T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNSTEIN POLİNOMLARI, q-BERNSTEIN POLİNOMLARI VE YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

DİDEM AYDIN

HAZİRAN 2007

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

Doç. Dr. Gülay BAYRAMOĞLU

26/06/2007

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun ol duğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA ______________________

Doç. Dr. Ertan İBİKLİ ______________________

Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL ______________________

ÖZET

BERNSTEIN POLİNOMLARI, q-BERNSTEIN POLİNOMLARI VE YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

AYDIN, Didem

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali Aral

HAZİRAN 2007, 74 Sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Bernstein polinomları ve q-Bernstein polinomlarının temel özellikleri incelenmiş, bu konu ile ilgili makaleler gözden geçirilmiştir. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İleri fark operatörü**,** Lineer pozitif operatör, Bernstein polinomu, q-Bernstein polinomu, Süreklilik modülü, Korovkin teoremi, Voronovskaya teoremi.

ABSTRACT

BERNSTEIN POLYNOMIALS, q-BERNSTEIN POLYNOMIALS AND APPROXIMATION PROPERTIES

AYDIN, Didem

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ali ARAL

JUNE 2007, 74 Pages

This thesis contains four chapters. First chapter is devoted to introduction. In the second chapter, some fundamental definitions and concepts are given. In the third chapter, some properties of Bernstein and q-Bernstein polynomials and some papers, related this matter, are studied. Then in the latest chapter is devoted to argue and consequence.

Key Words: Forward differences, Linear positive operator, Bernstein polynomial, q-Bernstein polynomial, Modulus of continuity, Korovkin theorem, Voronovkaya' s theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL'a, yine çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen ve yüreklendiren Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve asistan arkadaşlarıma ve beni bugünlere kadar getiren sevgili aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların uzayı.
$L(f;x)$	L lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna uygulanması.
$B_n(f;x)$	Bernstein polinomlarının f fonksiyonuna uygulanması.
$B_n^q(f;x)$	q-Bernstein polinomlarının f fonksiyonuna uygulanması.
$w(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü.
$L_n(f,x) \rightrightarrows f(x)$	$L_n(f;x)$ operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsaması

1.GİRİŞ

Matematiğin yaklaşımlar teorisi, olasılık teorisi, sayılar teorisi gibi birçok dalında Bernstein polinomları önemli uygulamalara sahiptir. Sade bir yapısı ve önemli özellikleri olduğundan Bernstein polinomlarının kullanımı oldukça yaygındır.

$[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli f fonksiyonu için Bernstein polinomu,

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\ , \quad x\in[0,1]$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Analitik fonksiyonlar için bu tip gösterimlerin mevcut olduğu bilinmektedir. Buna göre f fonksiyonunun herhangi bir mertebeden türevinin olması gerekir. Bernstein polinomları bu açıdan daha kullanışlıdır. Bernstein polinomlarının oluşturulması için f nin $\frac{k}{n}$ değerlerinin bilinmesi yeterlidir.

Bernstein polinomlarının $[0,1]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. Bu açıdan Bernstein polinomları Weierstrass teoreminde adı geçen $P_n(x)$ polinomuna bir örnektir. Diğer yandan bir f fonksiyonunun süreklilik modülü tanımlanmış ve süreklilik modülü yardımıyla Bernstein polinomlar dizisinin f fonksiyonuna yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

q-analizinin yaklaşım teorisinde kullanımı son yıllarda giderek artan bir çalışma alanı olmuştur. Bu çalışmada tek değişkenli q-Bernstein operatörleri incelenip yaklaşım özellikleri tanıtılmıştır. Daha sonra iki değişkenli q-Bernstein polinomları verilerek benzer özellikler incelenmiştir.

1.2 Kaynak Özetleri

Bu tez hazırlanırken materyal ve yöntem kısmında H. Hilmi Hacısalihoğlu ve Akif Hacıyev in "Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı" kitabından ve G.M.Phillips in "Interpolation and Approximation Polynomials" adlı kitabından yararlanılmıştır. daha sonra D.D Stancu nun "On the Monotonicity of the Sequence Formed by the First Order Derivatives of Bernstein Polynomials" adlı makalesi incelenmiş, ardışık iki Bernstein polinomu arasındaki fark ve ardışık iki Bernstein polinomunun türevleri arasındaki fark bölünmüş farklar yardımıyla ispatlanmıştır.

