin sağladığı durumlar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Daha sonra kompakt-açık topolojinin bazı başka uzaylarla ilişkisi incelenerek nasıl bir davranış göstereceği belirlenmeye çalışılmıştır. Hatta ilk bölümde verdiğimiz bazı teoremlerin eşdeğerleri, başka bir yoldan verilmiş ve ispat edilmiştir. Son olarak ise yine ilk bölümde verdiğimiz bazı teorem ve kavramlar, homeomorfizm grupları üzerine aktarılmaya çalışılmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Temel Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 2.1.1: E evrensel küme ve $A \subset E$ olmak üzere, $E - A$ kümesine A *kümesinin tümleyeni* denir ve A^c şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.2: Bir X kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu kümelerin kümesine, verilen X kümesinin *kuvvet (güç) kümesi* denir ve $P(X)$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $P(X) = \{A : A \subset X\}$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.3: A ve B boştan farklı herhangi iki küme olmak üzere A ve B arasında bire-bir ve örten bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa bu kümelere *eşdeğer* kümeler, aralarında tanımlanan bu fonksiyona da *bire-bir eşleme* adı verilir.

Tanım 2.1.4: Doğal sayılar kümesi ile eşdeğer olan kümeye *numaralanabilir küme* denir.

Tanım 2.1.5: Numaralanabilir ya da sonlu olan bir kümeye ise *sayılabilir küme* adı verilir.

Tanım 2.1.6: A ve B kümeleri eşdeğer kümeler ise bu kümeler aynı *kardinal sayıya* veya aynı *kardinaliteye* sahiptir, denir. Bir A kümesinin kardinalitesi $\#(A)$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7: X boştan farklı bir küme ve τ da aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen $P(X)$ in herhangi bir alt ailesi olsun. Bu takdirde τ ailesine X cümlesi üstünde bir *topolojik yapı* veya *topoloji*, (X, τ) ikilisine de *topolojik uzay* denir. X cümlesinin elemanlarına *nokta*, τ ailesinin elemanlarına da *açık* adı verilir. Aşağıdaki aksiyomlar da *açıklar aksiyomları*dır:

A$_1$) $\varnothing, X \in \tau$

A$_2$) τ nun her sonlu veya sonsuz sayıdaki elemanlarının birleşimi τ ya aittir.

$$\forall I' \subset I \ (I' \text{ sonlu veya sonsuz }) \ \forall i \in I' \text{ için } A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I'} A_i \in \tau$$

A$_3$) τ nun her sonlu sayıdaki elemanlarının kesişimi de τ ya aittir.

$$\forall J \subset I \ (J \text{ sonlu elemanlı }) \ \forall j \in J \text{ için } A_j \in \tau \Rightarrow \bigcap_{j \in J} A_j \in \tau$$

Tanım 2.1.8: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine, A kümesinin *komşuluğu* denir. Yani;

$$N, A \subset X \text{ nin bir komşuluğu} \Leftrightarrow \exists U \subset X \text{ açığı var } \ni A \subset U \subset N$$

Eğer, $A = \{x\}$ ise, bu durumda

$$N, x \in X \text{ in bir komşuluğu} \Leftrightarrow \exists U \subset X \text{ açığı var } \ni x \in U \subset N$$

x noktasını içeren U açık kümesine de x in *açık komşuluğu* denir. Ayrıca N kümesi sadece x in komşuluğu değil U içindeki bütün noktaların komşuluğudur. Herhangi bir $x \in X$ noktasının bütün komşuluklar ailesini $N(x)$ ile gösterirsek, $N(x) = \{ N \in P(X) : N, x \text{ in bir komşuluğu} \}$ dir.

Tanım 2.1.9: (X, τ) bir topolojik uzay ve $E(x) \subset N(x)$ bir alt aile olsun. $N(x)$ in her N elemanı için $E \subset N$ olacak şekilde bir $E \in E(x)$ varsa, $E(x)$ ailesine X üzerindeki topolojiye göre x noktasının *komşuluklar tabanı* denir. Bir noktanın farklı komşuluklar tabanı olabilir.

Tanım 2.1.10: (X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın elemanlarının herhangi bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa, β ya τ topolojisinin bir *tabanı (bazı),* bazın her bir elemanına da *temel açık* adı verilir. Yani;

$$\beta, \tau \text{ için bir taban} \Leftrightarrow \forall A \in \tau \text{ için } \exists \theta \subset \beta \text{ alt ailesi var } \ni A = \bigcup_{B \in \theta} B \text{ veya}$$

β, τ için bir taban $\Leftrightarrow$ $\forall A \in \tau$ ve $\forall a \in A$ için $\exists B_a \subset \beta$ var $\ni A = \bigcup_{a \in A} B_a$ dır.

Tanım 2.1.11: (X, τ) bir topolojik uzay ve $\delta \subset \tau$ olsun. δ ailesinin elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu aile, τ için bir taban oluşturuyor ise δ ailesine τ topolojisi için bir *alt taban* denir. Yani, $\left\{ \bigcap_{A \in \varphi} A : \varphi \subset \delta, \varphi \text{ sonlu} \right\}$ sınıfı τ için bir taban ise δ ailesi bir alt tabandır.

Tanım 2.1.12: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ verilsin. $x \in A$ olmak üzere $G \subset A$ olacak şekilde x noktasını içeren en az bir $G \in \tau$ bulunabiliyorsa, x e A kümesinin bir *iç noktası* denir. A nın bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye de A *nın içi* adı verilir ve A° ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ verilsin. $x \in X$ olmak üzere, x i içeren her $G \in \tau$ açığı için $G \cap A \neq \emptyset$ özelliği sağlanıyorsa, x e A kümesinin bir *kapanış noktası* denir. A nın bütün kapanış noktalarının oluşturduğu kümeye de A *nın kapanışı* adı verilir ve $\overline{A}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.14: (X, τ) bir topolojik uzay ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $\overline{A} = X$ ise, A kümesine X içinde *her yerde yoğun* denir.

Tanım 2.1.15: Bir topolojik uzayın sayılabilir yoğun bir alt cümlesi varsa, bu uzaya *ayrılabilir uzay* adı verilir.

Tanım 2.1.16: (X, τ) ve (Y, τ^*) iki topolojik uzay ve f de X den Y ye tanımlı olan bir fonksiyon olmak üzere, Y uzayındaki her açığın ters görüntüsü X uzayında da açık ise, yani $\forall H \in \tau^*$ için $f^{-1}(H) \in \tau$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonuna $\tau - \tau^*$ *sürekli*, eğer tanım ve değer uzaylarındaki topolojiler aynı ise $\tau -$sürekli veya kısaca *sürekli* denir.

Tanım 2.1.17: (X,τ) ve (Y,τ^*) iki topolojik uzay olmak üzere, bu uzaylar arasında birebir örten, sürekli ve tersi de sürekli olacak biçimde bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa, bu fonksiyona bir *homeomorfizm,* X ve Y topolojik uzaylarına da *homeomorfik* veya *topolojik denk uzaylar* denir.

Tanım 2.1.18: X uzayının bir Y uzayı içine *gömülebilir* olması için gerek ve yeter şart X in Y nin bir alt uzayına homeomorf olmasıdır.

Tanım 2.1.19: X boştan farklı bir küme olsun. $X \times X$ den $\mathbb{R}$ nin içine tanımlanan bir d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir *metrik*, (X,d) ikilisine de *metrik uzay* denir:

$\forall\, x, y, z \in X$ için

M₁) $d(x,y) \geq 0$

M₂) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M₃) $d(x,y) = d(y,x)$

M₄) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Her metrik uzay bir topolojik uzay olup, tersi genelde doğru değildir. Metrik uzaylarda her açık yuvar açık bir cümle, her kapalı yuvar da kapalı bir cümle teşkil eder.

Tanım 2.1.20: (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $x \in X$ ve $r > 0$ sayısı verilsin. $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ cümlesine, x merkezli r yarıçaplı *açık yuvar* denir.

Tanım 2.1.21: X bir vektör uzayı (reel veya kompleks) olsun. Her $\vec{x} \in X$ vektörünü $\|\vec{x}\|$ reel sayısına dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir:

$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

N₁) $\left\|\vec{x}\right\| > 0$ ve $\left\|\vec{x}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$, $(\vec{x} \neq \vec{0})$

N₂) $\left\|\lambda\vec{x}\right\| = |\lambda|\left\|\vec{x}\right\|$

N₃) $\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\| \leq \left\|\vec{x}\right\| + \left\|\vec{y}\right\|$

Üzerinde norm tanımlanmış bir lineer X vektör uzayına *normlu vektör uzayı* veya kısaca *normlu uzay* denir ve $\left(X, \|\ \|\right)$ ile gösterilir. $\left\|\vec{x}\right\|$ reel sayısına da $\vec{x}$ vektörünün *normu* denir.

Tanım 2.1.22: (X,τ) topolojik uzayının τ topolojisi, X üzerinde tanımlı olan herhangi bir d metriği ile oluşturulan τ_d topolojisi ile çakışıyorsa, (X,τ) topolojik uzayına *metrikleşebilir uzay* denir.

Burada çakışma ifadesinden kastımız, topolojilerin temel açıklarının aynı olması veya bu iki topolojik uzay arasında bir homeomorfizmin kurulabilmesidir.

Tanım 2.1.23: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, X uzayına *birinci sayılabilir* uzay denir.

Tanım 2.1.24: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer τ topolojisinin sayılabilir bir tabanı varsa, X uzayına *ikinci sayılabilir* uzay denir.

Teorem 2.1.1: Her ikinci sayılabilir uzay aynı zamanda birinci sayılabilirdir.

Tanım 2.1.25: (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n$ olacak biçimde $\mathbb{N}$ den X e tanımlanan her fonksiyona, X topolojik uzayında bir *dizi* denir ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ veya kısaca (x_n) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.26: (X,τ) bir topolojik uzay, (x_n) de X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. (x_n) dizisinin x_0 noktasına yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\forall\, N \in N(x_0)$ için $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ var $\ni \forall\, n \geq n_0$ için $x_n \in X$ olmasıdır.

Bunun bize ifade ettiği, x_0 noktasının her komşuluğunda diziye ait sonlu çokluktaki terimler hariç, geriye kalan sonsuz çokluktaki terimler komşuluğun içindedir. Dizinin n_0-ıncı teriminden sonraki terimlerin kümesine *dizinin kuyruğu (sonu)* denir ve $X_{n_0} = \{x_{n_o}, x_{n_0+1}, ...\}$ ile gösterilir. Bu durumda, yakınsaklık tanımı

$$x_n \to x_0 \iff \forall\, N \in N(x_0) \text{ için } \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ var } \ni \forall\, n \geq n_0 \text{ için } X_{n_0} \subset N$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.1.27: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her x ve y noktaları için, bir noktanın diğerini içermeyen en az bir komşuluğu varsa, yani

$$\forall\, x, y \in X, x \neq y \text{ için } \exists U \in N(x) \text{ var } \ni y \notin U \text{ veya } \exists V \in N(y) \text{ var } \ni x \notin V$$

ise, X topolojik uzayına $T_0 -$ *uzayı* veya *Kolmogorov uzayı* denir.

Tanım 2.1.28: (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, X in farklı her x ve y noktaları için, bu noktaların her birinin diğerini içermeyen en az bir komşuluğu varsa, yani

$$\forall\, x, y \in X, x \neq y \text{ için } \exists U \in N(x) \text{ var } \ni y \notin U \text{ ve } \exists V \in N(y) \text{ var } \ni x \notin V$$

ise, X topolojik uzayına $T_1 -$ *uzayı* veya *Frechet uzayı* denir.

Tanım 2.1.29: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her x ve y noktalarının ayrık komşulukları varsa, yani

$$\forall\, x, y \in X, x \neq y \text{ için } \exists U \in N(x) \text{ ve } \exists V \in N(y) \text{ var } \ni U \cap V = \varnothing$$

ise, X topolojik uzayına $T_2 -$ *uzayı* veya *Hausdorff uzayı* denir.

Teorem 2.1.2: Her Hausdorff uzayı bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.30: (X,τ) topolojik uzayı, bir $F \subset X$ kapalı kümesi ve bir de $x \notin F$ noktası verilsin. Eğer F kümesi ile x noktasının birbirinden ayrık birer komşulukları varsa, yani $x \in X$ ve $x \notin F$ için $\exists U \in N(x)$ ve $\exists V \in N(F)$ var $\ni U \cap V = \varnothing$ ise, X uzayına *regüler* veya *düzenli uzay* adı verilir.

Tanım 2.1.31: (X,τ) topolojik uzayı hem regüler hem de T_1-uzayı ise, X uzayına T_3-*uzayı* denir.

Tanım 2.1.32: (X,τ) topolojik uzayı, kapalı bir $F \subset X$ alt kümesi, bir $x \in X$ ($x \notin F$) noktası ve bir de $(\mathbb{R},U)$ alışılmış uzayının $[0,1]$ alt uzayı verilsin. Eğer sürekli en az bir $f : X \to [0,1]$, $f(x)=0, f(F)=1$ fonksiyonu varsa, X uzayına *tamamen düzenli* veya *tam regüler uzay* denir. f fonksiyonuna da F kümesi ile x noktasını ayırıyor denir.

Tanım 2.1.33: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının birbirinden ayrık herhangi iki kapalı kümesinin, birbirinden ayrık birer komşulukları varsa, yani $\forall\, F_1, F_2 \subset X$ kapalı kümeleri için

$$F_1 \cap F_2 = \varnothing \text{ iken } \exists U \in N(F_1) \text{ ve } \exists V \in N(F_2) \ \ni U \cap V = \varnothing$$

ise, bu uzaya *normal uzay* adı verilir.

Uyarı 2.1.1: Tanımda ayrık kapalı komşuluklar yerine ayrık açık komşuluklar da alınabilir. Ayrıca herhangi bir normal uzayın, regüler uzay ve T_1-uzayı olması gerekmez.

Tanım 2.1.34: T_1-uzayı aksiyomunu sağlayan her normal uzaya, T_4- uzayı denir.

Bu tanımlardan yola çıkarak ayırma aksiyomları arasındaki bağıntıyı aşağıdaki şekilde kurabiliriz:

Metrik uzaylar $\subset T_4 -$ uzayları $\subset T_3 -$ uzayları $\subset T_2 -$ uzayları $\subset T_1 -$ uzayları $\subset T_0 -$ uzayları

Normal uzaylar $\subset$ Tam regüler uzaylar $\subset T_2 -$ uzayları $\subset T_1 -$ uzayları $\subset T_0 -$ uzayları

Tanım 2.1.35: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in alt kümelerinin bir $(A_i)_{i\in I}$ ailesi verilsin. Eğer $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ oluyorsa, $(A_i)_{i\in I}$ ailesine X uzayının bir *örtüsü* denir. Şayet her $i\in I$ için A_i kümeleri, X uzayının açık alt kümeleri ise, $(A_i)_{i\in I}$ ailesine X in *açık örtüsü* adı verilir.

Tanım 2.1.36: (X,τ) uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına *kompakt uzay* denir.

Uyarı 2.1.2: Sonlu bir küme, üzerinde tanımlanan topolojik yapı ne olursa olsun kompakt bir kümedir.

Uyarı 2.1.3: Bir uzayın her ayrık-kapalı alt kümeler ailesinin sonlu-ayrık bir alt ailesi varsa bu uzaya kompakt uzay denir.

Teorem 2.1.3: $\mathbb{R}$ kapalı ve sınırlı her alt aralığı kompakttır.

Teorem 2.1.4: Bir kompakt uzayın kapalı her alt kümesi kompakttır.

Teorem 2.1.5: Bir Hausdorff uzayının kompakt her alt kümesi kapalıdır.

Teorem 2.1.6: Kompaktlık sürekli fonksiyon altında korunur.

Teorem 2.1.7: Her kompakt Hausdorff uzayı bir regüler uzaydır.

İspat: (X,τ) kompakt Hausdorff uzayı olsun. Kapalı bir $K\subset X$ alt kümesi ve bir $x\notin K$ noktası verilsin. Teorem 2.1.4 den K kümesi kompakttır. Buradan $x\in U$,

$K \subset V$ ve $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ açık kümeleri vardır. O halde regüler uzay tanımına göre, (X,τ) regüler bir uzaydır.

Tanım 2.1.37: (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası, X uzayında kompakt bir komşuluğa sahipse, X uzayına *lokal kompakt uzay* denir.

Uyarı 2.1.4: Kompakt bir uzay, her noktasının kompakt bir komşuluğu olduğundan, her kompakt uzay bir lokal kompakt uzaydır, fakat tersi genelde doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{R}$ kümesi alışılmış topolojik yapısıyla birlikte lokal kompakttır, ancak bu uzay kompakt değildir.

Uyarı 2.1.5: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için, $\overline{V}$ kümesi kompakt olacak şekilde bir $V \in N(x)$ açık komşuluğu varsa, X uzayı bir lokal kompakt uzaydır.

Teorem 2.1.8: Her lokal kompakt Hausdorff uzayı bir regüler uzaydır.

İspat: (X,τ) bir lokal kompakt Hausdorff uzayı ve $x \in X$ alalım. Lokal kompakt uzay tanımından x noktasının V gibi kompakt bir komşuluğu vardır. X bir Hausdorff uzayı olduğundan, Teorem 2.1.5 den, V kümesi kapalıdır. Diğer taraftan, (V,τ_V) uzayı kompakt Hausdorff uzayı olduğundan, Teorem 2.1.7 den, (V,τ_V) uzayı regülerdir. Buradan (X,τ) uzayının her x noktası, X uzayının regüler kapalı alt uzayı olan kapalı bir komşuluğa sahipse, (X,τ) uzayı bir regüler uzaydır.

Şimdi de inceleyeceğimiz konuda faydalanacağımız kompaktlaştırma kavramından bahsedelim. Çözeceğimiz bir denklem, problem veya ispatlayacağımız bir teorem için bazen elimizdeki uzaylar yeterli olmayabilir. Örneğin; $\mathbb{C}$ kompleks düzlem üzerinde tanımlı analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun $z \to \infty$ için nasıl bir davranış gösterdiğini araştırmak için $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi Riemann küresinin bir alt uzayı olarak ele alınır, öyle ki Riemann küresinin kuzey kutbu, "∞" notasyonu ile gösterilen ve ideal nokta diye adlandırılan noktaya karşılık getirilerek, Riemann küresi ile $\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\mathbb{C}^*$ kümesi arasında bire-bir eşleme yapılmış olur. Bu da bize $f(z)$ fonksiyonunun "∞" noktasında nasıl bir davranış gösterdiğini inceleme imkânı verir. Bir başka elamenter örnek olarak da $x^2=2$ denkleminin çözümü, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinde imkânsızdır. Ancak $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesine $-\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ irrasyonel sayılarının eklenmesi halinde, yani $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin genişletilmesi durumunda bu denklemi çözmek mümkündür. O halde kompaktlaştırma kavramının altında yatan temel düşünce, yukarıdaki örneklerden de anlaşıldığı gibi verilen topolojik uzayın bir genişlemesidir. Şimdi kompaktlaştırma tanımını verelim:

Tanım 2.1.38: (X,τ) herhangi bir topolojik uzayı ve bir de (Y,τ^*) kompakt uzayı verilsin. Eğer X uzayı, Y kompakt uzayının yoğun bir alt uzayına homeomorf ise, bu durumda Y uzayına, X uzayının bir *kompaktlaştırması* denir.

Konunun giriş kısmında bahsettiğimiz ‘genişleme’ kavramının, tanımdaki ‘yoğun’ ibaresiyle sağlanacağı açıktır.

Teorem 2.1.9: X lokal kompakt uzayı, bir tek y gibi bir nokta ilave edilerek kompaktlaştırılabilir.

