T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜZLEMDE VE UZAYDA KİNEMATİK GEOMETRİ

SIDDIKA ÖZKALDI

HAZİRAN 2006

T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜZLEMDE VE UZAYDA KİNEMATİK GEOMETRİ

SIDDIKA ÖZKALDI

HAZİRAN 2006

ÖZET

DÜZLEMDE VE UZAYDA KİNEMATİK GEOMETRİ

ÖZKALDI, Sıddıka

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Haziran 2006, 123 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde bir sonraki bölümde kullanılacak katı cisim hareketine ait temel kavramlar ele alınmıştır. Bu bölümde düzlem displerini, küresel displeri ve uzay displerini temsil eden matris dönüşümleri tanıtılmış, bu matrislerin karakteristik vektörlerinin, yukarıda ele alınan displerin geometrik olarak sırasıyla pol noktası, dönme ekseni ve vida ekseni olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Cayley formülünden yararlanılarak, verilen bir eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen pozitif ortogonal matris bulunmuş ve örneklendirilerek incelenmiştir. Üçüncü bölümde, katı cismin sürekli hareketi, displerin parametrelendirilmiş bir cümlesi ile özdeşleştirilmiştir. Düzlem ve uzay dispinin durumuna göre bir dönmenin açısal hız matrisinin özelliklerini genelleştirmek için tanjant operatörler elde edilmiştir. Bir uzay dispin tanjant operatörü screw adı verilen $6-$boyutlu bir vektörde toplanmış ve IR^4 ün bivektörleriyle screwler bir tutulmuştur. Dual sayılar, dual vektörler ve dual matrisler tanıtılmış, screw teorinin temel bilgileri verilerek, dual sayı cebiri, screw koordinat dönüşümlerinde kullanılmıştır. Böylece dual ortogonal matrisler tanımlanmış ve bir dual açısal hız matrisinin üsteli olarak bir vida dispi elde edilmiştir. Ayrıca, Clifford Cebir inşaası kurulmuştur. Genel Öklid skalar çarpımı kullanılarak kompleks sayılar ve Hamilton kuaterniyonları sırasıyla düzlem ve uzayın Clifford cebirleri olarak elde edilmiştir. $3-$ ve $4-$ boyutlu uzaylar için dejenere skalar çarpım kullanılarak düzlem ve dual kuaterniyonları Clifford cebirleri olarak elde edilmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Hareket, disp, Cayley formülü, tanjant operatörü, screw teori

ABSTRACT

THE KINEMATIC GEOMETRY ON THE PLANE AND SPACE

ÖZKALDI, Sıddıka

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Deparment of Mathematics, M. Sc. Thesis

Advisor : Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

June 2006, 123 pages

This thesis consists of four sections. The first section is reserved for indroduction. In the second section, we give basic concepts which is belong to motion of rigid body that we use in the following sections. In this section presents the matrix transformations which represent planar, spherical and spatial displacements. The eigenvectors of these matrices are the pole, rotation axis and screw axis, of the respective displacements as a geometrically. By using Cayley's formula, a positive orthogonal matris is obtained which is corresponding of rotation about the given axis and are investigated on the related examples. In the third section, the continuous motion of a rigid body identifies with a parameterized set of displacements. In this section the tangent operator is introduced to generalize the properties of the angular velocity matrix of a rotation to the cases of planar and spatial motion. The elements of the tangent operators of spatial motion can be reassembled into six dimensional vectors known as screws and the equivalence of screws to bivectors of IR^4. Thus, dual numbers, dual vectors and dual matrices are also introduced and shown that dual number algebra is presented to screw coordinate transformations. So, dual orthogonal matrix is defined and the screw displacement is obtained as the exponential of a dual angular velocity matrix. Also, it is described the construction of Clifford Algebra. By using general Euclid scalar product, complex numbers and Hamilton's quaternions are elements of Clifford algebras of the plane and space,respectively. By using degenerate scalar products for three and four dimensional spaces, planar and dual quaternions are found to be Clifford algebras. The forth sections is reserved for discussion and conclusion.

Key Words : Motion, displacement, Cayley's formula, the tangent operator, screw theory.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı vererek, bana araştırma olanağı sağlayan, hazırlanırken zaman ayıran ve çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN’ a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için An Introduction to Theoretical Kinematics (J. M. McCarthy), Theoretical Kinematics (O. Bottema, B. Roth), Analitik Geometri (Rüstem Kaya) ve Lineer Cebir (H. Hilmi Hacısalihoğlu) adlı kitaplardan yararlanılmıştır. J. M. McCarthy, An Introduction to Theoretical Kinematics adlı kitabında, katı dönüşüm, düzlem displeri, küresel displer ve uzaysal displer ele alınmıştır. O. Bottema, B. Roth, Theoretical Kinematics adlı kitabında dönmeler için Cayley formülü incelenmiştir. J. M. McCarthy, An Introduction to Theoretical Kinematics adlı kitabında bir katı cismin hareketi tanımlanarak, tanjant operatörler elde edilmiştir. H. H. Hacısalihoğlu' nun Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi adlı kitabında dual sayılar ve kuaterniyonlar incelenip, J. M. McCarthy, An Introduction to Theoretical Kinematics adlı kitabında dual sayı cebiri, screw koordinat dönüşümlerinde kullanılmıştır. Böylece ortogonal matrisler tanımlanmış ve bir dual açısal hız matrisinin üsteli olarak vida dispi elde edilmiştir. P. Lounesto, Clifford Algebras and Spinors adlı kitabında bivektörler ve Clifford çarpımı tanımlanarak bir Clifford Cebir inşası kurulmuştur. Son olarak J. M. McCarthy, An Introduction to Theoretical Kinematics adlı kitabında kompleks sayılar, kuaterniyonlar, düzlem ve dual kuaterniyonlar Clifford Cebirleri olarak elde edilmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

Düzlemde ve uzayda hareketlerin ele alınması ve bunların örneklendirilerek incelenmesi amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Katı Dönüşümler

2.1.1. Koordinat Dönüşümleri

Kinematik, noktaların dolayısıyla geometrik yerlerin hareketinin geometrik özelliklerini inceler. Bu hareket ardışık dönmeler, ötelemeler yoluyla yapılır. Eğer cisim bir katı cisimse yani cisimdeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık hiç değişmiyorsa bu hareket ardışık bir öteleme bir dönme veya ardışık bir dönme ve bir ötelemeyle yapılır.

Matematikte cebir, geometri, …, dallarına ait bazı kavramlar, kinematik açıdan ele alındığında bazen değişik isimlendirmeye uğrarlar. Örneğin cebirsel olarak, bir

$$f : IR^n \longrightarrow IR^n$$

dönüşümü

$$d(x,y) = d(f(x), f(y))$$

özelliğine sahipse f ye bir *izometri* denir.[7] Kinematik açıdan bu f dönüşümü *yer değiştirme* olarak adlandırılır. Bu çalışmada yer değiştirme yerine kısaca *disp* kavramını kullanacağız ve bunu D ile göstereceğiz.

IR^n Öklid uzayında bir cismin yer değiştirmesinden, cisimdeki bütün noktaların bir D dispi ile belirlenen yeni konumu anlaşılacaktır. Bu dispi gözlemenin matematiksel açıdan önemi, cisme yerleştirilen, cisimle bağlantılı bir çatının hangi konuma taşındığını gözlemektir. Bu çatılardan, ilk konumundakine sabit çatı, ikinci konumundakine hareketli çatı diyeceğiz ve sırasıyla F ve M ile göstereceğiz. Böylece bir D dispi,

$$D : F \longrightarrow M$$

$$x \longrightarrow X = [A]\, x + d$$

şeklinde tanımlı uzaklığı koruyan dönüşüm olarak ele alınır. Burada x, F de ölçülen bir noktanın koordinat vektörü ve X ise aynı noktanın M de ölçülen koordinat vektörüdür.

Bundan sonra aksi söylenmedikçe, $n-$boyutlu uzayda bir vektörü, $n-$boyutlu vektör olarak adlandıracağız.

Eğer hareketli cisim $n-$boyutlu ise (genellikle $n = 2$ veya $n = 3$) o zaman, $[A]$ bir $n \times n$ tipinden matris ve d, bir $n-$boyutlu vektördür.

Bu dönüşüm uzaklığı koruyan bir dönüşüm olduğundan M de P ve Q noktaları arasındaki uzaklık Öklid metriğine göre,

$$d(P,Q) = |P - Q|$$

$$= \sqrt{(P-Q)^T (P-Q)}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} D : F &\longrightarrow M \\ p &\longrightarrow P = [A]\, p + d \\ q &\longrightarrow Q = [A]\, q + d \end{aligned}$$

olacağından

$$d(P,Q) = |P - Q|$$

$$= \left| ([A]\, p + d) - ([A]\, q + d) \right|$$

$$= \left| [A](p - q) + d - d \right|$$

$$=\left\|[A](p-q)\right\|$$

$$=\sqrt{\left([A](p-q)\right)^{T}\left([A](p-q)\right)}$$

$$=\sqrt{(p-q)^{T}[A]^{T}[A](p-q)}$$

dir.

F de p ve q noktaları arasındaki uzaklık Öklid metriğine göre,

$$d(p,q)=\left|p-q\right|$$

$$d(p,q)=\sqrt{(p-q)^{T}(p-q)}$$

dir.

$$d(P,Q)=d(p,q)\Leftrightarrow\left[A^{T}\right][A]=[I_n]$$

$$\Leftrightarrow[A]^{-1}=\left[A^{T}\right]$$

$[A]$ matrisi ortogonal matris olmak zorundadır. Buna göre $\left[A^{T}\right]$ matrisi, $[A]$ matrisinin hem sağ hem de sol inversidir.

$$\det(I_n)=\det\left(\left[A^{T}\right][A]\right)$$

$$1=\det\left(A^{T}\right)\det(A)=\det(A)\det(A)=\left(\det(A)\right)^{2}$$

Bu durumda $\det(A)=\pm1$ dir.

Tanım 2.1.1.1 **:** $\det(A)=1$ olacak şekildeki ortogonal matrislere *dönmeler* denir.

$\det(A)=-1$ olacak şekildeki ortogonal matrislere *yansımalar* denir.(1)

Yansımalar katı dönüşüm için sağlaması gereken şartı sağlamakla birlikte bu çalışmada bir katı cismin konumunu tanımlamakta sadece dönmeler kullanılmıştır.

2.1.2. Displer

$n-$boyutlu bir uzayda bir disp $D=(A,d)$ matris–vektör çiftiyle tanımlanmıştır. Burada $[A]$, bir $n\times n$ tipinden dönme matrisi ve d, bir $n-$boyutlu vektördür.

***Tanım 2.1.2.1* :** $D=(A,d)$ matris–vektör çiftinde eğer özel olarak

$d=0$ ise $R=(A,0)$ matris–vektör çiftine bir *sırf dönme*,

$A=I_n$ ise $T=(I_n,d)$ matris–vektör çiftine bir *sırf öteleme* adı verilir.(1)

***Tanım 2.1.2.2* :** IR^n $n-$boyutlu uzayda displerin cümlesine, $n-$boyutlu uzayın *Öklidyen grubu* adı verilir ve $SE(n)$ ile gösterilir.(1)

***Teorem 2.1.2.1* :** $SE(n)$ aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) D_1, D_2 displerin bileşkesi olan $D=D_1D_2$ de bir disptir.

2) Displerin bileşkesi birleşme özeliğini sağlar.

3) $I=(I_n,0)$ dispi özdeşlik dispidir.

4) Her bir $D=(A,d)$ dispi yine bir disp olan bir $D^{-1}=(A^T,-A^Td)$ inversine sahiptir.

***İspat* : 1)** $D_1: M_1 \longrightarrow M_2$ ve $D_2: F \longrightarrow M_1$ bir disp ise bileşke disp

$$D=D_1D_2: F \longrightarrow M_2$$

dir. D_1 ve D_2 sırasıyla (A_1,d_1) ve (A_2,d_2) ile verilirse, D_1 için $X=[A_1]x+d_1$, D_2 için $X=[A_2]x+d_2$ dir.

$$D_1D_2(x)=D_1([A_2]x+d_2)=[A_1]([A_2]x+d_2)+d_1$$

$$=[A_1][A_2]x+[A_1]d_2+d_1$$

elde edilir. Böylece $D = D_1 D_2 : F \longrightarrow M_2$ bileşke dispi

$$D = D_1 D_2 = (A_1, d_1)(A_2, d_2) = \left(A_1 A_2,\ [A_1] d_2 + d_1\right)$$

olarak tanımlanmıştır. $[A_1]$ ve $[A_2]$ birer dönme matrisi iken $[A_1][A_2]$ de bir dönme matrisidir.

2) $D_1 = (A_1, d_1)$, $D_2 = (A_1, d_2)$ ve $D_3 = (A_3, d_3)$ birer disp olsun.

$$D_1(D_2 D_3) = (A_1,\ d_1)\left((A_2,\ d_2)(A_3,\ d_3)\right)$$

$$D_1(D_2 D_3) = (A_1,\ d_1)(A_2 A_3,\ A_2 d_3 + d_2)$$

$$D_1(D_2 D_3) = \left(A_1 A_2 A_3,\ A_1(A_2 d_3 + d_2) + d_1\right)$$

$$D_1(D_2 D_3) = (A_1 A_2 A_3,\ A_1 A_2 d_3 + A_1 d_2 + d_1)$$

$$D_1(D_2 D_3) = (A_1 A_2,\ A_1 d_2 + d_1)(A_3, d_3)$$

$$D_1(D_2 D_3) = \left((A_1,\ d_1)(A_2,\ d_2)\right)(A_3,\ d_3)$$

$$D_1(D_2 D_3) = (D_1 D_2) D_3$$

3) $I = (I_n, 0)$ ve $D = (A, d)$ displeri verilsin. D için $X = [A]x + d$, I için $X = [I_n]x = x$ dir.

$$DI(x) = D(x) = [A]x + d \text{ dir.}$$

Benzer şekilde $ID(x) = D(x)$ olduğundan $I = (I_n, 0)$ dispi özdeşlik dispidir.

4) $D = (A, d)$ dispi için $X = [A]x + d$ dir.

$$X = [A]x + d \Leftrightarrow [A]x = X - d$$

$$\Leftrightarrow \left[A^T\right][A] = \left[A^T\right](X - d)$$

$$\Leftrightarrow [I_n]x = \left[A^T\right]X - \left[A^T\right]d$$

$$\Leftrightarrow x = \left[A^T\right]X - \left[A^T\right]d$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} D^{-1} : M &\longrightarrow F \\ X &\longrightarrow D^{-1}(X) = x = \left[A^T\right]X - \left[A^T\right]d \end{aligned}$$

dir. O halde $D^{-1} = \left(A^T, -A^T d\right)$ dir.

***Sonuç 2.1.2.1* :** $SE(n)$ bileşke işlemine göre bir cebirsel gruptur.

2.1.3. Referans Çatıların Değişimi

Bir D dispi

$$D : F \longrightarrow M$$

ile verilsin. Sabit F ve hareketli M çatılarının yeni koordinat çatılarına bağlı F' ve M' konumları

$$G^{-1} : F' \longrightarrow F \quad \text{ve} \quad G : M \longrightarrow M'$$

ile verilsin. Bu durumda

$$D' : F' \longrightarrow M'$$

dispi $D' = GDG^{-1}$ ile verilmiştir.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "D"] \arrow[d, "G"'] & M \arrow[d, "G"] \\ F' \arrow[r, "D' = GDG^{-1}"'] & M' \end{tikzcd}$$

2.1.4. Homogen Dönüşümler

Disp, bir lineer dönüşüm değildir. Örneğin bir $T=\left(I_n,d\right)$ ötelemesi için

$$\begin{aligned} T: F &\longrightarrow M \\ x &\longrightarrow T\left(x\right)=x+d \end{aligned}$$

olmak üzere herhangi iki vektör x,y için

$$T\left(x+y\right)=x+y+d\ ,$$

$$T\left(x\right)=x+d$$

$$T\left(y\right)=y+d$$

dir. Bu durumda

$$T\left(x\right)+T\left(y\right)=x+y+2d\neq T\left(x+y\right)$$

olup bir öteleme dolayısıyla bir disp, lineer bir dönüşüm değildir.

Böylece IR^n in displeri, $n\times n-$matris dönüşümüyle temsil edilmeyebilir. Bu durum, $H:x_{n+1}=1$ $n-$boyutlu hiperdüzlemi gibi IR^{n+1} de IR^n embeddingi ile ortadan kaldırılabilir.

IR^{n+1} in lineer dönüşümleri, $H-$hiperdüzleminde katı cisim displerinin rolünü oynar.

IR^n de $n-$boyutlu koordinat vektörü $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ ise H hiper-düzleminde $n+1-$boyutlu vektör $x=\left(x_1,x_2,...,x_n,1\right)$ dir. Bu, $\boldsymbol{x}=\left(x,1\right)$ olarak yazılır.

IR^n in bir $D=\left(A,d\right)$ dispi IR^{n+1} in $\left[T\right]=\left[A,d\right]$ lineer dönüşümü olur ve

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir. $[T]=[A,d]$ bir lineer dönüşümdür. Gerçekten,

i) $\forall \boldsymbol{x}=(x,1), \boldsymbol{y}=(y,1)\in H$ için $\boldsymbol{x+y}=(x+y,1)\in H$

$$T(X)+T(Y)=\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+y \\ 1 \end{bmatrix}=T(X+Y)$$

ii) $\forall c\in IR$, $\forall \boldsymbol{x}=(x,1)\in H$ için $c\boldsymbol{x}=(cx,1)\in H$

$$T(cx)=\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cx \\ 1 \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}=cT(x)$$

Tanım 2.1.4.1 : $[T]=[A,d]$ $(n+1)\times(n+1)-$matrisine $D=(A,d)$ dispi ile temsil edilen *homogen dönüşüm* adı verilir.[(1)]

İki dispin bileşkesi olan $D=D_1D_2$, $[T]=[T_1][T_2]$ biçiminde homogen dönüşümlerin çarpım matrisi ile verilmiştir. $I=(I_n,0)$ özdeşlik(birim) dispin homogen dönüşümü, $[I]=\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(n+1)\times(n+1)-$boyutlu özdeşlik matrisidir. $D^{-1}=(A^T,-A^Td)$ invers dispin homogen dönüşümü ise $\left[T^{-1}\right]=\begin{bmatrix} A^T & -A^Td \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ invers matrisidir.

Sonuç 2.1.4.1 : $(n+1)\times(n+1)-$boyutlu homogen dönüşümlerin cümlesi $H(n)$ ile gösterilen bir matris grubudur.

2.2. Düzlem Displeri

2.2.1. Koordinat Dönüşümleri

Eğer $x = (\mathrm{x,y})$ F koordinat çatısında ölçülen sabit cisimde bir P noktasının koordinatları ise M de ölçülen P nin koordinatları

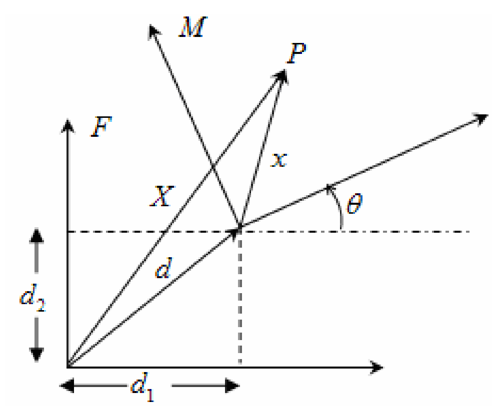
$$X = [A]x + d$$

ile verilmiştir. Burada $[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ dir.

***Tanım 2.2.1.1* :** $[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ve $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $D = (A, d)$ çifti bir

$$\begin{aligned} D : F &\longrightarrow M \\ x &\longrightarrow X = [A]x + d \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlar. Bu dönüşüme bir *düzlem dispi* adı verilir.(1)

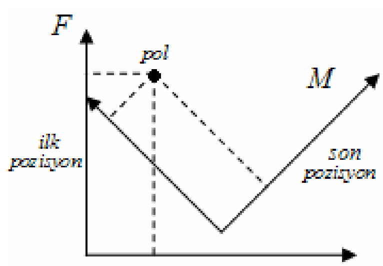


Şekil 2.1. *Biri diğerine bağlı olarak yer değiştiren bir düzlem cismi*

$[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ matrisinin inversi $\left[A^T\right]$ matrisidir. Bundan dolayı $[A]$ bir ortogonal matristir, determinantı 1 dir ve bir dönme tanımlar.

2.2.2. Bir Düzlem Dispinin Polü

Bir genel düzlem dispi için hareketsiz bir nokta vardır. Bu noktanın koordinatları her iki F ve M referans çatılarında da aynıdır. Bu noktaya *pol noktası* adı verilir.(1)



Şekil 2.2. *Bir düzlem dispinin polü*

$D = (A, d)$ disp olsun. Düzlem dispinin p pol noktasının koordinatlarını belirleyelim. p pol noktası $p = [A]p + d$ denklemini sağlar.

$$p = [A]p + d \Leftrightarrow [I_2 - A]p = d$$

$$\Leftrightarrow -[A - I_2]p = d$$

$$\Leftrightarrow p = -[A - I_2]^{-1} d$$

veya

$$p = [A]p + d \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \cos(\theta)\, p_1 - \sin(\theta)\, p_2 + d_1 \\ p_1 = \sin(\theta)\, p_1 + \cos(\theta)\, p_2 + d_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1 - \cos\theta)\, p_1 + \sin(\theta)\, p_2 = d_1 \\ -\sin(\theta)\, p_1 + (1 - \cos\theta)\, p_2 = d_2 \end{cases}$$

Sistemin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{vmatrix} = 2-2\cos\theta \neq 0$$

dır. (Aksi takdirde $2-2\cos\theta=0$ olsaydı $\cos\theta=1 \Rightarrow \theta=0+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ olurdu ki bu durumda sırf öteleme olurdu.) Sistem Cramerdir.

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & \sin\theta \\ d_2 & 1-\cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\left(\frac{d_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & d_1 \\ \sin\theta & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{d_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

elde edilir.

Özel olarak $A=I_2$ iken $p=[I_2]p+d$ olacağından $p=-[I_2-I_2]^{-1}d$ bir çözüm vermez. Disp $D=(A,d)=(I_2,d)$ dir. Bu durumda sırf öteleme vardır ve dispin pol noktası yoktur. Yani sırf ötelemede, hiç bir nokta sabit kalmaz, cismin bütün noktaları hareketlidir.

Eğer p bir D dispinin polü ise, $G(p)$ de referans çatının değişimiyle elde edilen $D'=GDG^{-1}$ dispinin polüdür. Gerçekten,

$$D'(G(p)) = GDG^{-1}(G(p)) = G(p)$$

Pol ve dönme açısı dispin geometrik özelikleridir ve referans çatıdan bağımsızdır.

2.2.3. Homogen Dönüşümlerde Pollerin Kullanılması

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

matrisini $3\times3-$tipinden matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu bir düzlem dispinin homogen dönüşüm temsilidir.

$H(3)$ matrisi, $3-$boyutlu uzayın lineer dönüşümleridir öyle ki düzlem dispine denk bir yolla $z=1$ düzlemine etki eder.

Bir $D=(A,d)$ dispinin polü, homogen dönüşümlere göre yazılan

$$\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}$$

matris karakteristik değer problemini sağlar.

Bu $\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değerlerini bulalım.

$$\begin{vmatrix} \lambda-\cos\theta & \sin\theta & -d_1 \\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta & -d_2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1\right)=0$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=e^{\pm i\theta}$$

$\lambda_1=1$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör, düzlem dispinin pol noktasıdır. Gerçekten,

$$\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A-I_2 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(A - I_2\right)p + d = 0$$

$$\Rightarrow Ap - I_2 p + d = 0$$

$$\Rightarrow Ap + d = p$$

Böylece $p = -\left[A - I_2\right]^{-1} d$ de tanımlanan $p = \left(p_1, p_2, 1\right)$ polü bu karakteristik vektördür.

$\lambda_{2,3} = e^{\pm i\theta}$ karakteristik değerleri ayrıca $\left[A\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değerleridir.

$\lambda_2 = e^{i\theta}$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör $\mathrm{X} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$ i bulalım.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = e^{i\theta}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\theta\right)x_1 - \sin\left(\theta\right)x_2 + d_1 x_3 = e^{i\theta}x_1 \\ \sin\left(\theta\right)x_1 + \cos\left(\theta\right)x_2 + d_2 x_3 = e^{i\theta}x_2 \\ x_3 = e^{i\theta}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = t \in IR - \{0\} \text{ denirse} \\ x_2 = -it \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{X} = \left(t, -it, 0\right)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\lambda_3 = e^{-i\theta}$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör $\mathrm{t} \in \mathrm{IR}\text{-}\{0\}$ olmak üzere $\mathrm{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = \left(t, it, 0\right)$ dir.

Bu X ve X^* dan c_1 ve c_2 reel ortogonal vektör çifti,

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{X + X^*}{2} \\ c_2 = \dfrac{X\text{-}X^*}{2} i \end{cases}$$

formülüyle oluşturulabilir.

$$c_1 = \frac{X + X^*}{2} = (t, 0, 0) \qquad c_2 = \frac{X\text{-}X^*}{2} i = (0, t, 0)$$

$\langle c_1, c_2 \rangle = 0$ olduğundan $c_1 \perp c_2$ dir.