Diğer yandan G.M.Phillips in "Bernstein Polynomials Based on q-Integers" ve "On Generalized Bernstein Polynomials" adlı makaleleri incelenmiş q-Bernstein polinomlarının ileri farklarla gösterimi ispatlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde ise Dan Barbosu nun "Some Generalized Bivariate Bernstein Operators" adlı makalesi incelenmiş, iki değişkenli q-Bernstein polinomlarının temel özellikleri verilmiş, süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı

Bernstein polinomları, q-Bernstein polinomları ve iki değişkenli q-Bernstein polinomlarının özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu polinomların ileri farklar, bölünmüş farklar ve q-farklar ile ifade edilebileceği gösterilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayında olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n. dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Yani her sürekli f fonksiyonuna karşılık gelen $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır.

Tanım 2.1.1: f fonksiyonunun x_1 ve x_2 gibi iki farklı noktadaki değeri bilinsin.

$$P(x_1) = f(x_1),\ P(x_2) = f(x_2) \tag{2.1.1}$$

şartını sağlayan ve f fonksiyonuna yaklaşan P polinomuna lineer interpolasyon polinomu denir. Geometrik olarak P polinomu vardır ve tektir.

f fonksiyonunun x_1 ve x_2 deki değerlerinden yararlanarak lineer interpolasyon polinomunu , $f(x)$ e yaklaşmak için kullanacağız.

(2.1.1) şartını sağlayan ve $P(x) = ax + b$ formunda olan lineer interpolasyon polinomunu bulmak için $ax_1 + b = f(x_1),\ ax_2 + b = f(x_2)$ lineer denklem sistemini çözmek gerekir. Bu denklemin iki farklı gösterimi vardır.

2.2 Lagrange Formu

$$P(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right) f(x_1) + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_2).$$

2.3 Newton Formu

$$P(x) = f(x_1) + (x - x_1)\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right)$$

dir. $x_2 \to x_1$ için limit alınırsa Taylor serisinin ilk iki terimi elde edilir. Benzer olarak $n+1$ tane farklı $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları için $f(x_j)$ $(0 \le j \le n)$ değerleri bilindiğinde f fonksiyonuna yaklaşan ve $P_n(x_j) = f(x_j)$ şartını sağlayan $n.$ dereceden

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

şeklindeki interpolasyon polinomunu bulabiliriz. Bunun için $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibi $n+1$ bilinmeyenli

$$P_n(x_j) = a_0 + a_1 x_j + \ldots + a_n x_j^{\,n} = f(x_j), \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

formundaki $n+1$ tane lineer denklemden oluşan sistemi çözmek gerekir. Bu denklemin çözümü tektir Bu sistemin yani;

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & \ldots & x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & \ldots & x_1^{\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \ldots & x_n^{\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

sisteminin çözümünün olması için Vandermonde determinantının

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & \ldots & x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & \ldots & x_1^{\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \ldots & x_n^{\,n} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0$$

olması gerekir. Kabulümüzden dolayı bu determinant sıfırdan farklıdır. Örneğin

$n = 2$ için $\det V = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$

dir.. Buradaki $P_n(x)$ polinomuna $n.$dereceden interpolasyon polinomu denir.

Teorem 2.3.1: x ve $x_0, x_1, \dots, x_n$ apsisleri, $[a,b]$ kapalı aralığına ait noktalar olsun. f ve f nin ilk n türevi bu aralık üzerinde sürekli ve $f^{(n+1)}$ türevi (a,b) aralığında mevcut olsun. Bu durumda x e bağlı $\zeta_x \in (a,b)$ için

$$f(x) - P_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \tag{2.3.1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: İspat için Rolle teoremini $n+1$ kez ard arda uygularız. Rolle teoremine göre fonksiyonun iki sıfır yeri arasında, türevinin sıfır olduğu en az bir nokta vardır. $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktaları α dan farklı olmak üzere .

$$g(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\dots(\alpha-x_n)}\big(f(\alpha) - P_n(\alpha)\big)\ ,\ \alpha \in (a,b)$$

fonksiyonunu ele alalım.