İspat: F kümesi, X uzayının kapalı bir alt kümesi olsun. F kompakt küme olmak üzere, $F\cup\{y\}$ kümeleri de $X^*=X\cup\{y\}$ kümesinin kapalı alt kümeleridir. X^* ın bu tip bütün kapalı kümeleri kapalılar aksiyomunu sağladıklarından dolayı, X^* da bir topolojik uzaydır. X^* uzayının kapalı alt kümelerinin X ile arakesitleri, X uzayının kapalı alt kümeleri olduklarından, X uzayı X^* uzayı içine topolojik olarak gömülebilir. Şimdi $\{f_a\}$ sınıfı, X^* ın kapalı alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda $\{f_a\}$ sınıfı, sonlu arakesit özelliğine sahiptir ve belirli iki grup içinde f_a kümeleri ayrıktırlar. O halde bu iki grubu belirmek gerekir. İlk grubun elemanları f_b kümelerinden oluşsun. Bu f_b kümeleri, X^* ın kompakt alt kümeleri ve hatta X in kapalı kümelerinden oluşur. İkinci grubun elemanları da f_c kümelerinden oluşup, bu f_c kümeleri de $F_c \subset X$ kapalı kümeler olmak üzere, $f_c = F_c \cup \{y\}$ kümelerinden meydana gelir. Dolayısıyla f_{b_0} kümesi, f_b kümelerinden herhangi birisi olmak üzere $\bigcap f_a = \bigcap \left(f_a \cap f_{b_0}\right)$ dir. Bu $f_a \cap f_{b_0}$ kümeleri ise f_{b_0} kümelerinin kompakt alt kümeleri olup, bu kümelerin oluşturduğu sınıf, sonlu arakesit özelliğine de sahiptir. Böylece, $f_a \cap f_{b_0}$ kümelerinin arakesiti boştan farklı olup, aynı durum $\{f_a\}$ sınıfı içinde sağlanır. Şimdi de kabul edelim ki, f_b kümeleri olmasın. Bu durumda $\bigcap f_a = \bigcap f_c = \bigcap \left(F_c \cup \{y\}\right) \ni y \neq \varnothing$ dir. O halde $\bigcap f_a \neq \varnothing$ olduğundan X^* uzayı kompakttır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 2.1.1: Yukarıdaki ispat içerisinde uzayın lokal kompakt özelliğinden faydalanmadığımızdan dolayı, bu teoremin bütün topolojik uzaylar için geçerli olduğu düşünülmemelidir. Çünkü $x \in X$ in verilen bir U açık komşuluğu için $\overline{U}$ cümlesi kompakt değilse $y \in \overline{U}$ olup, böylece X uzayı lokal kompakt olmadığı zaman X^* uzayının açık kümeleri çok iyi davranış göstermezler ve dolayısıyla bu teorem sadece lokal kompakt uzaylar için gerçeklenir.

Tanım 2.1.40: (X, τ) bir topolojik uzay ve her hangi iki $A, B \subset X$ alt kümeleri verilsin. Eğer $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$ veya $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ ise A ve B kümelerine *bağlantılı* iki küme denir. Eğer $\overline{A} \cap B = \varnothing$ ve $A \cap \overline{B} = \varnothing$ ise A ve B kümelerine *bağlantılı olmayan (ayrılmış)* iki küme adı verilir.

Uyarı 2.1.6: Bir topolojik uzayda bağlantılı olmayan iki küme daima ayrıktır, fakat tersi genelde doğru değildir.

Tanım 2.1.41: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ verilsin. $A \cap U$ ve $A \cap V$ kümeleri ayrık ve birleşimleri A yı verecek şekilde, X uzayının herhangi iki U ve V açığı varsa, A ya *bağlantısız* bir küme denir. Şayet A kümesi bağlantısız değilse, bu durumda *bağlantılıdır*, denir.

Tanım 2.1.42: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesi, bağlantılı olmayan ve boş olmayan iki alt kümenin birleşimine eşitse, X uzayına *bağlantılı olmayan uzay* veya *bağlantısız uzay* adı verilir. Eğer X kümesi, her biri boş olmayan bağlantılı iki kümenin birleşimine eşitse (X,τ) uzayına *bağlantılı uzay* denir.

Tanım 2.1.43: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının, X uzayında bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanı varsa, X uzayına *lokal bağlantılı uzay* denir.

Uyarı 2.1.7: X uzayının lokal bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ ve her $V \in N(x)$ için $x \in U \subset V$ olacak şekilde bağlantılı açık bir U komşuluğunun varlığıdır.

2.2 Kompakt-Açık Topoloji ve Özellikleri

Tanım 2.2.1: X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere X den Y ye tanımlı herhangi fonksiyonların oluşturduğu sınıfı F ile gösterelim. Bu durumda $F = \{ f \mid f : X \to Y \}$

dir. F in sürekli olan elemanlarının oluşturduğu sınıfı da C ile gösterirsek, $C \subset F$ olduğu açıktır.

$K \subset X$ ve $W \subset Y$ olmak üzere F sınıfına ait $f(K) \subset W$ şartını sağlayan f fonksiyonlarının oluşturduğu küme F nin bir alt sınıfı olup (K,W) şeklinde gösterilir. Bunu $(K,W) = \{ f \in F \mid f(K) \subset W \}$ şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 2.2.2: $x \in X$ ve $W \subset Y$ açık olmak üzere, $(x,W) = \{ f \mid f \in F, f(x) \in W \}$ şeklinde gösterilsin. F üzerindeki topoloji için (x,W) kümeleri bir alt taban olur. Bu alt taban tarafından üretilen topolojiye *nokta-açık* topoloji adı verilir.

Tanım 2.2.3: $K \subset X$ kompakt, $W \subset Y$ açık olacak şekildeki f fonksiyonlarının oluşturduğu (K,W) formları F üzerindeki topoloji için bir alt taban olup, bu alt taban tarafından üretilen topolojiye de *kompakt-açık topoloji* denir. Kompakt-açık topoloji bazı kaynaklarda *k-topoloji* veya *doğal (natural) topoloji* olarak da adlandırılabilir.

Her ne kadar $k-$topoloji ile $k-$uzay kavramları birbirine pek yakın gibi görünse de literatürde $k-$topoloji kompakt-açık topolojiyi, $k-$uzay ise burada vermeyeceğimiz daha farklı bir tanımı içermektedir.

Tanım 2.2.4: $f \in F$ olacak şekildeki her bir eleman için, $U(f)$ formu kompakt-açık topolojiye göre bir komşuluklar tabanıdır. O halde $i = 1,...,n$ için her $K_i \subset X$ kompakt ve her $W_i \subset Y$ açık alt kümeler olmak üzere $U(f)$ formu: $U(f) = (K_1, W_1) \cap ... \cap (K_n, W_n)$; $f(K_i) \subset W_i$, $i = 1,...,n$ dir. Hatta bu ifade $U(f) = (K_1,...,K_n; W_1,...,W_n)$ şeklinde de gösterilebilir.

Lemma 2.2.1: Kompakt-açık topolojide alt taban elemanlarının sonlu adetteki arakesitleri temel açık olduğundan aşağıdaki özellikler her zaman için geçerlidir.

i) $\bigcap_{i=1}^{n}(K_i,W)=\left(\bigcup_{i=1}^{n}K_i,W\right)$ $\qquad \forall\, K_i\subset X,\; W\subset Y$

ii) $\bigcap_{i=1}^{n}(K,W_i)=\left(K,\bigcap_{i=1}^{n}W_i\right)$ $\qquad K\subset X,\; \forall\, W_i\subset Y$

iii) $\bigcap_{i=1}^{n}(K_i,W_i)\subset\left(\bigcup_{i=1}^{n}K_i,\bigcup_{i=1}^{n}W_i\right)$ $\qquad \forall\, K_i\subset X,\; \forall\, W_i\subset Y$

İspat: i) İlk önce $\bigcap_{i=1}^{n}(K_i,W)\subset\left(\bigcup_{i=1}^{n}K_i,W\right)$ olduğunu gösterelim: $f\in\bigcap_{i=1}^{n}(K_i,W)$ olsun. Bu durumda $f\in(K_1,W)\cap\ldots\cap(K_n,W)$ dir. O halde $f(K_1)\subset W,\ldots,f(K_n)\subset W$ yazabiliriz ki, taraf tarafa birleşim alınırsa $\{f(K_1)\cup\ldots\cup f(K_n)\}\subset W$ elde edilir. Buradan da $f(K_1\cup\ldots\cup K_n)=f\left(\bigcup_{i=1}^{n}K_i\right)\subset W$ dir. Bu ise $f\in\left(\bigcup_{i=1}^{n}K_i,W\right)$ demektir. Tersine $g\in\left(\bigcup_{i=1}^{n}K_i,W\right)$ alalım. $g\in\bigcap_{i=1}^{n}(K_i,W)$ olduğu açıktır. Böylece eşitlik sağlanmış olur.

ii) $f\in\bigcap_{i=1}^{n}(K,W_i)$ olsun. Buradan $f\in(K,W_1)\cap\ldots\cap(K,W_n)$ olur, yani $f(K)\subset W_1,\ldots,f(K)\subset W_n$ dir. Taraf tarafa arakesit alınırsa $f(K)\subset\{W_1\cap\ldots\cap W_n\}=\bigcap_{i=1}^{n}W_i$ elde edilir. Bu ise $f\in\left(K,\bigcap_{i=1}^{n}W_i\right)$ demektir. İspatın diğer yönü de benzer şekilde gösterilir. Sonuç olarak eşitlik durumu sağlanmış olur.

iii) $f\in\bigcap_{i=1}^{n}(K_i,W_i)$ alalım, yani $f\in(K_1,W_1)\cap\ldots\cap(K_n,W_n)$ dir. Böylece $f(K_1)\subset W_1,\ldots,f(K_n)\subset W_n$ yazabiliriz. Taraf tarafa birleşim alınırsa

$\{f(K_1)\cup ... \cup f(K_n)\} \subset \{W_1 \cup ... \cup W_n\}$ elde edilir. Buradan da $f\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ olur ki, zaten bu da $f \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i, \bigcup_{i=1}^{n} W_i\right)$ demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2.2: X ve Y iki topolojik uzay, $K \subset X$ kompakt ve $W \subset Y$ açık olsun. F üzerindeki kompakt-açık topolojiye göre $\overline{(K,W)} \subset (K, \overline{W})$ özelliği her zaman sağlanır.

İspat: $g \notin (K, \overline{W})$ alalım. O halde bir $x \in K$ için $g \in (x, Y - \overline{W})$ dir. $\{x\}$ tek nokta kümesi topolojik uzay ne olursa olsun daima kompakt olduğundan $(x, Y - \overline{W})$ kümesi kompakt-açık topolojiye göre g nin bir açık komşuluğudur. Böylece $(K,W) \cap (x, Y - \overline{W}) = \varnothing$ bulunur ki bu, kapanış tanımına göre $g \notin \overline{(K,W)}$ demektir. Dolayısıyla $\overline{(K,W)} \subset (K, \overline{W})$ elde edilir.

Teorem 2.2.1: i) $\beta = \{W_\alpha : \alpha \in I\}$ cümlesi Y uzayı için bir alt taban olsun. Bu durumda $\{(A,W) : A \subset X \text{ kompakt, } W \in \beta\}$ cümlesi de F in kompakt-açık topolojiye göre bir bazı olur.

ii) $\digamma = \{K_\alpha : \alpha \in I\}$ cümlesi X in kompakt kümelerinin bir ailesi olmak üzere, her bir A kompakt ve $U \supset A$ açığı için $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset U$ olacak şekilde sonlu tane $K_i \in \digamma$ kümeleri vardır. Hatta $\{(K,W) : K \in \digamma, W \in \beta\}$ cümlesi F için bir alt baz olur.

İspat: i) Verilen bir $f \in (A,V)$ için $f \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i,W_i) \subset (A,V)$ olacak biçimde sonlu tane (A_i,W_i), $W_i \in \beta$ kümelerinin var olduğunu göstermemiz gerekir. β bir alt taban ve V açık olduğundan, her bir $V_\delta = \bigcap_{j=1}^{k(\delta)} W_{\delta,j}$ olmak üzere $V = \bigcup_{\delta} V_\delta$ yazılabilir. Şimdi $f(A) \subset V$ olduğundan A içindeki $\{f^{-1}(V_\delta) \cap A\}$ kümeleri açık olup, hatta A kompakt kümesi için açık bir örtü olurlar. Böylece bunlardan A yı örtecek şekilde $i = 1,2,...,n$ için sonlu tane $\{f^{-1}(V_i) \cap A\}$ kümelerini seçebiliriz. Yani A normal olduğundan kompaktlığı her bir $i = 1,2,...,n$ için $A_1, A_2, ..., A_n$ kümelerine göre $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ve $A_i \subset f^{-1}(V_i)$ şeklinde elde ederiz.

Her bir $i = 1,2,...,n$ için $f \in (A_i,V_i) = \left(A_i, \bigcap_{j=1}^{k(i)} W_{i,j}\right) = \bigcap_{j=1}^{k(i)}(A_i,W_{i,j})$ olduğundan, $f \in \bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{k(i)}(A_i,W_{i,j}) = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i,V_i) \subset \left(A, \bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \subset (A,V)$ sonucunu elde ederiz. Bu ise istediğimiz şeydir.

ii) $f \in (A,V)$ verilsin ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset f^{-1}(W)$ olacak şekilde sonlu tane $K_i \in \mathrm{F}$ kümelerini seçelim. Buradan $i = 1,2,...,n$ için $f \in (K_i,W)$ olur. Böylece $f \in \bigcap_{i=1}^{n}(K_i,W) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i, W\right) \subset (A,W)$ elde edilir. Bu ise i) deki gibi ispatı tamamlar.

Örnek 2.2.1: $(A \times B, V)$ kümesi, $Z^{X \times Y}$ de $A \subset X, B \subset Y$ kompakt ve $V \subset Z$ açık olacak şekilde kompakt-açık topoloji için bir baz formudur. $D \subset X \times Y$ kompakt ve W da D nin bir komşuluğu olsun. Eğer A ve B cümleleri, sırasıyla D nin X ve Y üzerindeki izdüşümleri ise $A \times B$ kompakt olup (böylece regüler), $D \subset A \times B$ olur.

Buradan her $d \in D$ için $A \times B$ deki $U_d \times V_d$ cümlesi bir komşuluk olur. Hatta $\overline{U_d} \times \overline{V_d} \subset (A \times B) \cap W$ cümlesi de d için bir komşuluktur. D kompakt olduğundan $\bigcup_i \{U_{d_i} \times V_{d_i}\}$ cümlesinden sonlu bir alt örtü seçebiliriz. O halde $D \subset \bigcup \overline{U_{d_i}} \times \overline{V_{d_i}} \subset W$ ve $\overline{U_{d_i}}, \overline{V_{d_i}}$ kompakt olduklarından Teorem 2.2.1 ii) koşulu sağlanır.

Şimdi de C üzerindeki kompakt-açık topoloji için ayırma aksiyomlarını inceleyelim. Ancak regülerlik kısmını ispatlarken kullanacağımız bir özelliği yardımcı teorem olarak en başta verelim.

Teorem 2.2.2: X topolojik uzayının regüler olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için x in herhangi bir $U \subset X$ açığı verildiğinde $x \in V \subset \overline{V} \subset U$ şartını sağlayan en az bir V açığının bulunmasıdır.

İspat: İlk önce ispatın gereklilik kısmını ispatlayalım: (X, τ) bir regüler uzay ve $U \in N(x)$ olsun. Komşuluk tanımı gereğince, $x \in T \subset U$ olacak şekilde bir $T \in \tau$ açık kümesi vardır. Buradan, $X - T$ kümesi kapalıdır ve böylece $x \notin X - T$ olur. X regüler olduğundan, $W \cap V = \varnothing$ olacak şekilde bir $W \in N(X - T)$ ve bir $V \in N(x)$ komşuluğu vardır. Buradan $V \subset X - W$ olur. Dolayısıyla, $x \in \overline{V} \subset X - W \subset T \subset U$ elde edilir. Böylece ispatın ilk yönü tamamlanmış olur.

Şimdi de ispatın yeterlilik kısmına geçelim. $x \in X$ noktası ve $x \notin F$ olan her hangi bir F kapalı kümesi verilsin. Bu takdirde $X - F$ kümesi, x noktasının açık bir komşuluğudur. Hipotezden, $\overline{V} \subset X - F$ olacak şekilde bir $V \in N(x)$ komşuluğu vardır. Buradan, $X - \overline{V}$ kümesi, F kümesini kapsayan açık bir kümedir. Böylece, $V \subset \overline{V}$ olduğundan, $(X - \overline{V}) \cap V = \varnothing$ elde edilir. O halde (X, τ) bir regüler uzaydır.

Teorem 2.2.3: Eğer Y uzayı T_o-, T_1-, T_2-, regüler (düzenli), T_3- veya tamamen regüler ise kompakt-açık topolojiyle birlikte C uzayı da T_o-, T_1-, T_2-, regüler(düzenli), T_3- veya tamamen regülerdir.

İspat: İlk önce T_o-özeliğini gösterelim: Her $x \in X$ için C de $f(x) \neq g(x)$ olacak şekildeki farklı f ve g fonksiyonlarını alalım. Y uzayı T_o-özeliğine sahip olduğundan $\exists W_1 \in \mathrm{N}\left(f(x)\right) \ni g(x) \notin W_1$ veya $\exists W_2 \in \mathrm{N}\left(g(x)\right) \ni f(x) \notin W_2$ dir. Bu ise $f \in \left(x, W_1\right) \ni g \notin \left(x, W_1\right)$ veya $g \in \left(x, W_2\right) \ni f \notin \left(x, W_2\right)$ demektir. Buradan da C nin kompakt-açık topolojiye göre bir T_o-uzayı olduğu görülür. Benzer şekilde T_1-özelliğinin de sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Şimdi ispatı biraz farklı olması bakımından T_2-özelliğine geçelim. Her $x \in X$ için C de $f(x) \neq g(x)$ olacak şekildeki farklı f ve g fonksiyonlarını alalım. Y uzayı T_2-özeliğine sahip olduğundan $W_1 \cap W_2 = \varnothing$ şartını sağlayan $\exists W_1 \in \mathrm{N}\left(f(x)\right)$ ve $\exists W_2 \in \mathrm{N}\left(g(x)\right)$ komşulukları vardır. Dolayısıyla $f(x) \in W_1$ ve $g(x) \in W_2$ elde edilir ki, bu ise $f \in \left(x, W_1\right)$ ve $g \in \left(x, W_2\right)$ demektir. $W_1 \cap W_2 = \varnothing$ olduğundan $\left(x, W_1\right) \cap \left(x, W_2\right) = \varnothing$ olup, böylece C kümesi kompakt-açık topolojiyle birlikte bir T_2-uzayıdır.

Y uzayı regüler olduğundan bir önceki teorem gereğince, $f(K) \subset W$ olup $\overline{W} \subset U$ olacak şekilde $U, W \subset Y$ açıkları mevcuttur. Böylece $f \in \left(K, W\right)$ ve $(K, \overline{W}) \subset (K, U)$ olduğu görülür. Yukarıdaki Lemma 2.2.2 den da $\overline{\left(K, W\right)} \subset (K, \overline{W})$ özelliğinin sağlandığını zaten biliyoruz. Şimdi f fonksiyonu için bir $U(f)=\left(K_1,...,K_n;U_1,...,U_n\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\left(K_i,U_i\right)$ komşuluğunu alalım. C de f in bir başka $W(f)$ komşuluğu için $W(f)\subset\overline{W(f)}\subset U(f)$ in sağlandığını gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz. Her bir $i=1,...,n$ için $K_i\subset X$ kompakt, $U_i\subset Y$ açık ve Y uzayı regüler olduğundan $W_i\subset\overline{W_i}\subset U_i$ olacak biçimde bir W_i açığı vardır. Buradan $f\in\left(K_i,W_i\right)$ olup $\overline{\left(K_i,W_i\right)}\subset\left(K_i,U_i\right)$ olduğu açıktır, dolayısıyla $f\in\bigcap_{i=1}^{n}\left(K_i,W_i\right)$ olduğundan $\overline{W(f)}=\overline{\bigcap_{i=1}^{n}\left(K_i,W_i\right)}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\left(K_i,U_i\right)=U(f)$ dir. Böylece C kümesi de kompakt-açık topolojiye göre regülerdir. Sonuç olarak C uzayı T_1- ve regülerlik özelliklerini sağladığından, aynı zamanda T_3-uzayıdır.

Teoremin tamamen regülerlik kısmını şuan ki bilgilerimizle ispatlayamayacağımızdan dolayı bu ispatı konunun ilerleyen bölümlerinde vermeyi uygun görüyoruz.