Bu c_1 ve c_2 noktaların hareketli çatı koordinatları C_1 ve C_2 ise,

$$C_1 = [A, d] c_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (t\cos\theta, t\sin\theta, 0) = \cos(\theta) c_1 + \sin(\theta) c_2$$

$$C_2 = [A, d] c_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = (-t\sin\theta, t\cos\theta, 0) = -\sin(\theta) c_1 + \cos(\theta) c_2$$

olarak bulunur. Bu vektörler IR^3 ün $z = 0$ düzlemini gerer ve $[A, d]$ dönüşümü, bu düzlemdeki reel vektörler üzerinde bir düzlem dönmesi rolünü oynar.

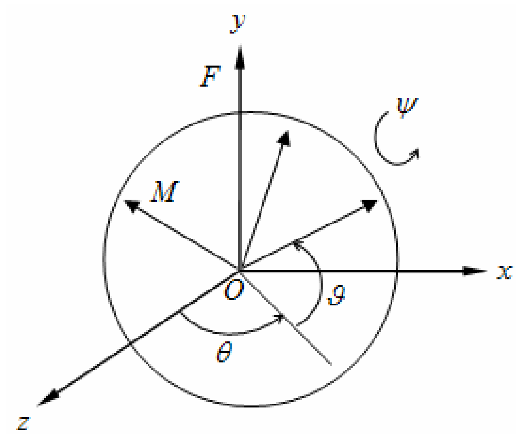
2.3. Küresel Displer

2.3.1. Koordinat Dönüşümleri

Bir M hareketli çatıdaki $3-$boyutlu bir cismin sabit bir F çatısına bağlı dönmesi

$$X = [A] x$$

denklemiyle verilir. Burada x ve X sırasıyla F sabit çatı ve M hareketli çatıdaki bir noktanın koordinatlarıdır.



Şekil 2.3. *Biri diğerine bağlı olarak* $3-$ *boyutlu bir cismin dönmesi*

Dönüşümün bir katı dönüşüm olabilmesi için $[A]$ matrisi

$$\langle X, X \rangle = X^T X = x^T \left[A^T\right][A]x = x^T x = \langle x, x \rangle$$

eşitliğini sağlamalı yani,

$$\left[A^T\right][A] = [I_3]$$

olmalıdır. Bu şart, bir matrisin ortogonal matris olma şartıdır. Dönmeler, determinantı 1 olan ortogonal matrisler ile verilir. Bu ortogonal matrislerin cümlesi $SO(3)$ ile gösterilir ve $SO(3)$ matrislerde çarpma işlemine göre bir matris grubudur.(1)

$X = [A]x$ dönüşümü, başlangıçta F ile çakışan M çatısının bir dispi olarak ele alınabilir. Böyle ele alındığında, cisimdeki bir P noktasının ilk konumu x ve son konumu X dir. $X = [A]x$ ile belli olan dönüşüme *küresel disp* adı verilir.(1)

x, y ve z eksenleri etrafındaki dönmeler sırasıyla R_x, R_y ve R_z ile gösterilirse,

$$A : F \longrightarrow M$$

dönme dönüşümü,

$$[A] = R_y R_x R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak da bellidir.

2.3.2. Bir Ortogonal Matrisin Karakteristik Vektörleri

$[A]$ nın etkisi altında hareketli cisimde sabit uzaya göre konumu değişmeyen noktaların cümlesi,

$$[A]x = x$$

matris denkleminin çözümleridir. Bu denklemi,

$$[A]x = \lambda x$$

karakteristik değer problemine genişletebiliriz. Bu, M deki X koordinatları, F deki orijinal x koordinatlarının bir sabit λ katı demektir. Biz $\lambda = 1$ için, mevcut olan çözümleriyle ilgileneceğiz.

$[A]x = x$ denkleminin $x = 0$ dan farklı çözümlerinin olması için $[\lambda I_3 - A]$ katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Buna göre genel bir $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dönme matrisi için,

$$|\lambda I_3 - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 \left(a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) - \lambda\left(M_{11} + M_{22} + M_{33}\right) + \det\left[A\right] = 0$$

karakteristik polinomunu verir. Burada M_{ii}, $i = 1,2,3$ $i-$yinci satır ve $i-$yinci sütun silinmesiyle elde edilen minördür.

Bir dönme matrisi için $\det\left(A\right) = 1$ ve $A^T = A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\tilde{A} = \tilde{A}$ olduğu kullanılırsa $M_{ii} = a_{ii}$ bulunur. Böylece karakteristik polinom,

$$\lambda^3 - \lambda^2 \left(a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) + \lambda\left(a_{11} + a_{22} + a_{33}\right) - 1 = 0$$

haline gelir. $\lambda = 1$ bir kök olduğundan karakteristik polinom

$$\left(\lambda - 1\right)\left[\lambda^2 - \lambda\left(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1\right) + 1\right] = 0$$

dır. $İzA = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a$ ile gösterilirse,

$$\lambda^2 - \lambda\left(a - 1\right) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{\left(a-1\right) \mp \left(\sqrt{\left(a-1\right)^2 - 4}\right)}{2}$$

ve

$$\frac{İzA - 1}{2} = \frac{a-1}{2} = \cos\theta$$

denirse,

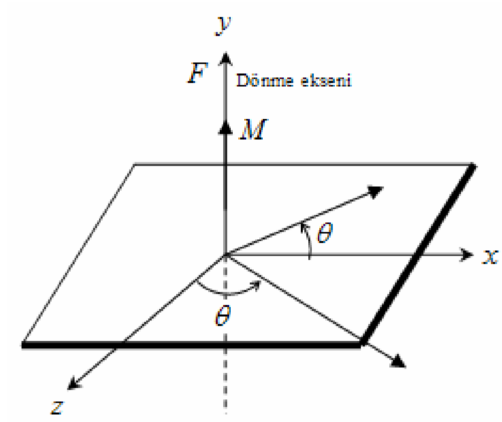
$$\lambda_{2,3} = \cos\theta \mp \left(\sqrt{\cos^2\theta - 1}\right)$$

$$\lambda_{2,3} = \cos\theta \mp i\sin\theta$$

$$\lambda_{2,3} = e^{\mp i\theta}$$

elde edilir.

$\left[A\right]$ nın $\lambda = 1$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör b olsun. $\left[A\right]$ nın etkisi altında hareketli cisimde konumu değişmeyen noktaların cümlesi, $[A]x = x$ denkleminin çözümü olduğundan, b yönünde $v = tb$ doğrusu üzerindeki bütün noktalar sabittir. Bu cismin dönme eksenidir.



Şekil 2.4. *Her bir dönme sabit bir eksen etrafında dönmeye indirgenir.*

Özel olarak dönme matrisi $[A]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ olsun. $[A]$ matrisinin karakteristik değerlerini bulalım.

$$[A]x = \lambda x \Rightarrow |\lambda I_3 - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1\right)=0$$

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = e^{i\theta},\quad \lambda_3 = e^{-i\theta}$$

$\lambda_1 = 1$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör $b=(b_1,b_2,b_3)$ olsun.

$$[A]b = b \Rightarrow \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) b_1 - \sin(\theta) b_2 = b_1 \\ \sin(\theta) b_1 + \cos(\theta) b_2 = b_2 \\ b_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\cos\theta) b_1 - \sin(\theta) b_2 = 0 \\ -\sin(\theta) b_1 + (1-\cos\theta) b_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemin katsayılar matrisinin determinantı $\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{vmatrix} = 2-2\cos\theta \neq 0$

olduğundan $b_1 = b_2 = 0$ dır. Bu durumda $b = (0,0,b_3)$ elde edilir.

$\lambda_2 = e^{i\theta}$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$ olsun.

$$[A]\mathrm{x} = e^{i\theta}\mathrm{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = e^{i\theta} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) x_2 = e^{i\theta} x_1 \\ x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) = e^{i\theta} x_2 \\ x_3 = e^{i\theta} x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) x_1 - \sin(\theta) x_2 = (\cos\theta + i\sin\theta) x_1 \\ x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta) x_2 \\ x_3 = (\cos\theta + i\sin\theta) x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \in IR - \{0\} \qquad \text{denirse} \\ x_2 = -it \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Bu durumda $\mathrm{x} = (t, -it, 0)$ elde edilir.

Benzer şekilde $\lambda_3 = e^{-i\theta}$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör $t \in IR - \{0\}$ olmak üzere $\mathrm{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (t, it, 0)$ bulunur.

x ve x^* dan

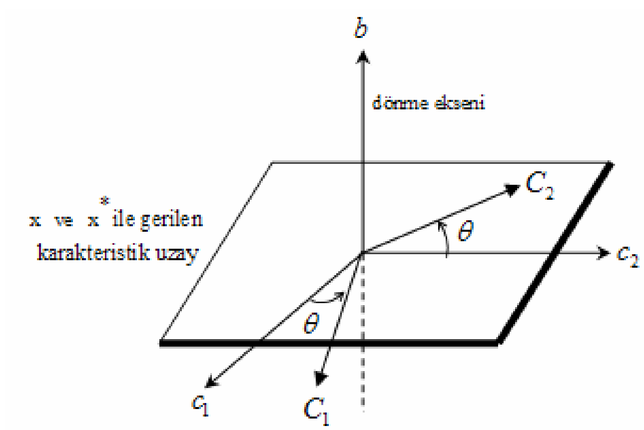
$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{x + x^*}{2} = (t, 0, 0) \\ c_2 = \dfrac{x - x^*}{2} i = (0, t, 0) \end{cases}$$

reel ortogonal vektörleri oluşturulabilir. Bu noktaların hareketli çatı koordinatları C_1 ve C_2 olmak üzere

$$C_1 = [A]c_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (t\cos\theta, t\sin\theta, 0)$$

$$C_2 = [A]c_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = (-t\sin\theta, t\cos\theta, 0)$$

dir. Bu b ye dik x ve x^* karakteristik vektörleriyle tanımlanan reel düzlemde $\theta-$açılık bir dönmedir.



Şekil 2.5. *Dönme matrisi için ortogonal karakteristik uzay ve b reel karakteristik vektör*

2.3.3. Cayley Formülü

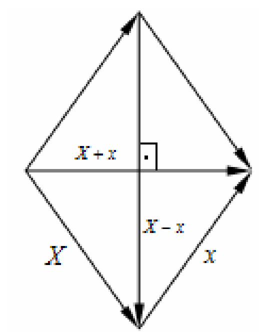
Orijin etrafında bir dönme hareketi $[A]x = X$ ile verilmekte olup, bir harekette cismin noktaları arasındaki uzaklık sabit kalacağından,

$$\langle x, x\rangle = \langle X, X\rangle$$

dır.

$$\langle X - x, X + x\rangle = \langle X, X\rangle + \langle X, x\rangle - \langle x, X\rangle - \langle x, x\rangle = 0$$

yazılabilir. Bu, dik açı altında kesişen ve kenarları X ile x olan bir eşkenar dörtgenin köşegenlerinin $X + x$ ve $X - x$ olduğunu ifade eder.



Şekil 2.6. *Bir antisimetrik matrisin işlevi*

Böylece

$$f = X - x \text{ ve } g = X + x$$

vektörleri ortogonal olup, $[A]x = X$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$f = [A - I_n]x, \quad g = [A + I_n]x, \quad \langle f, g\rangle = 0$$

bulunur. $[A]x = -x$ durumu yani $[A]$ ortogonal matrisinin karakteristik değerlerinden birisinin -1 olma durumu hariç tutulursa o zaman $[A + I_n]$ matrisi regülerdir. Bu durumda,

$$x = \left[A + I_n\right]^{-1} g$$

$$f = \left[A - I_n\right]\left[A + I_n\right]^{-1} g$$

elde edilir.

$$\left[B\right] = \left[A - I_n\right]\left[A + I_n\right]^{-1}$$

denirse,

$$f = \left[B\right] g$$

bulunur.

***Teorem 2.3.3.1* :** $\left[B\right]$ matrisi antisimetrik bir matristir.

***İspat* :** $\langle f, g \rangle = \langle \left[B\right] g, g \rangle = 0$

$$\left[B\right] g = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} g_1 + b_{12} g_2 + \ldots + b_{1n} g_n \\ \vdots \\ b_{n1} g_1 + b_{n2} g_2 + \ldots + b_{nn} g_n \end{bmatrix}$$

$$\langle Bg, g \rangle = \left[Bg\right]^T g = 0$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} g_1 + b_{12} g_2 + \ldots + b_{1n} g_n & \cdots b_{n1} g_1 + b_{n2} g_2 + \ldots + b_{nn} g_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = 0$$

$$b_{11} g_1 g_1 + b_{12} g_2 g_1 + \ldots + b_{1n} g_n g_1 + \cdots + b_{n1} g_1 g_n + b_{n2} g_2 g_n + \ldots + b_{nn} g_n g_n = 0$$

$$\sum_{i \neq j}^{n} \left(b_{ij} + b_{ji}\right) g_i g_j + \sum_{i=j}^{n} b_{ij} g_i g_j = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik her g için doğru olduğundan

$$\underbrace{b_{ij} + b_{ji} = 0}_{i \neq j}, \quad \underbrace{b_{ij} = 0}_{i=j} \Rightarrow b_{ij} = -b_{ji}, \; b_{ii} = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $\left[B\right]$ matrisi antisimetrik bir matristir.

$$[B]=[A-I_n][A+I_n]^{-1}$$

$$[B][A+I_n]=[A-I_n]$$

$$[B][A]+[B]=[A-I_n]$$

$$[A]-[B][A]=[I_n+B]$$

$$[A][I_n-B]=[I_n+B]$$

dır.

$[B]$ matrisi antisimetrik bir matris olduğundan $\det B \geq 0$ dır[(2)] ve bir antisimetrik matrisin tüm karakteristik değerleri imajinerdir. Gerçekten, $[B]$ matrisine karşılık gelen antisimetrik bir dönüşüm,

$$\begin{aligned} B : IR^n &\longrightarrow IR^n \\ x &\longrightarrow B(x)=\lambda x \end{aligned}$$

olsun.

$$\langle B(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle$$

$$\langle x, B(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda} \langle x, x\rangle$$

dır. Burada $\overline{\lambda}$, λ nın eşleniğidir.

B antisimetrik bir dönüşüm olduğundan

$$\langle B(x), x\rangle = -\langle x, B(x)\rangle$$

dir.

$$\lambda\langle x, x\rangle = -\overline{\lambda}\langle x, x\rangle$$

$$\lambda = -\overline{\lambda}$$

$$\lambda + \overline{\lambda} = 0$$

$$2\operatorname{Re}(\lambda)=0$$

λ sırf imajiner veya $\lambda = 0$ dır . Özel olarak $\lambda = 1$ için $\det(\lambda I_n - B) \neq 0$ olup $[I_n - B]$ matrisi regülerdir. Böylece

$$[A][I_n - B] = [I_n + B]$$

$$[A] = [I_n + B][I_n - B]^{-1}$$

Cayley formülünü veya Cayley formülüne denk olan,

$$[B] = [A - I_n][A + I_n]^{-1}$$

$$[B][A + I_n] = [A - I_n]$$

$$[B][A] + [B] = [A - I_n]$$

$$[I_n + B] = [A] - [B][A]$$

$$[I_n + B] = [I_n - B][A]$$

$$[A] = [I_n - B]^{-1}[I_n + B]$$

formülünü elde ederiz.

Şimdi $[B]$ antisimetrik matrisinin Cayley formülü yardımıyla bir ortogonal matris tanımladığını gösterelim.

$$[A] \;\; = [I_n - B]^{-1}[I_n + B]$$

$$[A]^T = [I_n + B]^T\left([I_n - B]^{-1}\right)^T$$

$$[A]^T = \left[I_n + B^T\right]\left([I_n - B]^T\right)^{-1}$$

$$[A]^T = \left[I_n + B^T\right]\left(\left[I_n - B^T\right]\right)^{-1}$$

$$[A]^T = [I_n - B]\left([I_n + B]\right)^{-1}$$

dir.

$$[A]^T[A]=[I_n-B]\left([I_n+B]\right)^{-1}[I_n+B][I_n-B]^{-1}=[I_n]$$

olup $[A]$ ortogonal bir matristir.

Genel olarak her $[A]$ ortogonal bir matrisi, antisimetrik bir matris yardımıyla elde edilemez. Bunun için $[A+I_n]$ matrisi regüler olmalıdır. Örneğin,

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \text{-1} & 0\\ 0 & 0 & \text{-1}\end{bmatrix}$$

matrisi ortogonaldir. Fakat $\det(A+I_3)=0$ olduğundan $[A+I_3]$ matrisi regüler değildir.

Tanım 2.3.3.1 : A ve I mertebeleri aynı olan birer karesel matris olmak üzere, A bir dönme matrisi ve $A+I$ regüler ise A matrisine *Cayley matrisi* denir.[(2)]

Örnek 2.3.3.1 : $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ antisimetrik matrisi verilsin. Bu matristen Cayley formülü ile bir pozitif ortogonal matris elde edelim.

$$A=\left(I_3+B\right)\left(I_3-B\right)^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/5 & 2/5 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 2/5 & 3/10 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-3/5 & 4/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4/5 & 3/5 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=A^T \text{ ve } \det A=1 \text{ olduğundan } A \text{ bir dönme matrisidir.}$$

2.3.4. $3\times 3-$tipinden Antisimetrik Matrisler

Bir $[B]$ $3\times 3-$tipinden antisimetrik matrisi

$$[B]=\begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. $[B]$ matrisi sadece 3 tane bağımsız elemana sahip olduğundan $3\times 3-$tipinden antisimetrik matrisler cümlesi IR^3 arasında $1-1$ bir eşleme vardır. $3\times 3-$tipinden antisimetrik matrisler cümlesi A_3 ile gösterilirse bu eşleme,

$$f: A_3 \longrightarrow IR^3$$

$$[B]=\begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow f\left([B]\right)=b=\left(b_1, b_2, b_3\right)$$

ile kurulabilir. Bu dönüşüm,

$$\forall\ y\in IR^3 \text{ için } [B]\,y=b\times y$$

özelliğine sahiptir.

Cayley formülündeki $[B]$ antisimetrik matrisinden elde edilen b vektörü, $[A]$ dönme matrisinin $\lambda=1$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektördür. Bunu görmek için, bu karakteristik vektörün

$$[A-I_3]\,x=0$$

denkleminin çözümü olduğunu göstermek yeterlidir. Cayley formülünde, $[A]x = x$ yazılırsa,

$$[A]x = \left([I_3 - B]\right)^{-1}[I_3 + B]x$$

$$[I_3 - B]x = [I_3 + B]x$$

$$[B]x = 0$$

sonucu elde edilir.

$$[B]x = 0$$

$$b \times x = 0$$

olduğundan $[A - I_3]x = 0$ denkleminin bir çözümü olarak b elde edilir.

2.3.5. Rodrigues Denklemi (Dönmeler için)

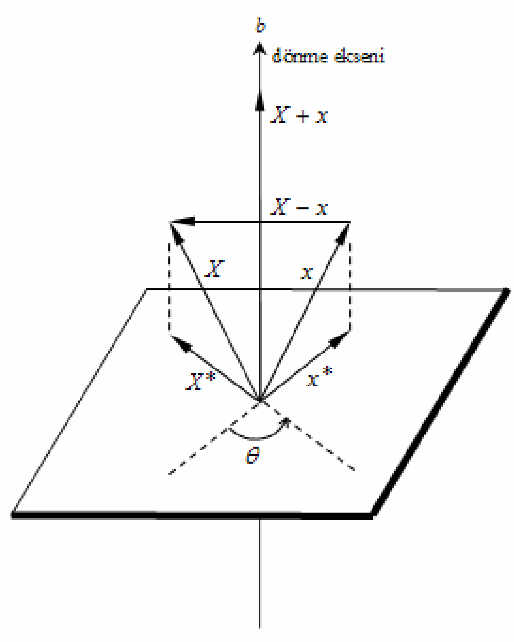
Bir $[A]$ pozitif ortogonal matrisi verildiğinde Cayley formülünden bir $[B]$ antisimetrik matrisi, sabit ve hareketli çatıya göre dönen bir cismin noktalarının, koordinatları arasında,

$$X - x = [B](X + x)$$

bağıntısını elde etmiştik. Antisimetrik matrisler ve vektörel çarpım arasındaki ilişki kullanılırsa,

$$X - x = b \times (X + x)$$

yazılabilir. Bu denklem, dönmeler için *Rodrigues denklemi* ve b vektörü de olarak *Rodrigues vektörü* olarak bilinir. [1]



Şekil 2.7. *Bir dönme öncesi ve dönme sonrası x ile X in konumları ve dönme ekseni*

X ve x arasındaki ilişki X ve x in düzleme izdüşümleri olan X^* ve x^* arasında da geçerlidir. Gerçekten X ve x vektörlerinin, b vektörünü normal kabul eden ve O dan geçen düzleme dik izdüşümleri X^* ve x^* olsun. Bu durumda b vektörü X^*, x^* ve $X^* - x^*$ vektörlerine diktir. *Şekil 2.7* den

$$X = X^* + \lambda b, \quad x = x^* + \lambda b$$

$$X^* = X - \lambda b, \quad x^* = x - \lambda b$$

$$[A]x^* = [A](x - \lambda b)$$

$$[A]x^* = [A]x - \lambda [A]b$$

$$[A]x^* = X - \lambda b$$

$$[A]x^* = X^*$$

yazılabilir. $[A]x = X$ dönmesinden elde edilen

$$X - x = b \times (X + x)$$

denkleminin düzlemdeki karşılığı $\left[A\right]x^* = X^*$ dönmesi yardımıyla

$$X^* - x^* = b \times \left(X^* + x^*\right)$$

dir. $X^* - x^*$ vektörünün büyüklüğü,

$$\left\|X^* - x^*\right\| = \|b\| \left\|X^* + x^*\right\| \sin\left(\sphericalangle b, X^* + x^*\right)$$

$$\left\|X^* - x^*\right\| = \|b\| \left\|X^* + x^*\right\| 1$$

$$\left\|X^* - x^*\right\| = \|b\| \left\|X^* + x^*\right\|$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{\left\langle X^* + x^*, X^* + x^*\right\rangle}$$

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{\left\langle X^*, X^*\right\rangle + \left\langle X^*, x^*\right\rangle + \left\langle x^*, X^*\right\rangle + \left\langle x^*, x^*\right\rangle}$$

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{\left\langle X^*, X^*\right\rangle + 2\left\langle X^*, x^*\right\rangle + \left\langle x^*, x^*\right\rangle}$$

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{\left\|X^*\right\|^2 + 2\left\|X^*\right\|\left\|x^*\right\|\cos\theta + \left\|x^*\right\|^2}$$

$\left\|X^*\right\| = \left\|x^*\right\|$ olduğu göz önüne alınırsa ve $\left\|x^*\right\| = k$ denirse,

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{k^2 + 2k^2\cos\theta + k^2}$$

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{2k^2 + 2k^2\cos\theta}$$

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{2k^2\left(1 + \cos\theta\right)}$$

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{2k^2\left(1 + \left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)\right)}$$

$$\left\|X^* + x^*\right\| = \sqrt{4k^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\left\| X^* + x^* \right\| = 2k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak,

$$\left\| X^* - x^* \right\| = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

elde edilir.

$$\left\| X^* - x^* \right\| = \|b\| \left\| X^* + x^* \right\|$$

$$\|b\| = \frac{\left\| X^* - x^* \right\|}{\left\| X^* + x^* \right\|} = \frac{2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\|b\| = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

bulunur. b vektörü yönündeki birim vektör $s = (s_x, s_y, s_z)$ ise b vektörünün veya buna denk olan $[B]$ antisimetrik matrisinin bileşenleri,

$$\begin{cases} b_1 = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) s_x \\ b_2 = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) s_y \\ b_3 = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) s_z \end{cases}$$

dir. Buradaki s_x, s_y, s_z sabitlerine *Rodrigues parametreleri* adı verilir.[(1)]

2.3.6. Euler Parametreleri

$[A]$ ortogonal matrisi için Cayley formülü, θ dönme açısı ve $[B]=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)[S]$ ile belirli olan s birim vektörünün bileşenleri cinsinden

$$[A]=[I-B]^{-1}[I+B]$$

$$[A]=\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right]^{-1}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right]$$

olarak yazılabilir.

$$C=\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right]$$

matrisindeki sabitlere $[A]$ nın *Euler parametreleri* denir.[(1)] Bu parametreler,

$$\begin{cases} c_0=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ c_1=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_x \\ c_2=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_y \\ c_3=\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_z \end{cases}$$

dır. Bu denklem geliştirilirse,

$$[A]=[I-B]^{-1}[I+B]$$

$$[A]=\left[I-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right]^{-1}\left[I+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right]$$

$$[A]=\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right]^{-1}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right]$$

dır. $X=\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S\right]$ ve $\frac{\theta}{2}=\psi$ denirse

$$X=\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & \cos\psi\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -s_z\sin\psi & s_y\sin\psi\\ s_z\sin\psi & 0 & -s_x\sin\psi\\ -s_y\sin\psi & s_x\sin\psi & 0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}\cos\psi & s_z\sin\psi & -s_y\sin\psi\\ -s_z\sin\psi & \cos\psi & s_x\sin\psi\\ s_y\sin\psi & -s_x\sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}$$

elde edilir. $\det X=\cos\psi$ dir. $X^{-1}=\dfrac{1}{\det X}\tilde{X}$ olduğundan,