g fonksiyonunun $x_0, x_1, \dots, x_n, \alpha$ olmak üzere $n+2$ tane sıfır yeri vardır. Burada g fonksiyonuna Rolle teoremi uygulanırsa, g' fonksiyonunun sıfır olduğu $n+1$ tane nokta vardır. Bu şekilde g fonksiyonuna Rolle teoremi uygulanmaya devam edilirse g'' fonksiyonunun sıfır olduğu n tane

g''' fonksiyonunun sıfır olduğu $n-1$ tane

$\vdots$

$g^{(n+1)}$ fonksiyonunun sıfır olduğu 1 tane nokta

vardır. Bu noktayı ζ_x ile gösterirsek,

$$0 = f^{(n+1)}(\zeta_x) - \frac{(n+1)!\big(f(\alpha) - P_n(\alpha)\big)}{(\alpha-x_0)(\alpha-x_1)\dots(\alpha-x_n)}$$

olur. Son eşitlikte α yerine x yazılırsa (2.3.1) eşitliği elde edilir.

Tanım 2.3.1: $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları $[a,b]$ aralığına ait noktalar olsun.

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

ifadesine f fonksiyonunun $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktalarındaki bölünmüş farkı denir. Ayrıca bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2 \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{2.3.2}$$

şeklinde de gösterilebilir. $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ için (2.3.2) tekrar düzenlenirse

$$f[x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] = (x - x_n) f[x, x_0, \ldots, x_n] + f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \tag{2.3.3}$$

elde edilir. Şimdi tümevarım yöntemini kullanarak

$$f[x] = P_n(x) + (x - x_0)\ldots(x - x_n) f[x, x_0, \ldots, x_n]$$

olduğunu gösterelim.

$n = 0$ için

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x, x_0] \tag{2.3.4}$$

eşitliği sağlanır.

$n = 1$ için $f[x, x_0]$, (2.3.3) ten bulunup (2.3.4) de yerine yazılırsa

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

$$f[x] = P_1(x) + (x - x_0)(x - x_1) f[x, x_0, x_1]$$

bulunur. Burada $P(x)$, f nin 1. dereceden olan interpolasyon polinomudur. Bu işlemlere aynı mantıkla devam edilirse

$$f[x] = P_n(x) + (x - x_0)\ldots(x - x_n) f[x, x_0, \ldots, x_n]$$

bulunur. Bu formül (2.3.1) ile karşılaştırılırsa

$$f\left[x, x_0, x_1, \ldots, x_n\right] = \frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \tag{2.3.5}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.2: (Forward (ileri) Fark) $\forall k, j \geq 0$ için

$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ ve $\Delta^{k+1} f(x_j) = \Delta^k f(x_{j+1}) - \Delta^k f(x_j)$ şeklinde

tanımlanan Δ operatörüne ileri fark operatörü denir.

Teorem 2.3.2: $\forall k, j \geq 0$ için $x_j = j$ olmak üzere

$$f\left[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}\right] = \frac{\Delta^k f(x_j)}{k!} \tag{2.3.6}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Tümevarım yöntemini kullanalım.

$k = 0$ için doğrudur.

$k \geq 0$ için (2.3.6) eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

$k+1$ için doğru olduğunu gösterelim:

$$f\left[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1}\right] = \frac{f\left[x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1}\right] - f\left[x_j, \ldots, x_{j+k}\right]}{x_{j+k+1} - x_j}$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{\Delta^k f(x_{j+1})}{k!} - \frac{\Delta^k f(x_j)}{k!}\right)$$

$$= \frac{\Delta^{k+1} f(x_j)}{(k+1)!}$$

dir. Böylece (2.3.6) eşitliği $k+1$ için de doğrudur.

2.4. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Tanım 2.4.1 $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$w(\delta) = w(f;\delta) = \sup_{\substack{x,y \in I \\ |x-y|<\delta}} |f(x) - f(y)|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f nin süreklilik modülü denir.

w, δ nın bir fonksiyonu durumundadır

Süreklilik modülü için aşağıdaki lemmalar verilebilir:

Lemma 2.4.1: w fonksiyonu monoton artandır.