Uyarı 2.2.1: Eğer Y uzayı normal ise C nin de normal olması gerekmez. Çünkü sayılamayan adette T_0-uzayının kartezyen çarpımı, daima bir diskret uzay üzerinde tanımlanan fonksiyonların $k-$topolojiyle donatılmış bir sınıfı olarak alınabilir. Bu şekilde tanımlanan kartezyen çarpım uzayı normal değildir.[20]

2.2.1 Topolojilerin Karşılaştırılması

τ ve τ^* topolojileri aynı küme üzerinde iki farklı topoloji olsunlar. Eğer τ nun her açığı τ^* için de açıksa bu durum $\tau\subset\tau^*$ şeklinde yazılır ve τ topolojisi τ^* dan daha güçlüdür veya τ^* topolojisi τ dan daha zayıftır denir. Buradaki "güçlü" ve "zayıf" kavramlarını Alexandroff ve Hopf [1] un kullandığı anlamlarıyla ele alacağız.

Yani "daha güçlü" topoloji demek daha fazla limit noktasına sahip olmak demektir. Ancak bazı yazarlar kendi açılarından bu kavramlara farklı tanımlar yüklemişlerdir. Bu tanımlardan yola çıkarak $\tau \subset \tau^*$ olması demek, δ sınıfı τ nun herhangi bir alt tabanı olmak üzere, seçilen bir $p \in S \in \delta$ elemanı için, $p \in V^* \subset S$ olacak şekilde en az bir $V^* \in \tau^*$ açığının var olması demektir.

2.2.2 Admissible Topoloji

Tanım 2.2.2.1: Sürekli fonksiyonların C sınıfı ile üzerinde tanımlı bir τ topolojisi verilsin. $f \in C$ ve $x \in X$ olmak üzere $f(x) \in Y$ in verilen her W komşuluğu için $g \in U$ ve $x_1 \in V$ iken $g(x_1) \in W$ olacak biçimde $x \in X$ in bir V komşuluğu ve $f \in C$ nin bir $U-\tau$ komşuluğu varsa, diğer bir deyişle $e: C \times X \to Y$, $e(f,x) = f(x)$ fonksiyonu sürekli ise, bu durumda τ topolojisine C sınıfı üzerinde bir *Admissible* topoloji adı verilir.

Kompakt-açık topoloji için bu çok önemli bir özellik olup, hatta aşağıda vereceğimiz teorem de bu özelliğin karakteristik bir yapıya sahip olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.2.1: X kümesi bir lokal kompakt Hausdorff uzayı ise kompakt-açık topoloji C kümesi için admissible dir. Hatta bu topoloji, bütün admissible topolojiler içinde en güçlü olanıdır.

İspat: İlk önce X lokal kompakt olsun veya olmasın C kümesi üzerindeki kompakt-açık topolojinin admissible olanların içinde en güçlü olduğunu gösterelim. Bunun için $U = (K,W)$ kümesi kompakt-açık topolojiye göre C için bir alt taban elemanı ve τ da C üzerinde başka bir admissible topoloji olsun. $f \in U$ ve $x \in K$

alalım. Bu durumda $x \in X$ in bir $V(x)$ komşuluğunu ve f in bir $U^*(f,x)-\ \tau$ komşuluğunu bulabiliriz ki böylece $U^*(f,x)$ içindeki dönüşümler $V(x)$ in bütün noktalarını W da bulunan noktalara dönüştürürler. K kompakt olduğundan $x \in K$ ve $V(x)$ açık kümeleri K için bir örtü olup bunların sonlu tanesiyle de K yı örtebiliriz. O halde $K \subset \left(V(x_1) \cup ... \cup V(x_n)\right)$ yazabiliriz. Şimdi $U^*(f) = U^*(f,x_1) \cap ... \cap U^*(f,x_n)$ diyelim. Buradan $g \in U^*(f)$ ve $x \in K$ için elbette $g(x) \in W$ olacaktır. $g \in \left(K,W\right)$ olması için bu bir kriter olup, buradan $U^*(f) \subset U$ elde edilir. Böylece kompakt-açık topoloji τ dan daha güçlüdür.

Şimdi de X lokal kompakt Hausdorff uzayı olduğunda kompakt-açık topolojinin admissible olduğunu gösterelim. $x \in X$, $f \in C$ ve $f(x) \in Y$ nin bir W açık komşuluğu verilsin. X regüler ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(W)$ açık kümesi için öyle bir $V(x)$ açık komşuluğu vardır ki X uzayı lokal kompakt özeliğine sahip ve lokal kompakt uzayın her açık kümesi kompakt kapanışa sahip olduğundan, $\overline{V(x)}$ kümesi de kompakt olup, $\overline{V(x)} = K$ seçersek $K \subset f^{-1}(W)$ elde edilir. Bu ise $U = \left(K,W\right)$ cümlesinin f in bir komşuluğu demektir. Sonuç olarak U ya ait bütün dönüşümler V yi W nin içine dönüştürür. Buradan da kompakt-açık topolojinin admissible olduğunu görürüz.

2.2.3 Lokal Kompaktlığın Gerekliliği

Bir önceki teorem bize, X lokal kompakt olduğunda C için bir en güçlü admissible topolojinin var olduğunu gösterir. Bu durum X lokal kompakt olmadığı zaman nadiren sağlanır.

Teorem 2.2.3.1: X tamamen regüler ve $Y=[0,1]$ olsun. Eğer X den Y ye bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu sınıf üzerinde, bir en güçlü admissible topoloji varsa, X lokal kompakttır.

İspat: Teoremde bahsedilen fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterelim. $f\in\mathcal{C}$ ve $f(x)=0$ olsun. $0\in Y$ nin bir komşuluğu olarak W_0 cümlesini alırsak $1\notin W_0$ olur. Şimdi $\mathcal{C}$ nin τ^* gibi bir en güçlü admissible topolojiye sahip olduğunu varsayalım. Buradan f in bir $U-\tau^*$ komşuluğu ve $x\in X$ in bir V komşuluğu için $y\in V$ ve $g\in U$ ise $g(y)\in W_0$ dır. Bizim göstermemiz gereken $\overline{V}$ cümlesinin kompakt olduğudur. $\overline{V}$ için Ω sınıfı bir açık örtü olsun. $\overline{V}$ cümlesinin tümleyeni Ω ile uyumlu bir açık olduğundan Ω sınıfı X için de bir açık örtü olur. $F\subset X$ kapalı, $S\in\Omega$ için $F\subset S$ ve $W\subset Y$ açık olmak üzere $g\in\mathcal{C}$ ve $g(F)\subset W$ koşulunu sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfı da (F,W) ile gösterelim. (F,W) nin muhtemel bütün kümelerinin oluşturduğu sınıf, $\mathcal{C}$ üzerindeki bir topoloji için alt taban teşkil eder. Bu topolojiyi de τ ile gösterirsek, τ topolojisi admissible dir. Bunu göstermek için $g\in\mathcal{C}$, $y\in X$ ve $g(y)\in Y$ nin bir W komşuluğunu alalım. X regüler olduğundan y nin öyle bir H komşuluğunu bulabiliriz ki, $\overline{H}=T$ iken $T\subset g^{-1}(W)$ dir. Hatta F cümlesi Ω açık örtüsünün bir elemanıdır. Buradan da $z\in T$ ve $h\in(T,W)$ iken $h(z)\in W$ olup, τ nun admissible olduğunu görürüz.

τ^* en güçlü admissible topoloji ve τ da admissible olduğundan f in $U^*=(F_1,...,F_n;W_1,...,W_n)$ $-\tau$ komşuluğu ve U $-\tau$ komşuluğu için $U^*\subset U$ olur ki bunu zaten başta söylemiştik. Şimdi boştan farklı $G=V-(F_1\cup...\cup F_n)$ $-\tau$ açık kümesini ele alalım. X tamamen regüler olduğundan reel değerli-sürekli öyle bir r

fonksiyonu bulabiliriz ki $p \notin G$ için $r(p)=0$, $p \in X$ için $0 \le r(p) \le 1$ ve bir $p=z \in G$ için de $r(p)=1$ dir. Bu r fonksiyonunun C nin elemanı olduğu açıktır. Ek olarak r nin G nin dışında f ile çakışması için $r \in U^*$ olması gerekir. Fakat $r(z)=1 \in (Y-W_0)$ olduğundan r fonksiyonu U nun elemanı değildir. Halbuki $r \in U$ olmalıydı. Bu çelişki G nin boş olduğunu gösterir. Ω nın V_i elemanı için $F_i \subset V_i$, $i=1,...,n$ olsun. Buradan $\overline{V} \subset (V_1 \cup ... \cup V_n)$ olur. Böylece Ω açık örtüsü $\overline{V}$ için sonlu bir alt örtüye indirgenebilir. Dolayısıyla $\overline{V}$ cümlesi kompakt ve sonuç olarak X lokal kompakttır.

2.2.4 Kompakt-Açık Topolojide Yakınsaklık

Tanım 2.2.4.1: D kısmi sıralı bir küme ve $d', d'' \in D$ olmak üzere, bir $d \in D$ için $d > d'$ ve $d > d''$ oluyorsa, D ye yönlendirilmiş bir sistem denir. Yönlendirilmiş bir küme ise yönlendirilmiş bir sistemden bir topolojik uzaya fonksiyon demektir ve $\overline{x}$ şeklinde gösterilir. $\overline{x}$ ın $d \in D$ de aldığı değer ise $\overline{x}(d)$ şeklinde değil de genelde x_d biçiminde gösterilir. X uzayında x_d yönlendirilmiş küme olsun. $x \in X$ nın her $V(x)$ komşuluğu ve bir $d' \in D$ için $d > d'$ iken $x_d \in V(x)$ oluyorsa, x_d yönlendirilmiş kümesi x e yakınsıyor denir ve $x_d \to x$ ya da $\lim\limits_{d \in D} x_d = \lim\limits_{d} x_d = x$ şeklinde gösterilir.

X den Y uzayına tanımlı fonksiyonların yönlendirilmiş kümesi f_v ve x_d de X uzayında yönlendirilmiş bir küme olsun. Bu durumda $f_v(x_d)$ de Y uzayında yönlendirilmiş bir küme olur.

Notasyon 2.2.4.1: Bundan sonra X den Y uzayına giden sürekli fonksiyonların oluşturduğu C sınıfını kompakt-açık topolojiyle, X uzayını Hausdorff özelliğiyle, Y uzayını da herhangi bir topolojik uzay olarak ele alacağız.

Teorem 2.2.4.1: C uzayındaki fonksiyonların yönlendirilmiş bir kümesi f_v olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) Eğer X de $x_d \to x$ ve Y de $f_v(x_d) \to f(x)$ ise C de $f_v \to f$ dir.

ii) X lokal kompakt olmak üzere, C de $f_v \to f$ olması için gerek ve yeter koşul X de $x_d \to x$ iken Y de $f_v(x_d) \to f(x)$ olmasıdır.

İspat: i) Kompakt-açık topoloji, bütün admissible topolojiler içerisinde en güçlü olduğundan bu durumun ispatı oldukça kolay yapılabilir. Böylece i) şıkkı, X üzerindeki topolojik yapı ne olursa olsun, bütün topolojiler için sağlanır. Şimdi C üzerinde başka bir topoloji göz önüne alalım ki C içindeki her fonksiyon f den ayrılmış olsun. f in komşulukları olan U_v kümeleri $\{f_v\}$ içinde 'residual' (ayrılmış) kümelerdir, dolayısıyla U_v kümesi bir v için $\mu > v$ olacak şekildeki f_μ fonksiyonlarının hepsini içermektedir. Bu topoloji, her $x_d \to x$ ve $f_v \to f$ için $f_v(x_d) \to f(x)$ olduğundan f in komşuluğunda admissible dir. Böylece yine bu topolojiye göre $f_v \to f$ olur. Dolayısıyla daha güçlü olan topoloji içinde $f_v \to f$ dir.

ii) Bu durum X in lokal kompakt Hausdorff uzay olması durumunda kompakt-açık topolojinin admissible olmasının ve i) nin bir kombinasyonudur. '$x_d \to x$ ve $f_v \to f$ ise $f_v(x_d) \to f(x)$' şartı admissible olma şartına denktir. ii) içindeki bu tip yakınsaklık, en güçlü admissible topoloji için karakteristik bir özelliktir. Hatta C uzayında, ii) tipindeki yakınsaklığı ele alırsak, bu yakınsaklığın

C nin açık kümelerinin oluşturduğu bir tabanının kardinal sayısını bilmemize yararlı olacağını söylemeliyiz.

Teorem 2.2.4.2: X lokal kompakt ve Y herhangi bir topolojik uzay olmak üzere, X in bir tabanı 'a' kardinal sayısına, Y nin bir tabanı da 'b' kardinal sayısına sahip ise C nin bir tabanının kardinal sayısı 'a' ve 'b' den büyük olamaz.

İspat: (X) kümesi, kapanışları kompakt olan açık kümelerin oluşturduğu bir sınıf olmak üzere, X uzayı için bir baz olsun. Y uzayının açıklarının oluşturduğu baz da (Y) olsun. Sürekli fonksiyonların oluşturduğu C uzayı üzerindeki kompakt-açık topoloji için $U_0 = \left(\overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_n}; W_1, W_2, ..., W_n\right)$ formu bir bazdır. Burada $V_i \in (X)$ ve $W_i \in (Y)$, $i = 1, 2, ..., n$ dir. Dolayısıyla bu U_0 kümesi kompakt-açık topolojiye göre temel açıktır. Tersine, $(K, W) \subset C$ olduğunu kabul edelim ve $f \in (K, W)$ verilsin. $x \in K$ olmak üzere $f(x) \in Y$ nin bir komşuluğu $W_x \in (Y)$ olsun. Bir $V(x) \in (X)$ seçelim, böylece $f(\overline{V(x)}) \subset W_x$ olur. K kompakt olduğundan, $x_i \in K, i = 1, 2, ..., n$ noktalarının $V(x_1), ..., V(x_n)$ sonlu tane açık komşulukları tarafından örtülebilir, yani $K \subset [V(x_1) \cup ... \cup V(x_n)]$ yazılabilir. Şimdi $U_0 = \left(\overline{V(x_1)}, ..., \overline{V(x_n)}; W_{x_1}, ..., W_{x_n}\right)$ olarak alalım. Açık olarak $f \in U_0 \subset (K, W)$ dir. Bundan dolayı U_0 formundaki kümeler, C uzayında kompakt-açık topolojiye göre bir baz teşkil eder ve U_0 kümesi (X) ve (Y) bazlarının her ikisinden de daha geniş değildir. Bu sonuç ise ispatın tamamlandığını gösterir.

Uyarı 2.2.4.1: Eğer X lokal kompakt ve X ve Y uzaylarının her ikisi de numaralanabilir baza sahipse, C de numaralanabilir baza sahiptir. Dolayısıyla bu durum diziler için C içinde bir yakınsaklık kavramı tanımlamamıza yeterli olacaktır ve böylece $k-$topoloji içindeki bu yakınsaklık, G.Birkhoff [(2)] un $B-$yakınsaklığı ile çakışır. Hatta bütün yönlendirilmiş kümeler, diziler şeklinde alınırsa Teorem 2.2.4.1 de tanımlanan yakınsaklık kavramıyla, $B-$yakınsaklık kavramı aynı anlama gelir.

2.2.5 Uniform Yakınsaklık: Metrik durumu

X den Y uzayına tanımlı fonksiyonların yönlendirilmiş bir kümesi f_v, $f \in C$, (Y,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.

Tanım 2.2.5.1: Verilen bir pozitif r reel sayısı ve her $x \in A$ için x den bağımsız öyle bir v' sayısı vardır ki $v > v'$ iken $d\left(f_v(x), f(x)\right) < r$ oluyorsa, bu durumda A üzerinde $f_v(x)$ fonksiyonu $f(x)$ e uniform yakınsaktır, denir.

Tanım 2.2.5.2: X uzayının her bir K kompakt alt kümesi üzerinde $f_v(x)$ fonksiyonu, $f(x)$ fonksiyonuna uniform yakınsıyor ise kompakt kümeler üzerinde f_v fonksiyonlar kümesi de f e uniform yakınsaktır, denir.

Notasyon 2.2.5.1: $f, g \in C$ ve her $x \in A \subset X$ için $d\left(f(x), g(x)\right) < r$ koşulunu bundan sonra kısaca $(f, g) \in (A/r)$ şeklinde göstereceğiz.

Teorem 2.2.5.1: Sürekli fonksiyonların kompakt-açık topolojiyle donatılmış bir sınıfı üzerinde yönlendirilmiş bir küme f_v olsun. f_v fonksiyonlarının değer uzayı bir metrik uzay olmak üzere, f_v nin yakınsak olması için gerek ve yeter şart f_v nin kompakt kümeler üzerinde uniform yakınsak olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki kompakt kümeler üzerinde f_v fonksiyonu f e uniform yakınsak olsun. $K \subset X$ kompakt alt kümesi için f in bir (K,W) komşuluğu verilsin. f sürekli ve K kompakt olduğundan ve sürekli fonksiyon altında kompaktlık korunduğundan, $f(K)$ görüntü cümlesi de W nın kompakt bir alt cümlesidir. Böylece $f(K)$ ve W^c ayrıktırlar. Bundan dolayı $r>0$ olmak üzere $d\left(f(K),W^c\right)=r$ diyelim. Öyle bir v' sayısı için $v>v'$ iken $\left(f_v,f\right)\in\left(K/r\right)$ dir. Fakat bu gerektirme $v>v'$ iken $f_v(K)\subset W$ veya $f_v\in\left(K,W\right)$ demektir. Dolayısıyla kompakt-açık topolojiye göre $f_v\to f$ e yakınsak demektir.

Tersine, $\left(K/r\right)$ verilsin ve kompakt-açık topolojiye göre $f_v\to f$ e yakınsak olsun. $R(z)$ de $z\in Y$ merkezli, $\frac{r}{3}$ yarıçaplı bir küreyi göstersin. Her $x\in K$ için öyle bir V açığı vardır ki $V\subset f^{-1}\left(R(f(x))\right)$ dir. K kompakt olduğundan öyle $x_1,x_2,...,x_n$ noktalarını bulunabiliriz ki, bu noktaların açık komşulukları, sırasıyla $V_1,V_2,...,V_n$ kümeleri olmak üzere $K\subset\left(V_1\cup...\cup V_n\right)$ yazılabilir. Şimdi $K_i=K\cap\overline{V_i}$, $i=1,...,n$ şeklinde yazarsak , K ve her bir $i=1,...,n$ için $\overline{V_i}$ kümeleri de kompakt olduğundan K_i kümeleri de kompakt olur. Ayrıca S_i ler de $f(x_i)$ merkezli, $\frac{r}{2}$ yarıçaplı küreyi göstermek üzere, $f(K_i)\subset S_i$, $i=1,2,...,n$ olduğundan, $U=\left(K_1,...,K_n;S_1,...,S_n\right)$ cümlesi f in kompakt-açık topolojiye göre bir komşuluğudur. O halde $v>v'$ olacak şekildeki bir v' sayısı için $f_v\in U$ olur. Eğer $x\in K$ ise bir i için $x\in K_i$ olup, $f_v\in U$ iken $f_v(x)\in S_i$ dir. Hatta $f(x)\in S_i$ elde edilir. Böylece $d\left(f_v(x),f(x)\right)<r$ veya diğer bir ifadeyle $\left(f_v,f\right)\in\left(K/r\right)$ dir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 2.2.5.1: Her metrik bir uniform yapı teşkil ettiğinden, değer uzayındaki metrik şartı yerine uniform yapı durumunu almamızda hiçbir sakınca yoktur, ancak her uniform yapı bir metrik teşkil edemeyeceğinden bu durumun tersi mümkün değildir.

Sonuç 2.2.5.1: X kompakt uzayından bir metrik uzaya tanımlanan sürekli fonksiyonların yönlendirilmiş kümesinin kompakt-açık topolojiye göre yakınsak olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde uniform yakınsak olmasıdır.