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix}\cos^2\psi+s_x^2\sin^2\psi & -s_z\sin\psi\cos\psi+s_xs_y\sin^2\psi & s_y\sin\psi\cos\psi+s_xs_z\sin^2\psi\\ s_z\sin\psi\cos\psi+s_xs_y\sin^2\psi & \cos^2\psi+s_y^2\sin^2\psi & -s_x\sin\psi\cos\psi+s_ys_z\sin^2\psi\\ -s_y\sin\psi\cos\psi+s_xs_z\sin^2\psi & s_x\sin\psi\cos\psi+s_ys_z\sin^2\psi & \cos^2\psi+s_z^2\sin^2\psi\end{bmatrix}$$

$$X^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\psi+s_x^2\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi} & -s_z\sin\psi+s_xs_y\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi} & s_y\sin\psi+s_xs_z\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\\ s_z\sin\psi+s_xs_y\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi} & \cos\psi+s_y^2\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi} & -s_x\sin\psi+s_ys_z\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\\ -s_y\sin\psi+s_xs_z\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi} & s_x\sin\psi+s_ys_z\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi} & \cos\psi+s_z^2\dfrac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\end{bmatrix}$$

$$X^{-1}=\cos\psi\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\sin\psi\begin{bmatrix}0 & -s_z & s_y\\ s_z & 0 & -s_x\\ -s_y & s_x & 0\end{bmatrix}+\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\begin{bmatrix}s_x^2 & s_xs_y & s_xs_z\\ s_xs_y & s_y^2 & s_ys_z\\ s_xs_z & s_ys_z & s_z^2\end{bmatrix}$$

$$X^{-1}=\cos\psi[I]+\sin\psi[S]+\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\begin{bmatrix}1-s_y^2-s_z^2 & s_xs_y & s_xs_z\\ s_xs_y & 1-s_x^2-s_z^2 & s_ys_z\\ s_xs_z & s_ys_z & 1-s_x^2-s_y^2\end{bmatrix}$$

$$X^{-1}=\cos\psi[I]+\sin\psi[S]+\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-s_y^2-s_z^2 & s_xs_y & s_xs_z\\ s_xs_y & -s_x^2-s_z^2 & s_ys_z\\ s_xs_z & s_ys_z & -s_x^2-s_y^2\end{bmatrix}\right\}$$

$$X^{-1}=\cos\psi[I]+\sin\psi[S]+\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-s_z&s_y\\s_z&0&-s_x\\-s_y&s_x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-s_z&s_y\\s_z&0&-s_x\\-s_y&s_x&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$X^{-1}=\cos\psi[I]+\sin\psi[S]+\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\left[I+S^2\right]$$

olarak hesaplarız.

$$[A]=X^{-1}\left[\cos(\psi)I+\sin(\psi)S\right]$$

$$[A]=\cos\psi[I]+\sin\psi[S]+\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\left[I+S^2\right]\left[\cos(\psi)I+\sin(\psi)S\right]$$

$$[A]=\cos^2\psi[I]+\sin\psi\cos\psi[S]+\sin\psi\cos\psi[S]+\sin^2\psi\left[S^2\right]$$
$$+\sin^2\psi\left[I+S^2\right]+\frac{\sin^3\psi}{c\,\mathrm{os}\psi}[S]\left[I+S^2\right]$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte $[S]\left[I+S^2\right]=0$ dır. Gerçekten, $[S]$ matrisinin karakteristik polinomu,

$$\det[\lambda I-S]=\begin{vmatrix}\lambda&s_z&-s_y\\-s_z&\lambda&s_x\\s_y&s_x&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3+\lambda\left(s_x^2+s_y^2+s_z^2\right)$$

$$=\lambda^3+\lambda$$

dır. Cayley-Hamilton Teoremine göre her karesel matris kendi karakteristik denklemini sağlar.(5) O halde,

$$[S]^3+[S]=0$$

dır. Bu durumda, $[A]$ matrisini,

$$[A]=\cos^2\psi[I]+\sin\psi\cos\psi[S]+\sin\psi\cos\psi[S]+\sin^2\psi\left[S^2\right]+\sin^2\psi\left[I+S^2\right]$$

$$[A]=\cos^2\psi[I]+2\sin\psi\cos\psi[S]+\sin^2\psi\left[S^2\right]+\sin^2\psi\left[I+S^2\right]$$

$$[A]=\cos^2\psi[I]+2\sin\psi\cos\psi[S]+\left(\sin^2\psi+\sin^2\psi\right)\left[S^2\right]+\sin^2\psi[I]$$

$$[A]=[I]+\sin 2\psi[S]+(1-\cos 2\psi)\left[S^2\right],\quad \frac{\theta}{2}=\psi \text{ olduğundan}$$

$$[A]=[I]+\sin\theta[S]+(1-\cos\theta)\left[S^2\right]$$

biçiminde elde ederiz.

$[S]$ matrisi antisimetrik bir matris olduğundan

$$\left[S^T\right]=-[S] \qquad \left[S^T\right]^2=\left[S^2\right]$$

dir.

$$[A]=[I]+\sin\theta[S]+(1-\cos\theta)\left[S^2\right]$$

$$\left[A^T\right]=[I]-\sin\theta[S]+(1-\cos\theta)\left[S^2\right]$$

$$\left[A-A^T\right]=2\sin\theta[S]$$

bulunur.

Böylece bir $[A]$ Cayley matrisi verildiğinde, θ dönme açısını ve $s=\left(s_x,s_y,s_z\right)$ birim dönme eksenini,

$$\cos\theta=\frac{izA-1}{2}$$

$$[S]=\frac{1}{2\sin\theta}\left[A-A^T\right]$$

eşitliklerinden bulabiliriz.

Örnek 2.3.6.1 : $A=\begin{bmatrix} 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ 28/45 & 29/45 & -4/9 \\ -4/45 & 28/45 & 7/9 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin.

$\det A = 1$, $A^T = \begin{bmatrix} 7/9 & 28/45 & -4/45 \\ -4/9 & 29/45 & 28/45 \\ 4/9 & -4/9 & 7/9 \end{bmatrix} = A^{-1}$ ve $\det\left(A+I\right) = \dfrac{32}{5} \neq 0$ olduğundan

A matrisi bir Cayley matrisidir. A matrisine karşılık gelen dönme açısını ve dönme eksenini bulalım.

$$\cos\theta = \frac{\dot{I}zA - 1}{2} = \frac{3}{5}$$

Dönme açısı $\theta = \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right) = 53^{\circ}$

bulunur. $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ ise $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ dır.

$$\left[S\right] = \frac{1}{2\sin\theta}\left[A - A^T\right]$$

$$\left[S\right] = \frac{5}{8}\left\{\begin{bmatrix} 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ 28/45 & 29/45 & -4/9 \\ -4/45 & 28/45 & 7/9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/9 & 28/45 & -4/45 \\ -4/9 & 29/45 & 28/45 \\ 4/9 & -4/9 & 7/9 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\left[S\right] = \frac{5}{8}\begin{bmatrix} 0 & -16/15 & 8/15 \\ 16/15 & 0 & -16/15 \\ -8/15 & 16/15 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[S\right] = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

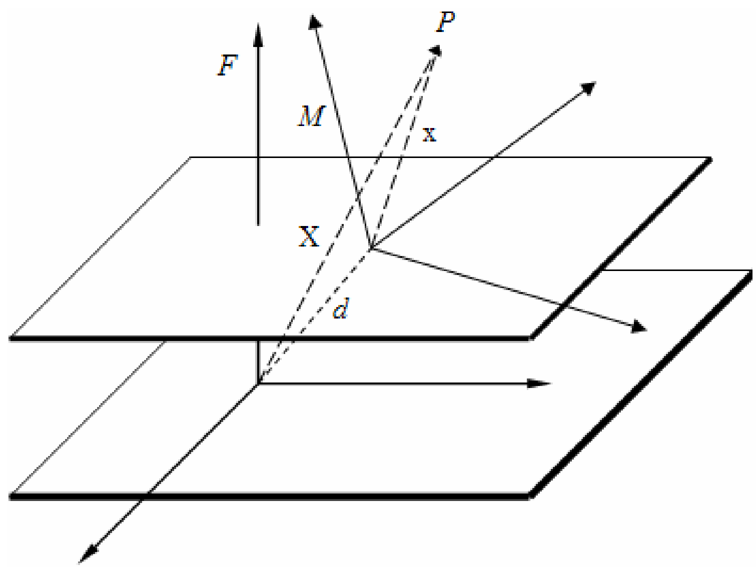
Dönme ekseni $s = \left(s_x, s_y, s_z\right) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

dir.

2.4. Uzay Displeri

2.4.1. Koordinat Dönüşümleri

$3-$boyutlu uzayda iki katı cismin birbirine bağlı konumu, M hareketli çatıdaki bir noktanın $\mathrm{x}=(x,y,z)$ koordinatlarını, F sabit çatısındaki $\mathrm{X}=(X,Y,Z)$ koordinatları cinsinden belirleyen bir dönüşümle tanımlanır.



Şekil 2.8. *Biri diğerine bağlı bir cismin uzaysal hareketi*

Dönüşüm,

$$X=[A]x+d$$

ile verilmiştir. Burada $[A]$ $3\times 3-$tipinden bir dönme matrisi ve $d=(d_1,d_2,d_3)$ öteleme vektörüdür. Bu dönüşüm M deki noktalar arasındaki uzaklığı koruduğundan bir katı dönüşümdür. Bu dönüşüme *uzay dispi* denir.(1)

2.4.2. Bir Dispin Vida Ekseni

Bir uzay dispi etkisi altında uzayda sabit kalan, hareketli bir cisimdeki noktaları ele alacağız. Bu c noktaları, disp öncesi ve sonrası aynı koordinatlara sahiptir. Buna göre bu noktalar,

$$c = [A]c + d$$

denklemini veya

$$[I - A]c = d$$

denklemini sağlamalıdır. Bu denklemin çözümü

$$c = -[A - I]^{-1} d$$

dir. Ancak $3\times3-$tipinden bütün dönme matrisinin karakteristik değerlerinden biri 1 olduğundan $[A-I]$ matrisi singülerdir. Sonuç olarak bir uzaysal dispin sabit noktaları yoktur.

Genel olarak $n\times n-$tipinden bir $[A]$ dönme matrisi için n çift ise, bir tek sabit nokta vardır ve bu nokta dispin pol noktası olarak adlandırılır. n tek ise, $[A]$ matrisinin karakteristik değerlerinden biri 1 olduğundan $[A-I]$ matrisi singülerdir ve dispte sabit nokta yoktur.

Her ne kadar bir uzaysal disp sabit noktalara sahip olmasa da vida ekseni olarak adlandırılan bir sabit doğruya sahiptir. Bu doğru disp öncesi ve sonrası uzayda aynı konuma sahiptir. Sabit doğru üzerindeki her bir nokta, doğru boyunca hareket etmiştir.

Bu doğrunun doğrultmanı Rodrigues vektörü olarak bilinen $[A]$ matrisinin dönme eksenidir. Bu doğrunun konumunu belirleyelim :

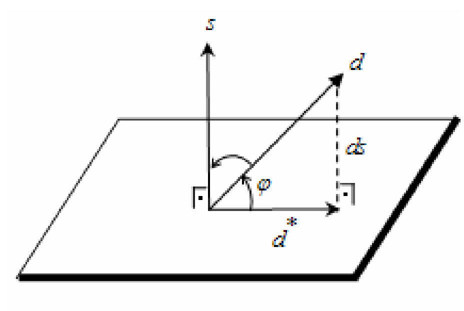
d^*, b vektörüne dik bir düzlem üzerine d öteleme vektörünün izdüşümü olsun.

$$[I-A]c=d^*$$

denklemi, b ye dik düzlemde ötelenen ve b etrafında dönen düzlem dispinin c pol noktasını tanımlar. Aranan doğru,

$$L=c+tb$$

dir. Disp, bu doğru etrafında bir sırf dönmeye ve doğru boyunca $ds=d-d^*$ miktarı ötelemeye indirgenir. Burada $s=\dfrac{b}{\|b\|}$ dir. Buna bir *vida dispi* denir.[1]



Şekil 2.9.

Şekil 2.9 dan,

$$\langle d,s\rangle=\|d\|\|s\|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\|d\|\sin\varphi \text{ ve } \sin\varphi=\frac{ds}{\|d\|} \text{ olduğundan } \langle d,s\rangle=ds$$

dir.

$$c=[A]c+d^*$$

$$c=[I-B]^{-1}[I+B]c+d^*$$

$$[I-B]c=[I+B]c+[I-B]d^*$$

$$[I-B-I-B]c=[I-B]d^*$$

$$[B]c = -\frac{1}{2}[I - B]d^*$$

elde edilir. Bunu vektör formunda yazarsak,

$$[B]c = -\frac{1}{2}[I - B]d^*$$

$$b \times c = -\frac{1}{2}\left(d^* - b \times d^*\right)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafını b ile vektörel çarparsak,

$$b \times (b \times c) = -\frac{1}{2}\left(b \times d^* - b \times \left(b \times d^*\right)\right)$$

$a \times (b \times c) = (a.c)b - (a.b)c$ (6) olduğundan,

$$\underbrace{(b.c)}_{0}b - (b.b)c = -\frac{1}{2}\left(b \times d^* - \underbrace{\left(b.d^*\right)}_{0}b + (b.b)d^*\right)$$

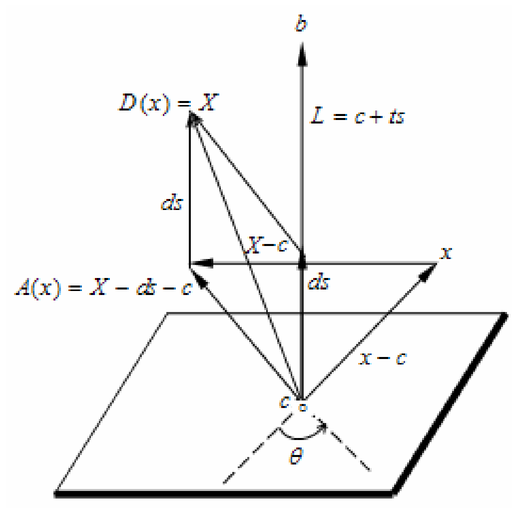
$$(b.b)c = \frac{1}{2}\left(b \times d^* + (b.b)d^*\right)$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{b \times d^*}{b.b} + d^*\right)$$

dır. Vida ekseni boyunca öteleme miktarı $d - d^*$ vektörünün büyüklüğüdür.

2.4.3. Rodrigues Denklemi (Uzaysal Disp İçin)

Dönmeler için verilen Rodrigues denklemi, $L = c + ts$ vida ekseni kullanılarak uzaysal dispe kolayca genelleştirilebilir. c, vida ekseni üzerinde bir nokta olsun. x ve X yerine $x - c$ ve $X - (ds + c)$ vektörleri kullanılarak Rodrigues denklemi elde edilir.



Şekil 2.10. *Disp öncesi ve sonrası* x *ile* X *in konumu ve vida ekseni*

Rodrigues denklemi,

$$X-(ds+c)-x+c=b\times\big(X-(ds+c)+x-c\big)$$

$$X-x-ds=b\times(X+x-2c-ds)$$

$$X-x-ds=b\times(X+x-2c)+\underbrace{b\times(-ds)}_{0}$$

$$X-x=b\times(X+x-2c)+ds$$

olarak elde edilir. Bu genel bir *uzaysal disp için Rodrigues denklemi*dir.

Vida ekseni boyunca öteleme miktarı olan ds vektörünün büyüklüğü

$$(X-x).s=\|ds\|$$

ile verilebilir. Gerçekten, Rodrigues denkleminden,

$$X-x=b\times(X+x-2c)+ds$$

$$X-x=\big(\tan(\theta/2)s\big)\times(X+x-2c)+\|ds\|.s$$

yazılabilir. Her iki tarafı s ile çarparsak,

$$(X-x).s=\Big(\big(\tan(\theta/2)s\big)\times(X+x-2c)\Big).s+\|ds\|\underbrace{s.s}_{1}$$

$$(X-x).s = \underbrace{\det\left(\tan(\theta/2)\,s, (X+x-2c), s\right)}_{0} + \|ds\|$$

$$(X-x).s = \|ds\|$$

dir.

2.4.4. Vida Matrisi

Şimdiye kadar verilen bir $D=(A,d)$ dispi için vida eksenini, bu eksen boyunca ötelemeyi ve bu eksen etrafında dönmeyi tanımladık.

Şimdi verilen L vida eksenine göre, D dispini ve L boyunca d mesafeli, θ açılı vida dispini tanımlayacağız.

F sabit çatısında, vida ekseni $L=c+ts$ ile verilsin. s vektörü birim vektör ve $c.s=0$ olduğunu kabul edelim. Verilen θ dönme açısından Rodrigues vektörü

$$b = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)s$$

elde ederiz. b vektörünün bileşenlerini kullanarak, $[B]$ antisimetrik matrisi ve Cayley formülü yardımıyla $[A]$ dönme matrisini belirleriz.

Eğer vida ekseni F nin orijininden geçiyorsa bu durumda $c=0$ dır. Öteleme miktarı,

$$c = [A]c + d^*$$

$$0 = [A]0 + d^*$$

$$d^* = 0$$

olacağından

$$ds = d - d^*$$

$$ds = d$$

olur. Böylece disp

$$D' = (A, ds)$$

dir.

Eğer vida ekseni F nin orijininden geçmiyorsa $c \neq 0$ dır. Bu durumda bir F' sabit çatısı,

$$T : F \longrightarrow F', \; T = (I, c)$$

ötelemesi ile c noktasında vida ekseni üzerine yerleştirilebilir.

$D' = (A, ds)$ dispi referans çatının değişiminden,

$$D = TD'T^{-1} = (I, c)(A, ds)(I, -c) = (A, -Ac + ds + c)$$

olur. Böylece d öteleme vektörü

$$d = ds + [I - A]c$$

olarak bulunur.

Verilen disp için elde edilen $4 \times 4 -$ tipinden $[A, d]$ matrisine, *vida matrisi* denir.[(1)]

Örnek 2.4.4.1 **:** Vida ekseninin bulunması ile ilgili bir örnek verelim.

Öteleme vektörü $d = (1, 2, 0)$ ile $D \; ... \; 2x + y + 2z = 0$ düzlemi verilsin. d nin D düzlemi üzerindeki dik izdüşüm vektörü $d^* = (d_1^*, d_2^*, d_3^*)$ olsun Vida ekseni boyunca öteleme vektörü $d - d^*$, düzlemin normaline paralel olacağından

$$\frac{1 - d_1^*}{2} = \frac{2 - d_2^*}{1} = \frac{-d_3^*}{2} = \mu$$

dir. Ayrıca $d^* = \left(d_1^*, d_2^*, d_3^*\right)$, D nin üzerinde olacağından, düzlemin noktalarını sağlar.

$$2x + y + 2z = 0$$

$$2(1-2\mu) + 2 - \mu + 2(-2\mu) = 0 \;\Rightarrow \mu = \frac{4}{9}$$

$$d^* = (1/9, 14/9, -8/9)$$

bulunur. Öteleme vektörü

$$ds = d - d^* = (1, 2, 0) - (1/9, 14/9, -8/9) = (8/9, 4/9, 8/9)$$

dır. $b = (2, 1, 2)$, b vektörü yönündeki birim vektör $s = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dir.

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{b \times d^*}{b.b} + d^*\right)$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{(-4, 2, 3)}{9} + (1/9, 14/9, -8/9)\right)$$

$$c = (-1/6, 8/9, -5/18)$$

elde edilir. Bulunan bu c noktası D düzlemi üzerinde bir noktadır.

Vida ekseni $c = (-1/6, 8/9, -5/18)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $b = (2, 1, 2)$ olan doğrudur.

$$L = c + tb$$

$$L = (-1/6, 8/9, -5/18) + t(2, 1, 2)$$

$$L = (-1/6 + 2t, 8/9 + t, -5/18 + 2t)$$

vida eksenidir.

Şimdi L vida ekseni üzerinde bulunan bir noktanın dispten sonra yine vida ekseni üzerinde bulunacağını gösterelim. Vida üzerinde herhangi bir nokta $x=\left(-1/18,17/18,-1/6\right)$ alalım. x noktasının disp sonrası konumu $X=\left(X_1,X_2,X_3\right)$ olsun. Rodrigues denkleminden,

$$X-x=b\times\left(X+x-2c\right)+ds$$

$$\left(X_1,X_2,X_3\right)-\left(-\frac{1}{18},\frac{17}{18},-\frac{1}{6}\right)$$

$$=\left[\left(2,1,2\right)\times\left(\left(X_1,X_2,X_3\right)+\left(-\frac{1}{18},\frac{17}{18},-\frac{1}{6}\right)-2\left(-\frac{1}{6},\frac{8}{9},-\frac{5}{18}\right)\right)\right]+\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$$

$$X=\left(\frac{5}{6},\frac{25}{18},\frac{13}{18}\right)$$

bulunur.

$$\begin{cases}-\frac{1}{6}+2t=\frac{5}{6}\\ \frac{8}{9}+t=\frac{25}{18} \qquad \Rightarrow t=\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{18}+2t=\frac{13}{18}\end{cases}$$

olup X, vida ekseni üzerindedir. Üstelik

$$X-x=\left(\frac{5}{6},\frac{25}{18},\frac{13}{18}\right)-\left(-\frac{1}{18},\frac{17}{18},-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)=ds$$

dir.

Şimdi L vida ekseni üzerinde olmayan bir $x=\left(1,0,0\right)$ noktasının dispten sonraki konumunu bulalım. x noktasının disp sonrası konumu $X=\left(X_1,X_2,X_3\right)$ olsun. Rodrigues denkleminden

$$X-x=b\times\left(X+x-2c\right)+ds$$

$$(X_1, X_2, X_3) - (1,0,0)$$

$$= \left[(2,1,2) \times \left((X_1, X_2, X_3) + (1,0,0) - 2\left(-\frac{1}{6}, \frac{8}{9}, -\frac{5}{18} \right) \right) \right] + \left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9} \right)$$

$$X = \left(1, \frac{14}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

bulunur. X noktası vida ekseni üzerinde değildir. Üstelik

$$(X - x).s = \left(0, \frac{14}{5}, \frac{3}{5} \right) . \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} = \| ds \|$$

dır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Bir Katı Cismin Hareketi

Bir katı cismin hareketi

$$D(t): F \longrightarrow M$$

displerinin bir sürekli dizisi olarak temsil edilebilir. F çatısı sabittir fakat M hareketli çatısının konumu t parametresine bağlı olarak değişir. $D(t)$ nin sürekliliği $D(t_1)$, $D(t_2)$ gibi iki dispin arasındaki uzaklığın veya buna denk olarak $D(t_1)-D(t_2)$ farkının ölçüsünü gerektirir. Bu kavramlar lineer dönüşümler için tanımlandığından düzlem ve uzay displeri homogen dönüşümlerle ifade edilmektedir. Bu, bir hareketin türev tanımını basitleştirir.

3.1.1. Displer İçin Norm

Koordinat çatısının belirlenmiş bir çifti için, $n\times n-$tipinden bir $[T]$ matrisi ile belli olan bir disp söz konusudur. Bu matrisin büyüklüğünün bir ölçüsü, matrisin n^2 boyutlu vektör olarak ele alındığındaki büyüklüğü olarak düşünülebilir. Bu durumda $[T]=[t_1, \quad t_2, \quad \cdots \quad t_n]$ matrisinin büyüklüğü

$$magT = \sqrt{\sum_{i,\, j=1}^{n} t_{ij}^2}$$

dir.

$$[T]=\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$ matrisinde $i-$yinci sütun $t_i=(t_{1i},t_{2i},...,t_{ni})$ $1\le i\le n$, ve

$|t_i|^2=t_{1i}^2+t_{2i}^2+...+t_{ni}^2$ olduğundan

$$magT=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|t_i|^2}$$

olarak yazabiliriz.

Amacımız için, $magT$ eşitliğinde, her bir sütunun büyüklüğünü, $[T]$ matrisinin en büyük sütun vektörünün büyüklüğüne sahip olan ile yer değiştirelim. Bu değişimle birlikte $\|T\|$ normu

$$\|T\|=\sqrt{n}\max_{1\le i\le n}(|t_i|)$$

olarak tanımlanır.[1]

$\|T\|$ ile $magT$ arasındaki bağıntı, $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|t_i|^2}\le\sqrt{n\max_{1\le i\le n}|t_i|^2}=\sqrt{n}\max_{1\le i\le n}|t_i|$

olduğundan,

$$magT\le\|T\|$$

dir.

İki $[S]$ ve $[T]$ matrisi arasındaki uzaklık,

$$\|T-S\|=\sqrt{n}\max_{1\le i\le n}\|t_i-s_i\|$$

ile verilmiştir. Burada s_i ve t_i sırasıyla $[S]$ ve $[T]$ matrislerinin sütunlarına karşılık gelen vektörlerdir. $(1\le i\le n)$

$\|T\|$ nin bir matris normu[10] olduğunu gösterelim.

i) $\forall\, A,B \in IR_n^n$ için $\|A+B\| \overset{?}{\leq} \|A\|+\|B\|$

$$\|A+B\| = \sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}|a_i+b_i|$$

$$\|A+B\| \leq \sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}\left(|a_i|+|b_i|\right)$$

$$\|A+B\| \leq \sqrt{n}\left(\max_{1\leq i\leq n}|a_i|+\max_{1\leq i\leq n}|b_i|\right)$$

$$\|A+B\| \leq \sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}|a_i|+\sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}|b_i|$$

$$\|A+B\| \leq \|A\|\|B\|$$

ii) $\forall\, A,B \in IR_n^n$ için $\|AB\| \overset{?}{\leq} \|A\|\|B\|$

AB nin $j-$yinci sütunu $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i$ ve $\|AB\| = \sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i\right|$ dir.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|b_{ij}||a_i| = |b_{1j}||a_1|+|b_{2j}||a_2|+\ldots+|b_{nj}||a_n| \quad \text{(Üçgen Eşitsizliği)}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i\right| \leq \left(|b_{1j}|,|b_{2j}|,\ldots,|b_{nj}|\right).\left(|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|\right)$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i\right| \leq \sqrt{|b_{1j}|^2+|b_{2j}|^2+\ldots+|b_{nj}|^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2} \quad \text{(Schwartz Eşitsizliği)}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i\right| \leq \sqrt{b_{1j}^2+b_{2j}^2+\ldots+b_{nj}^2}\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i\right| \leq |b_j|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i\right| \leq |b_j|\sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}|a_i|$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_i\right| \leq \sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}|a_i|\max_{1\leq i\leq n}|b_i|$$

$$\sqrt{n}\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_i\right| \leq \sqrt{n}\sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n}|a_i| \max_{1\leq i\leq n}|b_i|$$

Her iki tarafın maksimumu alınırsa,

$$\sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_i\right| \leq \sqrt{n}\sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n}|a_i| \max_{1\leq i\leq n}|b_i|$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

elde edilir.

iii) $\forall A \in IR_n^n,\ \forall k \in IR$ için $\|kA\| \overset{?}{=} |k|\|A\|$

$$\|kA\| = \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n}|ka_i| = |k|\sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n}|a_i| = |k|\|A\|$$

dır.