İspat: $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olsun. Bu durumda $|x - y| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (x, y) sayı çiftlerinin kümesi $|x - y| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha geniştir. Kümelerdeki supremum kavramını düşünürsek süreklilik modülünün tanımı gereğince

$$w(f;\delta_1) \leq w(f;\delta_2)$$

olduğu görülür.

Lemma 2.4.2: f I da sürekli ise $\lim_{\delta \to 0} w(f;\delta) = 0$ dır.

İspat: f sürekli ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı vardır ki $|x - y| < \delta$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dır.Yani $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$ dir. Bu durumda $\delta \to 0$ için $x \to y$ olacağından $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gerçeklenir. Dolayısıyla $\lim_{\delta \to 0} w(f;\delta) = 0$ dır.

Lemma 2.4.3: f düzgün sürekli $\Leftrightarrow \lim_{\delta \to 0} w(f;\delta) = 0$

İspat: Teoremin gerek şartı**:**

Düzgün sürekli her fonksiyon sürekli olduğundan önceki lemmadan açıktır.

Yeter şart için,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \eta$ sayısı vardır ki $\delta < \eta$ için $w(f;\delta) < \varepsilon$ dir.

$\forall x, t \in I$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

eşitsizliği gerçeklenir. Öyleyse f düzgün sürekli bir fonksiyondur.

Lemma 2.4.4: f I da sürekli , $m \geq 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$w(f;m\delta) \leq mw(f;\delta)$$

dır.

İspat: $w(f;\delta) = \sup\limits_{\substack{x,t \in I \\ |x-t|<\delta}} |f(t) - f(x)|$, süreklilik modülü tanımında t yerine $x+h$

yazılırsa,

$$w(f;\delta) = \sup_{\substack{x,x+h \in I \\ |h|<\delta}} |f(x+h) - f(x)|.$$

$$|f(t+mh) - f(t)| = \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left[f\left(t+(k+1)h\right) - f(t+kh) \right] \right|$$

olduğundan

$$w(f;m\delta) = \sup_{\substack{t,t+u \in I \\ |u|<m\delta}} |f(t+u) - f(t)|, \quad (u \text{ yerine } mu \text{ yazılırsa})$$

$$= \sup_{\substack{t,t+mu \in I \\ |u|<\delta}} |f(t+mu) - f(t)|$$

$$\leq \sup_{\substack{t,t+mu \in I \\ |u|<\delta}} \left| \sum_{k=0}^{m-1} f\left(t+(k+1)u\right) - f\left(t+ku\right) \right|$$

$$\leq m\, w(f;\delta).$$

Lemma 2.4.5: f I da sürekli ve $\forall \lambda > 0$ reel sayısı için

$$w(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\, w(f;\delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Süreklilik modülü artan olduğundan $m < \lambda < m+1$ için

$$
\begin{aligned}
w(f;\lambda\delta) &\leq w(f;(m+1)\delta) \\
&\leq (m+1)\, w(f;\delta) \\
&\leq (\lambda+1)\, w(f;\delta)\,.
\end{aligned}
$$

Lemma 2.4.6: f I da sürekli ise;

$$
|f(t)-f(x)| \leq w\left(f;|t-x|\right)
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $w\left(f;|t-x|\right) = \sup\limits_{\substack{x,t\in I \\ |t-x|\leq|t-x|}} |f(t)-f(x)|$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x,t\in I} |f(t)-f(x)| \\
&\geq |f(t)-f(x)|\;.
\end{aligned}
$$

Lemma 2.4.7: f I da sürekli ise

$$
|f(t)-f(x)| \;\leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right) w(f;\delta)
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Bir önceki lemmadan

$$
|f(t)-f(x)| \;\leq w\left(f;\left(\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)\right) \leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right) w(f;\delta)
$$

bulunur.

Lemma 2.4.8: f I da sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$
w(f;\delta) = 0 \Leftrightarrow f \text{ sabit}
$$

dır.

İspat: Gerek şart aşikârdır. Yeter şart için,

$$w(f;\delta)=\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\ |x-t|<\delta}}\left|f(t)-f(x)\right|=0$$

$\forall\, x,t\in[a,b]$ için $\left|f(t)-f(x)\right|=0\Rightarrow f(t)=f(x)\Rightarrow f$ sabittir.