2.2.6 Kompakt-Açık Topolojinin Metrikleştirilmesi

X kompakt uzayından bir (Y,d) metrik uzayına giden sürekli fonksiyonların oluşturduğu sınıfı C ile gösterelim. C uzayının, üzerindeki kompakt-açık topolojiyle birlikte metrikleştirilebildiği aşikâr bir durum vardır. C üzerinde her $x \in X$ ve $f, g \in C$ için $m(f,g) = \max d\big(f(x), g(x)\big)$ şeklinde tanımlanan metrik bu durumu sağlar. Burada X uzayı kompakt olmasaydı sorusu akla gelebileceği için bu sorunun cevabını da hemen vermekte fayda görüyoruz. Eğer X kompakt olmasaydı Y uzayında tanımlı bulunan d metriğine eşdeğer sınırlı bir metrik tanımlayarak yine C uzayını metrikleştirebilirdik. Ancak bu yolla tanımlanan metrik vasıtasıyla üretilen topoloji, kompakt-açık topolojiyle çakışmayabilir. Çünkü bu durumu engelleyen en önemli özellik, oluşturulmaya çalışılan topolojinin sadece X ve Y uzayları üzerindeki topolojilere değil, aynı zamanda Y uzayı üzerindeki metriğe de bağlı olmasıdır, zira bu metrik, kompakt-açık topoloji üretmek zorunda da değildir. Böylece X uzayının her iki durumunda da üretilen topolojiler farklı olmak üzere, C nin metrizasyonu yapılabilir. Sonuç olarak, X uzayı hangi haliyle verilmiş olursa olsun Y uzayı üzerindeki metrik şartının kaldırılamayacağını görürüz. Şimdi C uzayının, topolojik uzayların metrikleştirilebilir bir sınıfını içermesi için gerekli ve yeterli koşulu vermeden, istediğimiz bu durumu gerçekleştirmemize yardımcı olacak bir tanımı ve bu tanıma göre bazı özellikleri vereceğiz.

Tanım 2.2.6.1: X topolojik bir uzay ve her bir $H_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$ kompakt alt küme olmak üzere $X = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n \cup ...$ şeklinde yazılabiliyorsa ve her $K \subset X$ kompakt alt kümesi $K \subset \left(H_{n_1} \cup ... \cup H_{n_k}\right)$ oluyorsa, bu durumda X e hemikompakt uzay denir.

Aşağıda bazı özellikleri sağlayan topolojik uzaylarla hemikompakt uzaylar arasındaki ilişkileri veren ve ileriki konularda faydalanacağımız birkaç özelliği basit ispatlarıyla birlikte vereceğiz.

i) Bir lokal kompakt ve mükemmel ayrılabilir uzay, hemikompakttır. Verilen X uzayı için $\overline{V_n} = H_n$ kompakt olacak şekilde $V_1, V_2, ...$ sayılabilir baz olsun. Buna göre $H_1, H_2, ...$ kompakt kümeler dizisi hemikompaktlık tanımındaki bütün şartları sağlar.

ii) Hemikompakt bir X uzayı, birinci sayılabilir ise lokal kompakttır. $X = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n \cup ...$ hemikompakt uzay olsun. Burada $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset ...$ şeklinde alabiliriz. $x \in X$ olmak üzere $V_1 \supset V_2 \supset ...$ x in komşuluklar tabanı olsun. Kabul edelim ki V_i komşulukları kompakt kapanışa sahip olmasın. X hemikompakt olduğundan $V_i \subset \overline{V_i} \not\subset H_i$ olup, buradan $V_i \not\subset H_i$ elde edilir. Şimdi bir $x_i \in \left(V_i - H_i\right)$ seçelim, bu durumda $x_i \to x$ olur. Dolayısıyla herhangi bir topolojik uzayda $x_i \to x$ ise $\{x, x_1, x_2, ...\}$ kümesi kompakt olup, X uzayı hemikompakt olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $H_n \supset \{x, x_1, x_2, ...\}$ dir. Hatta $x_n \in H_n$ dir. O halde bu bir çelişki olup, X uzayı lokal kompakttır.

iii) Mükemmel ayrılabilir bir topolojik uzayın hemikompakt olması için gerek ve yeter koşul verilen uzayın lokal kompakt olmasıdır. Bu durumun ispatı i) ve ii) nin bir kombinasyonudur.

Teorem 2.2.6.1: Hemikompakt bir uzaydan bir metrik uzaya tanımlanan sürekli fonksiyonların $k-$topolojiyle donatılmış bir sınıfı, metrikleştirilebilirdir.

İspat: $k-$topolojiyle donatılmış sürekli fonksiyonların sınıfı C olsun. Bu fonksiyonların tanım kümesi de $X = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n \cup ...$ hemikompakt uzayı olsun. Y uzayının da m metriğine sahip olduğunu kabul edelim. $f, g \in C$ olmak üzere, m_n metriğini, $m_n\left(f, g\right) = \min\left\{2^{-n}, \sup\left[m\left(f(x), g(x)\right)\right]\right\}, x \in H_n$, şeklinde tanımlayalım. Şimdi de $h\left(f, g\right) = m_1 + m_2 + ... \leq 1$ biçiminde tanımlarsak, h fonksiyonu C uzayı üzerinde bir metrik yapısı teşkil eder. C üzerinde tanımlanan bu metrik, $k-$topoloji üretir. Bunu ispatlamak için Teorem 2.2.5.1 deki koşulun sağlandığını göstermek gerek ve yeterlidir.

Kompakt kümeler üzerinde, $f_v \to f$ uniform yakınsak olsun. $r > 0$ verilsin ve $2^{-n} < r$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçelim. Böylece $n^{-1}\left(r - 2^{-n}\right) > 0$ olur. O halde $v > v'$ olacak biçimde ki bir v' için, her $x \in H_1 \cup ... \cup H_n$ olmak üzere, $m\left(f(x), f_v(x)\right) < n^{-1}\left(r - 2^{-n}\right)$ dir. Bunun anlamı $m_1 + m_2 + ... + m_n < r - 2^{-n}$ demektir. Dolayısıyla $m_{n+1} + m_{n+2} + ... < 2^{-n}$ olduğundan, $h\left(f, f_v\right) < r$ elde edilir.

Tersine, $h\left(f, f_v\right) \to 0$ olduğunu kabul edelim. K kompakt kümesi ve yine $r > 0$ verilsin. Böylece, bir $n \in \mathbb{N}$ için $K \subset \left(H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_n\right)$ olur. (Bu $n \in \mathbb{N}$ yi $2^{-n} < r$ olacak şekilde yeterince büyük olarak seçebiliriz). Şimdi $v > v'$ olacak şekilde bir v' varsa $h\left(f, f_v\right) < 2^{-n}$ dir ki, bunun da anlamı; $m_1, m_2, ..., m_n$

metriklerinin hepsi 2^{-n} den daha küçüktürler demektir. Eğer $k \leq n$ olacak biçimdeki bir H_k kümesi üzerinde $m\left(f(x), f_v(x)\right)$ in değeri 2^{-k} dan daha büyükse, bu durumda $m_k = 2^{-k} \geq 2^{-n}$ olur. Böylece $x \in K$ için $m\left(f(x), f_v(x)\right) < 2^{-n} < r$ elde edilir. Bu ise $f_v \to f$ uniform yakınsak demektir.

Sonuç 2.2.6.1: Bir lokal kompakt ayrılabilir metrik uzay üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların $k-$topolojiyle donatılmış bir sınıfı, metrikleştirilebilirdir.

Bu yapıya örnek olarak, Bölüm 2.2.15 de bütün reel değişkenli sürekli fonksiyonların oluşturduğu bir sınıfı vereceğiz.

2.2.7 Teorem 2.2.6.1 e Karşıt Olarak

Bu bölüme bundan sonra vereceğimiz teoremlerde kullanacağımız bir tanımı vererek başlayalım.

Tanım 2.2.7.1: $\left(X, \tau\right)$ bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. $x \neq y$ nokta çifti için $f(x) \neq f(y)$ olacak biçimde, X üzerinde reel değerli ve sürekli bir f fonksiyonu tanımlanabiliyorsa, bu durumda X uzayına $S-$uzayı denir.

Uyarı 2.2.7.1: Tanımda istenen fonksiyonun, farklı nokta çifti için farklı değer alma durumu, ayırma aksiyomlarının karakteristik özelliğinden kaynaklanmaktadır. Çünkü üzerinde çalıştığımız X uzayının topolojisi zayıflatılmış ise, tanımdaki bu koşul, ayırma aksiyomlarını koruyacaktır. Hatta bu durum, her tam regüler uzay bir Hausdorff uzayı olduğu için, bazen tam regüler uzayın, bazen de Hausdorff uzayının bir sonucu olarak karşımıza çıkmaktadır. Ancak bu durum, kesinlikle regülerlik özelliğini gerektirmez. Bu çalışmamızda değinmeyeceğimiz ancak söylemekte yarar gördüğümüz bir durum daha var ki, düzenli uzay özelliği taşıyan topolojik yapı $S-$uzayı olmayabilir.

Sonuç 2.2.7.1: Özellikle metrik uzaylar bir $S-$uzayıdır.

Lemma 2.2.7.1: X bir $S-$uzayı, K ve L de X in ayrık-kompakt iki alt kümesi olsunlar. Bu durumda, X üzerinde tanımlı, K üzerinde yok olan, L üzerinde de 1 değerini alacak biçimde reel değerli ve sürekli bir fonksiyon vardır.

İspat: İlk durum olarak L kümesini tek nokta kümesi olarak ele alalım. Bu durumda her bir $x \in K$ için L de 1, x de -1 değerini alacak biçimde reel değerli ve sürekli bir f_x fonksiyonu vardır. Hatta f_x fonksiyonu negatif olacak biçimde, x in bir $V(x)$ komşuluğu vardır. Daha sonra, benzer şekilde $x_1, x_2, ... \in K$ noktaları için $V(x_1), V(x_2), ...$ komşulukları, K kümesi için bir açık örtü olur. K kompakt olduğundan, bu açık örtüden, K yı örtecek şekilde $V(x_1), V(x_2), ..., V(x_n)$ örtüsünü seçebiliriz. Şimdi de $y \in X$ için $f(y)$ değerini tanımlayalım: $f(y)$ değeri, $f_{x_1}(y), ..., f_{x_n}(y)$ değerlerinin en küçüğü pozitif ise o değere eşit, değilse yok olan bir fonksiyon olsun. Böylece f fonksiyonu, L kümesi tek nokta kümesi olduğu zaman Lemma da belirtilen şartlara sahip bir fonksiyon olur.

Eğer L kümesi tek nokta kümesi değilse, L nin bütün noktaları için, yukarıda kurduğumuz yapıya benzer olarak, ayrı ayrı birer fonksiyon kurulacak ve böylece ispat için genel sonuca ulaşılacaktır.

Teorem 2.2.7.1: X bir $S-$uzayı olmak üzere, X üzerinde tanımlı, tüm reel değerli sürekli fonksiyonların $k-$topolojiyle donatılmış bir sınıfı birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlıyorsa, bu durumda X uzayı hemikompakttır.

İspat: $f \in C$ fonksiyonu, her $x \in X$ için $f(x) = 0$ değerine sahip sabit bir fonksiyon olsun. $K \subset X$ kompakt ve W da 0 ın komşuluğunda sınırlı-açık bir aralık olmak üzere, bu tip kümelerden elde edilen (K, W) formlarının oluşturduğu sınıfların f in komşuluğunda $k-$topoloji için bir baz teşkil ettiğini söylemiştik. Eğer $(K_1, W_1) \subset (K, W)$ ise $K \subset K_1$ ve $W_1 \subset W$ olmalıdır. Bunlardan $W_1 \subset W$ olduğu açıktır. Biz $K \subset K_1$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $K \not\subset K_1$ olsun, yani bir $z \in K - K_1$ alalım. K_1 kapalı ve X bir $S-$uzayı olduğundan, W sınırlı aralığı üzerinde $g \in (z, W^c)$ olacak şekilde ve K_1 kümesi üzerinde yok olan, sürekli bir g fonksiyonu inşa edebiliriz. Böylece $g \in (K_1, W_1)$ olur, fakat $g \in (K, W^c)$ elde edilir. Bu da bize $K \subset K_1$ olmak zorunda olduğunu gösterir.

Şimdi kabul edelim ki, $f \in C$ için sayılabilir bir baz, $f \in (K_n, W_n)$, $n = 1, 2, ...$ olsun. Eğer bu bir baz ise, f in verilen herhangi bir (K, W) komşuluğu için öyle bir n tam sayısı bulabiliriz ki, bu durumda $(K_n, W_n) \subset (K, W)$ olur. Biraz önceki ispatımızdan $K \subset K_n$ dir. Özellikle, K kümesi tek bir noktadan oluşabilir. Böylece $X = K_1 \cup K_2 \cup ...$ şeklinde yazılabilir ve her bir K kompakt kümesi aslında bir K_n kümesi tarafından içerilir. Sonuç olarak X uzayı hemikompakttır.

Sonuç 2.2.7.2: Teorem 2.2.6.1 ve Teorem 2.2.7.1 den şu sonucu çıkartabiliriz: "Bir metrik uzayın topolojik çarpımının yine bir metrik uzay olması için gerek ve yeter şart çarpımı oluşturan faktörlerin sayılabilir adette olmasıdır". Bu özellik Topoloji de kullandığımız çok yararlı bir özelliktir.

2.2.8 Uniform Değer Bölgeli Fonksiyonların Sınıfı

Bu başlık altında, ilk önce uniform uzay kavramını formülüze etmemizde yardımcı olacak bazı tanımları vereceğiz. Uniform uzaylar, metrik uzayların bir genelleştirmesidir. **[21]**

Y değer uzayının elemanları tarafından oluşturulmuş, verilen her bir küme için, $x, y \in Y$ olmak üzere (x, y) sıralı çiftleri tarafından meydana getirilen bir R bağıntısı vardır. Bu şekilde Y nin her bir alt kümesi üzerinde tanımlanan bağıntıları $R, S, ...$ şeklinde gösterirsek, bu bağıntıların $Y \times Y$ nin birer alt sınıfı olacağı açıktır. $x, y \in Y$ için bütün (x, y) sıralı çiftlerinin oluşturduğu cümlelerde ise $R \cap S$, $R \cup S$, $R \subset S$ veya $S \subset R$ durumlarından birinin sağlanacağı da bellidir.

Eğer R ve S, Y üzerinde iki bağıntı ise, öyle bir $y \in Y$ için $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in S$ olmak üzere, bütün (x, z) nokta çiftlerinin oluşturduğu bağıntı RS şeklinde gösterilir. Bundan faydalanarak $R^2 = RR$ ve $R^n = R\left(R^{n-1}\right) = \left(R^{n-1}\right)R$ demektir. Şayet her $x \in Y$ için $(x, x) \in R$ (yani R yansımalı) ise $S \subset RS$ ve özellikle de $R^n \subset R^{n+1}$ dir.

Eğer $x \in Y$ ve R bir bağıntı ise $(y, x) \in R$ olacak şekildeki bütün $y \in Y$ elemanlarının oluşturduğu küme $R(x)$ şeklinde gösterilir ve buradan $R(x) \subset Y$ olduğu açıktır. Şayet $B \subset Y$ (B bağıntı değil!) ise B içindeki x ile bütün $R(x)$ lerin birleşimini de $R(B)$ ifadesiyle göstereceğiz. Hatta R yansımalı ise $B \subset R(B)$ dir.

Tanım 2.2.8.1: Y değer uzayı üzerinde tanımlanan bağıntıların bir ailesi Υ olsun. Υ ailesi aşağıdaki şartları sağlarsa, bir uniform yapı olarak adlandırılır:

i) $x, y \in Y$ olmak üzere, $x = y$ olması için gerek ve yeter koşul her $R \in \Upsilon$ için $(x, y) \in R$ olmasıdır.

ii) $R, S \in \Upsilon$ için $T \subset R \cap S$ olacak şekilde bir $T \in \Upsilon$ vardır.

iii) Her $R \in \Upsilon$ için $SS \subset R$ olacak biçimde öyle bir $S \in \Upsilon$ vardır ki, böylece bir $T \in \Upsilon$ ve her $n \in Z$ için $T^n \subset R$ dir.

Bir Y uzayı, uniform yapıya sahipse aynı zamanda uniform uzay olarak da adlandırılır. Uniform uzay için taban, $x \in Y$ ve $R \in \Upsilon$ olmak üzere $R(x)$ denklik sınıflarıdır. Hatta bu topoloji, "Υ topoloji" olarak da adlandırılır.

Eğer Y kümesi hâlihazırda bir τ topolojisine sahipse, bu τ topolojisi Υ ile uyumlu olmalıdır, yani,

iv) Verilen bir $U(x) - \tau$ komşuluğu ve bir $R \in \Upsilon$ için $R(x) \subset U(x)$, yine verilen $x \in Y$ ve $R \in \Upsilon$ için x in bir $\tau -$komşuluğu $R(x)$ tarafından içerilmelidir.

Bu iv) şartını aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz:

v) Eğer $(x, y) \in R$ ise $(y, x) \in R$ olmalıdır.[21]

Uyarı 2.2.8.1: "$(x, y) \in R$" ifadesi "x den y ye R den daha az" diye okunur. Böylece her metrik uzay bir uniform uzaydır. Dolayısıyla metrik uzaylarda sağlanan özellikler uniform uzaylarda da sağlanır. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bununla birlikte, "$(x, y) \in RR$" ifadesi "x den y ye iki R den daha az" ve "$SS \subset R$" ifadesi de "iki S, R den daha az" diye okunur.

Tanım 2.2.8.2: Y uzayı içindeki bir x_d yönlendirilmiş kümesi aşağıdaki (*) aksiyomunu gerçekliyorsa, bu durumda x_d ye Cauchy yönlendirilmiş kümesi adı verilir.

(*) Her $R \in \Upsilon$ için öyle bir d' vardır ki $e > d'$ oldukça $(x_d, x_e) \in R$ dir.

Sonuç 2.2.8.1: i) özelliğinden dolayı bir Cauchy yönlendirilmiş kümesi bir tek limit noktasına yakınsayabilir.

Tanım 2.2.8.3: Bir uniform uzay içinde her Cauchy yönlendirilmiş kümesi bir tek limit noktasına yakınsıyor ise, bu durumda o uzaya Υ ya göre tamdır, denir.

2.2.9 Uniform Yakınsaklık: Genel Durum

Notasyon 2.2.9.1: f ve g fonksiyonları, bir $A \subset X$ alt kümesinden Y uniform uzayına giden iki fonksiyon olmak üzere, her $x \in A$ ve bir $R \in \Upsilon$ için $\left(f(x), g(x)\right) \in R$ oluyorsa, bu durumu kısaca $\left(f, g\right) \in \left(A / R\right)$ şeklinde göstereceğiz. Böylece $A \subset X$ olduğundan, X den Y uniform uzayına giden tüm fonksiyonların oluşturduğu sınıf üzerinde $\left(A / R\right)$ ifadesi bir bağıntı teşkil eder.

Tanım 2.2.9.1: C içinde yönlendirilmiş bir küme f_v olsun. f_v nin $A \subset X$ alt kümesi üzerinde bir $f \in C$ ye uniform yakınsaması için gerek şart her $R \in \Upsilon$ için öyle bir v' indeksi vardır ki, $v > v'$ oldukça $\left(f, f_v\right) \in \left(A / R\right)$ olmasıdır.

Tanım 2.2.9.2: C içinde yönlendirilmiş bir küme f_v olsun. f_v nin kompakt kümeler üzerinde bir $f \in C$ ye uniform yakınsaması için gerek şart f_v nin her bir K kompakt kümesi üzerinde f e uniform yakınsamasıdır.

Teorem 2.2.9.1: Bir topolojik uzaydan bir uniform uzaya tanımlı sürekli fonksiyonların $k-$topolojileştirilmiş bir sınıfı üzerindeki f_v yönlendirilmiş kümesinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart f_v nin kompakt kümeler üzerinde uniform yakınsak olmasıdır.

İspat: Bu ispat, Teorem 2.2.5.1 ve onun ispatının bir genelleştirmesidir. Böylece burada tekrar yinelemeyeceğiz.

2.2.10 Regüler Yakınsaklığın Yapısı

Bundan sonraki iki bölümde X den Y uzayına tanımlı bütün fonksiyonların kümesini F ile bu fonksiyonlardan sürekli olanlarının oluşturduğu sınıfı da C ile göstereceğiz. Hatta Y uzayının da Υ gibi bir uniform yapıya sahip olduğunu varsayacağız.

F üzerinde (K/R) bağıntısı, ki burada $K, L, M, ...$ kümeleri X in kompakt alt kümeleri olmak üzere, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) Her K ve her $R \in \Upsilon$ iken $(f, g) \in (K/R)$ olması için gerek ve yeter koşul $f = g$ olmasıdır.

ii) Eğer $S \in \Upsilon$, $R \subset S$ ve $L \cup M \subset K$ ise $(K/R) \subset (L/S) \cap (M/S)$ dir.

iii) $(K/R)^2 \subset (K/RR)$ dir.