3.1.2. Matris Operasyonlarının Sürekliliği

$\|T\| = \sqrt{n} \max_{1\leq i\leq n}(|t_i|)$ normunu kullanarak $[T]$ dispinin $[S]$ dispine yaklaşması için, onların $(i,j)-$yinci elemanları olan t_{ij} lerin s_{ij} lere yaklaşması gerektiğini göstereceğiz.

$$x_{ij} : IR_n^n \longrightarrow IR$$
$$T \longrightarrow x_{ij}(T) = t_{ij}$$

olarak tanımlayalım.

x_{ij} fonksiyonunun sürekliliğini inceleyelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ bulmalıyız $\ni$ $\|T - S\| < \delta$ iken

$$|x_{ij}(T) - x_{ij}(S)| = |t_{ij} - s_{ij}| < \varepsilon$$

sağlanmalıdır.

$$\|T-S\|<\delta \Rightarrow \sqrt{n}\max_{1\le i\le n}|t_i-s_i|<\delta \Rightarrow \max_{1\le i\le n}|t_i-s_i|<\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$(1\le i\le n)$, $t_i-s_i=\left(t_{1i}-s_{1i},t_{2i}-s_{2i},...,t_{ni}-s_{ni}\right)$ olmak üzere

$$|t_i-s_i|=\sqrt{\left(t_{1i}-s_{1i}\right)^2+\left(t_{2i}-s_{2i}\right)^2+...+\left(t_{ni}-s_{ni}\right)^2}$$

$$\max_{1\le i\le n}|t_i-s_i|=\max_{1\le i\le n}\sqrt{\left(t_{1i}-s_{1i}\right)^2+\left(t_{2i}-s_{2i}\right)^2+...+\left(t_{ni}-s_{ni}\right)^2}\quad (1\le i\le n)$$

$$|t_{ij}-s_{ij}|\le \max_{1\le i\le n}|t_i-s_i|$$

$$|t_{ij}-s_{ij}|\le \max_{1\le i\le n}|t_i-s_i|<\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}=\varepsilon$ olarak seçilirse, x_{ij} fonksiyonu süreklidir.

$[R]=[S][T]$ çarpım matrisinin elemanları $[S]$ ve $[T]$ matris elemanlarının her birinin rasyonel fonksiyonlarıdır. $x_{ij}(S)$ ve $x_{ij}(T)$ sürekli fonksiyonlarının toplamı, farkı, çarpımı, bölümü de sürekli bir fonksiyon olduğundan $[S]$ ve $[T]$ sürekli iken $[R]=[S][T]$ çarpımı da süreklidir. Aynı nedenle $\det(T)$ fonksiyonu da süreklidir.[(8)]

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta(\varepsilon)>0$ var $\ni \|T-S\|<\delta$ iken $|\det(T)-\det(S)|<\varepsilon$ dir.

Bundan dolayı determinantı sıfırdan farklı matrislerin cümlesi yani regüler matrislerin cümlesi $GL(n)$ bir sürekli manifolddur.[(8)]

3.1.3. Matris Grupları

$GL(n)$ ile gösterilen $n\times n-$tipinden regüler matrislerin cümlesi matrislerde çarpma işlemine göre bir cebirsel gruptur.

1) $\forall\,[S],[T]\in GL(n)$ için $[S][T]\overset{?}{\in} GL(n)$

$$\det([S][T])=\underbrace{\det[S]}_{\neq 0}\underbrace{\det[T]}_{\neq 0}$$

$$\det([S][T])\neq 0$$

2) $\forall\,[A],[S],[T]\in GL(n)$ için $[A]([S][T])\overset{?}{=}([A][S])[T]$

Matrislerde çarpma işlemi birleşmeli olduğundan ve $\det([A]([S][T]))=\det(([A][S])[T])\neq 0$ olduğundan $GL(n)$ cümlesi birleşme özelliğine sahiptir.

3) $\forall [A]\in GL(n)$ için $[A][I]=[I][A]=[A]$ ve $\det[I]=1\neq 0$ olduğundan $GL(n)$ cümlesinin birim elemanı $[I]$ birim matrisidir.

4) Determinantı sıfırdan farklı her matrisin bir inversi olduğundan $GL(n)$ cümlesinin her bir elemanı bir inverse sahiptir.

Sonuç olarak $(GL(n),\cdot)$ bir gruptur.

***Tanım 3.1.3.1* :** Bir sürekli manifold aynı zamanda bir cebirsel grup ve grup işlemi sürekli ise bir *Lie Grubu* olarak adlandırılır.[1]

***Sonuç 3.1.3.1* :** $GL(n)$ bir Lie Grubudur.

***Tanım 3.1.3.2* :** $GL(n)$ nin matris çarpımı altında cebirsel grup olan alt cümlelerine *alt gruplar* denir.[1]

$GL(n)$ nin iki alt grubu, $n\times n-$tipinden dönme matrislerinin cümlesi $SO(n)$ ve $n\times n-$tipinden homogen dönüşümlerin cümlesi $H(n)$ dir.

Uzaysal dönmeler $SO(3)$, düzlem displeri $H(3)$ ve uzaysal displer $H(4)$ ile temsil edilirler.

$SO(n)$:

$\left[A^T A\right]=\left[I_n\right]$ ve $\det(A)=1$ şartını sağlayan $[A]$ $n\times n-$tipinden matrislerin cümlesi $SO(n)$ bir Lie grubudur. Gerçekten,

1) $SO(n)\subseteq GL(n)$ dir.

2) $\det\left[I_n\right]=1$ ve $\left[I_n^{-1}\right]=\left[I_n^T\right]$ olduğundan $I_n\in SO(n)$ dir. $SO(n)\neq\varnothing$

3) $\forall[A],[B]\in SO(n)$ için $[A][B]\overset{?}{\in} SO(n)$

$(AB)^T(AB)=B^T\underbrace{A^T A}_{I_n}B=B^T B=I_n$ ve $\det(AB)=\det(A)\det(B)=1$ olduğundan

$AB\in SO(n)$ dir.

4) $\forall[A],[B]\in SO(n)$ için $[A]\left[B^{-1}\right]\overset{?}{\in} SO(n)$

$$\left(AB^{-1}\right)^T\left(AB^{-1}\right)=\left(AB^T\right)^T\left(AB^T\right)=B\underbrace{A^T A}_{I_n}B^T=BB^T=I_n$$

ve

$$\det\left(AB^{-1}\right)=\det\left(AB^T\right)=\det(A)\det\left(B^T\right)=\det(A)\det(B)=1$$

olduğundan $AB^{-1}\in SO(n)$ dir.

$H(n)$:

$H(n)$, $[T]=\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ formundaki $n\times n-$tipinden matrislerin cümlesidir.

Burada $[A]$, $(n-1)\times(n-1)-$tipinden bir dönme matrisi,

d, $(n-1)-$boyutlu bir sütun vektörü,

0, $(n-1)-$tane sıfırdan oluşan satır vektörüdür.

$H(n)$ cümlesi bir Lie grubudur. Gerçekten,

1) $H(n)\subseteq GL(n)$ dir.

2) $n\times n-$tipinden birim matris, $I_n=[I_{n-1},0]=\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in H(n)$ dir.

$H(n)\neq\emptyset$

3) $\forall\,[T]=[A_1,d_1],[S]=[A_2,d_2]\in H(n)$ için $[T][S]\overset{?}{\in} H(n)$

$$[T][S]=\begin{bmatrix} A_1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1A_2 & A_1d_2+d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in H(n) \text{ dir.}$$

4) $\forall\,[T]=[A_1,d_1],[S]=[A_2,d_2]\in H(n)$ için $[T]\left[S^{-1}\right]\overset{?}{\in} H(n)$

$$[T]\left[S^{-1}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_2^T & -A_2^Td_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1A_2^T & -A_1A_2^Td_2+d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in H(n)$$

$TS^{-1}\in H(n)$ dir.

3.2. Bir Hareketin Türevi

Bir katı cismin sürekli hareketi,

$\left[T(t)\right]: IR\longrightarrow GL(n)$

olarak belirli lineer dönüşümlerin parametrelendirilmiş bir cümlesidir. Özellikle düzlemsel hareket,

$$\left[T(t)\right]: IR \longrightarrow H(3)$$

küresel hareket,

$$\left[T(t)\right]: IR \longrightarrow SO(3)$$

ve uzay hareketi,

$$\left[T(t)\right]: IR \longrightarrow H(4)$$

ile belli olan hareketlerdir.

Genel olarak

$$\begin{aligned}\left[T(t)\right]: IR &\longrightarrow GL(n)\\ t &\longrightarrow T(t) = \left[t_{ij}(t)\right]\end{aligned}$$

dönüşümündeki $t_{ij}(t)$ elemanlarının her biri reel değişkenli sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca bu matris fonksiyonunun türevi, $t_{ij}(t)$ elemanlarının her birinin türevleriyle oluşan matristir ve türev matrisi $\left[\dot{T}(t)\right]$ ile gösterilir.

Her bir $t_{ij}(t)$ eleman fonksiyonu, $t = t_0$ komşuluğunda $\ell_{ij}(t) = t_{ij}(t_0) + (t - t_0)\dot{t}_{ij}(t_0)$ teğet doğrusuyla $t_{ij}(t_0)$ noktasına yaklaşır. Benzer yolla $\left[T(t)\right]$, $\left[T(t_0)\right]$ a

$$\left[L(t)\right] = \left[T(t_0)\right] + (t - t_0)\left[\dot{T}(t_0)\right]$$

lineer denklemiyle yaklaşır.

Bu $n \times n-$ matris cümlelerindeki $\left[L(t)\right]$ lineer uzayına, $\left[T(t)\right]$ ye $\left[T(t_0)\right]$ da teğettir denilebilir. $\left[\dot{T}(t_0)\right]$ türevine, hareketin $\left[T(t_0)\right]$ da *teğet doğrultusu* adı verilir.[1]

3.2.1. Tanjant Operatörü

$\left[T(t)\right] : IR \longrightarrow GL(n)$ fonksiyonunun F de oluşturduğu

$$Y(t) = \left[T(t)\right] y$$

noktalarının sürekli cümlesine y nin *yörüngesi* denir.[1] $t = t_0$ da $Y(t)$ yörüngesine teğet olan doğrultu,

$$\dot{Y}(t_0) = \left[\dot{T}(t_0)\right] y$$

$$\dot{Y}(t_0) = \left[\dot{T}(t_0)\right]\left[T^{-1}(t_0)\right] Y(t_0)$$

$$\dot{Y}(t_0) = \left[\dot{T}T^{-1}(t_0)\right] Y(t_0)$$

türevidir. Bu denklemden görüldüğü gibi $\left[\dot{T}T^{-1}\right]$ matrisi, $Y(t)$ yörüngesi üzerindeki işlemle $\dot{Y}(t)$ türevini hesaplar. Ayrıca,

$$\left[\dot{T}(t)\right] = \left[\dot{T}T^{-1}(t)\right]\left[T(t)\right]$$

olduğundan $\left[\dot{T}T^{-1}\right]$ matrisi $\left[T(t)\right]$ matrisinin türevini hesaplar.

***Tanım 3.2.1.1* :** $\left[\dot{T}T^{-1}\right]$ matrisine $GL(n)$ üzerinde *tanjant operatör* denir.[1]

Şimdi tanjant operatörü sabit bir $[S]$ matrisi olan $\left[R(t)\right]$ hareketini ele alalım. $[S]$ matrisi her $\left[R(t)\right]$ noktasında $\left[\dot{R}(t)\right]$ türevini hesapladığından,

$$\left[\dot{R}(t)\right]=[S]\left[R(t)\right]$$

matris diferensiyel denklemini elde ederiz. Bu denklem $r_{ij}(t)$ fonksiyonlarına bağlı n^2-tane diferensiyel denklemden oluşan bir lineer diferensiyel denklem sistemidir.

Eğer başlangıç şartı $\left[R(0)\right]=[R_0]$ ise o zaman sistemin çözümü $\left[R(t)\right]=ce^{t[S]}$ dir. Gerçekten,

$y'=Sy$ sabit katsayılı diferensiyel denklemin çözümünü bulursak,

$$\frac{y'}{y}=S$$

$$\int\frac{y'}{y}dt=\int Sdt$$

$$\ln|y|=tS+\ln c,\quad c=\text{sabit}$$

olarak elde ederiz.

O halde, $\left[R(0)\right]=[R_0]$ olduğundan $c=[R_0]$ dır.

$$\left[R(t)\right]=[R_0]e^{t[S]}$$

$$\left[R(t)\right]=[R_0]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(t[S]\right)^n}{n!}$$

$$\left[R(t)\right]=[R_0]\left(I+t[S]+\frac{\left(t[S]\right)^2}{2!}+\frac{\left(t[S]\right)^3}{3!}+\ldots\right)$$

dır. Bu üstel serinin yakınsak olduğunu göstermek için P_n ve P_{n+1} kısmi toplamlar arasındaki farkın normunun sıfıra yaklaştığını göstermeliyiz.

Serinin kısmi toplamı $P_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(t[S]\right)^k}{k!}$ dir

$$\left\| P_{n+1} - P_n \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\left(t[S]\right)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(t[S]\right)^k}{k!} \right\|$$

$$\left\| P_{n+1} - P_n \right\| = \left\| \frac{\left(t[S]\right)^{n+1}}{(n+1)!} \right\|$$

$$\left\| P_{n+1} - P_n \right\| = \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \left\| [S]^{n+1} \right\|$$

$$\left\| P_{n+1} - P_n \right\| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \left\| [S] \right\|^{n+1}$$

$|t|$ ve $\|[S]\|$ nin sabit değerleri için n sonsuza giderken $\|P_{n+1} - P_n\|$ değeri sıfıra yaklaşır.

$$\left[R(t)\right] = \left[R_0\right]\left(I + t[S] + \frac{\left(t[S]\right)^2}{2!} + \frac{\left(t[S]\right)^3}{3!} + \ldots \right)$$ denkleminin sol tarafını

$\left[R_0^{-1}\right]$ ile çarparak $\left[R(0)\right] = [I]$ başlangıç şartına sahip olacak şekilde $\left[R(t)\right]$ yi değiştirebiliriz ve basit bir formda

$$\left[R(t)\right] = e^{t[S]}$$

yazabiliriz. Bu durumda, $[S]$ tanjant operatörü $\left[R(0)\right] = [I]$ da $\left[R(t)\right]$ nin türevidir, böylece $GL(n)$ üzerinde tanjant operatörlerin cümlesi, $[I]$ da teğet doğrultuların cümlesine özdeştir. Gerçekten,

$\left[R(0)\right]$ da teğet doğrultuların cümlesi $\left[\dot{R}(0)\right]$,

$$\left[R(t)\right] = e^{t[S]}$$

$$\left[\dot{R}(t)\right] = [S]e^{t[S]} = [S]\left[R(t)\right]$$

$t = 0$ da $\left[\dot{R}(0)\right] = [S]$

dır. Ayrıca $\left[R(t)\right]$ nin $GL(n)$ üzerindeki tanjant operatörü $[S]$ olduğundan

$$\left[\dot{R}(t)\right]=[S]\left[R(t)\right]$$

$$t=0 \text{ da } \left[\dot{R}(0)\right]=[S][I]=[S]$$

dır.

Dönüşümlerin bu cümlesi,

$$\left[R(t_1)\right]\left[R(t_2)\right]=e^{t_1[S]}e^{t_2[S]}=e^{(t_1+t_2)[S]}=\left[R(t_1+t_2)\right]$$

özelliğine sahiptir ve bu özellikten dolayı, *bir parametreli alt grup* olarak adlandırılır.(1)

Tanjant operatörler için tanımlanan özel bir işlem Lie çarpımıdır. $[T]$ ve $[S]$ tanjant operatörler olsun, bu durumda

$$[T]\times[S]=[TS-ST]$$

dir. Burada TS , T ile S nin matris çarpımıdır.

3.2.2. $SO(n)$ nin Tanjant Operatörleri

Dönme matrislerinin tanjant operatörleri, $GL(n)$ uzayının tanjant operatörleri gibi tanımlanmıştır. Bununla beraber $GL(n)$ nin her tanjant operatörü $SO(n)$ nin tanjant operatörü değildir. $SO(n)$ nin tanjant operatörlerini tanımlayan ayırıcı şart, bütün dönme matrislerinin sağlamak zorunda olduğu

$$\left[AA^T(t)\right]=[I_n]$$

bağıntısından elde edilmiştir. Her iki tarafın türevini alırsak,

$$\left[\dot{A}A^T\right]+\left[A\dot{A}^T\right]=[0]$$

$$\left[\dot{A}A^T\right]=-\left[A\dot{A}^T\right]$$

$$\left[\dot{A}A^T\right]=-\left[\dot{A}A^T\right]^T$$

elde ederiz. Sonuç olarak $\left[\dot{A}A^{-1}\right]=\left[\dot{A}A^T\right]=[\Omega]$ tanjant operatörü antisimetriktir. $[\Omega]$ matrisi, $\left[A(t)\right]$ dönme matrisinin *açısal hız matrisi* olarak bilinir.[(1)] $n\times n-$tipinden antisimetrik matrisler $\dfrac{n(n-1)}{2}$ bağımsız bileşene sahiptir. Antisimetrik matrislerin cümlesi bir vektör uzayı olarak ele alındığında bu sayı bu cümlenin baz vektörlerinin sayısıdır. Böylece bir manifold olarak $SO(n)$ nin boyutu $\dfrac{n(n-1)}{2}$ dir.

Şimdi bir üç boyutlu manifold olan $SO(3)$ uzay dönmelerinde, bir sabit açısal hız matrisi $[\Omega]$ verildiğinde,

$$\left[\dot{A}(t)\right]=[\Omega]\left[A(t)\right]$$

matris diferensiyel denkleminin başlangıç şartı $\left[A(0)\right]=[I]$ altında çözümü,

$$A(t)=e^{t[\Omega]}$$

ile dönmelerin bir-parametreli grubunu elde ederiz.

Bu üstel ifadeyi biraz daha basitleştirelim:

$[\Omega]=\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $[\Omega]$ antisimetrik matrisine karşılık gelen vektör $w=(a_1,a_2,a_3)$ olsun.

$\omega = \|w\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\dfrac{[\Omega]}{\omega} = [S]$ ve $\dfrac{a_1}{\omega} = a,\ \dfrac{a_2}{\omega} = b,\ \dfrac{a_3}{\omega} = c$ denirse,

$[S] = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ antisimetrik matrisini elde ederiz ve $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ dir.

$$\left[S^2\right] = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2 - a^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[S^3\right] = [S]\left[S^2\right] = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2 - a^2 & bc \\ ac & bc & -a^2 - b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &[S] = [S] && \left[S^2\right] = \left[S^2\right] \\ &\left[S^3\right] = -[S] && \left[S^4\right] = [S]\left[S^3\right] = -\left[S^2\right] \\ &\left[S^5\right] = [S]\left[S^4\right] = -\left[S^3\right] = [S] && \left[S^6\right] = [S]\left[S^5\right] = \left[S^2\right], \ldots \end{aligned}$$

$$A(t) = e^{t[\Omega]} = e^{\omega t[S]}$$

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\omega t[S]\right)^n}{n!}$$

$$A(t) = I + \frac{\omega t}{1!}[S] + \frac{(\omega t)^2}{2!}\left[S^2\right] + \frac{(\omega t)^3}{3!}\left[\underbrace{S^3}_{-S}\right] + \frac{(\omega t)^4}{4!}\left[\underbrace{S^4}_{-S^2}\right] + \frac{(\omega t)^5}{5!}\left[\underbrace{S^5}_{S}\right] + \frac{(\omega t)^6}{6!}\left[\underbrace{S^6}_{S^2}\right] + \ldots$$

$$A(t) = I + \left(\frac{\omega t}{1!} - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} + \ldots\right)[S] + \left(\frac{(\omega t)^2}{2!} - \frac{(\omega t)^4}{4!} + \frac{(\omega t)^6}{6!} + \ldots\right)\left[S^2\right]$$

$$A(t) = I + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!}[S] - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!}\left[S^2\right]$$

$$A(t) = I + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!}[S] + \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!}\right)\left[S^2\right]$$

$$A(t) = I + \sin(\omega t)[S] + \left(1 - \cos(\omega t)\right)\left[S^2\right]$$

elde edilir. Bu, $[\Omega]$ tanjant operatöründen elde edilen w ekseni etrafında bir sırf dönmenin denklemidir. Dönme açısı ωt den elde edilir. Eğer t yi zaman parametresi olarak kabul edersek, bu durumda cisim w etrafında ω sabit açısal hızıyla döner.

***Örnek 3.2.2.1* :** (Tanjant operatörlerle ilgili bir örnek)

$t \in IR - \{0\}$ olmak üzere $[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$ antisimetrik matrisini ele alalım.

Bu antisimetrik matristen Cayley formülüyle bir ortogonal matris elde edelim.

$$A(t) = \left[I_3 + B(t)\right]\left[I_3 - B(t)\right]^{-1}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & -t & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(1+t^2) & -t/(1+t^2) \\ 0 & t/(1+t^2) & 1/(1+t^2) \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-t^2)/(1+t^2) & -2t/(1+t^2) \\ 0 & 2t/(1+t^2) & (1-t^2)/(1+t^2) \end{bmatrix}$$

$$\det A(t) = 1 \qquad \text{ve} \qquad A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-t^2)/(1+t^2) & 2t/(1+t^2) \\ 0 & -2t/(1+t^2) & (1-t^2)/(1+t^2) \end{bmatrix} = A^T(t)$$

olduğundan

$A(t)$ bir parametreli bir dönme matrisidir. Dönme açısı θ ise

$$\cos\theta = \frac{\dot{I}zA - 1}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$A(t)$, $x-$ekseni etrafında θ açılık dönme matrisidir.

Şimdi $A(t)$ dönme matrisinin tanjant operatörünü bulalım.

$$\left[\dot{A}(t)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4t/\left(1+t^2\right)^2 & \left(2t^2-2\right)/\left(1+t^2\right)^2 \\ 0 & \left(-2t^2+2\right)/\left(1+t^2\right)^2 & -4t/\left(1+t^2\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega] = \left[\dot{A}A^{-1}(t)\right]$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4t/\left(1+t^2\right)^2 & \left(2t^2-2\right)/\left(1+t^2\right)^2 \\ 0 & \left(-2t^2+2\right)/\left(1+t^2\right)^2 & -4t/\left(1+t^2\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right) & 2t/\left(1+t^2\right) \\ 0 & -2t/\left(1+t^2\right) & \left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right) \end{bmatrix}$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/\left(1+t^2\right) \\ 0 & 2/\left(1+t^2\right) & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

3.2.3. $H(n)$ nin Tanjant Operatörleri

Homogen dönüşümlerin cümlesi $H(n)$ nin tanjant operatörleri, $GL(n)$ uzayının tanjant operatörleri gibi tanımlanmıştır. Bununla beraber $GL(n)$ nin her tanjant operatörü $H(n)$ nin tanjant operatörü değildir. $H(n)$ nin tanjant operatörleri, $[T]=[A,d]=\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\left[\dot{T}T^{-1}\right]=\begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^T & -A^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{A}A^T & -\dot{A}A^T d+\dot{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=[\Omega, v]$$

bağıntısını sağlamalıdır. Burada $[\Omega]=\left[\dot{A}A^T\right]$ hareketli cismin $(n-1)\times(n-1)-$tipinden açısal hız matrisi ve $v=-[\Omega]d+\dot{d}$ hareketli cismin $(n-1)-$boyutlu lineer hız vektörüdür. $H(n)$ nin genel bir $[S]=[\Omega, v]$ tanjant operatörü toplam $\frac{n(n-1)}{2}$ tane bağımsız elemanı vardır. Bunlardan $[\Omega]$ $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ tane bağımsız eleman, v ise $(n-1)$ tane bağımsız eleman içerir. Böylece $H(n)$ bir $\frac{n(n-1)}{2}-$boyutlu bir manifolddur. Özel olarak $H(3)$ $3-$boyuta, $H(4)$ ise $6-$boyuta sahiptir.

Şimdi $H(4)$ ün

$$\left[\dot{T}(t)\right]=[S]\left[T(t)\right]$$

diferensiyel denkleminden elde edilen $1-$parametreli alt gruplarını inceleyeceğiz. $[S]=[\Omega, v]$ bir sabit matristir. $t=0$ anında sabit ve hareketli çatıların çakıştığını kabul ederek, $\left[T(0)\right]=[I]$ başlangıç şartıyla diferensiyel denklemin çözümü

$$\left[T(t)\right] = e^{t[S]}$$

dir.

Bu üstel ifadeyi biraz daha basitleştirmek için v lineer hız vektörünü w açısal hız vektörüne dik ve w açısal hız vektörüne paralel iki vektörün toplamı

$$v = v - \frac{v.w}{w.w}w + \frac{v.w}{w.w}w$$

olarak yazalım.