Lemma 2.4.9: Eğer f I da sürekli ve $\delta_1<\delta_2$ ise

$$\frac{w(f;\delta_2)}{\delta_2}\leq\frac{2w(f;\delta_1)}{\delta_1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $w(f;\delta_2)=w\left(f;\delta_1\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)\leq\left(1+\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)w(f;\delta_1)\leq 2\dfrac{\delta_2}{\delta_1}w(f;\delta_1)$

elde edilir.

Lemma 2.4.10: f I da sürekli, $(\delta_n)\to 0$ pozitif terimli bir dizi ve c_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere;

$$w(f;\delta_n)\geq c_f\,\delta_n$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}w(f;1)&=w\left(f;\delta_n\frac{1}{\delta_n}\right)\leq\left(1+\frac{1}{\delta_n}\right)w(f;\delta_n)\\&=\frac{1+\delta_n}{\delta_n}w(f;\delta_n)\end{aligned}$$

olup yakınsak her dizi sınırlı olduğundan her $n\in N$ için $\delta_n+1<c$ olacak şekilde bir c sabiti vardır. Bu durumda

$$\delta_n\frac{w(f;1)}{c}<w(f;\delta_n)$$

yani

$$\delta_n c_f<w(f;\delta_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $c_f = \dfrac{w(f;1)}{c}$ dir.

Şimdi f fonksiyonunun r. mertebeden süreklilik modülünü tanımlayalım.

f fonksiyonunun ileri farkları Tanım 2.3.2 de verilmişti.

$h \in \mathbb{R}$, $r \geq 1$ tamsayısı ve reel değerli bir f fonksiyonu için

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^r f(x) = \Delta_h\left(\Delta_h^{r-1} f(x)\right), \ r \geq 2\,. \qquad (2.4.1)$$

Öncelikle $f \in C[0,1]$ olsun. $C[0,1]$ uzayında norm

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

ile gösterilir. $\delta > 0, r \geq 1$ tamsayısı için f fonksiyonunun r. mertebeden süreklilik modülü

$$w_r(f,\delta) = \max_{|h| \leq \delta} \left\|\Delta_h^r f\right\|. \qquad (2.4.2)$$

olarak verilir. Şimdi süreklilik modülü ile ilgili örnekler verelim:

Örnek 2.4.1: $f(x) = \sqrt{x+1}, \ x \in [-1,1]$ olsun. $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ için $w(f;\delta) = \sqrt{\delta}$ dır.

$0 < h \leq \delta$ ve $x \in [-1+h, 1-h]$ olsun. $a \geq 0$ ve $b \geq 0$ için

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad (2.4.3)$$

eşitsizliğinden,

$$\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{h}\,,$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1-h} \leq \sqrt{h} \qquad (2.4.4)$$

dır ve böylece

$$w(f;\delta) \leq \sqrt{\delta}\,.$$

bulunur. Diğer yandan herhangi bir $x=-1+\delta$ noktası için,

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1-\delta}=\sqrt{\delta}$$

dır.

Örnek 2.4.2 : $f(x)=\sin x$ olsun. $0\le\delta\le\dfrac{\pi}{2}$ için $f\in C[-\pi,\pi]$ ve $w(f;\delta)\le\delta$.

Gerçekten Ortalama Değer Teoremi nden $|h|\le\delta$ için

$$|\sin(x+h)-\sin x|\le|h|\le\delta$$

dır.

Şimdi f fonksiyonunun r. mertebeden süreklilik modülü için birkaç önemli özellik verelim.

Eğer f fonksiyonu, $[0,1]$ aralığında mutlak sürekli ise $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlıdır ve $[0,1]$ aralığının hemen hemen her noktasında türevlidir.

Lemma 2.4.11 de kullanılan $W_p[0,1]$ ya da kısaca W_p ifadesi, $p\ge1$ tamsayısı için $f^{(p)}$ mutlak sürekli ve $f^{(p-1)}$ esaslı sınırlı olmak üzere $f\in C[0,1]$ deki tüm fonksiyonların sınıfını gösterir.