Bu özellikler gösterir ki, (K/R) formundaki bağıntılar F için bir $\mathfrak{A}$ uniform yapısını teşkil ederler ve böylece $C \subset F$ olduğundan, aynı yapı C kümesi için de geçerlidir.

Tanım 2.2.10.1: Tanımlanan bu $\mathfrak{A}$ uniform yapı, regüler yakınsaklığın yapısı olarak adlandırılır.

Uyarı 2.2.10.1: Buradaki “regüler yakınsaklık” kavramı yerine “kompakt kümeler üzerinde uniform yakınsaklık” kavramını da kullanmamızda hiçbir sakınca yoktur.

Bu tip yakınsaklık kavramı özellikle analitik fonksiyonlar sınıfındaki yaklaşım için kullanılır.[22]

Tanım 2.2.10.2: Bu $\mathfrak{A}$ uniform yapısı tarafından üretilen topoloji de regüler yakınsaklığın topolojisi olarak adlandırılır.

Bu terimlerle birlikte Teorem 2.2.9.1 i tekrar ifade edersek:

Sonuç 2.2.10.1: Y uzayı uniform yapıya sahipken C için $k-$topoloji, regüler yakınsaklığın topolojisidir.

$\mathfrak{A}$ topolojisiyle ilgili olarak da şunu ifade edebiliriz:

Sonuç 2.2.10.2: Regüler yakınsaklığın topolojisi, sadece X ve Y uzaylarının topolojilerine bağlıdır. Bu topolojinin Y nin uniform yapısıyla hiçbir ilgisi yoktur.

Teorem 2.2.3 de C nin $k-$topoloji ile birlikte tamamen regüler olduğunu o an için bilgilerimiz yeterli olmadığından ispatlayamamıştık. Şimdi bu ispatı verelim:

Sonuç 2.2.10.3: Eğer Y uzayı tamamen regüler ise C de $k-$topolojisiyle birlikte tamamen regülerdir.

İspat: Y uzayı tamamen regüler olduğundan, bu özellik Y üzerinde bir uniform yapı teşkil etmemizi sağlar.[22] Böylece, Sonuç 2.2.10.1 den C de uniform yapıya sahip olur. Buradan da C uzayı tamamen regülerdir.[22]

2.2.11 C ve F in Tamlığı

Lemma 2.2.11.1: Eğer Y uzayı kendi topolojisine göre tamsa, X den Y ye tanımlı tüm fonksiyonların oluşturduğu F sınıfı da $\mathfrak{A}$ topolojisine göre tamdır.

İspat: Υ ailesi Y değer uzayında bir uniform yapı olsun. $f_v \in F$ de fonksiyonların bir Cauchy kümesi olarak verilsin. $x \in X$ olmak üzere, $f_v(x) = y_v$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi y_v, Y de bir Cauchy kümesidir. Gerçekten verilen bir $R \in \Upsilon$ için öyle bir v' vardır ki, $v > v'$ oldukça $\left(f_v, f_{v'}\right) \in \left(x / R\right)$ olur. Bunun anlamı ise, $\left(y_v, y_{v'}\right) \in R$ demektir. Buradan da y_v nin Y de bir Cauchy kümesi olduğu sonucuna varırız. Böylece y_v, y gibi bir limit noktasına sahiptir. O halde $y = f(x)$ olmalıdır. Bununla birlikte $\mathfrak{A}$ yapısı içinde bir f_v Cauchy kümesinin f e yakınsadığını kolaylıkla söyleyebiliriz. Sonuç olarak, F ailesi $\mathfrak{A}$ topolojisine göre tamdır.

Lemma 2.2.11.2: Fonksiyonların yönlendirilmiş bir kümesinin limit fonksiyonu, kompakt kümeler üzerinde uniform yakınsaktır. Hatta X uzayı aşağıdaki (*) şartını sağlarsa limit fonksiyonu süreklidir.

(*) Eğer $A \subset X$ in bir limit noktası x ise bu durumda A nın x i içeren ve kapanışı kompakt olan bir alt kümesi vardır.

Uyarı 2.2.11.1: Şayet X uzayı lokal kompakt veya birinci sayılabilir bir uzaysa (*) şartı kendiliğinden sağlanmış olur.

İspat: Biz F in $\mathfrak{A}$ topolojisine göre sürekli olmayan fonksiyonların oluşturduğu kümenin, açık bir küme olduğunu göstereceğiz.

X den Y ye tanımlı ve sürekli olmayan bir fonksiyon f olsun. Bu durumda, öyle bir $x \in X$ noktası ve bir $R \in \Upsilon$ bağıntısı vardır ki, $y = f(x)$ olmak üzere x noktası $f^{-1}\left(R(y)^c\right)$ nin bir limit noktasıdır.

Şimdi $S^3 \subset R$ olacak biçimde bir $S \in \Upsilon$ seçelim. Hipotezden, $f^{-1}\left(R(y)^c\right)$ nin, x i içeren ve kapanışı K kompakt kümesi olacak biçimde bir alt kümesi vardır. Buradan $\left(K / S\right) \in \mathfrak{A}$ elde edilir.

Bizim eğer $\left(g, f\right) \in \left(K / S\right)$ ise g nin de sürekli olmadığını göstermemiz gerekir. Kabul edelim ki g fonksiyonu sürekli olsun. O halde x in bir V komşuluğu için $z \in V$ ise $\left(g(z), g(x)\right) \in S$ dir. $z \in K \cap V$ için özellikle $\left(y, g(x)\right) \in S$ iken $\left(f(z), g(z)\right) \in S$ olur. Böylece $\left(y, f(z)\right) \in S^3 \subset R$ veya diğer bir deyişle $f(z) \in R(y)$ elde edilir. Fakat bu durum, $z \in K$ olduğundan, $f(K) \subset R(y)^c$ olmasıyla veya $K \subset f^{-1}(R(y)^c)$ ile çelişir.

O halde aksi varsayımımız yanlış olup, g fonksiyonu sürekli değildir. Buradan da sürekli olmayan fonksiyonların, açık kümelerin bir ailesini teşkil ettiğini söyleyebiliriz. Dolayısıyla $\mathfrak{A}$ topolojisine göre sürekli fonksiyonların oluşturduğu aile de kapalı bir kümedir.

Teorem 2.2.11.1: X lokal kompakt ve Y de tam ise X den Y ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların sınıfı olan C ailesi de regüler yakınsaklığın $\mathfrak{A}$ yapısına göre tam dır.

İspat: X lokal kompakt olduğundan, Lemma 2.2.11.2 deki şart sağlanır. Böylece Lemma 2.2.11.1 ve Lemma 2.2.11.2 den ispat elde edilir.

2.2.12 Eşsüreklilik; C nin Kompakt Alt Kümeleri

Tanım 2.2.12.1: X ve Y uzayları, sırasıyla fl ve Υ uniform yapılarına sahip olsunlar. E ailesi de X uniform uzayından Y uniform uzayına tanımlı sürekli fonksiyonların herhangi bir sınıfı olmak üzere, her $R \in \Upsilon$ ve her $f \in E$ için, $(x, y) \in S$ iken $(f(x), f(y)) \in R$ olacak şekilde bir $S \in$ fl bulunabiliyorsa, bu durumda E ailesine eşsüreklidir, denir.(23)

Uyarı 2.2.12.1: Bundan sonra, tanımda verilen R, S ve E arasındaki bağıntıyı sembolik olarak, $S\ E \subset R$ şeklinde göstereceğiz.

Tanım 2.2.12.2: X in her kompakt K alt kümesi, her $R \in \Upsilon$ ve her $f \in E$ için, $x, y \in K$ olmak üzere, $(x, y) \in S$ iken $(f(x), f(y)) \in R$ olacak biçimde, K nın uniform yapısı içinde öyle bir S bağıntısı bulunabiliyorsa, bu durumda E ailesine eşsürekli(k) denir.

Uyarı 2.2.12.2: Her kompakt küme bir tek uniform yapıya sahiptir.(21)

Sonuç 2.2.12.1: Bir E ailesi eşsürekli ise aynı zamanda eşsürekli(k) dır. Hatta bu gereklilikten dolayı E ye ait bütün fonksiyonlar uniform süreklidir.

Teorem 2.2.12.1: $E \subset C$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) E kompakt ise eşsürekli(k) dır.

ii) E eşsürekli(k) ve Y kompakt ise $E^{*} \subset C$ da kompakt alt kümedir. Burada E^{*} kümesi, E ye bütün noktasal limit fonksiyonlarının ilave edilmesiyle oluşturulan bir kümedir.

İspat: i) K, X in kompakt bir alt kümesi ve R de Y nin Υ uniform yapısının bir elemanı olsun. K kompakt kümesi üzerinde her $f \in E$ fonksiyonu uniform sürekli olduğundan **[20]**, $T \in \Upsilon$ ve $T^3 \subset R$ olmak üzere, $x, y \in K$ için, $(x, y) \in S_f$ iken $(f(x), f(y)) \in T$ olacak biçimde, K nın fl uniform yapısına ait bir S_f bağıntısı var olacaktır.

E kompakt olduğundan, $\mathfrak{A}$ uniform yakınsaklığın yapısının bir elemanı $\left(K/T\right)$ olmak üzere $\left(K/T\right)(f)$ biçimindeki açık kümelerin sonlu tanesiyle E yi örtebiliriz. O halde $E \subset \left(K/T\right)(f_1) \cup ... \cup \left(K/T\right)(f_n)$ yazabiliriz.

Şimdi $S \subset S_{f_1} \cap ... \cap S_{f_n}$ olduğunu kabul edelim. $f \in E$ ve bir i için de $\left(f, f_i\right) \in \left(K/T\right)$ olarak alalım. Bunun anlamı; her $x, y \in K$ için $\left(f(x), f_i(x)\right) \in T$ ve $\left(f(y), f_i(y)\right) \in T$ demektir. Eğer $\left(x, y\right) \in S$ ise $\left(f_i(x), f_i(y)\right) \in T$ ve hatta $\left(f(x), f(y)\right) \in T^3 \subset R$ olur. Böylece $S\ E \subset R$ elde edilir. İspat tamamlanır.

ii) İlk önce $E^* \subset C$ alalım ve her bir $x \in X$ ve $f_v \in C$ yönlendirilmiş kümesi için $\lim f_v(x)$ mevcut olsun. Şayet $\lim f_v(x) = f(x)$ dersek tanımdan dolayı $f \in E^*$ olur. Şimdi $T \in \Upsilon$ verilsin. Buradan $S^4 \subset T$ olacak biçimde bir $S \in \Upsilon$ seçelim. Öyle bir v' ve bir $R \in$ fl bulabiliriz ki, $v > v'$ iken $\left(f_v(x), f(x)\right) \in S$ ve $\left(x, y\right) \in R$ iken de $\left(f_v(x), f_v(y)\right) \in S$ olur. Buradan $\lim f_v(y) = f(y)$ olduğundan $f(y) \in S\left(f(x)\right)$ elde edilir. Böylece E deki her bir noktasal limit fonksiyonu süreklidir.

E^* kümesi kendi içindeki bütün fonksiyonların noktasal limit fonksiyonlarını içerdiğinden ve noktasal limit fonksiyonları da sürekli olduğundan $E^* \subset Y^X$ kapalı bir alt küme olup, Y^X kartezyen çarpımı kompakt ve "Kompakt bir kümenin kapalı her alt kümesi de kompakttır." teoreminden, E^* kümesi kompakttır.

Uyarı 2.2.12.3: Fonksiyonların eşsürekli bir ailesinin kompaktlık şartını sağladığını gösteren özel bir örnek için Ascoli Teoremini (Franklin'in Advanced Calculus kitabı, s.412) ve Birkhoff-Kellog sabit nokta teoremini(24) öneririz.

Sonuç 2.2.12.2: Y kompakt bir uzay olmak üzere, C nin kompakt alt kümeleri, C içindeki fonksiyonların kapalı-eşsürekli (k) kümeleridir.

2.2.13 Y Bir Grup Olduğunda C Uzayının Özellikleri

Y topolojik uzayının elemanları, bu topolojik yapı içinde sürekli işlemler altında bir grup yapısı teşkil ediyorsa, bu durumda Y uzayına bir topolojik grup adı verilir. Bütün grup işlemlerinin sürekli olması için gerek ve yeter şart $x, y \in Y$ olmak üzere eşzamanlı olarak $x - y$ nin sürekli olmasıdır.[(4)]

Uyarı 2.2.13.1: Burada $x - y$ nin anlamı, $Y \times Y \to Y$ giden bir fonksiyon olarak algılanmalıdır. Yine burada Y yi belki değişme özelliğini sağlamamasına rağmen toplamsal notasyonla ele alacağız.

Bu bölüm boyunca Y nin sürekli endomorfizmlerinin (Y den Y ye homomorfizmler) cümlesini E ile, E nin sahip olduğu topolojiyi de admissible olarak kabul edeceğiz. Admissible topoloji olarak almamızdaki kasıt ise skalar çarpımın sürekliliğidir.

Bir X uzayından Y topolojik grubuna giden fonksiyonların cümlesini C^* ile gösterirsek, C^* üzerindeki işlemler:

1) $f, g, h \in C^*$, $h = f + g$, yani her $x \in X$ için $h(x) = f(x) + g(x)$

2) $f, g \in C^*$, $\lambda \in E$, $g = \lambda f$, yani her $x \in X$ için $g(x) = (\lambda f)(x)$ dir.

Teorem 2.2.13.1: C^* bir topolojik grup olsun. Y nin her bir endomorfizmi C^* ın içindedir ve eğer Y nin endomorfizmlerinin admissible topolojileştirilmiş bir sınıfı E ise aynı zamanda E, C^* ın endomorfizmlerinin de admissible topolojileştirilmiş bir sınıfıdır.

İspat: Grup kuramına dayandığı için bu ispatı vermeyeceğiz.

Şimdi, $f - g \in C^*$ fonksiyonunu içeren (K, W) alt baz elemanını ele alalım. Buradan her $x \in K$ için $f(x) - g(x) \in W$ olup, böylece $W_1 - W_2 \subset W$ olacak biçimde

Y nin $W_1\left(f(x)\right)$ ve $W_2\left(g(x)\right)$ açık alt kümelerini elde ederiz. K regüler, f ve g fonksiyonları da sürekli olduklarından $f\left(\overline{V}\cap K\right)\subset W_1$ ve $g\left(\overline{V}\cap K\right)\subset W_2$ olacak şekilde x in bir $V(x)$ komşuluğunu bulabiliriz. K kompakt olduğundan $V(x)$ lerin sonlu tanesiyle K yı örtebiliriz. Bundan dolayı $x_1,...,x_n\in K$ olmak üzere $K\subset V(x_1)\cup...\cup V(x_n)$ yazabiliriz. O halde $i=1,...,n$ için $K_i=K\cap\overline{V(x_i)}$ seçersek, bu şekildeki bütün K_i kümeleri kompakt olur.

Eğer f in komşuluğunu $U(f)=\left(K_1,...,K_n;V\left(f(x_1)\right),...,V\left(f(x_n)\right)\right)$ şeklinde tanımlarsak, g nin komşuluğuna da benzer şekilde $U(g)$ dersek, bu durumda $U(f)-U(g)\subset\left(K,W\right)$ olur.

Kabul edelim ki λ, Y nin sürekli bir endomorfizmi, $f\in C^*$ ve $\left(K,W\right)$ de $\lambda f\in Y$ nin bir komşuluğu olsun. K kompakt, f sürekli ve böylece $f(K)$ da kompakt olduğundan λ sürekli endomorfizmi $f(K)$ kompakt kümesi üzerinde uniform süreklidir. Buradan λ nın bir $N(\lambda)$ komşuluğu ve $f(K)$ nın bir W_0 açık komşuluğu için $N(\lambda)W_0\subset W$ dır. Şayet $U(f)=\left(K,W_0\right)$ dersek, buradan da $N(\lambda)U(f)\subset\left(K,W\right)$ elde edilir. Sonuç olarak skalar çarpım süreklidir.

Biz bu durumu lineer uzaylara uygulayabiliriz:

Tanım 2.2.13.1: L topolojik lineer uzayı değişmeli bir topolojik grup olsun. Ayrıca L de reel sayılarla birlikte çarpma işlemi tanımlı olsun. Eğer λ ve μ iki reel sayı ise $f\in L$ olmak üzere,

1) λf sürekliliği, eşzamanlı olarak λ ve f in sürekliliğine bağlıdır.

2) $\left(\lambda+\mu\right)f=\lambda f+\mu f$

3) $(\mu\lambda)f = \mu(\lambda f)$

4) $1f = f$, burada 1 reel birimdir.

Sonuç 2.2.13.1: Değer uzayı L topolojik lineer uzayı olan sürekli fonksiyonların $k-$topolojiyle donatılmış C sınıfı da bir topolojik lineer uzaydır.

2.2.14 Fonksiyonlar İçin Bir Norm ve Tam Lineer Uzaylar

Teorem 2.2.14.1: Kompakt bir X uzayından bir L lineer uzayına tanımlı sürekli fonksiyonların $k-$topolojiyle donatılmış C uzayı normlu bir lineer uzaydır. Eğer X uzayı kompakt olmayan bir $S-$uzayı ise, bu durumda C uzayı bir norm a sahip değildir.

İspat: Teoremin ilk kısmı için, $x \in X$ olmak üzere C uzayı üzerindeki normu $\|f\| = \max \|f(x)\|$ şeklinde tanımlayalım. Teorem 2.2.6.1 den dolayı bu norm $k-$topolojiye denktir ve böylece C nin bir normlu lineer uzay olduğu açıktır.

Şimdi C nin bir norm a sahip olduğunu kabul edelim. Buradan L uzayında $0(x) = 0$ olmak üzere C içindeki 0 fonksiyonunun bir komşuluğu sınırlıdır. Çünkü bir U komşuluğunun sınırlı olması için $\lambda_n \to 0$ ve f_n de U içinde bir dizi iken $\|\lambda_n f_n\| \to 0$ olmalıdır.[25] Dolayısıyla sözünü ettiğimiz bu koşul 0 ın komşuluğu için sağlanır. O halde sınırlı bir $k-$komşuluğu olarak $(K_1,...,K_n;W_1,...,W_n)$ alırsak, bunun sonucunda $K = K_1 \cup ... \cup K_n$ ve $W = W_1 \cap ... \cap W_n$ olmak üzere 0 fonksiyonu (K,W) sınırlı komşuluğuna ait olur.

Eğer $X \neq K$ ise Lemma 2.2.7.1 den K kompakt kümesi üzerinde yok olan ve bazı yerlerde de 1 değerini alan sürekli ve reel değerli bir r fonksiyonunu bulabiliriz. Hatta $y = b \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in W \subset L$ elemanı seçebiliriz.

Şimdi L de her $x \in X$ ve her bir n tam sayısı için $f_n(x) = nr(x)y$ fonksiyonunu tanımlayalım. f_n ler sürekli ve hepsi de (K,W) nin birer elemanı olduklarından, onlar K üzerinde yok olurlar. Buradan da $(1/n)f_n$ dizisi $k-$topoloji içinde 0 noktasına yakınsadığını ifade edebiliriz. Ancak bu durumu kesin bir şekilde söyleyemeyiz. Dolayısıyla en azından bir $x \in X$ için $\|(1/n)f_n(x)\| = b$ olur. Böylece $X = K$ olduğu sonucuna varırız ki, K kompakt olduğundan X de kompakttır.

Sonuç 2.2.14.1: L tam normlu lineer bir uzay (Banach uzayı) ve X kompakt ise C de tam normlu bir lineer uzaydır. Hatta bu norm, $x \in X$ olmak üzere $\|f\| = \max\|f(x)\|$ dir.

2.2.15 $\mathbb{R}$ için $k-$topoloji ve Tek Reel Değişkenli Sürekli Fonksiyonlar

Bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu sınıf çok ilginç özelliklere sahiptir. Çünkü bu fonksiyonların tanım ve değer uzayları sadece benzer topolojik uzaylara sahip olmadıkları gibi aynı zamanda cebirsel işlemler altında da kapalıdırlar. Buna $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini örnek verebiliriz. Bu özelliklerden en çok benzer olanları:

1) Fonksiyonların bir reel sabitle çarpımı,

2) Fonksiyonların toplamı,

3) Fonksiyonların çarpımı,

4) Bir fonksiyonu diğerinde yerine koyma (fonksiyonların bileşkesi) dir.