$w.\left(v - \frac{v.w}{w.w}w\right) = 0$ olduğundan $w \perp \left(v - \frac{v.w}{w.w}w\right)$ ve $w // \frac{v.w}{w.w}w$ dır.

$v - \frac{v.w}{w.w}w = c \times w$, $k = \frac{v.w}{w.w}$ dersek,

$$v = c \times w + kw$$

elde edilir.

Önce, $c \times w = 0$ durumunu ele alalım. Bu durumda $v = kw$ dır.

$$[S] = \begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega & kw \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[S^2\right] = \begin{bmatrix} \Omega & kw \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega & kw \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^2 & \Omega kw \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Omega w = w \times w = 0$ olduğundan

$$\left[S^2\right] = \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[S^3\right] = [S]\left[S^2\right] = \begin{bmatrix} \Omega & kw \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bu şekilde devam edersek,

$$\left[S^n\right] = \begin{bmatrix} \Omega^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

$$\left[T(t)\right]=e^{t[S]}$$

$$\left[T(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(t[S]\right)^n}{n!}$$

$$\left[T(t)\right]=I+\frac{t}{1!}[S]+\frac{t^2}{2!}\left[S^2\right]+\frac{t^3}{3!}\left[S^3\right]+...$$

$$\left[T(t)\right]=I+\frac{t}{1!}\begin{bmatrix}\Omega & kw\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix}\Omega^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix}\Omega^3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+...$$

$$\left[T(t)\right]=\begin{bmatrix}I+\frac{t}{1!}\Omega+\frac{t^2}{2!}\Omega^2+\frac{t^3}{3!}\Omega^3+... & kwt\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left[T(t)\right]=\begin{bmatrix}e^{t\Omega} & kwt\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A(t) & kwt\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Burada $\left[A(t)\right]$, $e^{t[\Omega]}$ ile elde edilen dönme matrisidir.

Şimdi genel durumu inceleyelim. $[S]$, w açısal hızlı v lineer hızlı genel bir $T(t):F\longrightarrow M$ hareketinin tanjant operatörü olsun. Eğer bir F' çatısının orijini olarak c noktası $c\times w$ bağıntısını sağlarsa o zaman bu F' çatısındaki $[S']$ tanjant operatörü w ya sahiptir ve önceki durumda olduğu gibi w, v lineer hızla aynı doğrultuya sahiptir. Bu durumda,

$$e^{t[S']}=\begin{bmatrix}A(t) & kwt\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

dir. $D=[I,c]$ ile verilen $D:F\longrightarrow F'$ dönüşümü, F çatısına bağlı F' çatısının konumunu tanımlar. Referans çatının değişiminden,

$$\left[T(t)\right]=[D]e^{t[S]}\left[D^{-1}\right]$$

$$\left[T(t)\right]=\begin{bmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(t) & kwt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[T(t)\right]=\begin{bmatrix} I & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(t) & -A(t)c+kwt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[T(t)\right]=\begin{bmatrix} A(t) & -A(t)c+kwt+c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[T(t)\right]=\begin{bmatrix} A(t) & \left[I-A(t)\right]c+kwt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu sonuç vida matrisindeki $d = ds + [I - A]c$ ile karşılaştırılırsa $\left[T(t)\right]$ hareketi bir sırf vida hareketi tanımlar. Eğer t zaman ise o zaman bu hareket, c den geçen ve w yönündeki doğru etrafında $\omega = \|w\|$ açısal hızlı bir dönme içerir ve kw lineer hızı bu doğru boyuncadır.

3.2.4. Tanjant Operatörlere Karşılık Gelen Vektörler

$SO(3)$ ve $H(3)$ ün $3\times3-$tipinden matrislerle tanımlanan tanjant operatörlerindeki $9-$tane elemandan sadece $3-$tanesi bağımsızdır. Benzer şekilde $H(4)$ ün $4\times4-$matrislerle tanımlı tanjant operatörlerinin $16-$tane elemanından sadece $6-$tanesi bağımsızdır. Bu bağımsız bileşenleri vektörlerde toplayalım.

$SO(3)$ ün bir $[\Omega]$ tanjant operatörünün vektör formu, $3\times3-$tipinden $[\Omega]$ antisimetrik matrisinden elde edilen w vektörüdür öyle ki $[\Omega]y = w\times y$ dir.

$H(3)$ için, $[\Omega, v] = \begin{bmatrix} 0 & -w & v_1 \\ w & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile verilen $3\times3-$tipinden $[\Omega, v]$ tanjant operatörünü elde ederiz. Bu durumda bağımsız bileşenleri $3-$boyutlu (w, v_1, v_2) vektöründe, $H(4)$ ün bir $[S] = [\Omega, v]$ tanjant operatörü $6-$boyutlu $S = (w, v)$ vektöründe toplayabiliriz.

Tanım 3.2.4.1 : $H(4)$ ün bir $[S] = [\Omega, v]$ tanjant operatöründen elde edilen $6-$boyutlu $S = (w, v)$ vektörüne bir *screw* adı verilir.[1]

$[T]\times[S] = [TS - ST]$ ile tanımlı Lie çarpımı bu tanjant operatörlerin her birine karşılık gelen vektörler için bir çarpım işlemi verir.

$SO(3)$ için, $[C]$ ve $[\Omega]$ antisimetrik matrislerine karşılık gelen vektörler sırasıyla c ve w ise o zaman $[C]\times[\Omega] = [C\Omega - \Omega C]$ Lie çarpımından elde edilen antisimetrik matrisine karşılık gelen vektör $c\times w$ dır. Gerçekten,

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } c = (a_1, a_2, a_3),$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } w = (x, y, z) \text{ dir.}$$

$$[C]\times[\Omega] = [C\Omega - \Omega C]$$

$$[C]\times[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C]\times[\Omega]=\begin{bmatrix} 0 & a_2x-a_1y & a_3x-a_1z \\ a_1y-a_2x & 0 & a_3y-a_2z \\ a_1z-a_3x & a_2z-a_3y & 0 \end{bmatrix}$$

$[C]\times[\Omega]$ bir antisimetrik matristir. Bu matrise karşılık gelen vektör, $(a_2z-a_3y, a_3x-a_1z, a_1y-a_2x)$ olup bu ise $c\times w$ vektörüdür.

$H(n)$, homogen dönüşümlerin genel durumu için, $[R]=[C,r]$ ve $[S]=[\Omega,v]$ tanjant operatörlerin Lie çarpımı

$$[R]\times[S]=[RS-SR]$$

$$[R]\times[S]=\begin{bmatrix} C & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R]\times[S]=\begin{bmatrix} C\Omega-\Omega C & [C]v-[\Omega]r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R]\times[S]=\left[C\Omega-\Omega C, [C]v-[\Omega]r\right]$$

dir.

Özel olarak $H(3)$ düzlem displeri için,

$[R]=[C,r]$ $\qquad$ $[S]=[\Omega,v]$

$$[R]=\begin{bmatrix} 0 & -c & r_1 \\ c & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [S]=\begin{bmatrix} 0 & -w & v_1 \\ w & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R]\times[S]=[RS-SR]$$

$$[R]\times[S]=\begin{bmatrix} 0 & -c & r_1 \\ c & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -w & v_1 \\ w & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & -w & v_1 \\ w & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -c & r_1 \\ c & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R]\times[S]=\begin{bmatrix}0 & 0 & -cv_2+wr_2\\ 0 & 0 & cv_1-wr_1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olup $[R]\times[S]$ Lie çarpımına karşılık gelen vektör, $(0,-cv_2+wr_2,\,cv_1-wr_1)$ dir.

$H(4)$ uzay displeri için,

$$[R]=[C,r]$$

$$[R]=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2 & r_1\\ a_3 & 0 & -a_1 & r_2\\ -a_2 & a_1 & 0 & r_3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad c=(a_1,a_2,a_3),\quad r=(r_1,r_2,r_3)$$

$$[S]=[\Omega,v]$$

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & -z & y & v_1\\ z & 0 & -x & v_2\\ -y & x & 0 & v_3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad w=(x,\,y,\,z),\quad v=(v_1,v_2,v_3)$$

$$[R]\times[S]=[RS-SR]$$

$$[R]\times[S]=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2 & r_1\\ a_3 & 0 & -a_1 & r_2\\ -a_2 & a_1 & 0 & r_3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -z & y & v_1\\ z & 0 & -x & v_2\\ -y & x & 0 & v_3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -z & y & v_1\\ z & 0 & -x & v_2\\ -y & x & 0 & v_3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2 & r_1\\ a_3 & 0 & -a_1 & r_2\\ -a_2 & a_1 & 0 & r_3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[R]\times[S]=\begin{bmatrix}0 & a_2x-a_1y & a_3x-a_1z & -a_3v_2+a_2v_3+zr_2-yr_3\\ -a_2x+a_1y & 0 & a_3y-a_2z & a_3v_1-a_1v_3-zr_1+xr_3\\ -a_3x+a_1z & -a_3y+a_2z & 0 & -a_2v_1+a_1v_2+yr_1-xr_2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

dir. $[R]\times[S]$ Lie çarpımına karşılık gelen vektör,

$$\begin{pmatrix} -a_3 y + a_2 z, \;\; a_3 x - a_1 z, \;\; -a_2 x + a_1 y, \\ -a_3 v_2 + a_2 v_3 + z r_2 - y r_3, a_3 v_1 - a_1 v_3 - z r_1 + x r_3, -a_2 v_1 + a_1 v_2 + y r_1 - x r_2 \end{pmatrix}$$

olup bu vektör $(c\times w, c\times v - w\times r)$ dir.

3.3. Çok Parametreli Hareket

Bir tek değişken tarafından parametrelendirilen $\left[T(t)\right]: IR \longrightarrow GL(n)$ matris fonksiyonunu bir cismin hareketini tanımlar. Şimdi $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$ $m-$değişkeni ile parametrelendirilen ve

$$\left[F(\theta)\right]: IR^m \longrightarrow GL(n)$$

ile gösterilen hareketleri ele alacağız. $GL(n)$ de $\left[F(\theta)\right]$ nın görüntüsü bir $m-$boyutlu yüzeye benzerdir.

$$\left[F(\theta)\right] = \left[f_1(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m), f_2(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m), ..., f_n(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)\right]$$

nin bir θ_i $(1 \le i \le m)$ değişkenine göre kısmi türevi

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_i}\right] = \left[\frac{\partial f_1}{\partial \theta_i}, \frac{\partial f_2}{\partial \theta_i}, ..., \frac{\partial f_n}{\partial \theta_i}\right]$$

$n\times m$ matrisidir. Eğer θ_i değişkenleri $\theta = \theta(t)$ olacak şekilde bir t değişkeninin fonksiyonları ise o zaman zincir kuralından,

$$\left[\dot{F}\right] = \left[\frac{\partial F}{\partial \theta_1}\right]\dot{\theta}_1 + \left[\frac{\partial F}{\partial \theta_2}\right]\dot{\theta}_2 + ... + \left[\frac{\partial F}{\partial \theta_m}\right]\dot{\theta}_m$$

elde ederiz. Eşitliğin her iki tarafını sağdan $\left[F^{-1}\right]$ ile çarparak

$$\left[\dot{F}F^{-1}\right]=\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_1}F^{-1}\right]\dot{\theta}_1+\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_2}F^{-1}\right]\dot{\theta}_2+...+\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_m}F^{-1}\right]\dot{\theta}_m$$

tanjant operatörünü elde ederiz.

$\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_i}F^{-1}\right]$ matrisleri ayrı ayrı her bir θ_i parametrelerine karşılık gelen kısmi tanjant operatörleridir.

S', $\left[\dot{F}F^{-1}\right]$ tanjant operatörüne karşılık gelen vektör ve S_i, $\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_i}F^{-1}\right]$ kısmi tanjant operatörlerine karşılık gelen vektörler olsun. Bu durumda

$$\left[\dot{F}F^{-1}\right]=\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_1}F^{-1}\right]\dot{\theta}_1+\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_2}F^{-1}\right]\dot{\theta}_2+...+\left[\frac{\partial F}{\partial \theta_m}F^{-1}\right]\dot{\theta}_m$$

tanjant operatörünü,

$$S'=S_1\dot{\theta}_1+S_2\dot{\theta}_2+...+S_m\dot{\theta}_m$$

formunda yazabiliriz. Bu,

$$S'=\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \cdots & S_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \vdots\\ \dot{\theta}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}\end{bmatrix}$$

matris denklemi şeklinde verilebilir. Burada $[J], n\times m-$matrisi çok parametreli hareketin jakobiyeni olarak bilinir.

***Örnek 3.4.1* :** İki parametreli hareketin tanjant operatörleri ile bir örnek verelim.

$B=\begin{bmatrix} 0 & t_1 & 0\\ -t_1 & 0 & t_2\\ 0 & -t_2 & 0\end{bmatrix}$ antisimetrik matristen Cayley formülüyle bir dönme matrisi elde edelim.

$$A=(I+B)(I-B)^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & t_1 & 0\\ -t_1 & 1 & t_2\\ 0 & -t_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -t_1 & 0\\ t_1 & 1 & -t_2\\ 0 & t_2 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & t_1 & 0\\ -t_1 & 0 & t_2\\ 0 & -t_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+t_2^2}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{t_1}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{t_1t_2}{1+t_1^2+t_2^2}\\ -\frac{t_1}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{1}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{t_2}{1+t_1^2+t_2^2}\\ \frac{t_1t_2}{1+t_1^2+t_2^2} & -\frac{t_2}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{t_2^2+1}{1+t_1^2+t_2^2}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{-t_1^2+t_2^2+1}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{2t_1}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{2t_1t_2}{1+t_1^2+t_2^2}\\ -\frac{2t_1}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{1-t_1^2-t_2^2}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{2t_2}{1+t_1^2+t_2^2}\\ \frac{2t_1t_2}{1+t_1^2+t_2^2} & -\frac{2t_2}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{t_1^2-t_2^2+1}{1+t_1^2+t_2^2}\end{bmatrix}$$

$\det A=1$ ve $A^T=A^{-1}$ olduğundan A bir dönme matrisidir.

$$\frac{\partial A}{\partial t_1}=\begin{bmatrix}\frac{-4t_1\left(t_2^2+1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & -\frac{2\left(t_1^2-t_2^2+1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & -\frac{2t_2\left(t_1^2-t_2^2-1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2}\\ \frac{2\left(t_1^2-t_2^2-1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & -\frac{4t_1}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & -\frac{4t_1t_2}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2}\\ -\frac{2\left(t_1^2-t_2^2-1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & \frac{4t_1t_2}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & \frac{4t_1t_2^2}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_1}A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{2}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{-2t_2}{1+t_1^2+t_2^2}\\ \frac{-2}{1+t_1^2+t_2^2} & 0 & 0\\ \frac{2t_2}{1+t_1^2+t_2^2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_2}=\begin{bmatrix} \frac{4t_1^2t_2}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & -\frac{4t_1t_2}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & \frac{2t_1\left(t_1^2-t_2^2+1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} \\ -\frac{4t_1t_2}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & -\frac{4t_2}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & \frac{2\left(t_1^2-t_2^2+1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} \\ \frac{2t_1\left(t_1^2-t_2^2+1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & -\frac{2\left(t_1^2-t_2^2+1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} & \frac{-4t_2\left(t_1^2+1\right)}{\left(1+t_1^2+t_2^2\right)^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t_1}A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2t_1}{1+t_1^2+t_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+t_1^2+t_2^2} \\ \frac{-2t_1}{1+t_1^2+t_2^2} & \frac{-2}{1+t_1^2+t_2^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1}=\left(\frac{\partial A}{\partial t_1}A^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial t_1}+\left(\frac{\partial A}{\partial t_2}A^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial t_2}$$

tanjant operatörünü elde ederiz.

3.4. Screw Teorisi

Bu bölümde screwler adı verilen, uzay hareketinin tanjant operatörlerinden elde edilen $6-$boyutlu vektörler hakkındaki bazı sonuçları sunacağız.

3.4.1. Screw Koordinat Dönüşümleri

$H(4)$ ün genel tanjant operatörü $[S]=[\Omega,v]$ ile verilmiştir. Burada $[\Omega]$ $3\times3-$tipinden antisimetrik bir matristir ve v bir $3-$boyutlu vektördür.

w, $[\Omega]$ dan elde edilen vektör olsun. O zaman $[S]$ ye karşılık gelen ve bir screw olarak adlandırılan $6-$boyutlu vektör $S=(w,v)$ dir. Şimdi hareket için referans çatıyı değiştirdiğimizde screwin koordinatlarının nasıl değiştiğini tanımlayacağız.

Bir hareket;

$$T(t): F \longrightarrow M$$

biçiminde parametrelendirilmiş bir disp olarak verilsin F sabit ve M hareketli çatıların yeni koordinat çatılarına bağlı F' ve M' konumları,

$$D: F \longrightarrow F', \qquad D: M \longrightarrow M'$$

displeriyle tanımlansın. Bu durumda

$$T'(t): F' \longrightarrow M'$$

hareketi,

$$T'(t) = DT(t)D^{-1}$$

ile tanımlanmıştır.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "T(t)"] \arrow[d, "D"'] & M \arrow[d, "D"] \\ F' \arrow[r, "T'(t)=DT(t)D^{-1}"'] & M' \end{tikzcd}$$

$T(t)$ nin tanjant operatörü $[S]$ olmak üzere, $T'(t)$ nin $[S']$ tanjant operatörü

$$[S'] = \left[\dot{T}'\right][T']^{-1}$$

$$[S'] = \left[D\dot{T}(t)D^{-1}\right]\left[DT^{-1}(t)D^{-1}\right]$$

$$[S'] = \left[D\dot{T}(t)T^{-1}(t)D^{-1}\right]$$

$$[S'] = \left[DSD^{-1}\right]$$

dir.

Eğer disp $[D]=[A,d]$ ise o zaman tanjant operatörü

$$[S']=\left[DSD^{-1}\right]$$

$$[S']=\begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^T & -A^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S']=\begin{bmatrix} A\Omega A^T & -A\Omega A^T d + Av \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

$$[S']=\left[A\Omega A^T, -A\Omega A^T d + Av\right]$$

$$[S']=[\Omega', v']$$

denirse, $[\Omega']$ bir antisimetrik matristir. Gerçekten,

$\Omega=\begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$ antisimetrik matrisine karşılık gelen vektör

$w=(w_1,w_2,w_3)$ ve $[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ bir pozitif ortogonal matris olsun.

Bu durumda

$$A^T = A^{-1}$$

$$A^T = \frac{1}{detA}\tilde{A}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & -a_{21}a_{33}+a_{31}a_{23} & a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22} \\ -a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & -a_{11}a_{32}+a_{31}a_{12} \\ a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13} & -a_{11}a_{23}+a_{21}a_{13} & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$

olacağından

$$\Omega' = A\Omega A^T$$

$$\Omega' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Omega' = \begin{bmatrix} 0 & -\left(w_1 a_{31} + w_2 a_{32} + w_3 a_{33}\right) & w_1 a_{21} + w_2 a_{22} + w_3 a_{23} \\ w_1 a_{31} + w_2 a_{32} + w_3 a_{33} & 0 & -\left(w_1 a_{11} + w_2 a_{12} + w_3 a_{13}\right) \\ -\left(w_1 a_{21} + w_2 a_{22} + w_3 a_{23}\right) & w_1 a_{11} + w_2 a_{12} + w_3 a_{13} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir ve Ω' bir antisimetrik matristir. Üstelik Ω' matrisine karşılık gelen vektör W ise

$$W = \left(w_1 a_{11} + w_2 a_{12} + w_3 a_{13}, w_1 a_{21} + w_2 a_{22} + w_3 a_{23}, w_1 a_{31} + w_2 a_{32} + w_3 a_{33}\right)$$

olup

$$W = [A] w$$

dır. Bu durumda v' vektörünü,

$$-\left[A \Omega A^T\right] d = -[\Omega'] d = -W \times d = d \times W$$

olarak elde ederiz. Böylece $S = (w, v)$ screwi

$$\begin{cases} W = [A] w \\ V = d \times [A] w + [A] v \end{cases}$$

ile verilen $S' = (W, V)$ screwi olur.

Bu dönüşüm,

$$\begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

$6 \times 6-$tipinden matris denklemi olarak yazılabilir. Burada $[D]$, d den elde edilen bir antisimetrik matris ve $[0]$ $3 \times 3-$tipinden sıfır matrisidir.

3.4.1.1. Bir Screw İçin Standart Form

$\begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ DA & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$ koordinat değişiminin özel bir hali, F ve M koordinat çatılarının bir $[T]=[I,d]$ sırf ötelemesi için elde edilen screw dönüşümüdür. Bu durumda $S=(w,v)$ screwi,

$$\begin{cases} W=[A]w=[I]w=w \\ V=d\times[A]w+[A]v=d\times[I]w+[I]v=d\times w+v \end{cases}$$

$$S'=(W,V)=(w,d\times w+v)$$

ye dönüşür. O halde referans çatının ötelenmesi screwin sadece lineer hız bileşenini değiştirir. Bu gerçek, screwler için bir standart form elde etmede kullanılabilir.

$S=(w,v)$ screwin lineer hız vektörü v,

$$v=v-\frac{v.w}{w.w}w+\frac{v.w}{w.w}w, \qquad w.\left(v-\frac{v.w}{w.w}w\right)=0$$

$$v=\underbrace{v-\frac{v.w}{w.w}w}_{\perp w}+\underbrace{\frac{v.w}{w.w}w}_{//w}$$

olacak şekilde w ya dik ve w ya paralel olan iki bileşene ayrılabilir. $k=\frac{v.w}{w.w}$ denirse paralel bileşen kw dır. Dik bileşen ise $v-kw$ dır. Ayrıca bir c vektörünü, dik bileşen $c\times w$ olacak şekilde yani

$$c\times w=v-kw$$

eşitliği sağlanacak şekilde tanımlayabiliriz. Bu denklemin çözümü,

$$c\times w=v-kw$$

$$(c\times w)\times w=(v-kw)\times w$$

$$\underbrace{(c.w)}_{0}.w-(w.w).c = v\times w$$

$$c=\frac{w\times v}{w.w}$$

olur. Referans çatısı, $[T]=[I,-c]$ ötelemesiyle değiştirilirse bu durumda $S=(w,v)$ screwi

$$S'=(W,V)=(w,-c\times w+v)$$

haline dönüşür. v nin w ya dik bileşeni $c\times w$ alınırsa,

$$kw=-c\times w+v$$

elde edilir. Dolayısıyla yeni referans çatıda bu screw,

$$S'=(W,V)=(w,kw)$$

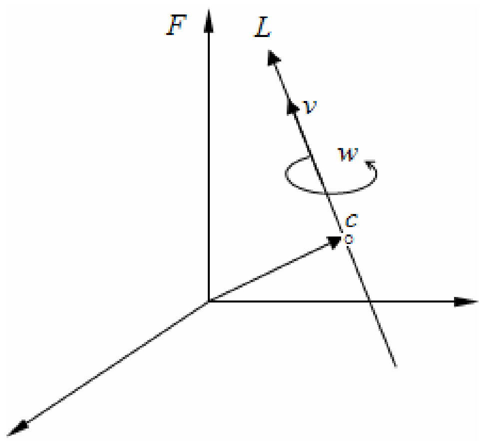
olup w yönünde açısal ve lineer hız vektörleri aynı doğrultudadır. Bu çatıda cisim t ile tanımlanan bir anda bir vida hareketinde hareket eder. Bu vida hareketinin ekseni

$$L=c+tw$$

olup hareketin *ani screw ekseni* olarak adlandırılır.[(1)]

$c=\dfrac{w\times v}{w.w}$ ile tanımlı c noktası, $S=(w,v)$ genel screwini standart formda yazmak için kullanılır.

$L=c+tw$ doğrusu screwin ekseni, k sabiti ise vida adımıdır.

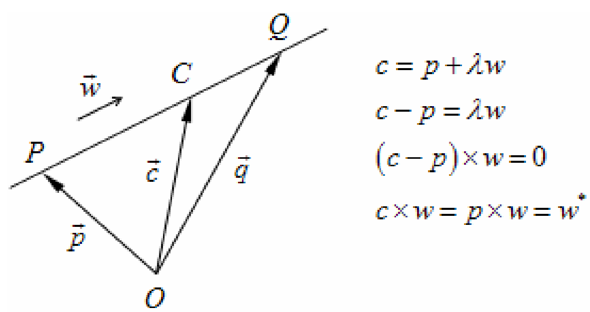


Şekil.3.1. *Sabit çatı* c *noktasındayken lineer ve açısal hızlar vida ekseninde sıraya konulmuştur.*

Bir screwin önemli özel bir hali $k=0$ iken elde edilmiştir. Bu durumda screw,

$$S=(w,v)=(w,c\times w+kw)=(w,c\times w)$$

formunu alır. Böylece cisim bir açısal hıza sahiptir fakat $L=c+tw$ doğrusuna bağlı lineer hızı yoktur. Bu durumda $S=(w,c\times w)$ screwi $L=c+tw$ doğrusuna özdeş olarak görülebilir.