Lemma 2.4.11: $f\in C[0,1]$**,** $\delta>0$**,** $\delta_2>\delta_1>0$, $\lambda>1$**,** $\alpha\in\mathbb{R}$ ve s,r,n tamsayı olmak üzere $n\ge1$ ve $1\le s<r$ olsun.

a) Eğer $f\in W_r$ ise

$$w_r(f;\delta)\le\delta^r\left\|f^{(r)}\right\|. \tag{2.4.5}$$

b) $w_r(f;\delta)\le 2^{r-s}w_s(f;\delta)\le 2^r\|f\|$**.**

c) Eğer $f\in W_s$ ise

$$w_r(f;\delta)\le\delta^{r-s}w_{r-s}\left(f^{(s)},\delta\right). \tag{2.4.6}$$

d) $w_r(f;\delta_2)-w_r(f;\delta_1)\le 2^r w_1\left(f, r\left(\delta_2-\delta_1\right)\right)$**.**

İspat: Öncelikle aşağıdaki özdeşliği verelim.

$$\Delta_t^r f(x)=\int_0^t \ldots \int_0^t f^{(r)}(x+t_1+\ldots+t_r)dt_1\ldots dt_r \,. \tag{2.4.7}$$

(2.4.5) deki eşitsizlik (2.4.7) den açıktır. Gerçekten

$$\begin{aligned} w_r(f;\delta) &= \max_{|t|\le\delta}\left\|\Delta_t^r f\right\| \\ &\le \max_{|t|\le\delta}\int_0^t \cdots \int_0^t \left|f^{(r)}(x+t_1+\ldots+t_r)\right|dt_1\ldots dt_r \\ &\le \max_{|t|\le\delta}\left|f^{(r)}(x+t_1+\ldots+t_r)\right|t^r \\ &\le \delta^r\left\|f^{(r)}\right\|. \end{aligned}$$

(2.4.7) de r yerine s yazılırsa ve her iki yanın $(r-s)$.ileri farkı alınırsa

$$\Delta_t^r f(x)=\Delta_t^{r-s}\left(\Delta_t^s f\right)(x)=\int_0^t \ldots \int_0^t \Delta_t^{r-s} f^{(s)}\left(x+t_1+\ldots+t_s\right)dt_1\ldots dt_s \,. \tag{2.4.8}$$

Buradan (c) açıktır. Diğer seçeneklerin ispatı için tümevarımla ispatlanan aşağıdaki formülü kullanmamız gerekir.

$$\Delta_t^r f(x)=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k} f(x+kt)\,. \tag{2.4.9}$$

Böylece

$$\sum_{k=0}^{r-s}\binom{r-s}{k}=\left(1+1\right)^{r-s}=2^{r-s}$$

özdeşliği ile (b) nin ispatı

$$\Delta_t^r f(x)=\sum_{k=0}^{r-s}\binom{r-s}{k}(-1)^{r-s-k}\,\Delta_t^s f(x+kt)$$

ile tamamlanır.

(d) nin ispatı için $w_r(f;\delta_2)=\left|\Delta_t^r f(x_0)\right|$ olsun. Eğer $|t|\le\delta_1$ ise bu $w_r(f;\delta_2)=w_r(f;\delta_1)$ anlamına gelir. Buradan (d) açıktır. $\delta_1<t<\delta_2$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} w_r(f;\delta_2)-w_r(f;\delta_1) &\le \left|\Delta_t^r f(x_0)\right|-\left|\Delta_{\delta_1}^r f(x_0)\right| \\ &\le \left|\Delta_t^r f(x_0)-\Delta_{\delta_1}^r f(x_0)\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\left|\Delta_{k(t-\delta_1)} f\left(x_0+k\delta_1\right)\right| \\ &\le 2^r w\left(f,r\left(t-\delta_1\right)\right) \\ &\le 2^r w\left(f,r\left(\delta_2-\delta_1\right)\right) \end{aligned}$$

dır. $-\delta_2<t<-\delta_1$ olması durumunda ispat benzer şekilde yapılır.