Uyarı 2.2.15.1: $\mathbb{R}$ kümesi; 1) ve 2) altında bir lineer uzay, 2) ve 3) altında birimle birlikte bir halka, 2), 3) ve 4) altında da üç-işlemli bir cebir olur.[26]

Burada iki özellikten daha bahsedebiliriz:

5) $h = f \cup g$ dersek, $h(x)$ değeri daima $f(x)$ ve $g(x)$ den daha büyüktür,

6) $h = f \cap g$ dersek, $h(x)$ değeri daima $f(x)$ ve $g(x)$ den daha küçüktür.

Uyarı 2.2.15.2: Verdiğimiz ilk dört özellik ve mutlak değer fonksiyonunu göz önüne alarak 5) ve 6) durumlarını $f \cup g = (1/2)(f+g)+(1/2)|f-g|$ ve $f \cap g = (1/2)(f+g)-(1/2)|f-g|$ şeklinde ifade edebiliriz.

Teorem 2.2.15.1: $\mathbb{R}$ kümesi üzerindeki $k-$topoloji, bütün 1),…,6) işlemlerini sürekli yapar. Hatta sabit fonksiyonların bir alt grubunu reel sayılara topolojik izomorf (homeomorf) kılar ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) \in (c,d)$ açık aralığı için $g \in U$ ve $y \in (a,b)$ iken $g(y) \in (c,d)$ olacak şekilde x in bir (a,b) komşuluğu ve f in bir U $k-$komşuluğu vardır.

İspat: 1), 2) ve 3) ün sürekliliği Teorem 2.2.13.1 in ispatından elde edilir. Teorem 2.2.13.1 in ispatına değinmediğimiz için bunların ispatını da vermeyeceğiz. 5) ve 6) yı da yukarıda verdiğimiz uyarıdan dolayı 1), 2) ve 3) e indirgeyebiliriz. Böylece 5) ve 6) nın sürekliliği de buradan elde edilir. Sabit fonksiyonların kümesinin de reel sayılara homeomorf olduğu açıktır. En son iddiamız ise admissible olma tanımından ortaya çıkar.

Şimdi biz, ispatı farklı olması bakımından 4) ün sürekliliğini inceleyelim. Sonuç 2.2.6.1 den bir fonksiyon dizisinin limitini inceleyeceğiz. O halde $\mathbb{R}$ de $f_n \to f$, $g_n \to g$ ve bir (x_n) reel sayı dizisinin de x e yakınsadığını kabul edelim. Böylece Teorem 2.2.4.1 ii) den $f_n(x_n) \to f(x)$ ve buradan da

$g_n\left(f_n(x_n)\right) \to g\left(f(x)\right)$ elde edilir. Yine aynı teoremden dolayı bu durumun anlamı, $f_n(g_n) \to f(g)$ demektir ve ispat tamamlanır.

$k-$topolojinin ilginç ve karakteristik bir özelliği de:

Sonuç 2.2.15.1: $\mathbb{R}$ üzerindeki $k-$topoloji, en güçlü admissible topolojidir. Bu topolojiye göre 1),...,6) özellikleri süreklidir.

$\mathbb{R}$ üzerindeki $k-$topolojinin nasıl bir davranış gösterdiğini anlamak için $\mathbb{R}$ üzerinde $k-$komşulukların anlamlarını geometrik olarak ele almamız gerekir. O halde $x-$ekseni üzerinde kapalı ve sınırlı bir K aralığını, $y-$ekseni üzerinde de başlangıç ve bitim noktaları, sırasıyla y_1 ve y_2 olan W açık aralığını alalım. Bu durumda şayet her $x \in K$ için $y_1 < f(x) < y_2$ ise f fonksiyonu bir $k-$komşuluk olan $\left(K, W\right)$ cümlesine aittir. Daha fazla olarak f in bir N komşuluklar tabanı için şu yorumu yapabiliriz:

f in grafiğinin altında ve üstünde sonlu sayıda sınırlı-yatay doğru parçasını alarak bu doğru parçalarının arasında kalan bölgeyi ele alalım. Her bir parça üzerinde grafiği f ile aynı tarafta kalacak şekildeki fonksiyonların oluşturduğu sınıf, f in komşuluklarının genel bir formu olup, aynı zamanda bu sınıf N nin bir elemanıdır. Genel olarak bu şekildeki fonksiyonların grafiklerinin tamamı, iki düşey doğru arasında kalıp, hiçbir zaman düzlemdeki kapalı bir aralık içinde yer almaz. Sonuç olarak bu tip fonksiyonlar $k-$topolojiye göre açık bir küme meydana getirir.

$\mathbb{R}$ deki regüler yakınsaklığın (Teorem 2.2.5.1) metriği, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$-n \le x \le n$ için $m_n = \min\left\{2^{-n}, \sup\left|f(x)\right|\right\}$ olmak üzere bir f fonksiyonunun normunu $\|f\| = m_1 + m_2 + m_3 + ...$ şeklinde oluşturabiliriz. Buradan da istenilen metriği $h(f, g) = \|f - g\|$ şeklinde tanımlayabiliriz.

$\mathbb{R}$ deki fonksiyonlar için bir "uzunluk" kavramı tanımlamamızın hiçbir yolu olmadığını biliyoruz. Böylece $\mathbb{R}$ kompakt olmadığından Teorem 2.2.14.1 vasıtasıyla ancak $\mathbb{R}$ yi bir normlu lineer uzay yapabiliriz. Bununla birlikte bu $\| \;\|$ "uzunluk" norm özelliklerinden farklı olarak bazı özelliklere de sahiptir:

1) $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$

2) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \forall x$ için $f(x) = 0$

3) $\lambda_i \to \lambda$ ve $f_i \to f$ ise $\|\lambda_i f_i\| \to \|\lambda f\|$

4) $\mathbb{R}$ de $\|f_i\| \to 0$ ve $x_i \to x$ ise $f_i(x_i) \to 0$

5) $0 \le |\lambda| \le 1$ ise $|\lambda|.\|f\| \le \|\lambda f\| \le \|f\|$

6) $|\lambda| > 1$ ise $\|f\| \le \|\lambda f\| \le |\lambda|.\|f\|$

7) $\|f_m - f_n\| \to 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ sürekli bir fonksiyondur.

Bu özelliklerin ispatı oldukça kolaydır.

1) ve 2), f den 0 fonksiyonuna olan uzaklığı simgeleyen $(f, 0)$ ın eşiti olan $\|f\|$ in bir sonucudur. Teorem 2.2.13.1 den, λf in sürekliliği λ ve f in sürekliliğine bağlı olduğundan 3) de doğrudur. 4) ise $k-$topolojinin admissible olmasının bir sonucudur.

Şimdi biz 5) özelliğini ispatlayalım: M_n ve L_n in her ikisi için $-n \le x \le n$ olmak üzere $M_n = \min\left\{2^{-n}, \sup\left|f(x)\right|\right\}$ ve $L_n = \min\left\{2^{-n}, \sup\left|\lambda f(x)\right|\right\}$ olsun. Eğer

$|\lambda| < 1$ ise kuşkusuz $L_n \leq M_n$ dir. Burada eşitlik durumunu, $L_n = M_n = 2^{-n}$ olmaları durumunda söyleyebiliriz. Diğer taraftan $|\lambda| M_n \leq L_n$ dir ki, burada da $M_n < 2^{-n}$ olması durumunda eşitlik anlamlıdır. O halde n üzerinden özetlersek 5) i elde ederiz.

$|1/\mu| < 1$ olmak üzere μf fonksiyonuna 5) deki eşitsizliği uygularsak; $|1/\mu| . \|\mu f\| \leq \|f\|$ ve $\|f\| \leq \|\mu f\|$ bulunur. İlk eşitsizliği $|\mu|$ ile çarparsak, $\|\mu f\| \leq |\mu| . \|f\|$ sonucu ortaya çıkar. Bu ise 6) nın ispatlandığını gösterir.

Sonuç 2.2.14.2 den dolayı C tamdır. C nin tam olmasının bir sonucu da 7) özelliğinin ispatıdır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Kompakt-Açık Topoloji İçin Karşılaştırmalı Bir İnceleme

$\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı sürekli fonksiyonların sınıfını C ile gösterelim. C üzerinde nokta-açık topoloji (ρ), kompakt-açık topoloji (κ) ve metrik topolojilerini (μ) ele alalım.

Eğer $f, g \in C$ ise $|f(x) - g(x)| \geq 1$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. C üzerinde tanımlı bulunan metriği de; $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\mu(f,g) = \begin{cases} 1 & , \ |f(x) - g(x)| \geq 1 \\ \sup\{|f(x) - g(x)|\} & , \ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

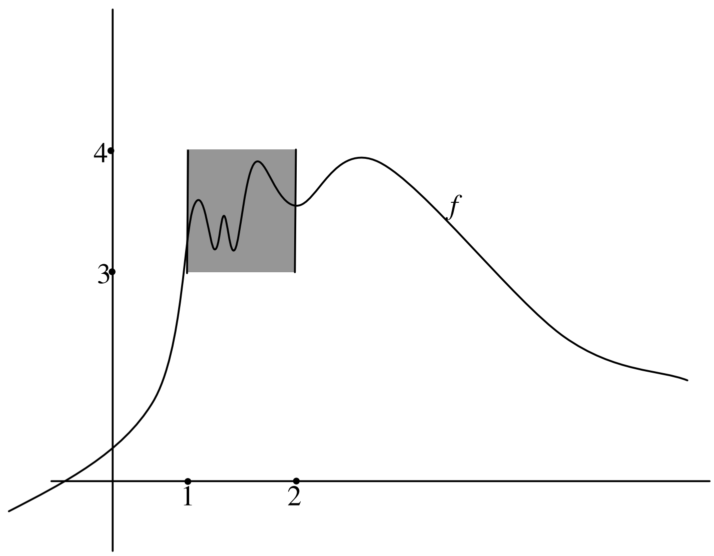
μ bağıntısı iyi tanımlıdır. Bunun ispat için, her $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C$ olmak üzere, $(f_1, g_1) = (f_2, g_2)$ iken $\mu(f_1, g_1) = \mu(f_2, g_2)$ eşitliğini göstermek gerekir. Gerçekten $f_1 = f_2$ ve $g_1 = g_2$ olduğundan $|f_1(x) - g_1(x)| \geq 1$ ise $|f_2(x) - g_2(x)| \geq 1$ olur. Böylece $\mu(f_1, g_1) = \mu(f_2, g_2)$ dir. Diğer durumlarda ise,

$$\begin{aligned} \mu(f_1, g_1) &= \sup\{|f_1(x) - g_1(x)| : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \sup\{|f_2(x) - g_2(x)| : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \mu(f_2, g_2) \end{aligned}$$

olur ki, bu da μ bağıntısının iyi tanımlı olduğunu gösterir. Bundan sonra, μ fonksiyonunun C üzerinde bir metrik olduğunu göstermek kolaydır.

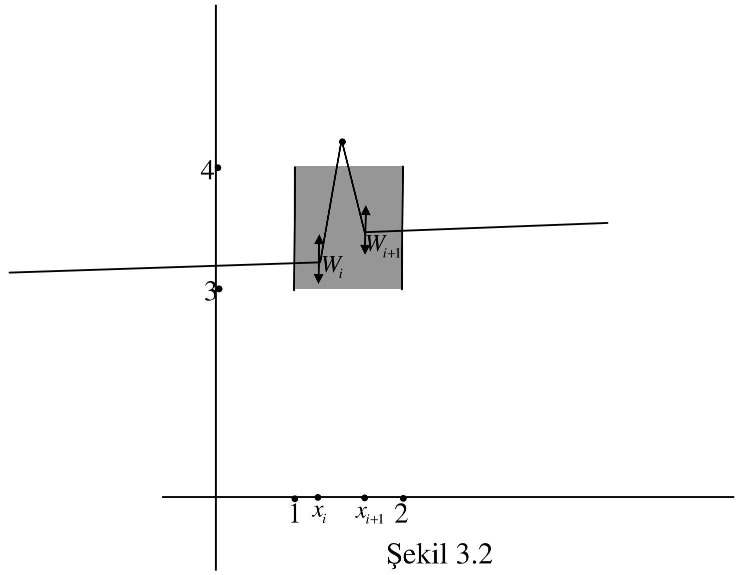
Şimdi biz ρ, κ ve μ topolojileri arasındaki bağıntıyı inceleyelim:

$\rho \subset \kappa$ olduğu ρ ve κ nın tanımlarından açık olsa da yine de bu ispatı vereceğiz. O halde $\rho \subset \kappa \subset \mu$ olduğunu gösterelim. İlk önce hiçbir zaman $\rho \supset \kappa$ olamaz. Aksini varsayalım, yani $\rho \supset \kappa$ olsun. Ғ kümesini de Ғ$=\{f \in C : f([1,2]) \subset (3,4)\}$ olarak tanımlayalım. Buradan $f \in$ Ғ olması için gerek ve yeter şart f in grafiğinin, $[1,2]$ aralığındaki bir parçasının $y=3$ ve $y=4$ arasındaki açık bir şerit içerisinde yer almasıdır.



Şekil 3.1

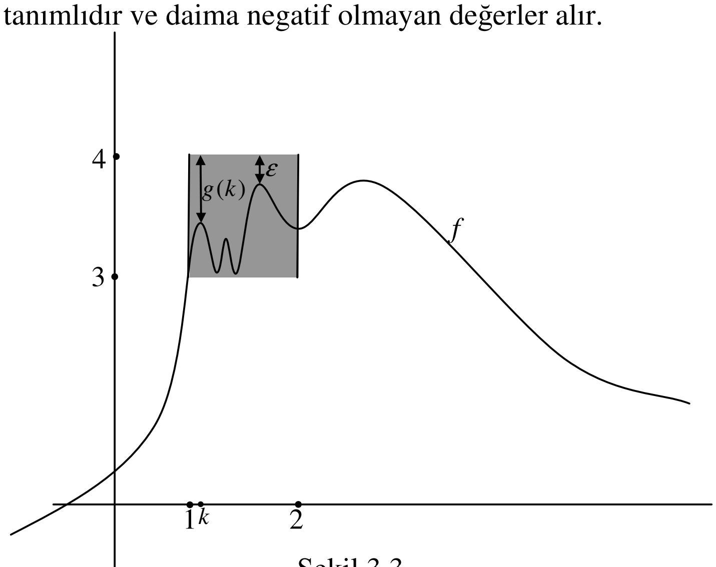
Fakat $P = \bigcap \{(x_i, W_i) : i = 1,2,...,n\}$ cümlesi (C,ρ) uzayı için bir baz elemanı değildir. Örneğin; $[1,2]$ kompakt aralığındaki $1 \le x_i < x_{i+1} \le 2$ olacak şekilde x_i, x_{i+1} ardışık noktaları için x_i ve x_{i+1} noktaları arasında 4 den daha büyük değer alacak biçimde bir $f \in C$ fonksiyonu inşa edilebilir. Bu durumu görsel olarak Şekil 3.2 deki gibi ifade edebiliriz.



Şekil 3.2

Böylece $f \notin F$ olduğunu görürüz. Bu ise ρ nun her bir P taban elemanı için $P \not\subset F$ demektir ki, buradan da $\rho \supset \kappa$ olamaz. O halde $\rho \subset \kappa$ olmalıdır.

İkinci olarak ise $\kappa \subset \mu$ olduğunu gösterelim. (K,W) cümlesi κ topolojisi için bir alt taban elemanı olsun. $f \in (K,W)$ ve sürekli bir $g: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu alalım. Her $k \in K$ için $g(k)$ kuralını da $f(k)$ nın W açık kümesinin ($\mathbb{R}$ de) tümleyenine ($W^c -$kapalı) olan uzaklığı olarak tanımlayalım. Bu durumda g bağıntısı iyi tanımlıdır ve daima negatif olmayan değerler alır.



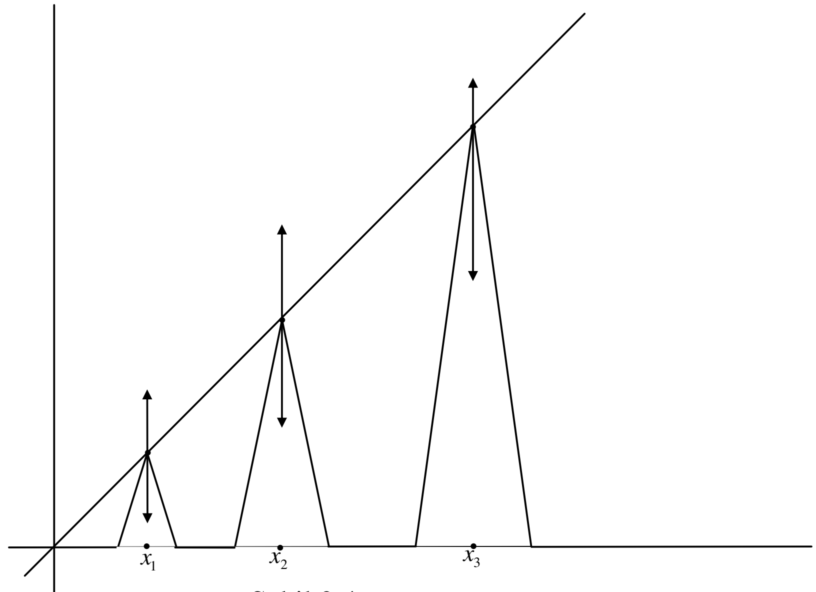
Şekil 3.3

K kompakt olduğundan g fonksiyonu minimal değerini ε da ($\varepsilon > 0$) alır. Çünkü $g(k) = 0$ ise W açık olduğundan $f(k) \notin W$ olur. Böylece $\varepsilon > 0$ sayısı, $f(K)$ nın W^c kümesine olan uzaklığı olarak adlandırılır. Ancak her $k \in K$ için $f(k)$ nın W^c e olan uzaklığı, en küçük ε kadardır. f fonksiyonu K dan W ya tanımlı olduğu için, bu şekilde tanımlanan bütün fonksiyonlar değerlerini ε komşuluğunda alırlar. Dolayısıyla $B(f, \varepsilon)$ açık diski (K, W) içinde kalır. Bu ise bize (K, W) nin bir $\mu-$komşuluk olduğunu gösterir. Böylece $(K, W) \in \mu$ olur. Sonuç olarak $\kappa \subset \mu$ elde edilir. $\mu \subset \kappa$ olamayacağı da benzer şekilde gösterilir.

Fonksiyon uzayları üzerinde tanımlanan topolojiler az veya çok "natural" bir yolla tanımlanır. Her biri, kendilerine göre özel bir durum ifade ettikleri zaman, o durum için diğerlerinden daha yararlı özelliklere sahip olabilirler. Buna rağmen kompakt-açık topoloji nedensiz ve karmaşık gibi görünse de her zaman için diğerlerinden daha faydalıdır. Örneğin; bir $r \in \mathbb{R}$ sabitinin bir fonksiyonla çarpımı olan $M_r(f) = rf$ fonksiyonu sürekli olmak üzere, başka bir $s \in \mathbb{R}$ için s sayısı r ye yaklaştıkça M_r fonksiyonuna yaklaşan bir M_s fonksiyonu daha tanımlayabiliriz. Ancak μ metrik topolojisine göre $r \neq s$ iken $B(M_s, 1)$ açık yuvarı içinde M_r fonksiyonu bulunmaz. Diğer bir deyişle M_r den M_s ye olan uzaklık, daima 1 den büyüktür. Dolayısıyla $r \neq s$ olduğunda $|rt - st| \geq 1$ veya $|t| \geq 1/|r-s|$ olacak şekilde daima bir $t \in \mathbb{R}$ bulabiliriz. Burada en azından $t = 1/(r-s)$ seçersek, s sayısı r ye yaklaştıkça t sayısı büyüyeceği için, μ topolojisine göre M_r nin M_s ye olan yakınlaşması da haddinden fazla büyüyecektir. Bununla birlikte, $k-$topolojinin M_s fonksiyonunu içerecek biçimde verilen bir $\digamma$ taban elemanı için, $|r-s| < \delta$ oldukça

$M_r \in \mathcal{F}$ olan bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $\mathcal{F}$ in κ topolojisi için bir alt taban olduğunu kabul edersek, δ sayılarından en küçük olanı kadar sonlu adette arakesit alırsak, κ için baz elde etmiş oluruz. Böylece $\mathbb{R}$ de K kompakt ve W açık kümeleri için $M_s \in (K,W)$ olur. Eğer $\{|k| : k \in K\}$ kümesi için $b > 0$ sayısı bir üst sınır ve K nın görüntüsünün W ya olan uzaklığı ε ise $|r-s| < \delta = \varepsilon/b$ bulunur. Bunun anlamı, her $k \in K$ için $|rk - sk| \le |r-s| b < \varepsilon$ dur. Dolayısıyla her $k \in K$ için $|rk - sk| < \varepsilon$ olduğundan $M_r \in (K,W)$ dır. Bu ise, r sayısı s ye yeterince yaklaştığında, κ topolojiye göre, M_r yi içine alacak biçimde M_s nin en az bir komşuluğunun var olduğunu gösterir.