Şekil 3.2

L üzerinde iki nokta $p=(p_1,p_2,p_3)$ ve $q=(q_1,q_2,q_3)$ olsun. Doğru üzerinde keyfi bir nokta $c=(x_1,x_2,x_3)$ olmak üzere, bu noktalardan geçen doğru

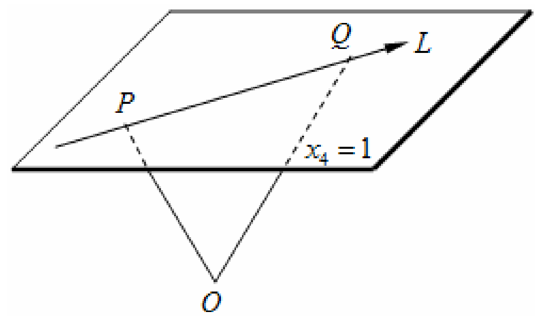
$$\frac{x_1-p_1}{q_1-p_1}=\frac{x_2-p_2}{q_2-p_2}=\frac{x_3-p_3}{q_3-p_3}=t, \qquad L=c+t(q-p)$$

dir. Doğrunun doğrultman vektörü $w=q-p$, doğru üzerindeki referans nokta $c=p+t_0(q-p)$ dir. L nin Plücker koordinatları $L=(w,c\times w)$ olarak tanımlanmıştır. L üzerindeki herhangi bir $c'=c+tw$ noktası, vektörel çarpım ifadesinde referans nokta olarak kullanılabilir. Çünkü $c'\times w=(c+tw)\times w=c\times w$ dır. Açık olarak doğrunun Plücker koordinatları $w.(c\times w)=0$ bağıntısını sağlar.

Screw $S=(0,v)$ formuna sahipken doğru screwlerine bozulan screwler bir diğer hal olarak meydana gelir. Bu açısal hıza sahip olmayan, sadece sırf ötelemeyle birleştirilmiş lineer hıza sahip cisimdeki bir harekete karşılık gelir. Bu screwlerin bileşenleri $w.(w\times c)=0$ bağıntısını sağladığından bu bileşenler doğruların Plücker koordinatlarıdır. Bu doğrulara özdeşlik için screwin adımı $k=\frac{v.w}{w.w}$ ve screw üzerindeki $c=\frac{w\times v}{w.w}$ noktası ele alalım. $w=0$ olduğundan $k\to\infty$ ve orijine olan uzaklık $c\to\infty$ olur. Böylece bu formdaki screwlerin sonsuz adıma sahip olduğu söylenir ve sonsuzda doğru tanımı yapılır.

3.4.2. Bivektörler

Bir screwin ekseni $3-$boyutlu uzayda bir doğrudur. Eğer bu uzay IR^4 de $x_4=1$ hiperdüzlemi gibi embedded ise o zaman her bir doğru $O=(0,0,0,0)$ orijinden geçen bir $2-$boyutlu düzlemle özdeş olabilir. Eğer doğru üzerinde herhangi iki nokta $P=(p_1,p_2,p_3,1)$ ve $Q=(q_1,q_2,q_3,1)$ ise, düzlem P ve Q noktalarının lineer kombinasyonlarının cümlesidir.



Şekil 3.3

Koordinatlar, $4\times 2-$tipinden $[P,Q]=\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin 6 tane $|P,Q|$ $2\times 2-$minörleri ile bu düzlemler için tanımlanmıştır. Bu minörler, düzlemdeki her bir noktaların her bir seçimi için bir sabit çarpan farkıyla aynıdır. Gerçekten,

$V_1=a_1P+b_1Q$ ve $V_2=a_2P+b_2Q$ vektör çifti için minörleri hesaplayalım.

$$|V_1,V_2|=|a_1P+b_1Q,\, a_2P+b_2Q|$$

determinantın lineerliğini ve antisimetrikliğini kullanırsak,

$$|V_1,V_2|=(a_1b_2-a_2b_1)|P,Q|$$

olarak yazabiliriz. Böylece $|P,Q|$ ve $|V_1,V_2|$ minörleri sadece $(a_1b_2-a_2b_1)$ çarpımıyla birbirinden farklıdır. $[P,Q]$ matrisinin minörlerinin cümlesi, bivektörleri tanımlamak için kullanılmıştır.

Bivektörleri açıklamak için uygun bir yol, aşağıdaki özellikleri sağlayan ve Λ ile gösterilen *dış çarpımı*(9) kullanmaktır. P,Q,R vektörleri ve a,b skalarları için

1) Lineerlik : $P\Lambda(aQ+bR)=aP\Lambda Q+bP\Lambda R$

2) Birleşme Özelliği : $(P \Lambda Q)\Lambda R = P \Lambda (Q \Lambda R)$

3) Antisimetri Özelliği : $P \Lambda Q = -Q \Lambda P$

Antisimetri özelliğinden dolayı $P \Lambda P = 0$ dır.

Bu dış çarpımı, $V_1 \Lambda V_2$ yi elde etmek için kullanacağız.

$$V_1 \Lambda V_2 = (a_1 P + b_1 Q)\Lambda(a_2 P + b_2 Q) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) P \Lambda Q$$

dur.

Şimdi IR^4 deki bivektörleri inceleyelim: $P = (p_1, p_2, p_3, 1)$ ve $Q = (q_1, q_2, q_3, 1)$, $H : x_4 = 1$ hiperdüzleminde iki nokta olsun. H da bu iki noktadan geçen doğru,

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3 - p_3}$$

dır.

P ve Q vektörlerini yer vektörü olarak düşünürsek, $\overrightarrow{OP} = (p_1, p_2, p_3, 1)$ ve $\overrightarrow{OQ} = (q_1, q_2, q_3, 1)$ olur. $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OQ}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde herhangi bir nokta $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ olsun. Bu durumda

$$a\overrightarrow{OP} + b\overrightarrow{OQ} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$(ap_1 + bq_1, ap_2 + bq_2, ap_3 + bq_3, a + b) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\begin{cases} x_1 = ap_1 + bq_1 \\ x_2 = ap_2 + bq_2 \\ x_3 = ap_3 + bq_3 \\ x_4 = a + b \end{cases}$$

Bu düzlemin $x_4 = 1$ hiperdüzlemiyle arakesitini bulalım.

$$x_4 = a + b = 1,$$

$$x_i = ap_i + bq_i \qquad 1 \le i \le 3 \text{ için}$$

$$x_i = (1-b)\,p_i + bq_i$$

$$x_i = (q_i - p_i)b + p_i$$

$$\frac{x_i - p_i}{q_i - p_i} = b$$

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{x_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{x_3 - p_3}{q_3 - p_3} = b$$

elde ederiz. Bu durumda P ve Q noktalarından geçen doğru, aynı zamanda bu doğrudan geçen düzlemin $P \Lambda Q$ bivektörüyle tanımlanmıştır. $P \Lambda Q$ açılırsa,

$$\begin{aligned} P \wedge Q = {} & (q_1 - p_1)e_4 \wedge e_1 + (q_2 - p_2)e_4 \wedge e_2 + (q_3 - p_3)e_4 \wedge e_3 \\ & + (p_2q_3 - p_3q_2)e_2 \wedge e_3 + (p_3q_1 - p_1q_3)e_3 \wedge e_1 + (p_1q_2 - p_2q_1)e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Bu bivektörün ilk üç bileşeni $w = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ doğrunun yönünü tanımlar. İkinci üç bileşeni ise, $p \times q = p \times (q - p) = p \times w$ ile verilmiştir. Böylece $L = (w, p \times w)$ doğrusunun Plücker koordinatları aynı zamanda IR^4 de bu doğrudan geçen düzlem tanımlayan bivektörün bileşenleridir.

3.4.3. Dual Ortogonal Matrisler

$ID = \left\{ a + \varepsilon a^* \,\middle|\, a, a^* \in IR, \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0 \right\}$ dual sayılar cümlesi

$$\begin{aligned} + : ID \times ID & \longrightarrow ID \\ \left(A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*\right) & \to A + B = (a + b) + \varepsilon\left(a^* + b^*\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : ID \times ID & \longrightarrow ID \\ \left(A = a + \varepsilon a^*, B = b + \varepsilon b^*\right) & \to A \cdot B = ab + \varepsilon\left(ab^* + a^*b\right) \end{aligned}$$

işlemleriyle birlikte bir birimli ve değişmeli halkadır.(3) $(ID,+,\cdot)$ halkasına *dual sayılar halkası* denir.(3)

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0\\ a^{*} & a\end{bmatrix}\middle|\, a,a^{*}\in IR\right\}\subset IR_2^2$$

cümlesi de matrislerde toplama ve matrislerde çarpma işlemleriyle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır.

Teorem 3.4.3.1 **:** $(ID,+,\cdot)$ dual sayılar halkası ile $(M,+,\cdot)$ halkası izomorftur.(3)

$$f: ID \longrightarrow M$$

$$A=a+\varepsilon a^{*}\longrightarrow f(A)=\begin{bmatrix} a & 0\\ a^{*} & a\end{bmatrix}$$

ile tanımlanan f dönüşümü bir izomorfizmdir.

Tanım 3.4.3.1 **:** Dual sayı elemanlı vektörlere ve matrislere sırasıyla *dual vektörler* ve *dual matrisler* adı verilir.(3)

Buna göre,

$$\begin{bmatrix} W\\ V\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0\\ DA & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w\\ v\end{bmatrix}$$

ile verilen screwler için $6\times 6-$tipinden koordinat dönüşüm matrisi

$$\left[\hat{A}\right]=[A]+\varepsilon[D][A]$$

dual matrisine izomorftur.

$S=(w,v)$ ve $S'=(W,V)$ screwleri sırasıyla $\hat{w}=w+\varepsilon v$ ve $\hat{W}=W+\varepsilon V$ dual vektörleriyle temsil edilirse, screw dönüşüm denklemi,

$$\left[\hat{W}\right]=\left[\hat{A}\right]\hat{w}$$

haline gelir. Gerçekten,

$$\left[\hat{W}\right]=W+\varepsilon V$$

$$\left[\hat{W}\right]=[A]w+\varepsilon\left([D][A]w+[A]v\right)$$

ve

$$\left[\hat{A}\right]\hat{w}=\left([A]+\varepsilon[D][A]\right)(w+\varepsilon v)$$

$$\left[\hat{A}\right]\hat{w}=[A]w+\varepsilon[A]v+\varepsilon[D][A]w+\underbrace{\varepsilon^2}_{0}[D][A]v$$

$$\left[\hat{A}\right]\hat{w}=[A]w+\varepsilon[A]v+\varepsilon[D][A]w$$

$$\left[\hat{A}\right]\hat{w}=[A]w+\varepsilon\left([D][A]w+[A]v\right)$$

olduğundan $\left[\hat{W}\right]=\left[\hat{A}\right]\hat{w}$ dır.

$\left[\hat{A}\right]$ dual matrisi,

$$\left[\hat{A}^T\right]=\left[\hat{A}^{-1}\right]$$

özelliğine sahiptir. Gerçekten,

$$\left[\hat{A}\right]\left[\hat{A}^T\right]=\left([A]+\varepsilon[D][A]\right)\left([A]+\varepsilon[D][A]\right)^T$$

$$\left[\hat{A}\right]\left[\hat{A}^T\right]=\left([A]+\varepsilon[D][A]\right)\left(\left[A^T\right]+\varepsilon\left[A^T\right]\left[D^T\right]\right)$$

$$\left[\hat{A}\right]\left[\hat{A}^T\right]=\underbrace{[A]\left[A^T\right]}_{[I]}+\varepsilon\underbrace{\left(\underbrace{[A]\left[A^T\right]}_{[I]}\underbrace{\left[D^T\right]}_{-[D]}+[D]\underbrace{[A]\left[A^T\right]}_{[I]}\right)}_{[0]}$$

$$\left[\hat{A}\right]\left[\hat{A}^T\right]=[I]$$

olup $\left[\hat{A}\right]$ matrisi bir ortogonal matristir. Bu, $3\times3-$tipinden dual sayı elemanlı $\left[\hat{A}\right]$ matrisine *dual ortogonal matris* adı verilir.[1]

***Örnek 3.4.3.1* :** z ekseni etrafında θ açılı ve eksen boyunca d mesafeli vida dispine karşılık gelen dual ortogonal matrisi bulalım.

z ekseni etrafında θ açılı dönme matrisi $[A]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ve

z ekseni boyunca öteleme miktarı $\vec{d}=(0,0,d)$ dır. $\vec{d}$ ye karşılık gelen antisimetrik matris $[D]=\begin{bmatrix}0 & -d & 0\\ d & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ dır.

$$\left[\hat{Z}\right]=[A]+\varepsilon[D][A]$$

$$\left[\hat{Z}\right]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0 & -d & 0\\ d & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{Z}\right]=\begin{bmatrix}\cos\theta-\varepsilon d\sin\theta & -\sin\theta-\varepsilon d\cos\theta & 0\\ \sin\theta+\varepsilon d\cos\theta & \cos\theta-\varepsilon d\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz.

İki doğru arasındaki dual açı, $\hat{\theta}=\theta+\varepsilon d$ dual sayısı ile tanımlanır.(3) Burada θ iki doğrunun doğrultman vektörleri arasındaki açı ve d iki doğru arasındaki en kısa uzaklıktır.

Ayrıca $f\left(\hat{\theta}\right)$ fonksiyonunun $\hat{\theta}=\theta$ noktasındaki Taylor açılımı

$$f\left(\hat{\theta}\right)=f(\theta+\varepsilon d)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(\varepsilon d)^n$$

$$f\left(\hat{\theta}\right)=f(\theta)+\varepsilon d f'(\theta)+\frac{f''(\theta)}{2!}\underbrace{(\varepsilon d)^2}_{0}+0+\ldots$$

$$f\left(\hat{\theta}\right)=f\left(\theta\right)+\varepsilon d f'\left(\theta\right)$$

olduğundan,

$$\sin\hat{\theta}=\sin\left(\theta+\varepsilon d\right)=\sin\theta+\varepsilon d\cos\theta$$

$$\cos\hat{\theta}=\cos\left(\theta+\varepsilon d\right)=\cos\theta-\varepsilon d\sin\theta$$

ifadeleriyle bir dual açının sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını tanımlayabiliriz.

Böylece z ekseni etrafında θ açılı ve eksen boyunca d mesafeli vida dispine karşılık gelen dual ortogonal matrisi,

$$\left[\hat{Z}\right]=\begin{bmatrix}\cos\hat{\theta} & -\sin\hat{\theta} & 0\\ \sin\hat{\theta} & \cos\hat{\theta} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz.

3.4.3.1 Dual Üstel Matris

$\left[\hat{A}(t)\right]$, bir parametreli dual ortogonal matrislerin bir cümlesi olsun. $\left[\hat{A}(t)\right]$ nın tanjant operatörü

$$\left[\hat{\Omega}\right]=\left[\dot{\hat{A}}\right]\left[\hat{A}^{T}\right]$$

$$\left[\hat{\Omega}\right]=\left[\frac{d\hat{A}}{dt}\right]\left[\hat{A}^{T}\right]$$

dır. Ayrıca,

$$\left[\hat{\Omega}^{T}\right]+\left[\hat{\Omega}\right]=\left(\left[\frac{d\hat{A}}{dt}\right]\left[\hat{A}^{T}\right]\right)^{T}+\left[\frac{d\hat{A}}{dt}\right]\left[\hat{A}^{T}\right]$$

$$\left[\hat{\Omega}^T\right]+\left[\hat{\Omega}\right]=\left[\hat{A}\right]\left[\frac{d\hat{A}^T}{dt}\right]+\left[\frac{d\hat{A}}{dt}\right]\left[\hat{A}^T\right]$$

$$\left[\hat{\Omega}^T\right]+\left[\hat{\Omega}\right]=\frac{d\left[\hat{A}\hat{A}^T\right]}{dt}=\frac{d[I]}{dt}=0$$

olduğundan $\left[\hat{\Omega}\right]$ antisimetriktir. $\left[\hat{\Omega}\right]$ matrisine *dual açısal hız matrisi* adı verilir.(1)

$\left[\hat{\Omega}\right]$ antisimetrik matrisine karşılık gelen dual vektör $\hat{w}$ ise bu durumda

$$\left[\hat{\Omega}\right]y=\hat{w}\times y$$

dir. Bu dual vektör $\hat{w}=w+\varepsilon w^0$ biçiminde yazılabilir $\hat{w}$ dual vektörünün dual kısmı w^0, w ya paralel ve w ya dik vektörlere ayrılabilir.

$$w^0=\underbrace{w^0-\frac{w.w^0}{w.w}w}_{c\times w}+\underbrace{\frac{w.w^0}{w.w}}_{k}w$$

$$w^0=c\times w+kw$$

Burada $c=\dfrac{w\times w^0}{w.w}$, $k=\dfrac{w.w^0}{w.w}$ dır.

$$\hat{w}=w+\varepsilon w^0$$

$$\hat{w}=w+\varepsilon\left(c\times w+kw\right)$$

$$\hat{w}=w\left(1+\varepsilon k\right)+\varepsilon\left(c\times w\right)+\varepsilon^2 k\left(c\times w\right)$$

$$\hat{w}=w\left(1+\varepsilon k\right)+\varepsilon\left(c\times w\right)\left(1+\varepsilon k\right)$$

$$\hat{w}=\left(1+\varepsilon k\right)\left(w+\varepsilon c\times w\right)$$

elde ederiz. $\left(w+\varepsilon c\times w\right)$ dual vektörü *ani screw ekseni*ni, k, ise $\left[\hat{A}(t)\right]$ ile tanımlanan ani vida hareketinin *adımı*nı tanımlar.(1)

Bir $\left[\hat{\Omega}\right]$ sabit dual açısal hızlı $\left[\hat{A}\right]$ hareketi,

$$\left[\hat{\Omega}\right]=\left[\frac{d\hat{A}}{dt}\right]\left[\hat{A}^T\right]$$

veya

$$\left[\frac{d\hat{A}}{dt}\right]=\left[\hat{\Omega}\right]\left[\hat{A}\right]$$

matris diferensiyel denklemin çözümüdür. Başlangıç şartı $\left[\hat{A}(0)\right]=[I]$ için çözüm

$$\left[\hat{A}(t)\right]=e^{t\left[\hat{\Omega}\right]}$$

dır.

$\left[\hat{A}(t)\right]$, $\left[\hat{\Omega}\right]$ dan elde edilen $w+\varepsilon c\times w$ ekseni etrafında bir vida hareketidir. Bunu görelim:

İlk olarak $c\times w=0$ halini ele alalım. Yani vida ekseni sabit koordinat çatısının orijininden geçerse,

$$\hat{w}=w+\varepsilon\left(c\times w+kw\right)$$

$$\hat{w}=w+\varepsilon kw$$

$$\hat{w}=(1+\varepsilon k)\,w$$

haline gelir. $\left[\hat{A}(t)\right]$ dispi $\left[\hat{\Omega}\right]=(1+\varepsilon k)[\Omega]$ özel antisimetrik matrisine sahiptir.

$$\left[\hat{A}(t)\right]=e^{t\left[\hat{\Omega}\right]}$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=e^{t(1+\varepsilon k)[\Omega]}$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\varepsilon k)^n\left([\Omega]t\right)^n}{n!}$$

dır. Binom açılımından

$$(1+\varepsilon k)^n = 1+(\varepsilon k)n+\frac{n(n-1)}{2!}\underbrace{(\varepsilon k)^2}_{0}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\underbrace{(\varepsilon k)^3}_{0}+\dots$$

$$(1+\varepsilon k)^n = 1+\varepsilon nk$$

dır.

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\varepsilon nk)([\Omega]t)^n}{n!}$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=[I]+(1+\varepsilon k)[\Omega t]+\frac{1}{2}(1+2\varepsilon k)[\Omega t]^2+\dots$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=[I]+[\Omega t]+\frac{1}{2}[\Omega t]^2+\dots+\varepsilon k[\Omega t]\left([I]+[\Omega t]+\frac{1}{2}[\Omega t]^2+\dots\right)$$

$\left[A(t)\right]$, $[\Omega]$ antisimetrik matrisinin üsteli ise,

$$\left[\hat{A}(t)\right]=e^{t[\Omega]}+\varepsilon k[\Omega t]e^{t[\Omega]}$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[A(t)\right]+\varepsilon kt[\Omega]\left[A(t)\right]$$

dual ortogonal matrisini elde ederiz. Bu dönüşüm w etrafında, dönme açısı $\|w\|$ dan tayin edilen ve öteleme miktarı $d(t)=kt\|w\|$ olan bir disp tanımlar. Bu hareketin açısal hızı $\|w\|$ ve lineer hızı $v=k\|w\|$ dır. Bu disp k adımlı bir vida hareketidir.

***Örnek 3.4.3.1.1* :** *Örnek 3.2.2.1* de $A(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (1-t^2)/(1+t^2) & -2t/(1+t^2)\\ 0 & 2t/(1+t^2) & (1-t^2)/(1+t^2)\end{bmatrix}$ tek parametreli bir harekete karşılık gelen dönme matrisini, θ dönme açısı olmak üzere $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ve bu $\left[A(t)\right]$ dönme matrisinin tanjant operatörünü

$$[\Omega]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{2}{t^2+1}\\ 0 & \dfrac{2}{t^2+1} & 0\end{bmatrix}$$ olarak elde etmiştik. Şimdi $\left[\hat{A}(t)\right]$ bir parametreli dual ortogonal matrisini bulalım.

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[A(t)\right]+\varepsilon kt[\Omega]\left[A(t)\right]$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & -\dfrac{2t}{1+t^2}\\ 0 & \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{bmatrix}+\varepsilon kt\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{2}{t^2+1}\\ 0 & \dfrac{2}{t^2+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & -\dfrac{2t}{1+t^2}\\ 0 & \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & -\dfrac{2t}{1+t^2}\\ 0 & \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{bmatrix}+\varepsilon kt\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{4t}{\left(t^2+1\right)^2} & -\dfrac{2\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\\ 0 & \dfrac{2\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2} & -\dfrac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\varepsilon kt\left(-\dfrac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}\right) & -\dfrac{2t}{1+t^2}+\varepsilon kt\left(-\dfrac{2\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\right)\\ 0 & \dfrac{2t}{1+t^2}+\varepsilon kt\left(\dfrac{2\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\right) & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}+\varepsilon kt\left(-\dfrac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}\right)\end{bmatrix}$$

dir.

Dual dönme açısı $\hat{\theta}$ olmak üzere

$$\cos\hat{\theta}(t)=\frac{\dot{I}z\hat{A}(t)-1}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}+\varepsilon kt\left(-\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}\right)$$

dır.

$$\cos\hat{\theta}=\cos\theta-\varepsilon d\sin\theta$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+\varepsilon kt\left(-\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}\right)=\frac{1-t^2}{1+t^2}-\varepsilon d\,\frac{2t}{1+t^2}$$

$$d=\frac{2kt}{1+t^2}=kt\underbrace{\frac{2}{1+t^2}}_{\|w\|}=kt\|w\|$$

elde edilir.

Eğer screw ekseni orijinden geçmezse, o zaman $c\times w\neq 0$ dır. Bu durumda $\left[\hat{A}(t)\right]$ hareketi, referans çatının değişiminden,

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[\hat{D}\right]e^{(1+\varepsilon k)[\Omega t]}\left[\hat{D}^{-1}\right]$$

dir. Burada $[C]$, c den elde edilen antisimetrik matris olmak üzere $\left[\hat{D}\right]=[I]+\varepsilon[C]$ dir.

$$\left[\hat{D}^T\right]\left[\hat{D}\right]=\left([I]+\varepsilon[C]\right)^T\left([I]+\varepsilon[C]\right)$$

$$\left[\hat{D}^T\right]\left[\hat{D}\right]=\left([I]+\varepsilon\left[C^T\right]\right)\left([I]+\varepsilon[C]\right)$$

$$\left[\hat{D}^T\right]\left[\hat{D}\right]=[I]+\varepsilon\left[\underbrace{C^T}_{-C}\right]+\varepsilon[C]=[I]$$

olup

$$\left[\hat{D}^{-1}\right]=\left[\hat{D}^T\right]=\left([I]+\varepsilon[C]\right)^T=[I]+\varepsilon\left[C^T\right]$$

dir.

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[\hat{D}\right]e^{(1+\varepsilon k)[\Omega t]}\left[\hat{D}^{-1}\right]$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[\hat{D}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\varepsilon k)^{n}}{n!}[\Omega t]^{n}\left[\hat{D}^{-1}\right]$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\left[\hat{D}\right](1+\varepsilon k)[\Omega t]\left[\hat{D}^{-1}\right]\right)^{n}$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=e^{\left[\hat{D}\right](1+\varepsilon k)[\Omega t]\left[\hat{D}^{-1}\right]}$$

$$\left[\hat{D}\right](1+\varepsilon k)[\Omega]\left[\hat{D}^{-1}\right]=([I]+\varepsilon[C])(1+\varepsilon k)[\Omega]\left([I]+\varepsilon\left[C^{T}\right]\right)$$

$$\left[\hat{D}\right](1+\varepsilon k)[\Omega]\left[\hat{D}^{-1}\right]=([I]+\varepsilon[C])\left((1+\varepsilon k)[\Omega]+\varepsilon(1+\varepsilon k)[\Omega]\left[C^{T}\right]\right)$$

$$\left[\hat{D}\right](1+\varepsilon k)[\Omega]\left[\hat{D}^{-1}\right]=([I]+\varepsilon[C])\left([\Omega]+\varepsilon k[\Omega]+\varepsilon[\Omega]\left[C^{T}\right]\right)$$

$$\left[\hat{D}\right](1+\varepsilon k)[\Omega]\left[\hat{D}^{-1}\right]=[\Omega]+\varepsilon k[\Omega]+\varepsilon[\Omega]\left[C^{T}\right]+\varepsilon[C][\Omega]$$

$$\left[\hat{D}\right](1+\varepsilon k)[\Omega]\left[\hat{D}^{-1}\right]=(1+\varepsilon k)[\Omega]+\varepsilon\left([\Omega]\left[\underbrace{C^{T}}_{-C}\right]+[C][\Omega]\right)$$

$$\left[\hat{D}\right](1+\varepsilon k)[\Omega]\left[\hat{D}^{-1}\right]=(1+\varepsilon k)[\Omega]+\varepsilon([C][\Omega]-[\Omega][C])$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=e^{((1+\varepsilon k)[\Omega]+\varepsilon([C][\Omega]-[\Omega][C]))t}$$

olarak elde edilir

$[C][\Omega]-[\Omega][C]$ antisimetrik matrisi $c\times w$ vektöründen elde edildiğinden $[\Omega]+\varepsilon([C][\Omega]-[\Omega][C])$ matrisi $w+\varepsilon c\times w$ vida eksenini tanımlar.