2.5 Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu durumda X uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x)=L(f;x)$$

biçiminde gösterilir. X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve $X=D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f;x)=g(x)$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine L operatörünün değer kümesi denir. Bu küme de $R(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.1: f_1 ve f_2, X uzayında herhangi iki fonksiyon, a ve b keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü;

$$L(af_1+bf_2;x)=aL(f_1;x)+bL(f_2;x)$$

koşulunu gerçekliyorsa L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.5.2: $X^{+}=\{f\in X: f\geq 0\}, Y^{+}=\{g\in Y: g\geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını göz önüne alalım. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^{+} kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa o taktirde bu lineer operatöre Lineer Pozitif Operatör denir.

$f\geq 0$ olduğunda $L(f;x)\geq 0$ dır. Özel olarak $L(0;x)=0$ olduğu görülür.

Lemma 2.5.1: Lineer pozitif operatörler monotondur.

İspat: Her x için $g(x)\geq f(x)$ ise $g(x)-f(x)\geq 0$ dır. L lineer pozitif operatör olduğundan

$$L(g-f;x)\geq 0$$

L lineer olduğundan

$$L(g;x)-L(f;x)\geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$L(g;x)\geq L(f;x)$$

dır. Bu eşitsizlikte lineer pozitif L operatörünün monoton olduğunu gösterir. Ayrıca L operatörünün monotonluğundan

$$-|f|\leq f\leq |f| \Rightarrow L(-|f|;x)\leq L(f;x)\leq L(|f|;x)$$

ve L nin lineerliğinden

$$-L(|f|;x)\leq L(f;x)\leq L(|f|;x) \Rightarrow |L(f;x)|\leq L(|f|;x)$$

yazılabilir.

Teorem 2.5.1: (Bohmann-Korovkin Teoremi) Eğer (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında;

$$L_n(1,x)\rightrightarrows 1 \tag{2.5.1}$$

$$L_n(t,x) \rightrightarrows x \tag{2.5.2}$$

$$L_n(t^2,x) \rightrightarrows x^2 \tag{2.5.3}$$

koşullarını gerçekliyorsa o taktirde $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken

$$L_n(f,x) \rightrightarrows f(x) \quad a \le x \le b$$

dır.

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm x ler için

$$|f(x)| \le M \tag{2.5.4}$$

olacak şekilde M pozitif tamsayısı vardır.

$f \in C[a,b]$ olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.5.5}$$

sağlanır.

$x,t \in [a,b]$ olduğunda (2.5.5) eşitsizliği f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında düzgün sürekli olmasından dolayı gerçeklenir. $x \in [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise (2.5.5) eşitsizliği, f fonksiyonu a noktasında soldan ve b noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir.

(2.5.4) ve (2.5.5) eşitsizliklerinden dolayı her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{2.5.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ ve $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \ge 0$ olduğundan $|f(t)-f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ sağlanır.

$|t-x|\geq\delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2\geq 2M$

sağlanır. Bu durumda $\varepsilon>0$ için (2.5.4) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
|f(t)-f(x)| &\leq |f(t)|+|f(x)| \\
&\leq 2M \\
&< \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2+\varepsilon
\end{aligned}
\qquad (2.5.7)
$$

eşitsizliği gerçeklenir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$
\begin{aligned}
\|L_n(f;x)-f(x)\| &= \|L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)L_n(1;x)-f(x)\| \\
&\leq \|L_n(f(t)-f(x);x)\|+\|f\|\|L_n(1,x)-1\| \\
&\leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|+\|f\|\|L_n(1;x)-1\|
\end{aligned}
$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim (2.5.1) den dolayı sıfıra yakınsar. Yani,

$$\|f\|\|L_n(1;x)-1\|\leq\varepsilon_n \quad (n\to\infty \text{ iken } \varepsilon_n\to 0)$$

eşitsizliğini sağlayan ε_n dizisi vardır. O halde

$$\|L_n(f(t)-f(x);x)\|\leq\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|+\varepsilon_n \qquad (2.5.8)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi birinci terimi hesaplayalım. (2.5.7) eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|$$

$$\leq L_n\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;x)\right]$$

$$= \varepsilon\left[L_n(1;x)-1\right] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left\{\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right] - 2x\left[L_n(t;x)-x\right] + x^2\left[L_n(1;x)-1\right]\right\}$$

$$= \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right)\left[L_n(1;x)-1\right] + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right] - \frac{4M}{\delta^2}x\left[L_n(t;x)-x\right]$$