Diğer yandan nokta-açık topoloji (ρ) en zayıf olandır. Örneğin; birim fonksiyonun her $\rho-$komşuluğu içindeki fonksiyonlar (sıfır fonksiyonu hariç), uzunluğu 1 birim olan aralıkların (bu uzunluğu istediğimiz kadar küçük seçebiliriz) sonlu bir ailesi üzerinde tanımlı olsunlar. Mesela, her x_i için $f(x_i) = x_i$ birim fonksiyonunu alır ve $f \in \bigcap \{(x_i, W_i) : i = 1,2,3\}$ kabul edersek, her $i = 1,2,3$ için $x_i \in W_i$ olur. g fonksiyonu da x_i merkezli, $1/3$ birim uzunluklu üç aralık üzerinde sıfır olmayan bir fonksiyon olsun. Böylece $g(x_i) = x_i$ olması için g nin grafiği bu aralıklar üzerinde yükselir, x_i de yerel maksimum değerini alır ve keskin bir şekilde soldan sağa doğru sıfıra doğru geri döner.



Şekil 3.4

Kompakt-açık topoloji böyle bir zaafa sahip değildir. Örneğin $K = [100, 200]$ ve $W = (99, 201)$ alarak, κ topolojisinin (K, W) alt taban elemanlarını belirleyelim. Eğer $f \in (K, W)$ ve (K, W) içindeki her g fonksiyonu K kompakt kümesi üzerinde sıfırdan farklı olmalıdır, ki bu K kompakt aralıkları 100 birim uzunluklu aralıklardır. Böylece kompakt-açık topoloji, uzunluğu 1 birim olan aralıklar üzerinde sıfır olmayan sürekli fonksiyonların oluşturduğu S kümesinden, birim fonksiyonu ayırabilir. Yani, S kümesi, f in $\rho -$komşuluklarının bir arakesiti olduğundan, kompakt-açık topoloji ye göre $\overline{S}$ kümesinde f fonksiyonu bulunmaz, ancak ρ topolojisine göre $\overline{S}$ kümesi içinde bulunabilir.

3.2 Teoremlerin Eşdeğerliliği

Bu bölümde engüçlü admissible topoloji için önemli bir kriter ve bunun sonucunda da yukarıda verdiğimiz Teorem 2.2.2.1 ve Teorem 2.2.3.1 e eşdeğer olan, sırasıyla Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 yi vereceğiz.

X, Y ve Z üç topolojik uzay, h fonksiyonu da her bir sabit z için $h : X \times Z \to Y$, $h(x,z) = h_z(x)$ şeklinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. h fonksiyonu ile birleşimli, $h^* : Z \to C$ olacak şekilde bir h^* fonksiyonu vardır. Her zamanki gibi burada C ile bahsedilen küme, X den Y ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların oluşturduğu kümedir. h^* fonksiyonu her $x \in X$ için $h_z(x) = h(x,z)$ olmak üzere, $h^*(z) = h_z$ biçiminde tanımlıdır. h ile h^* arasındaki en önemli benzerlik, şüphesiz onların bire-bir olmalarıdır. Yani, her bir h fonksiyonuna karşılık yalnız ve yalnız bir h_z fonksiyonu karşılık gelmektedir.

Özellikle her bir h fonksiyonunun sürekliliği, verilen X, Y ve Z uzaylarının topolojilerine bağlı iken, h^* ın sürekliliği C fonksiyon uzayının üzerindeki topolojiye bağlıdır. Burada bizim amacımız; h sürekli fonksiyonlarına karşılık gelen h^* fonksiyonlarının sürekli olacağı, C üzerinde bir topolojik yapı kurmaktır. Eğer X uzayı lokal kompakt ise daha önce verdiğimiz Teorem 2.2.3.1 in bir sonucu olarak bu durumu sağlatabiliriz. Ancak bu şart bizi sık sık kısıtlayacak bir rol oynuyor ki özellikle X in bir fonksiyon uzayı olmasını engelliyor. Hatta tarihsel notlarda, bu problemden dolayı yıllar önce Hurewicz, Fox a bir mektup yazarak X uzayı lokal kompakt olmadığında C üzerinde yukarıda istediğimiz şarta uygun bir topoloji tanımlamasını istemiştir. Fox da cevabında o an bunun mümkün olmadığını göstermek için ileride vereceğimiz Teorem 3.2.3 ü ispat etmiştir. Bu cevaptan yıllar sonra ise Z uzayı üzerinde bir takım kısıtlamalara gidilerek X in lokal kompaktlık şartının kaldırılabileceği (Teorem 3.2.2) yine Fox tarafından gösterilmiştir.

Lemma 3.2.1: C kompakt-açık topolojiye sahip olsun. Bu durumda h ın sürekliliği X, Y ve Z topolojik uzayları üzerinde hiçbir kısıtlama olmaksızın h^* ın sürekliliğini gerektirir.

İspat: h sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $K \subset X$ kompakt, $W \subset Y$ açık ve $z_0 \in h^{*-1}\left[\left(K,W\right)\right]$ alalım. Böylece $K \times z_0 \subset h^{-1}\left(W\right)$ olur. h sürekli olduğundan $h^{-1}\left(W\right)$ açık olup, $U_\alpha \times V_\alpha$ açık kümelerinin birleşimleri şeklinde yazılabilir. K kompakt olduğundan $K \times z_0$ kartezyen kümesi de kompakt olup, z_0 ın her bir V_i komşuluğuyla birlikte $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \times V_i$ açık-sonlu birleşimlerinin kümesi de $K \times z_0$ yı örter. O halde $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ kümesi z_0 ın açık bir komşuluğu ve $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset h^{*-1}\left[\left(K,W\right)\right]$ dir. Bu ise h^* fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.1: X regüler ve lokal kompakt, Y herhangi bir topolojik uzay ve C de kompakt-açık topolojiye sahip ise, her Z topolojik uzayı için h ın sürekliliği h^* fonksiyonunun sürekliliğine denktir.

İspat: Lemma 3.2.1 den dolayı h ın sürekliliği h^* ın sürekliliğini gerektirir. Biz h^* ın sürekliliğinin h ın sürekliliğini gerektirdiğini göstereceğiz.

$W \subset Y$ açık ve $(x_0, z_0) \in h^{-1}(W)$ olsun. $h^*(z_0)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $h^*(z_0) \in \left(U, W\right)$ olacak şekilde X içinde x_0 ın açık bir U komşuluğu vardır. Çünkü X in lokal kompakt olması nedeniyle $R \subset \overline{R} \subset U$ ve $\overline{R}$ kompakt olacak şekilde x_0 ın açık bir R komşuluğu vardır. C üzerindeki kompakt-açık topolojiye göre $\left(\overline{R},W\right)$ açık ve $h^*(z_0)\in\left(\overline{R},W\right)$ olur. Bu durumda h^* sürekli olduğundan z_0 ın açık bir V komşuluğu var ve $h^*(V)\subset\left(\overline{R},W\right)\subset\left(R,W\right)$ dir. Böylece $R\times V$ kümesi (x_0,z_0) ın açık bir komşuluğu olup, $R\times V\subset h^{-1}(W)$ dır. Bu ise h fonksiyonunun sürekli olması demektir.

Teorem 3.2.2: X birinci sayılabilir, Y her hangi bir topolojik uzay ve C de kompakt-açık topolojiye sahip olsun. Her birinci sayılabilir Z uzayı için h ın sürekliliği h^* ın sürekliliğine denktir.

İspat: Yine Lemma 3.2.1 den dolayı h ın sürekliliği h^* ın sürekliliğini gerektirir. Şimdi biz, h^* ın sürekli olduğunu kabul edip h ın da sürekli olduğunu göstereceğiz. Olmayana ergi yöntemini kullanarak, h^* fonksiyonu sürekli fakat h fonksiyonu sürekli olmasın. Bu durumdan dolayı bir çelişkiye düşmeye çalışacağız. O halde h sürekli olmadığından her $W\subset Y$ açığı için $h^{-1}(W)$ açık değildir. Buradan bir $(x_0,z_0)\in h^{-1}(W)$ noktası için $(x_0,z_0)\in\overline{\left[h^{-1}(W)\right]^c}=\left[\left(h^{-1}(W)\right)^\circ\right]^c$ dir. (x_0,z_0) noktası civarında ve $X\times Z$ nin bir bazı olacak şekilde $\{G_n\}$ sınıfını belirleyelim. Her n tam sayısı için (x_n,z_n) noktaları da hem $\bigcap_{i\le n}G_i$ hem de $\left[h^{-1}(W)\right]^c$ kümesinin elemanları olsunlar. $h^*(z_0)$ sürekli olduğundan $\forall\, x\in U$ için $h^*(z_0)\in\left(U,W\right)$ olacak şekilde x_0 ın bir U açık komşuluğu vardır.

$K=U\cap\bigcup_{n=0}^{\infty}x_n$ alalım. K kompakt olduğundan $\left(K,W\right)$ açık olup, h^* ın sürekliliğinden, $z_0\in h^{*-1}\left[\left(K,W\right)\right]$ için $h^*(V)\subset\left(K,W\right)$ olacak şekilde z_0 ın bir V komşuluğu vardır. O halde $\forall\, n>n_0$ için $x_n\in U$ ve $z_n\in V$ olmak üzere bir $n_0\in\mathbb{N}$

vardır. Böylece n_0 dan büyük her $n \in \mathbb{N}$ için $h(x_n, z_n) \in W$ dır. Bu durum ise (x_n, z_n) noktalarının seçilişiyle bir çelişki yaratır. Sonuç olarak aksi varsayımımız yanlış olup, $h^{-1}(W)$ açık ve dolayısıyla h fonksiyonu süreklidir.

Lemma 3.2.2: X ayrılabilir ve metrikleştirilebilir bir uzay, $Y = \mathbb{R}$ ve C nin topolojisi de $Z = [0,1]$ için h ın sürekliliğinin h^* ın sürekliliğini gerektiren bir topoloji olsun. $W = (a,b) \subset Y$ sınırlı-açık bir aralık ve $K \subset X$ kapalı fakat kompakt olmasın. Bu durumda (K,W) cümlesi hiçbir iç nokta içermez.

İspat: K kompakt olmadığından, (x_n) dizisi K içindeki bir dizi olmak üzere, $\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n \subset X$ kümesi de kapalıdır. Şimdi (K,W) kümesinin verilen her $h^*(0) = h_0$ elemanı için, $h_z(x_n) = \min\{1+b, h_0(x_n) + nz\}$ olarak tanımlayalım.

h fonksiyonu $X \times \{0\} \cup \{\bigcup_{n=1}^{\infty} x_n\} \times [0,1]$ kapalı kümesi üzerinde tanımlı olduğundan, h ın süreklilik durumu $X \times [0,1]$ normal uzayı üzerine genişletilebilir. Eğer $z > 0$ ise $a + nz > 1 + b$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her pozitif z sayısı için $h^*(z) \in (K,W)^c$ dir.

Hipotezdeki koşulları sağlayan C nin topolojisine göre h^* fonksiyonu süreklidir. O halde $h^*(0) = h_0 \in \overline{(K,W)^c} = \left[(K,W)^{\circ}\right]^c$ dir. Bu ise (K,W) nın hiçbir iç noktaya sahip olmadığını gösterir.

Lemma 3.2.3: C uzayının topolojisi daima h^* ın sürekliliği h ın sürekliliğini gerektirecek şekilde ise, verilen bir $x_0 \in X$, $W \subset Y$ açığı ve bir de $f_0 \in (x_0, W)$ için

(R,W) kümesi $f_0 \in C$ nin bir komşuluğu olacak şekilde x_0 ın bir R komşuluğu vardır.

İspat: Her $(x,f) \in X \times C$ için $\phi(x,f) = f(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\phi^*(f) = f$ olduğundan ϕ^* süreklidir ve böylece ϕ süreklidir. ϕ nin sürekliliğinden $\phi^{-1}(W)$ açıktır. Buradan da $\phi(R,V) \subset W$ olacak şekilde f_0 ın bir V, x_0 ın bir R komşuluğu mevcuttur. Sonuç olarak $f_0 \in V \subset (R,W)$ olur ki, bu (R,W) nın $f_0 \in C$ nin bir komşuluğu demektir.

Teorem 3.2.3: X uzayı ayrılabilir ve metrikleştirilebilir, $Y = \mathbb{R}$ olsun. C nin topolojisinin h ın sürekliliğinin h^* ın sürekliliğine eşdeğer olan topoloji olması için gerek ve yeter koşul X in lokal kompakt olmasıdır.

İspat: $W = (a,b) \subset Y$ sınırlı-açık aralığı ve C nin topolojisini de her Z uzayı için h ve h^* sürekliliklerinin eşdeğer olduğu topoloji olarak ele alalım. Lemma 3.2.3 den, her $x_0 \in X$ ve her $f_0 \in (x_0, W)$ için (R,W) cümlesi $f_0 \in C$ ın komşuluğu olacak şekilde x_0 ın bir R komşuluğu vardır. X regüler olduğundan x_0 ın bir U komşuluğu var ve $\overline{U} \subset R$ olup, $(\overline{U}, W)$ cümlesi de f_0 ın bir komşuluğudur. Lemma 3.2.2 den f_0 fonksiyonu $(\overline{U}, W)$ kümesinin bir iç noktası olduğundan $\overline{U}$ kompakttır. Böylece X lokal kompakt olmak zorundadır. Bu ispatta teoremin gereklilik kısmını ispatladık. Yeterlilik kısmı da Teorem 3.2.1 in bir sonucu olduğundan, ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1: X uzayı ayrılabilir ve metrikleştirilebilir ancak lokal kompakt değilse ve $Y = \mathbb{R}$ ise C uzayı kompakt-açık topolojiyle birlikte birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlamaz.

İspat: $W=(a,b)\subset Y$ sınırlı-açık bir aralık olsun. Eğer C uzayı birinci sayılabilirse Teorem 3.2.2 nin bir uygulaması olarak üzerinde tanımlı ϕ fonksiyonunun sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Lokal kompakt olmayan X uzayının bir $x_0\in X$ elemanı ve her $f_0\in\left(x_0,W\right)$ için Lemma 3.2.3 ün ispatından, $\left(R,W\right)$ cümlesi $f_0\in C$ in bir komşuluğu olacak şekilde x_0 ın bir R komşuluğu vardır. Şimdi $\overline{U}\subset R$ olacak şekilde x_0 ın bir U komşuluğunu alalım. Buradan f_0 elemanı $\left(\overline{U},W\right)$ fonksiyon cümlesinin bir iç noktası olur. Bu ise $\overline{U}$ cümlesinin kompakt olmaması demektir ki, Lemma 3.2.1 ve Lemma 3.2.2 den dolayı bu bir çelişki yaratır. Dolayısıyla aksi varsayımımız yanlış olup, C uzayı kompakt-açık topolojisiyle birlikte birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlamaz.

3.3 Homeomorfizm Grupları İçin Kompakt-Açık Topoloji

Buraya kadar olan çalışmamızda kompakt-açık topolojinin tanımını verip, sahip olduğu özellikleri göstererek, bazı yeni tanımları ifade ettikten sonra bu tanımlarla birlikte kompakt-açık topolojinin sağladığı bazı özellikleri göstermiştik. Bunları yaparken, kümeler ve bu kümelerin üzerine koyduğumuz belirli şartlarla çalışmıştık. Bu son bölümümüzde ise kompakt-açık topolojiyi yine belirli şartlar altında şimdiye kadar incelediğimiz bazı durumlar için homeomorfizm grupları üzerine uygulamaya çalışacağız.

Notasyon 3.3.1: Bu bölüm boyunca, X lokal kompakt bir uzay olmak üzere X in homeomorfizmlerinin oluşturduğu grubu H ile göstereceğiz.

3.3.1 Kompakt-Açık Topolojinin Minimal Özelliği

X lokal kompakt Hausdorff uzayı olduğunda sürekli fonksiyonların C sınıfı üzerindeki $k-$topolojinin en güçlü admissible topoloji olduğunu Teorem 2.2.2.1 de ispat etmiştik. Şimdi ise bir lokal kompakt Hausdorff uzayının homeomorfizmlerinin oluşturduğu H grubu için admissible olma durumunu inceleyeceğiz.

Teorem 3.3.1.1: Rasyonel sayı sisteminin homeomorfizmlerinin bir H grubu için verilen her bir admissible topoloji, H üzerinde verilecek başka bir admissible topolojiden daha güçlü değildir.

İspat: H cümlesi bir admissible topolojiye sahip olsun. Buradan $x \in V$ ve $h \in U$ için $|h(x)| < 1$ olacak biçimde, 0 ın V komşuluğunu ve özdeş homeomorfizmin de bir U komşuluğunu bulabiliriz. Şimdi ξ bir rasyonel sayı olmak üzere, $\xi \in V$ alalım. H üzerinde, F kapalı (ξ ye yakınsayan bir rasyonel sayı dizisi içermeyecek biçimde) ve W açık kümelerinin (F,W) formunun alt taban komşuluklarının oluşturduğu yeni bir topoloji tanımlayabiliriz. Açık olarak bu topoloji admissibledir. Bunu ya admissible olma tanımından ya da H üzerindeki bu yapının klasik topolojik grup aksiyomlarını sağlayıp bir topolojik grup olmasının sonucu olarak söyleyebiliriz. Bizim, özdeşlik fonksiyonunun yeni bir $U^* = (F_1,...,F_n;W_1,...,W_n)$ komşuluğunun U tarafından içerilmediğini göstermemiz gerekmektedir. O halde $\xi \in (a,b] \subset V$ olacak biçimde bir $(a,b]$ açık-kapalı aralığını bulabiliriz. Buradan $(a,b]$ aralığının $F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n$ kapalı kümesinden farklı olduğu da açıktır. Çünkü en azından kümelerden birisi kapalı, diğeri değildir. Hatta bu $(a,b]$ açık-kapalı aralığı ile $10+\xi$ nun uygun bir komşuluğunun karşılıklı yer değiştirebileceği bir h

homeomorfizmini de inşa edebiliriz. Sonuç olarak $h \in U^*$ olup, ancak $h \notin U$ dur. Böylece istediğimizi elde ettiğimizden ispat tamamlanır.

3.3.2 Lokal Bağlantılı Uzayların Homeomorfizmleri

Teorem 3.3.2.1: Lokal bağlantılı ve lokal kompakt bir Hausdorff uzayının homeomorfizmlerinin oluşturduğu cümle H olmak üzere, $k-$topolojik yapısıyla birlikte verilen H uzayında, $h \in H$ için h ın sürekliliği h^{-1} in sürekliliğine denktir ve böylece H uzayı bir topolojik grup olur.