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[\hat{D}\right]e^{(1+\varepsilon k)[\Omega t]}\left[\hat{D}^{-1}\right]$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=([I]+\varepsilon[C])\left(\left[A(t)\right]+\varepsilon kt[\Omega]\left[A(t)\right]\right)\left([I]+\varepsilon\left[C^{T}\right]\right)$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=([I]+\varepsilon[C])\left(\left[A(t)\right]+\varepsilon kt[\Omega]\left[A(t)\right]+\left[A(t)\right]\left[C^{T}\right]\right)$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[A(t)\right]+\varepsilon kt[\Omega]\left[A(t)\right]+\varepsilon\left[A(t)\right]\left[C^T\right]+\varepsilon[C]\left[A(t)\right]$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[A(t)\right]+\varepsilon\left(kt[\Omega]\left[A(t)\right]+\left[A(t)\right]\left[\underbrace{C^T}_{-C}\right]+[C]\left[A(t)\right]\right)$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[A(t)\right]+\varepsilon\left(kt[\Omega]\left[A(t)\right]+[C]\left[A(t)\right]-\left[A(t)\right][C]\right)$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[A(t)\right]+\varepsilon\left(kt[\Omega]\left[A(t)\right]+[C]\left[A(t)\right]-\left[A(t)\right][C]\left[A^T(t)\right]\left[A(t)\right]\right)$$

$$\left[\hat{A}(t)\right]=\left[A(t)\right]+\varepsilon\left(kt[\Omega]+[C]-\left[A(t)\right][C]\left[A^T(t)\right]\right)\left[A(t)\right]$$

olarak elde edilir.

Hareketin öteleme bileşeni $kt[\Omega]+[C]-[A][C]\left[A^T\right]$ antisimetrik matrisiyle tanımlanmıştır. $[C]$ antisimetrik matrisine karşılık gelen vektör c ise, $[A][C]\left[A^T\right]$ matrisine karşılık gelen vektörün $c'=[A]c$ olduğunu elde etmiştik. Bu durumda öteleme vektörü,

$$d(t)=ktw+c-\left[A(t)\right]c$$

$$d(t)=ktw+\left[I-A(t)\right]c$$

vektör formundadır. Bu orijini c den geçmeyen vida dispindeki öteleme vektörü olan $d=ds+[I-A]c$ ile karşılaştırılırsa, hareket $w+\varepsilon c\times w$ ekseni etrafında k adımlı bir vida dispine karşılık gelir.

3.5. Kuaterniyonlar

Bir düzlem dispinin pol noktasının bileşenleri, bir dönmenin ekseni ve bir uzaysal dispin screw ekseni, özel hiperkompleks sayılar içinde toplanabilir, bunlar düzlem kuaterniyonları, kuaterniyonlar ve dual kuaterniyonlar olarak adlandırılmıştır. Bu bölümde bu hiperkompleks sayıların temel özelliklerini sunacağız. Önce genel olarak ele alacağız, daha sonra düzlem, küresel ve uzaysal displere özelleştireceğiz.

3.5.1 Clifford Cebiri

1876 da W.K.Clifford, multivektör ve kuaterniyonlarını içine alan bir geometrik cebirin yapısını tamamladı. Clifford cebiri olarak bilinen bu cebir, verilen bir vektör uzayı için skalar çarpımın bir seçimiyle tek türlü tanımlıdır.

Cebirin inşası, vektörler arasındaki bir çarpımın takdimiyle başlar. Çarpım lineerdir ve birleşmelidir.

x, y, z vektörler ve a, b, c skalarlar ise,

1) $(ax)(by+cz)=(ab)xy+(ac)xz$ (Lineerlik)

2) $(xy)z=x(yz)$ (Birleşme Özelliği)

Bu özelliklere ek olarak x ve y vektörleri arasındaki çarpım,

$$xy+yx=-2x.y$$

özelliğini sağlamalıdır. Burada "." V vektör uzayı için seçilen skalar çarpımdır.

3.5.1.1. Dış Cebir ve Clifford Cebiri

IR^3 vektör uzayının ΛIR^3 dış cebiri,

$$\Lambda IR^3 = \underbrace{\Lambda^0 IR^3}_{IR} \oplus \underbrace{\Lambda^1 IR^3}_{IR^3} \oplus \Lambda^2 IR^3 \oplus \Lambda^3 IR^3$$

olarak tanımlıdır.(4) Bu kesimde kullanılan, alt uzay, bu alt uzayların elemanlarını ve bazlarını aşağıdaki tabloda verildiği gibi kullanacağız.

<u>***Alt Uzay***</u>	<u>***Elemanlar***</u>	<u>***Baz***</u>
IR	Skalarlar	1
IR^3	Vektörler	$\{e_1, e_2, e_3\}$
$\Lambda^2 IR^3$	Bivektörler	$\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$
$\Lambda^3 IR^3$	Hacim Elementi	$\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$

Burada, $boy\left(\Lambda IR^3\right) = 2^3 = 8$ dir.

$\wedge$ dış çarpımı antisimetrik olduğundan IR^3 vektör uzayının $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazı

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i \qquad i \neq j$$

$$e_i \wedge e_i = 0$$

özelliklerini sağlar.

3.5.1.2. İki Vektörün Clifford Çarpımı

Tanım 3.5.1.2.1 : $C\ell\left(IR^3\right)$ Clifford cebirinin herhangi iki x ve y elemanının Clifford çarpımı xy ile gösterilir ve

$$xy = -x.y + x \wedge y$$

olarak tanımlanır.[(4)]

$\forall x, y \in IR^3$ için $x.y = y.x$ ve $x \wedge y = -y \wedge x$ olduğundan

$$yx = -y.x + y \wedge x = -x.y - x \wedge y$$

elde ederiz. Bu durumda,

$$xy + yx = -2x.y$$

dir.

IR^3 vektör uzayının $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bazı,

$$e_i e_j = -\underbrace{e_i . e_j}_{0} + e_i \wedge e_j = e_i \wedge e_j$$

$$e_j e_i = -\underbrace{e_j . e_i}_{0} + e_j \wedge e_i = e_j \wedge e_i = -e_i \wedge e_j = -e_i e_j$$

$$e_i e_i = -\underbrace{e_i . e_i}_{1} + e_i \wedge e_i = -1$$

özelliklerini sağladığından $C\ell\left(IR^3\right)$ Clifford cebirinin baz vektörleri ile ΛIR^3 dış cebirinin baz vektörleri arasında bir birebir eşleme aşağıdaki şekilde yapılabilir.

$\boldsymbol{C\ell\,(IR^3)}$	$\boldsymbol{\Lambda\, IR^3}$
1	1
$\{e_1, e_2, e_3\}$	$\{e_1, e_2, e_3\}$
$\{e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3\}$	$\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3\}$
$\{e_1e_2e_3\}$	$\{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3\}$

Buna göre,

$$C\ell\left(IR^3\right) = \underbrace{\Lambda^0 IR^3}_{IR} \oplus \underbrace{\Lambda^1 IR^3}_{IR^3} \oplus \Lambda^2 IR^3 \oplus \Lambda^3 IR^3$$

yazılabilir.

3.5.1.3. Clifford Cebir Çarpımının Matris Formu

Bir Clifford cebirinin baz multivektörlerinin bir sıralanışı özel olarak belirtilmişse, o zaman Clifford cebirinin herhangi bir A elemanı, $2^n -$boyutlu sıralı bir **A** skalarları ile temsil edilebilir. Ayrıca $A, B \in C\ell(V)$ olmak üzere, $AB = C$ çarpımı

$$\mathbf{C} = \left[A^{+}\right]\mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \left[B^{-}\right]\mathbf{A}$$

matris denklemlerinden biriyle tanımlanabilir. Burada $\left[A^{+}\right]$ ve $\left[B^{-}\right]$ $2^n \times 2^n$ matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$\left[A^{+}\right]$ nın her bir sütunu, bir baz multivektörüyle sağdan A nın çarpımıyla elde edilmiştir. Yani Clifford cebirinin bir baz multivektörü $\left\{1, e_1, e_2, ..., e_n, e_1e_2, e_1e_3, ...\right\}$ ise $\left[A^{+}\right]$ nın sütunları $A, Ae_1, Ae_2, ..., Ae_n, Ae_1e_2, Ae_1e_3, ...$ den elde edilmiştir.

$\left[B^{-}\right]$ nin her bir sütunu ise bir baz multivektörüyle soldan B nin çarpımıyla elde edilmiştir. Yani $\left[B^{-}\right]$ nin sütunları $B, e_1B, e_2B, ..., e_nB, e_1e_2B, e_1e_3B, ...$ den elde edilmiştir.

3.5.1.4. İnvers

V vektör uzayı, V nin Clifford cebirinde rankı 1 olan multivektörlerinin cümlesi olarak ele alınır.

$\forall x, y \in C\ell(V)$ için $xy + yx = -2x.y$ olduğundan $\forall x \in C\ell(V)$ vektörü,

$$xx + xx = -2x.x$$

$$2xx = -2x.x$$

$$xx = -x.x$$

$$-\frac{xx}{x.x}=1$$

$$x\left(-\frac{x}{x.x}\right)=1$$

$$x^{-1}=-\frac{x}{x.x}$$

inversine sahiptir.

Eğer Clifford cebirinin bir elemanı $A=xy$ ise A nın inversi,

$$A^{-1}=y^{-1}x^{-1}$$

dir.

Bir $A\in C\ell(V)$ nin inversi, cebir çarpımının matris formuyla elde edilebilir. $1\in C\ell(V)$ birim eleman olmak üzere, $AA^{-1}=1$ elemanı matris formuyla

$$\mathbf{E}=\left[A^{+}\right]\mathbf{A}^{\mathbf{-1}}$$

tanımlanmıştır. Burada E, 1 baz elemanına karşılık gelen $2^{n}-$boyutlu birim vektör, $\mathbf{A}^{\mathbf{-1}}$ ise A^{-1} matrisinin bileşenlerinin sütun sıralamasıdır. Eğer $\left[A^{+}\right]$ matrisinin inversi varsa o zaman

$$\mathbf{A}^{\mathbf{-1}}=\left[A^{+}\right]^{-1}\mathbf{E}$$

dir.

3.5.1.5. Çift Clifford Cebiri

Çift sayıların çarpımı çift olduğundan, $C\ell(V)$ nin çift ranklı multivektörlerinin alt cümlesi bir alt cebir oluşturur. Bu alt cebir V nin *çift Clifford* *cebiri* olarak bilinir ve $C\ell^{+}(V)$ ile gösterilir. [1] Çift Clifford cebirinin boyutu 2^{n-1} dir.

IR^2 nin çift Clifford cebiri $C\ell^{+}\left(IR^2\right)=IR\oplus\Lambda^2 IR^2$ dir.[4] $C\ell^{+}\left(IR^2\right)$ nin bir bazı $\{1,e_1e_2\}$ olduğundan $boyC\ell^{+}\left(IR^2\right)=2$ dir.

$\forall C\in C\ell^{+}\left(IR^2\right)$ için $C=c_1+c_2e_1e_2$ olacak şekilde $c_1,c_2\in IR$ vardır.

$$\left(e_1e_2\right)^2=\left(e_1e_2\right)\left(e_1e_2\right)=-e_1e_2e_2e_1=-1$$

olduğundan e_1e_2 kompleks sayıların i birimi ile özdeşleştirilebilir. Bu durumda $C\ell^{+}\left(IR^2\right)$, $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cümlesi gibi ele alınabilir.

IR^3 ün çift Clifford cebiri $C\ell^{+}\left(IR^3\right)=IR\oplus\Lambda^2 IR^3$ dür.[4] $C\ell^{+}\left(IR^3\right)$ nin bir bazı $\{1,e_2e_3,e_3e_1,e_1e_2\}$ olduğundan $boyC\ell^{+}\left(IR^3\right)=4$ tür.

$\forall H\in C\ell^{+}\left(IR^3\right)$ için $H=H_4+H_1e_2e_3+H_2e_3e_1+H_3e_1e_2$ olacak şekilde $H_1,H_2,H_3,H_4\in IR$ vardır. Baz bivektörleri

$$i=e_2e_3 \qquad j=e_3e_1 \qquad k=e_1e_2$$

ile gösterilirse,

$$i^2=\left(e_2e_3\right)^2=e_2e_3e_2e_3=-e_2e_3e_3e_2=-1$$

$$j^2=\left(e_3e_1\right)^2=e_3e_1e_3e_1=-e_3e_1e_1e_3=-1$$

$$k^2=\left(e_1e_2\right)^2=e_1e_2e_1e_2=-e_1e_2e_2e_1=-1$$

$$ij=\left(e_2e_3\right)\left(e_3e_1\right)=-e_2e_1=e_1e_2=k$$

$$jk=\left(e_3e_1\right)\left(e_1e_2\right)=-e_3e_2=e_2e_3=i$$

$$ki=(e_1e_2)(e_2e_3)=-e_1e_3=e_3e_1=j$$

$$ik=(e_2e_3)(e_1e_2)=e_3e_2e_2e_1=-e_3e_1=-j$$

$$kj=(e_1e_2)(e_3e_1)=e_2e_1e_1e_3=-e_2e_3=-i$$

$$ji=(e_3e_1)(e_2e_3)=e_1e_3e_3e_2=-e_1e_2=-k$$

dır. Bunlar i, j, k kuaterniyon birimi için çarpım kurallarıdır. Böylece $C\ell^+(IR^3)$, ilk olarak W.R.Hamilton tarafından tanımlanan kuaterniyon cümlesidir.

3.5.1.6. Özel Clifford Cebirleri

IR^3 ve IR^4 ün özel dejenere skalar çarpımlarından elde edilen Clifford cebirlerini inceleyelim. Bu uzaylar, düzlem ve uzay displerinin homogen dönüşümlerini tanımlamak için kullanılır.

IR^3 de *skalar çarpım,* $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in IR^3$ için

$$d(x,y)=x.y=x_1y_1+x_2y_2$$

olarak tanımlanmıştır.[(1)] Bu çarpım, düzlem dispinin homogen formunda kullanılan $x_3=1$ düzlemindeki standart (Öklid) çarpımdır.

Eğer IR^3 ün baz vektörleri $\{e_1,e_2,e_3\}$ ise,

$$d(e_3,e_3)=d((0,0,1),(0,0,1))=e_3.e_3=0$$

olduğundan,

$$e_3^2=e_3e_3=-e_3.e_3+e_3\wedge e_3=0$$

dır. Bu durumda $e_3^2=0$ olan Clifford cebiri gereklidir. Böylece $C\ell^+(IR^3)$ ün, kuaterniyonlar için tanımlanan çarpımdan farklı bir çarpım kuralı olan, bir alt cümlesini elde ederiz. Bu yeni Clifford cebirini $C\ell^{+}\left(IR^{3},d\right)$ ile gösterelim. $C\ell^{+}\left(IR^{3},d\right)$ çift Clifford cebirinin $1, e_3e_1, e_3e_2, e_1e_2$ baz bivektörleri,

$$\left(e_3e_1\right)^2 = e_3e_1e_3e_1 = -e_1e_3e_3e_1 = 0$$

$$\left(e_3e_2\right)^2 = e_3e_2e_3e_2 = -e_2e_3e_3e_2 = 0$$

$$\left(e_1e_2\right)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_2e_1e_1e_2 = -1$$

$$\left(e_3e_1\right)\left(e_3e_2\right) = -e_1e_3e_3e_2 = 0$$

$$\left(e_3e_2\right)\left(e_1e_2\right) = -e_3e_2e_2e_1 = e_3e_1$$

$$\left(e_1e_2\right)\left(e_3e_1\right) = e_2e_1e_1e_3 = -e_2e_3 = e_3e_2$$

eşitliklerini sağlar. Bu baz bivektörleri, i, j, k kuaterniyon birimleri ve, ε dual birim$\left(\varepsilon^2 = 0\right)$ olmak üzere, $i\varepsilon$, $j\varepsilon$ ve k birimleriyle özdeşleştirilirse,

$$i\varepsilon = e_3e_1 \qquad j\varepsilon = e_3e_2 \qquad k = e_1e_2$$

elde edilir.

Bu durumda $C\ell^{+}\left(IR^{3},d\right)$ çift Clifford cebirinin baz bivektörleri $\{1, i\varepsilon, j\varepsilon, k\}$ dir. $\forall A \in C\ell^{+}\left(IR^{3},d\right)$ için $A = A_4 + A_1 i\varepsilon + A_2 j\varepsilon + A_3 k$ ile verilmiştir. Buna bir *düzlem kuaterniyonu* adı verilir.(1) Çünkü bu, bir düzlem dispinin temsili için kullanılır.

IR^4 de, $x = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ $y = \left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) \in IR^4$ için

$$d\left(x, y\right) = x.y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

olarak tanımlanan *dejenere skalar çarpım*ın(1) kullanılmasıyla elde edilen IR^4 ün Clifford cebirini ele alalım. Bu çarpım, uzaysal katı cisim displerinin homogen temsilinde kullanılan $x_4 = 1$ hiperdüzlemindeki Öklid çarpımıdır.

Eğer IR^4 ün baz vektörleri $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ise,

$$d(e_4, e_4) = d((0,0,0,1),(0,0,0,1)) = e_4 . e_4 = 0$$

olduğundan,

$$e_4^2 = e_4 e_4 = -e_4 . e_4 + e_4 \wedge e_4 = 0$$

dır.

$C\ell(IR^4) = IR \oplus \Lambda^1 IR^4 \oplus \Lambda^2 IR^4 \oplus \Lambda^3 IR^4 \oplus \Lambda^4 IR^4$ olduğundan $C\ell^+(IR^4) = IR \oplus \Lambda^2 IR^4 \oplus \Lambda^4 IR^4$ dır.(4) $C\ell^+(IR^4, d)$ çift Clifford cebirinin baz multivektörleri, $\{1, e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2, e_4e_1, e_4e_2, e_4e_3, e_1e_2e_3e_4\}$ dir. e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2 bivektörleri, i, j, k kuaterniyon birimleridir. $e_1e_2e_3e_4$ multivektörü $(e_1e_2e_3e_4)^2 = 0$ özelliğine sahiptir. $e_1e_2e_3e_4 = \varepsilon$ ile gösterilirse, $i = e_2e_3$, $j = e_3e_1$, $k = e_1e_2$ bivektörüyle,

$$i\varepsilon = (e_2e_3)(e_1e_2e_3e_4) = e_3e_2e_2e_1e_3e_4 = e_1e_3e_3e_4 = e_4e_1$$

$$j\varepsilon = (e_3e_1)(e_1e_2e_3e_4) = e_3e_1e_1e_2e_3e_4 = e_2e_3e_3e_4 = e_4e_2$$

$$k\varepsilon = (e_1e_2)(e_1e_2e_3e_4) = (e_1e_2)^2 e_3e_4 = e_4e_3$$

elde edilir. Bu durumda $C\ell^+(IR^4, d)$ çift Clifford cebirinin baz multivektörleri $\{1, i, j, k, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon, \varepsilon\}$ dir. $C\ell^+(IR^4, d)$ nin herhangi bir elemanı,

$$\hat{H} = H_4 + H_1 i + H_2 j + H_3 k + H_1^0 i\varepsilon + H_2^0 j\varepsilon + H_3^0 k\varepsilon + H_4^0 \varepsilon$$

ise,

$$\hat{H} = H_4 + \varepsilon H_4^\circ + (H_1 + \varepsilon H_1^\circ) i + (H_2 + \varepsilon H_2^\circ) j + (H_3 + \varepsilon H_3^\circ) k$$

bir dual kuaterniyonudur.

3.5.2. Düzlem Kuaterniyonları

3.5.2.1. Düzlem Displeri

Düzlem kuaterniyonlarını, düzlem displerini tanımlamak için kullanacağız. $3\times 3-$homogen dönüşümünün $\lambda=1$ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik vektör,

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(d_1/2)\sin(\theta/2)-(d_2/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\ \dfrac{(d_1/2)\cos(\theta/2)+(d_2/2)\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. $p=(p_1,p_2,1)$ düzlemin pol noktasıdır. $p=(p_1,p_2,1)$ nin bileşenleri,

$$Z=\cos(\theta/2)+p_2\sin(\theta/2)i\varepsilon-p_1\sin(\theta/2)j\varepsilon+\sin(\theta/2)k$$

formülüyle $C\ell^{+}\left(IR^3,d\right)$ çift Clifford cebirinin bir $Z=z_4+z_1 i\varepsilon+z_2 j\varepsilon+z_3 k$ elemanlı düzlem dispine özdeş olarak kullanılmıştır. Bu denklemde pol noktaları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Z=&\cos(\theta/2)+\big((d_1/2)\cos(\theta/2)+(d_2/2)\sin(\theta/2)\big)i\varepsilon \\ &-\big((d_1/2)\sin(\theta/2)-(d_2/2)\cos(\theta/2)\big)j\varepsilon+\sin(\theta/2)k \end{aligned}$$

$$z_4=\cos(\theta/2)$$

$$z_1=(d_1/2)\cos(\theta/2)+(d_2/2)\sin(\theta/2)$$

$$z_2=-(d_1/2)\sin(\theta/2)+(d_2/2)\cos(\theta/2)$$

$$z_3=\sin(\theta/2)$$

olarak elde ederiz. θ, d_1 ve d_2 parametreleri,

$$\cos\theta=\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2)=z_4^2-z_3^2$$

$$\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = 2z_3z_4$$

$$d_1 = 2(z_1z_4 - z_2z_3)$$

$$d_2 = 2(z_1z_3 + z_2z_4)$$

formülleriyle Z den elde edilmişlerdir.

IR^3 de bir $\mathbf{X} = (x, y, 1)$ noktası, Clifford cebirinin bir $X = yi\varepsilon - xj\varepsilon + k$ elemanıyla özdeşleştirilirse, Z nin eşleniği $Z^* = z_4 - z_1 i\varepsilon - z_2 j\varepsilon - z_3 k$ ve

$$(i\varepsilon)^2 = 0 \qquad (j\varepsilon)^2 = 0 \qquad k^2 = -1$$

$$(i\varepsilon)(j\varepsilon) = 0 \quad (j\varepsilon)k = i\varepsilon \quad k(i\varepsilon) = j\varepsilon$$

$$k(j\varepsilon) = -i\varepsilon \quad (i\varepsilon)k = -j\varepsilon$$

$$i\varepsilon = e_3e_1 \qquad j\varepsilon = e_3e_2 \qquad k = e_1e_2$$

olmak üzere ZXZ^* çarpımı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$ZXZ^* = (z_4 + z_1 i\varepsilon + z_2 j\varepsilon + z_3 k)(yi\varepsilon - xj\varepsilon + k)(z_4 - z_1 i\varepsilon - z_2 j\varepsilon - z_3 k)$$

$$ZXZ^* = (z_3^2 + z_4^2)k + \left((z_4^2 - z_3^2)y + (2z_3z_4)x + d_2 + 2(z_2z_4 + z_1z_3)\right)i\varepsilon$$

$$+\left((2z_3z_4)y + (-z_4^2 + z_3^2)x + 2(-z_1z_4 + z_2z_3)\right)j\varepsilon$$

dir. Burada, $X' = ZXZ^*$ denirse

$$X' = \left((\cos\theta)y + (\sin\theta)x + d_2\right)i\varepsilon + \left((\sin\theta)y - (\cos\theta)x - d_1\right)j\varepsilon + k$$

$$X' = \underbrace{\left((\sin\theta)x + (\cos\theta)y + d_2\right)}_{y' \text{ denirse}}i\varepsilon - \underbrace{\left((\cos\theta)x - (\sin\theta)y + d_1\right)}_{x' \text{ denirse}}j\varepsilon + k$$

$$X' = y'i\varepsilon - x'j\varepsilon + k$$

$$y' = (\sin\theta)x + (\cos\theta)y + d_2$$

$$x' = (\cos\theta)x - (\sin\theta)y + d_1$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Görüldüğü gibi X', X in düzlem dispinin sonucundaki resmidir.

3.5.2.2. IR^4 de Vektörler

$Z = Z_4 + Z_1 i\varepsilon + Z_2 j\varepsilon + Z_3 k$ düzlem kuaterniyonu, $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \in IR^4$, dört boyutlu vektör olarak yazılabilir.

θ açılı bir sırf dönme,

$$\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = \left(\frac{d_1}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{d_2}{2}\sin\frac{\theta}{2},\ -\frac{d_1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{d_2}{2}\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\mathbf{Z} = \left(0, 0, \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2} \right)$$

dir ve $d = (d_1, d_2)$ ötelemeli bir sırf öteleme,

$$\mathbf{D} = (D_1, D_2, D_3, D_4) = \left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}, 0, 1 \right)$$

dir.