İspat: İlk önce ikili grup işleminin sürekli olduğunu göstermemiz gerekmektedir ki, bu özelliği gösterirken X uzayının lokal bağlantılı olmasına gerek yoktur. $fg \in H$ ın bir komşuluğu (K,W) olsun. O halde $fg(K) \subset W$ olduğundan, $g(K) \subset f^{-1}(W)$ elde edilir. X lokal kompakt olduğundan, her bir $x \in g(K)$ elemanı için, $\overline{V(x)}$ kompakt ve $V(x) \subset f^{-1}(W)$ olacak biçimde x in açık bir $V(x)$ komşuluğunu bulabiliriz. g sürekli ve K kompakt olduğundan $g(K)$ da kompakttır. Buradan $x_1,...,x_n \in g(K)$ noktalarının $V(x_1),...,V(x_n)$ sonlu tane komşulukları için $V = V(x_1) \cup ... \cup V(x_n)$ olmak üzere, $g(K) \subset V \subset \overline{V} \subset f^{-1}(W)$ yazabiliriz. Böylece (K,V) ve $(\overline{V},W)$ kümeleri, sırasıyla g ve f fonksiyonlarının komşuluklarıdır. Dolayısıyla $g' \in (K,V)$ ve $f' \in (\overline{V},W)$ ise $f'g' \in (K,W)$ olmak zorundadır.

h^{-1} fonksiyonunun süreklilik durumunu incelemeye geçmeden önce H ın $k-$topolojisinin alt bazını teşkil eden, L kompakt, bağlantılı, $(L)^{\circ} \neq \varnothing$ ve W açık olmak üzere, (L,W) formlarını oluşturalım. Şimdi her K kompakt kümesi için

$h \in (K,W)$ alalım. W açık kümesi lokal bağlantılı olduğundan, her bir $x \in K$ için, $\overline{V(x)}$ kompakt ve $f\left(\overline{V(x)}\right) \subset W$ olacak şekilde bağlantılı bir $V(x)$ açığı vardır. Buradan $x_1,...,x_n$ noktaları için $K \subset L_1 \cup ... \cup L_n$ ve $L_i = \overline{V(x_i)}$ olacak biçimde L_i bağlantılı kümeleri vardır. Böylece $(L_1,...,L_n;W_1,...,W_n) \subset (K,W)$ elde edilir ki, bu istediğimiz durumdur.

f^{-1} in bir $k-$komşuluğu olarak, L kompakt, bağlantılı ve $(L)^\circ = \left(\overline{L^c}\right)^c \neq \varnothing$ olmak üzere, (L,W) cümlesini ele alalım. İspatın ilk kısmında $f^{-1}(L) \subset G \subset \overline{G} \subset W$ ve $\overline{G}$ kompakt olacak şekilde bir G açığının var olduğunu göstermiştik. Benzer şekilde $\overline{V}$ kompakt ve $V \subset \overline{V} \subset \overline{G} \subset W$ olacak biçimde bir V açık kümesi vardır. Buradan $f(G^c \cap \overline{V}) \subset L^c \cap f(W)$ elde edilir. Hatta $f(x) \in \left(\overline{L^c}\right)^c$ durumu için bir x noktası bulabiliriz. Böylece $U_0 = \left(x, G^c \cap \overline{V}\ ;\ \left(\overline{L^c}\right)^c, L^c \cap f(W)\right)$ cümlesi f in bir $k-$komşuluğudur.

$h \in U_0$ ise $h(G^c \cap \overline{V}) \subset L^c \cap f(W)$ dir. Bu kapsamanın her iki tarafının tümleyenini alırsak, $L \cup f(W)^c \subset h\left(G \cup (\overline{V})^c\right)$ elde ederiz. $h(G)$ ve $h\left((\overline{V})^c\right)$ kümeleri ayrık açık iki küme olduğundan ve L nin bağlantılılığından, ya $L \subset h(G)$ ya da $L \subset h\left((\overline{V})^c\right)$ olmalıdır. Ancak $L \subset h\left((\overline{V})^c\right)$ durumu hiçbir zaman gerçeklenmez. Çünkü $h(x) \in \left(\overline{L^c}\right)^c$ olup $x \notin \left(\overline{V}\right)^c$ dir. Böylece $L \subset h(G)$ olmalıdır. Buradan da $h^{-1}(L) \subset G \subset W$ elde edilir. Bu ise $h^{-1} \in (L,W)$ dir. Sonuç olarak H

uzayı kompakt-açık topolojiye sahip olduğunda, ters fonksiyon süreklidir. Diğer bir deyişle, H uzayı bir topolojik gruptur.

3.3.3 Kompakt-Açık Topolojide Yakınsaklık

Tanım 3.3.3.1: D ve Δ iki yönlendirilmiş sistem ise $\Sigma = D \times \Delta$ de bir yönlendirilmiş sistemdir.(27) x_d yönlendirilmiş bir küme ve $d' > d$ olmak üzere her $\sigma = (d, v)$ için $x'_\sigma = x_{d'}$ olsun. Bu durumda x'_σ ya x in yönlendirilmiş bir alt kümesi denir. Bu x'_σ yönlendirilmiş alt kümesini $x_{d'}$ şeklinde göstereceğiz.

Verdiğimiz bu tanımları, bazı teoremlerin ispatında faydalanacağımız aşağıdaki Lemma da kullanacağız.

Lemma 3.3.3.1: x_d nin yönlendirilmiş bir alt kümesi $x_{d'}$ ve $x_d \to x$ ise, bu durumda $x_{d'} \to x$ dir. Eğer x_d, kompakt bir X uzayı içinde yönlendirilmiş küme ise x_d nin yakınsak bir yönlendirilmiş alt kümesi vardır.

İspat: İlk önce ispatımızın birinci kısmını gösterelim. O halde $x_d \to x$ olduğunu kabul edelim. Şimdi, eğer $x \in X$ için bir $V(x)$ komşuluğu verilirse, öyle bir d_0 vardır ki, $d > d_0$ oldukça $x_d \in V$ olur. Her $v \in \Delta$ ile $\sigma = (d, v)$ alalım. Böylece $\sigma > \sigma_0$ oldukça $x'_\sigma \in V$ elde edilir. Burada $\sigma, \sigma_0 \in \Sigma$ ve $\sigma = (d, v)$ ve $\sigma_0 = (d_0, v_0)$ olmak üzere, $\sigma > \sigma_0$ eşitsizliğinin anlamı $d > d_0$ ve $v > v_0$ demektir. Dolayısıyla $x_{d'} \to x$ bulunur.

Şimdi de ispatın ikinci kısmını yapalım. X kompakt ve $x_d \in X$ olsun. Her $x \in X$ in bir $V(x)$ komşuluğunu ve $d > d_x$ iken $x_d \notin V(x)$ koşulunu sağlayacak biçimde de bir d_x alalım. X kompakt olduğundan, $x_1,...,x_n \in X$ noktaları için $X = V(x_1) \cup ... \cup V(x_n)$ yazabiliriz. O halde $d > d_{x_1},...,d_{x_n}$ olmak üzere $x_d \notin X$ elde edilir. Bu ise bir çelişki olup, bir $x \in X$, her d ve x in V komşuluğu için $d' > d$ oldukça $x_{d'} \in V$ olur. Sonuç olarak x in komşuluklarının formu yönlendirilmiş sistem oluğundan, $x_{d'} \to x$ bulunur.

Teorem 3.3.3.1: X uzayı lokal kompakt Hausdorff özelliğine sahip olmak üzere X in homeomorfizmlerinin oluşturduğu bir H grubu içinde, h_v yönlendirilmiş bir küme ise, bu durumda aşağıdaki (*) özelliği sağlanır:

(*) $k-$topolojide $h_v \to h$ olması için gerek ve yeter şart X de $x_d \to x$ oldukça $h_v(x_d) \to h(x)$ olmasıdır.

İspat: İspatın gereklilik kısmı oldukça kolay yapılır. $k-$topolojide $h_v \to h$ olsun. Zira $k-$topoloji admissible olduğundan ve Teorem 2.2.4.1 in i) durumundan, $x_d \to x$ oldukça $h_v(x_d) \to h(x)$ elde edilir.

İspatın yeterlilik kısmında ise, $x_d \to x$ oldukça $h_v(x_d) \to h(x)$ ise, h ve $v > \mu$ olmak üzere bütün h_v lerin oluşturduğu ve h ın $\mu-$komşulukları diye adlandıracağımız U_μ kümeleri vasıtasıyla oluşturulan $Ð = \{h, h_v\}$ cümlesi üzerinde bir admissible topoloji oluşturabiliriz. (Burada $h_v \neq h$ olma durumunu ayrı düşünmeliyiz). O halde Ð üzerindeki bu topoloji admissible olduğundan, bu topolojiye göre Ð de $h_v \to h$ dir. Teorem 2.2.2.1 den $k-$topoloji her bir admissible topolojiden daha güçlü olduğundan, $k-$topolojide de $h_v \to h$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, Teorem 3.3.2.1 in esasının yeniden formülasyonu şeklinde bir teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 3.3.3.2: X uzayı lokal kompakt ve lokal bağlantılı bir Hausdorff uzayı olmak üzere, X in homeomorfizmlerinin yönlendirilmiş kümesi olan h_v, $x_d \to x$ oldukça $h_v(x_d) \to x$ özelliğine sahipse, $x_d \to x$ oldukça $h_v^{-1}(x_d) \to x$ olur.

Teorem 3.3.2.1 de istenilen lokal bağlantılı olma özelliğinin gereksiz olmadığını göstermek için şimdi uygulama niteliğinde bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.3.3.1: $0,1,2,3,...$ ve $1/2, 1/3, 1/4,...$ sayılarının oluşturduğu cümleyi X ile gösterelim. Böylece X lokal kompakt olup, 0 noktasında lokal bağlantılı değildir. $k=1,2,3,...$ için aşağıdaki şekilde tanımlı, X in homeomorfizmlerinin bir $h_1, h_2, h_3,...$ dizisini alalım.

$$h_k(m) = \begin{cases} m & , \quad m = 0,1,2,...,k-1 \\ 1/k & , \quad m = k \\ m-1 & , \quad m = k+1, k+2,... \end{cases}$$

$$h_k(1/m) = \begin{cases} 1/m & , \quad m = 2,3,...,k-1 \\ 1/(m+1) & , \quad m = k, k+1,... \end{cases}$$

X içindeki tek yakınsak dizi $1/m$ dizisi ve $h_k(1/m) \to 0$ olduğundan, h_k homeomorfizmi $k-$topolojiye göre özdeşlik fonksiyonuna yakınsar. Fakat $h_k^{-1}(1/k) = k$ olduğundan, h_k^{-1} homeomorfizmide ∞ a ıraksar. Buradaki kusur, X in 0 noktasında lokal bağlantılı olmamasından kaynaklanmaktadır. O halde istediğimiz lokal bağlantılılık şartı gereksiz değildir.

3.3.4 Gruplar ve Uzaylar İçinde Uniform Yapı

Konunun başlangıcında, kompakt-açık topoloji için bazı özellikleri incelerken küme topolojisi için uniform yapı tanımını vermiştik.[(19)] Şimdi kısaca bu tanımı grup topolojisine göre nasıl yorumlayacağımızı ifade etmeye çalışalım.

H bir topolojik grup olmak üzere, H üzerinde üç tane uniform yapı kurabiliriz. Bunlardan ilki olan $\wp^*$ uniform yapısı, H daki özdeşlik fonksiyonunun U komşuluğu için $xy^{-1} \in U$ şartını sağlayan $(x, y) \in U^*$ ikililerinin oluşturduğu U^* bağıntısı tarafından meydana getirilen yapıdır. İkinci ${}^*\wp$ uniform yapı, yine H daki özdeşlik fonksiyonunun U komşuluğu için $x^{-1}y \in U$ şartını sağlayan $(x, y) \in {}^*U$ bağıntısı tarafından oluşturulur. Üçüncü uniform yapı olan ${}^*\wp^*$ ise U^* ve ${}^*U$ bağıntıları yukardaki gibi tanımlanmak üzere, ${}^*U^* = {}^*U \cap U^*$ tarafından oluşturulan yapıdır.

Bir topolojik grup ${}^*\wp$ ve $\wp^*$ uniform yapılarına göre tam ise konvansiyonel olarak tamdır, denir.

Teorem 3.3.4.1: Kompakt bir Hausdorff uzayının homeomorfizmlerinin oluşturduğu $k-$topolojiyle donatılmış H grubu ${}^*\wp^*$ uniform yapısı içinde daima tam dır. Fakat genellikle ${}^*\wp$ ve $\wp^*$ yapılarına göre tam değildir.

İspat: ${}^*\wp^*$ uniform yapısına göre bir Cauchy yönlendirilmiş kümesi h_ν olsun. Bunun anlamı $h_\nu^{-1}h_\mu \to \textit{özdeş fonksiyon}$ ve $h_\nu h_\mu^{-1} \to \textit{özdeş fonksiyon}$ demektir. Her $x \in X$ için X kompakt olduğundan $h_\nu(x)$, bir $h_{\nu'}(x)$ yakınsak yönlendirilmiş alt kümesine sahiptir. Teorem 3.3.3.1 ve $h_{\nu'}(x) \to y$ ve $h_\nu h_{\nu'}^{-1} \to \textit{özdeş fonksiyon}$ olduğundan dolayı, her x için $h_\nu(x)$ yakınsaktır, sonucunu elde ederiz. $h_\nu(x)$ in limit noktasına $h(x)$ diyelim. Biz $k-$topolojiye göre $h_v \to h$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kabul edelim ki $x_d \to x$ olsun. Eğer $h_v(x_d) \not\to h(x)$ ise, X in kompaktlığını kullanarak, $h_{v'}(x_{d'}) \to y \neq h(x)$ diyelim. Önceki düşüncemize göre, $\lim_{\mu,v,d} h_\mu h_{v'}^{-1} h_{v'}(x_{d'}) = \lim_{\mu,d} h_\mu(x_{d'}) = y$ olur. Şimdi $\lim_d h_\mu(x_{d'}) = h_\mu(x)$ ve $h_\mu(x) \to h(x)$ olduğundan $\lim_\mu \lim_d h_\mu(x_{d'}) = \lim_{\mu,d} h_\mu(x_{d'})$ elde ederiz. Son verdiğimiz eşitlikte sol taraftaki iç limit ile sağ taraftaki çift limit eşitliği sağlar.[19] Böylece bu durum $y = h(x)$ olmasına neden olur ve bu çelişki $h_v(x_d) \to h(x)$ olduğunu kanıtlar. O halde Teorem 2.2.4.2 den $k-$topolojide $h_v \to h$ dir. Ayrıca bu sonuç h ın sürekli olduğunu göstermemizi de sağlar. Şimdi biz $x_d \to x$ oldukça $h_v(x_d) \to h(x)$ olacağını biliyoruz. Bundan dolayı $\lim_d \lim_v h_v(x_d)$ çift limiti için iç limit var olduğundan $\lim_d \lim_v h_v(x_d) = \lim_d h(x_d)$ eşitliği sağlanmalıdır. Çünkü h_v üzerindeki bu şart, h_v^{-1} üzerindeki aynı şarta eşdeğerdir. Hatta her $x \in X$ için $h_v^{-1}(x)$ fonksiyonu tek bir limit noktasına yakınsar. Bu yakınsadığı sürekli fonksiyonu h^* olarak gösterelim. Teorem 2.2.4.2 yi tekrar uygularsak, $h_\mu h_v^{-1}(x) \to h(h^*(x))$ bulunur. Böylece $h \in H$ dır. Bu ise H ın ${}^*\wp^*$ uniform yapısına göre tam olduğunu gösterir.

H ın $\wp^*$ uniform yapısına göre tam olmadığını göstermek için bir örnek verelim:

$$h_n(x) = \begin{cases} tx & , \quad 0 \le x \le 1 \\ (2-t)(x-1) & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases} \quad ve\ t = 1/n,\ n = 1,2,3,...$$

olmak üzere, $X = [0,2]$ kompakt aralığında tanımlı homeomorfizmlerin bir (h_n) dizisini alalım. Buradan $h_n h_m^{-1}$ fonksiyonunun özdeş fonksiyona uniform yakınsak olduğunu görürüz. Fakat her $x \in [0,1]$ için $h_n(x) \to 0$ a yakınsar. Çünkü f sürekli fonksiyonu için $h_\nu \to f$ ise, $k-$topolojiye göre $h_\nu h_\mu^{-1} \to \text{özdeş fonksiyon}$ dur. Dolayısıyla H grubu $\wp^*$ uniform yapısına göre tam değildir.

Uyarı 3.3.4.1: X kompakt ve (X,d) bir metrik uzay olmak üzere H üzerinde tanımlanan bir $m_1(f,g) = \sup d(f(x), g(x)), x \in X$ metriği $\wp^*$ uniform yapısı ile uyumludur.(2) H üzerindeki başka bir $m_2(f,g) = \max\{m_1(f,g), m_1(f^{-1}, g^{-1})\}$ metriğinin de ${}^*\wp^*$ uniform yapısı ile uyumlu olduğu Oxtoby ve Ulam(30) tarafından gösterilmiştir. Bu metrikler eş değer metriklerdir.(30) Böylece H grubunun m_1 metriğine göre tam olmamasına rağmen m_2 ye göre tam olduğunu da van Dantzing göstermiştir.(28)

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle kompakt-açık topolojinin, topolojik ve geometrik anlamı incelenmiş, sağladığı bazı temel topolojik kavramlar verilerek, kompakt-açık topolojiyle birlikte farklı üç yapının karşılaştırılmalı bir incelemesi yapılmıştır. Daha sonra bu özelliklerden faydalanılarak farklı bir yoldan ikinci bölümde verilen bazı teoremlerin topolojik eşdeğerleri ifade edilmiş ve ispatlanmıştır. Son olarak ise kompakt-açık topolojinin yine ikinci bölümdeki bazı durumları homeomorfizm gruplarına aktarılmıştır.

KAYNAKLAR

1. P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie I, Springer, Berlin, 1935

2. G. Birkhoff, The Topology of Transformation Sets, Annals of Mathematics, **35**, 861 (1934)

3. R. H. Fox, On Topologies for Function Spaces, Bull.Am.Math.Soc., **51**, 429(1945)

4. S. Lefschetz, Algebraic Topology, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XXVII, New York, 1942

5. L. Pontrjagin, Topological Groups, Princeton University Press, 1939

6. D. van Dantzig, B. L. van der Waerden, Über metrisch homogene Rãume, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, **6**, 367 (1928)

7. R. F. Arens, A Topology for Spaces of Transformations, Annals of Mathematics, **47**, 480 (1946)

8. D. Montgomery, H. Samelson, Transformation Groups of Spheres, Annals of Mathematics, **44**, 454 (1943)

9. J. L. Kelley, General Topology, D.Van Nostrand Company, Inc., 1955

10. J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966

11. R. Arens, J. Dugundji, Topologies for Function Spaces, Pacific Journal Math., **1**, 5 (1951)

12. W. H. Fleming, Functions of Several Variables, Addison Wesley, London, 1965

13. Ş. Yüksel, Genel Topoloji, Selçuk Üniversitesi Basımevi, Konya, 1998

14. C. Yıldız, Genel Topoloji, Gazi Üniversitesi Basımevi, Ankara, 1999

15. S. Lipschutz, General Topology, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965

16. S. Willard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, California, 1970

17. G. Aslım, Genel Topoloji, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1988

18. J. R. Munkres, Topology: A First Course, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1975

19. N. Bourbaki, Topologie Générale, Paris, 1940

20. B. Pospíšıl, Trois Notes sur les Espaces Abstraits, Publications of the Faculty of Sciences, Masaryk University, Čis 249 (third note), 1937

21. A. Weil, Sur les Espaces à Structure Uniforme et sur la Topologie Generale, Actualités Scientifiques et Industrielles, 551, Hermann et Cie, Paris, 1937

22. E. Szpilrajn, S. Kierat, Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes, Fundamenta Mathematicae, **XXI**, 276 (1933)

23. M. Fréchet, Sur quelques points du Calcul Fonctionnel (These), Rendiconti di Palermo, 22 (1906)

24. G. D. Birkhoff, O. D. Kellogg, Invariant Points in Function Spaces, A.M.S. Transactions, **23**, 96 (1922)

25. A. Kolmogoroff, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Studia Mathematica, **tom V**, 29 (1934)

26. K. Menger, Tri-operational Algebra, Reports of a Mathematical Colloquium, Second Series, Double Issue 5-6, University of Notre Dame Mathematical Publications, Notre Dame, Indiana, 1944

27. W. Sierpinski, Sur les espaces métriques localement séparables, Rundamenta Mathematicae, **21**, 107 (1933)

28. D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra, I. Komplettierungstheorie, Mathematische Annalen, **107**, 587 (1933)

29. R. Arens, Topologies for Homeomorphism Groups, American Journal of Mathematics, **68**, 593 (1946)

30. J. C. Oxtoby, S. M. Ulam, Measure preserving homeomorphisms and metric transitivity, Annals of Mathematics, **42**, 874 (1941)