İki DZ düzlem kuaterniyonun çarpımından $\mathbf{DZ}$ vektörleri meydana gelir. $\mathbf{DZ}$ vektörlerinin bileşenlerini Clifford cebirinin matris formundaki temsiliyle elde edelim.

$$\mathbf{DZ} = \left[D^+ \right] \mathbf{Z}$$

veya

$$\mathbf{DZ} = \left[Z^- \right] \mathbf{D}$$

dir. $\left[D^{+}\right]$ matrisini belirleyelim: $C\ell^{+}\left(IR^{3},d\right)$ çift Clifford cebirinin baz bivektörleri $\left\{i\varepsilon, j\varepsilon, k, 1\right\}$ ise, $\mathbf{D}=\left(D_1,D_2,D_3,D_4\right)$ vektörünü $D=D_4+D_1 i\varepsilon+D_2 j\varepsilon+D_3 k$ olarak yazılabiliriz.

$$(D)(i\varepsilon)=(D_4+D_1 i\varepsilon+D_2 j\varepsilon+D_3 k)(i\varepsilon)=D_4 i\varepsilon+0+0+D_3 j\varepsilon$$

$$(D)(j\varepsilon)=(D_4+D_1 i\varepsilon+D_2 j\varepsilon+D_3 k)(j\varepsilon)=D_4 j\varepsilon+0+0-D_3 i\varepsilon$$

$$(D)(k)=(D_4+D_1 i\varepsilon+D_2 j\varepsilon+D_3 k)(k)=D_4 k-D_1 j\varepsilon+D_2 i\varepsilon-D_3$$

$$(D)(1)=D_4+D_1 i\varepsilon+D_2 j\varepsilon+D_3 k$$

$$\left[D^{+}\right]=\begin{bmatrix} D_4 & -D_3 & D_2 & D_1 \\ D_3 & D_4 & -D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & D_4 & D_3 \\ 0 & 0 & -D_3 & D_4 \end{bmatrix}$$

dir. Benzer şekilde, $\left[Z^{-}\right]$ matrisini belirleyelim: $C\ell^{+}\left(IR^{3},d\right)$ çift Clifford cebirinin baz bivektörleri $\left\{i\varepsilon, j\varepsilon, k, 1\right\}$ olduğundan $\mathbf{Z}=\left(Z_1,Z_2,Z_3,Z_4\right)$ vektörünü $Z=Z_4+Z_1 i\varepsilon+Z_2 j\varepsilon+Z_3 k$ olarak yazabiliriz.

$$(i\varepsilon)(Z)=(i\varepsilon)(Z_4+Z_1 i\varepsilon+Z_2 j\varepsilon+Z_3 k)=Z_4 i\varepsilon+0+0-Z_3 j\varepsilon$$

$$(j\varepsilon)(Z)=(j\varepsilon)(Z_4+Z_1 i\varepsilon+Z_2 j\varepsilon+Z_3 k)=Z_4 j\varepsilon+0+Z_3 i\varepsilon$$

$$(k)(Z)=(k)(Z_4+Z_1 i\varepsilon+Z_2 j\varepsilon+Z_3 k)=Z_4 k+Z_1 j\varepsilon-Z_2 i\varepsilon-Z_3$$

$$(1)(Z)=Z_4+Z_1 i\varepsilon+Z_2 j\varepsilon+Z_3 k$$

$$\left[Z^{-}\right]=\begin{bmatrix} Z_4 & Z_3 & -Z_2 & Z_1 \\ -Z_3 & Z_4 & Z_1 & Z_2 \\ 0 & 0 & Z_4 & Z_3 \\ 0 & 0 & -Z_3 & Z_4 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi daha önce elde ettiğimiz $X' = ZXZ^*$ düzlem dispini matris formu ile de elde edelim.

$$X' = ZXZ^* = \left[Z^-\right]^* \left[X^-\right] Z$$

$$\left[X^-\right] Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x & y \\ -1 & 0 & y & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_1}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{d_2}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -\frac{d_1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{d_2}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[X^-\right] Z = \begin{bmatrix} y\cos\frac{\theta}{2} + x\sin\frac{\theta}{2} - \frac{d_1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{d_2}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ y\sin\frac{\theta}{2} - x\cos\frac{\theta}{2} - \frac{d_1}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{d_2}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[Z^-\right]^* = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} & -\frac{d_1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{d_2}{2}\cos\frac{\theta}{2} & -\frac{d_1}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{d_2}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -\frac{d_1}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{d_2}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \frac{d_1}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{d_2}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$X' = ZXZ^* = \left[Z^-\right]^* \left[X^-\right] Z = \begin{bmatrix} y\cos\theta + x\sin\theta + d_2 \\ y\sin\theta - x\cos\theta - d_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ -x' \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Yani X', X in düzlem dispinin sonucunda elde edilmiştir.

3.5.3. Kuaterniyonlar

3.5.3.1. Dönmeler

Dönmeler,

$$Z = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

kuaterniyonu içine bir dönmenin c_0, c_1, c_2, c_3 Euler parametrelerinin toplanmasıyla $C\ell^+\left(IR^3\right)$ çift Clifford cebirinin elemanlarıyla özdeşleştirilebilir.

θ dönme açısı ve $s = \left(s_x, s_y, s_z\right)$ dönme eksenine göre $Z = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$ kuaterniyonunun yazılışı,

$$Z = \cos\frac{\theta}{2} + s_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) i + s_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) j + s_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) k$$

olur Z bir birim kuaterniyondur.

IR^3 deki bir $\mathbf{X} = \left(x, y, z\right)$ vektörü, vektör kuaterniyon (sırf kuaterniyon) olarak $C\ell^+\left(IR^3\right)$ ün bir $X = xi + yj + zk$ elemanıyla özdeşleştirilmiştir.

Dönme $X' = ZXZ^*$ kuaterniyon denklemiyle verilmiştir. Burada Z^*, Z nin eşleniği olup $Z^* = c_0 - c_1 i - c_2 j - c_3 k$ dir. $X' = ZXZ^*$ kuaterniyonunu, kuaterniyon çarpımını matris formunu kullanarak elde edelim.

3.5.3.2 Kuaterniyon Çarpımının Matris Formu

Bir $Z = Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k$ kuaterniyonun bileşenlerini, IR^4 de $\mathbf{Z} = \left(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\right) \in IR^4$ vektörüyle özdeşleştirelim. Örneğin, $z-$ekseni etrafında θ açılık dönme için, dönme ekseni $s = \left(s_x, s_y, s_z\right) = \left(0, 0, 1\right)$ olacağından,

$$\mathbf{Z} = \left(s_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), s_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), s_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\mathbf{Z} = \left(0, 0, \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\frac{\theta}{2} \right)$$

dir. $\mathbf{Z}$ vektörü $Z = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)k$ kuaterniyonu ile tanımlanmıştır. Birim dönme $\left(\theta = 2\pi \text{ olacağından}\right)$ $\mathbf{Z} = (0,0,0,1)$ vektörüyle olur.

İki G ve Z kuaterniyonun çarpımı olan $\mathbf{GZ}$ vektörü,

$$\mathbf{GZ} = \left[G^{+}\right]\mathbf{Z} \quad \text{veya} \quad \mathbf{GZ} = \left[Z^{-}\right]\mathbf{G}$$

matris çarpımıyla verilmiştir. $\left[G^{+}\right]$ ve $\left[Z^{-}\right]$ matrislerini hesaplayalım. Baz vektörleri $\{ i, j, k, 1 \}$ olduğundan,

$$Z = Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k$$

$$G = G_4 + G_1 i + G_2 j + G_3 k$$

$$(G)(i) = (G_4 + G_1 i + G_2 j + G_3 k)(i) = G_4 i - G_1 - G_2 k + G_3 j$$

$$(G)(j) = (G_4 + G_1 i + G_2 j + G_3 k)(j) = G_4 j + G_1 k - G_2 - G_3 i$$

$$(G)(k) = (G_4 + G_1 i + G_2 j + G_3 k)(k) = G_4 k - G_1 j + G_2 i - G_3$$

$$(G)(1) = G_4 + G_1 i + G_2 j + G_3 k$$

$$\left[G^{+}\right] = \begin{bmatrix} G_4 & -G_3 & G_2 & G_1 \\ G_3 & G_4 & -G_1 & G_2 \\ -G_2 & G_1 & G_4 & G_3 \\ -G_1 & -G_2 & -G_3 & G_4 \end{bmatrix}$$

ve

$$(i)(Z) = (i)(Z_4 + Z_1 i + Z_2 j + Z_3 k) = Z_4 i - Z_1 + Z_2 k - Z_3 j$$

$$(j)(Z)=(j)(Z_4+Z_1i+Z_2j+Z_3k)=Z_4j-Z_1k-Z_2+Z_3i$$

$$(k)(Z)=(k)(Z_4+Z_1i+Z_2j+Z_3k)=Z_4k+Z_1j-Z_2i-Z_3$$

$$(1)(Z)=Z_4+Z_1i+Z_2j+Z_3k$$

$$\left[Z^-\right]=\begin{bmatrix} Z_4 & Z_3 & -Z_2 & Z_1 \\ -Z_3 & Z_4 & Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & -Z_1 & Z_4 & Z_3 \\ -Z_1 & -Z_2 & -Z_3 & Z_4 \end{bmatrix}$$

dür.

Karşılık gelen kuaterniyonlar birim büyüklüğe sahip olduğundan ve her bir sütun diğer tüm sütunlara ortogonal olduğundan bu matrislerin her biri bir $4\times4-$tipinden ortogonal matristir.

$$\mathbf{Z}=\left(s_x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),s_y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),s_z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\mathbf{X}=(x,y,z,0)$$

olmak üzere $X'=ZXZ^*$ matris formu $\mathbf{X}'=\left[Z^+\right]\left[Z^-\right]^*\mathbf{X}$ ile verildiği düşünülebilir.

$$\left[Z^+\right]=\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} \\ s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -s_x\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} \\ -s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & s_z\sin\frac{\theta}{2} \\ -s_x\sin\frac{\theta}{2} & -s_y\sin\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[Z^-\right]^* = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} & -s_x\sin\frac{\theta}{2} \\ s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -s_x\sin\frac{\theta}{2} & -s_y\sin\frac{\theta}{2} \\ -s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} \\ s_x\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

Burada $s^T = \begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z \end{bmatrix}$ ve s ye karşılık gelen antisimetrik matris

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} \\ s_z\sin\frac{\theta}{2} & 0 & -s_x\sin\frac{\theta}{2} \\ s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} \\ s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -s_x\sin\frac{\theta}{2} \\ s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

olacağından,

$$\left[Z^+\right] = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S & \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)s \\ -\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)s^T & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[Z^-\right]^* = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)I + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)S & -\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)s \\ \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)s^T & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir.

$$\left[Z^{+}\right]\left[Z^{*-}\right]=\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} \\ s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -s_x\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} \\ -s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & s_z\sin\frac{\theta}{2} \\ -s_x\sin\frac{\theta}{2} & -s_y\sin\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} & -s_x\sin\frac{\theta}{2} \\ s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -s_x\sin\frac{\theta}{2} & -s_y\sin\frac{\theta}{2} \\ -s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} \\ s_x\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[Z^{+}\right]\left[Z^{*-}\right]=\begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)I+2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)S+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)S^2+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(I+S^2\right) & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)I+2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)S+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)S^2+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(I+S^2\right)=I+\left(\sin\theta\right)S+\left(1-\cos\theta\right)S^2$$

olup, bu θ dönme açısına ve s dönme eksenine göre tanımlanan $\left[A\right]=I+\left(\sin\theta\right)S+\left(1-\cos\theta\right)S^2$ dönme matrisidir. Bu durumda,

$$\left[Z^{+}\right]\left[Z^{*-}\right]=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

3.5.4. Dual Kuaterniyonlar

$\left[T\right]=\left[A,d\right]$ koordinat dönüşümü, bir $\hat{Z}=Z+\varepsilon Z^0$ dual kuaterniyonu ile temsil edilebilen F sabit çatıdan M hareketli çatıya bir cismin konumunu tanımlar.

$\hat{Z}=Z+\varepsilon Z^0$ dual kuaterniyonunun $Z=z_4+z_1 i\varepsilon+z_2 j\varepsilon+z_3 k$ reel kısmı, $\left[A\right]$ dönmesinin Euler parametreleriyle tanımlanmıştı. Z^0 dual kısmı ise

$$Z^0 = \frac{1}{2} DZ$$

ile verilmiştir. Burada $D = d_1 i + d_2 j + d_3 k$, $d = (d_1, d_2, d_3)$ öteleme vektöründen elde edilen bir sırf kuaterniyondur.

d öteleme vektörü, $\mathbf{d} = ds + c - [A]c$ vida dispinin parametrelerine göre yazılsın. Bu vektörlerin her birinin kuaterniyon formunda yazılışıyla,

$$D = dS + C - ZCZ^*$$

elde ederiz ve

$$Z^0 = \frac{1}{2} DZ$$

$$Z^0 = \frac{1}{2}\left(dS + C - ZCZ^*\right) Z$$

$$Z^0 = \frac{1}{2}\left(dSZ + CZ - ZC\right)$$

olur. Bu ifadeyi açarsak,

$$Z^0 = \frac{1}{2}\left(\left[Z^-\right] dS + \left[Z^-\right] C - \left[Z^+\right] C\right)$$

$$Z^0 = \frac{1}{2}\left(\left[Z^-\right]\left(dS + C\right) - \left[Z^+\right] C\right)$$

olarak elde ederiz.

$$\left[Z^+\right] C = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -s_z \sin\frac{\theta}{2} & s_y \sin\frac{\theta}{2} & s_x \sin\frac{\theta}{2} \\ s_z \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & -s_x \sin\frac{\theta}{2} & s_y \sin\frac{\theta}{2} \\ -s_y \sin\frac{\theta}{2} & s_x \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & s_z \sin\frac{\theta}{2} \\ -s_x \sin\frac{\theta}{2} & -s_y \sin\frac{\theta}{2} & -s_z \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[Z^{+}\right]C=\begin{bmatrix} c_1\cos\frac{\theta}{2}-c_2s_z\sin\frac{\theta}{2}+c_3s_y\sin\frac{\theta}{2} \\ c_1s_z\sin\frac{\theta}{2}+c_2\cos\frac{\theta}{2}-c_3s_x\sin\frac{\theta}{2} \\ -c_1s_y\sin\frac{\theta}{2}+c_2s_x\sin\frac{\theta}{2}+c_3\cos\frac{\theta}{2} \\ -c_1s_x\sin\frac{\theta}{2}-c_2s_y\sin\frac{\theta}{2}-c_3s_z\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

ve

$$\left[Z^{-}\right]\left(dS+C\right)=\begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & s_z\sin\frac{\theta}{2} & -s_y\sin\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} \\ -s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & s_x\sin\frac{\theta}{2} & s_y\sin\frac{\theta}{2} \\ s_y\sin\frac{\theta}{2} & -s_x\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & s_z\sin\frac{\theta}{2} \\ -s_x\sin\frac{\theta}{2} & -s_y\sin\frac{\theta}{2} & -s_z\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(d_1s_x+d_2s_y+d_3s_z\right)s_x+c_1 \\ \left(d_1s_x+d_2s_y+d_3s_z\right)s_y+c_2 \\ \left(d_1s_x+d_2s_y+d_3s_z\right)s_z+c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olacağından,

$$Z^0=\frac{1}{2}\left(\left[Z^{-}\right]\left(dS+C\right)-\left[Z^{+}\right]C\right)$$

$$Z^0=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2c_2s_z\sin\frac{\theta}{2}-2c_3s_y\sin\frac{\theta}{2}+d_2s_ys_x\cos\frac{\theta}{2}+d_3s_zs_x\cos\frac{\theta}{2}+d_1s_x^2\cos\frac{\theta}{2} \\ -2c_1s_z\sin\frac{\theta}{2}+2c_3s_x\sin\frac{\theta}{2}+d_1s_xs_{xy}\cos\frac{\theta}{2}+d_3s_zs_y\cos\frac{\theta}{2}+d_2s_y^2\cos\frac{\theta}{2} \\ 2c_1s_y\sin\frac{\theta}{2}-2c_2s_x\sin\frac{\theta}{2}+d_1s_xs_y\cos\frac{\theta}{2}+d_2s_ys_Z\cos\frac{\theta}{2}+d_3s_Z^2\cos\frac{\theta}{2} \\ -d_1s_x\sin\frac{\theta}{2}-d_2s_y\sin\frac{\theta}{2}-d_3s_z\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

dir. $d=d_1s_x+d_2s_y+d_3s_z$ olduğu göz önüne alınırsa ve $s^*=c\times s$ denirse,

$$s^*=\left(s_x^*,s_y^*,s_z^*\right)=\left(c_2s_z-c_3s_y,-c_1s_z+c_3s_x,c_1s_y-c_2s_x\right)$$

olur. Bu durumda,

$$Z^0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} d\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_x + 2\sin\frac{\theta}{2}s_x^* \\ d\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_y + 2\sin\frac{\theta}{2}s_y^* \\ d\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_z + 2\sin\frac{\theta}{2}s_z^* \\ -d\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$Z_1^0 = \frac{d}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_x^*$$

$$Z_2^0 = \frac{d}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_y + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_y^*$$

$$Z_3^0 = \frac{d}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_z^*$$

$$Z_4^0 = -\left(\frac{d}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

olarak elde ederiz.

$\hat{s} = s + \varepsilon c \times s$ dual vektörü vida eksenini temsil etsin ve $\hat{\theta} = \theta + \varepsilon d$, $\hat{s}$ boyunca öteleme ve $\hat{s}$ ekseni etrafındaki dönmeyi tanımlayan dual açı olsun. O zaman,

$$\hat{Z} = Z + \varepsilon Z^0$$

$$\hat{Z} = \cos\frac{\theta}{2} + s_x\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)i + s_y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)j + s_z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)k$$

$$+\varepsilon\left(-\left(\frac{d}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} + \left(\frac{d}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_x + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_x^*\right)i\right.$$

$$\left. + \left(\frac{d}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_y + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_y^*\right)j + \left(\frac{d}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)s_z + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)s_z^*\right)k\right)$$

$$\hat{Z} = \underbrace{\cos(\theta/2) + \varepsilon\left(-(d/2)\sin(\theta/2)\right)}_{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\varepsilon d\right)} + \left(s_x \underbrace{\left(\sin(\theta/2) + \varepsilon(d/2)\cos(\theta/2)\right)}_{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\varepsilon d\right)} + \varepsilon \sin(\theta/2)\, s_x^* \right) i$$

$$+ \left(s_y \underbrace{\left(\sin(\theta/2) + \varepsilon(d/2)\cos(\theta/2)\right)}_{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\varepsilon d\right)} + \varepsilon \sin(\theta/2)\, s_y^* \right) j$$

$$+ \left(s_z \underbrace{\left(\sin(\theta/2) + \varepsilon(d/2)\cos(\theta/2)\right)}_{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\varepsilon d\right)} + \varepsilon \sin(\theta/2)\, s_z^* \right) k$$

olur.

$$s_x \sin\left(\tfrac{\theta}{2} + \varepsilon d\right) + \varepsilon \sin(\theta/2)\, s_x^* = s_x \sin\left(\hat{\theta}/2\right) + \underbrace{\varepsilon \sin(\theta/2)\, s_x^* + \varepsilon^2 (d/2)\cos(\theta/2)\, s_x^*}_{\varepsilon\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}+\varepsilon d\right)\right)}$$

$$= s_x \sin\left(\hat{\theta}/2\right) + \varepsilon \sin\left(\hat{\theta}/2\right) s_x^*$$

$$= s_x \sin\left(\hat{\theta}/2\right) + \varepsilon \sin\left(\hat{\theta}/2\right) c \times s_x$$

$$= \sin\left(\hat{\theta}/2\right)\left(s_x + \varepsilon c \times s_x\right)$$

$$= \sin\left(\hat{\theta}/2\right)\left(\hat{s}_x\right)$$

ve benzer şekilde,

$$s_y \underbrace{\left(\sin(\theta/2) + \varepsilon(d/2)\cos(\theta/2)\right)}_{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\varepsilon d\right)} + \varepsilon \sin(\theta/2)\, s_y^* == \sin\left(\hat{\theta}/2\right)\left(\hat{s}_y\right)$$

$$s_z \underbrace{\left(\sin(\theta/2) + \varepsilon(d/2)\cos(\theta/2)\right)}_{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\varepsilon d\right)} + \varepsilon \sin(\theta/2)\, s_z^* == \sin\left(\hat{\theta}/2\right)\left(\hat{s}_z\right)$$

olacağından,

$$\hat{Z} = \cos\frac{\hat{\theta}}{2} + \hat{s}_x \sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) i + \hat{s}_y \sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) j + \hat{s}_z \sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) k$$

olarak elde ederiz.

Böylece bir dual kuaterniyonun bileşenleri, uzaysal dispin *dual Euler parametreleri* olarak bilinen dual uyarlamalarıyla Euler parametreleri yerine konularak elde edilmiştir.[1]

Dual Euler parametrelerini kullanarak $\left[\hat{A}\right]=\left[A\right]+\varepsilon\left[D\right]\left[A\right]$ dual ortogonal matrisini, dönme matrisi olan $A=\left[I\right]+2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left[S\right]+2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left[S^2\right]$ nın bir dual uyarlamasıyla,

$$\hat{A}=\left[I\right]+2\sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)\cos\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)\left[\hat{S}\right]+2\sin^2\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)\left[\hat{S}^2\right]$$

olarak ifade edebiliriz.

$\hat{w}=w+\varepsilon v$, $W=\left(w,v\right)$ screwinin dual vektör formu olsun. Bu dual vektörü,

$$\hat{w}=\left(w_1+\varepsilon v_1\right)i+\left(w_2+\varepsilon v_2\right)j+\left(w_3+\varepsilon v_3\right)k$$

dual kuaterniyonuyla özdeşleştirilebiliriz. Buna bir *dual vektör kuaterniyonu* adı verilir.[1] Eğer $\hat{w}$, F referans çatısında bir screwin koordinatlarını tanımlarsa, o zaman diğer M çatısında ölçülen screwin koordinatları

$$\hat{w}'=\hat{Z}\hat{w}\hat{Z}^*$$

dönüşümüyle tanımlanan $\hat{w}$ dual kuaterniyonuyla verilmiştir. Burada $\hat{Z}^*$, $\hat{Z}$ nın eşleniğidir.

3.5.4.1. IR^8 de Vektörler

$\hat{Z}=Z+\varepsilon Z^0$ dual kuaterniyonu, sekiz boyutlu $\hat{Z}=\left(Z,Z^0\right)\in IR^8$ vektörü olarak yazılabilir. İki dual kuaterniyonun çarpımı $\hat{G}\hat{Z}$ yi hesaplayalım.

$\hat{Z} = Z + \varepsilon Z^0$ ve $\hat{G} = G + \varepsilon G^0$ dual sayı bileşenleriyle $4-$boyutlu vektörler, $\left[\hat{G}^+\right] = \left[G^+\right] + \varepsilon\left[G^{0+}\right]$ ile $\left[\hat{Z}^-\right] = \left[Z^-\right] + \varepsilon\left[Z^{0-}\right]$ $4\times4-$tipinden dual matrisler olsun. Böylece bunlar

$$\hat{G}\hat{Z} = \left[\hat{G}^+\right]\hat{Z} \text{ ve } \hat{G}\hat{Z} = \left[\hat{Z}^-\right]\hat{G}$$

matris denklemlerini sağlar. Bu bağıntılar matris çarpımlarından,

$$\begin{bmatrix} GZ \\ (GZ)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[G^+\right] & [0] \\ \left[G^{0+}\right] & \left[G^+\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ Z^0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} GZ \\ (GZ)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[Z^-\right] & [0] \\ \left[Z^{0-}\right] & \left[Z^-\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ G^0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplayabiliriz. Bu durumda $\hat{w}' = \hat{Z}\hat{w}\hat{Z}^*$ dönüşüm denklemini

$$\hat{w}' = \left[\hat{Z}^+\right]\left[\hat{Z}^-\right]^* \hat{w}$$

biçiminde yazabiliriz. $\left[\hat{Z}^+\right]\left[\hat{Z}^-\right]^*$ çarpım matrisi, dual uyarlamalarla

$$\left[\hat{Z}^+\right]\left[\hat{Z}^-\right]^* = \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right) I + 2\sin\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{S} + \sin^2\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)\hat{S}^2 + \sin^2\left(\frac{\hat{\theta}}{2}\right)\left(I + \hat{S}^2\right) & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece bu dönüşüm bir katı cisim dispi tanımlar.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada katı cisim hareketine ait temel kavramlar ele alınmıştır. Düzlem displerini, küresel displeri ve uzay displerini temsil eden matris dönüşümleri tanıtılmıştır. Cayley formülünden faydalanılarak, verilen bir eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen pozitif ortogonal matris bulunmuştur. Bir katı cismin sürekli hareketi kullanılarak tanjant operatörler elde edilmiş ve örnekler üzerinde incelenmiştir. Screw teorinin temel bilgileri verilerek, dual sayı cebiri, screw koordinat dönüşümlerinde kullanılmıştır. Böylece dual ortogonal matrisler tanımlanmış ve bir dual açısal hız matrisinin üsteli olarak bir vida dispi elde edilmiştir. Clifford Cebir inşası kurularak kompleks sayılar, kuaterniyonlar, düzlem ve dual kuaterniyonlar Clifford Cebirleri olarak elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. McCarthy, J. M., An Introduction to Theoretical Kinematics, The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England, 1990

2. Bottema, O., Roth, B., Theoretical Kinematics North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford 1979

3. Hacısalihoğlu, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi , Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 1983

4. Lounesto, P., Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University Press, ?

5. Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1982

6. Kaya, R., Analitik Geometri Bilim Teknik Yayınevi İstanbul, 2002

7. Hacısalihoğlu, H. H., Dönüşümler ve Geometriler, Milli Eğitim Basımevi, 1985

8. Clark, R., S., and Brickell F., Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970

9. Spivak, M., Calculus on Manifolds, W., A., Benjamin, INC., Menlo Park, California, 1965

10. Taşcı, D, Lineer Cebir, Sel-Ün. Vakfı, Konya, 2002