elde edilir. $x \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right) \le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}b^2, \left(\frac{4M}{\delta^2}x \le \frac{4M}{\delta^2}b\right)$$

dir. O halde

$$C_1 = \frac{2M}{\delta^2}, C_2 = 2bC_1, C_3 = \varepsilon + C_1 b^2$$

eşitliklerini kabul edersek

$$\left\|L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\right\| \le \varepsilon + C_1\left\|L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\| + C_2\left\|L_n(t;x)-x\right\| + C_3\left\|L_n(1;x)-1\right\|$$

yazılabilir ve burada $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük seçilebilen bir sayıdır. (2.5.1), (2.5.2) ve (2.5.3) eşitsizliklerinden dolayı $n \to \infty$ için

$$\left\|L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\right\| \to 0$$

olur. Bu sonuç ve (2.5.6) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left\|L_n(f;x)-f(x)\right\| \to 0$$

olduğu görülür.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Bernstein Polinomları

$[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli f fonksiyonları için Bernstein polinomlar dizisi,

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\ , \quad x\in[0,1]$$

şeklinde verilmişti. B_n operatörü sürekli fonksiyonlar uzayından sürekli fonksiyonlar uzayına dönüşüm yapar, yani

$$B_n : C[0,1]\rightarrow C[0,1]$$

Eğer f fonksiyonu sürekli ise $B_n(f;x)$ in $f(x)$ e düzgün yakınsadığını göstereceğiz. Bu durum, Weierstrass teoremindeki n.dereceden polinomun yapısına bir örnektir. Analitik fonksiyonlar için bu tip gösterimlerin mevcut olduğu biliniyor. Buna göre f nin herhangi bir mertebeden türevinin olması gerekir. Bernstein polinomları bu açıdan daha kullanışlıdır. Hatta f nin $\dfrac{k}{n}$ değerlerinin bilinmesi Bernstein polinomlarının oluşturulması için yeterlidir.

3.1.1 Bernstein Polinomlarının Özellikleri

1. $B_n(f;0)=f(0)$ ve $B_n(f;1)=f(1)$.

Bernstein polinomları f fonksiyonunu onun 0 ve 1 uç noktalarındaki değerinde interpole eder.

2. $B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\left(x+(1-x)\right)^n=1$

3. $f(t)=x$ için

$$B_n(t;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k} \qquad .$$

$\binom{n}{k}\frac{k}{n}=\binom{n-1}{k-1}$ olduğundan,

$$B_n(t;x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

yazılabilir.Bu eşitlikte k yerine $k+1$ yazılırsa

$$B_n(t;x)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$=x(x+(1-x))^{n-1}$$

$$=x$$

elde edilir. $f(t)=x^2$ için

$B_n(t^2;x)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{k^2}{n^2}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k^2}{n^2}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!!(n-k)!}\frac{k}{n}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{k-1}{n}x^{k-1}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=x^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}x^{k}(1-x)^{n-k-1}$$

$$=x^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!}x^{k}(1-x)^{n-k-2}+\frac{x}{n}B_{n-1}(1;x)$$

$$=x^2\frac{n-1}{n}B_{n-2}(1;x)+\frac{x}{n}B_{n-1}(1;x)$$

$$=x^2\frac{n-1}{n}+\frac{x}{n}$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$$

olur.

4. Her $a,b\in\mathbb{R}$ ve her $f,g\in C[0,1]$ için

$$B_n(af+bg;x)=aB_n(f;x)+bB_n(g;x)$$

eşitliği sağlandığından dolayı Bernstein polinomlar operatörü lineerdir.

5. $B_n(f)$ monoton bir operatördür.

$\forall x\in[a,b]$ için

$$f(x)\geq 0\Rightarrow B_n(f;x)\geq 0$$

şartını sağladığını gösterelim.

$B_n(1;x)=1$ olduğundan $m\leq f(x)\leq M$ ise $x\in[0,1]$ için

$$B_n(m;x)\leq B_n(f;x)\leq B_n(M;x)\Rightarrow m\leq B_n(f;x)\leq M$$

dır. $m=0$ alınırsa ve $f(x)\geq 0$ ise $x\in[0,1]$ için $B_n(f;x)\geq 0$ dır.

Teorem 3.1.1: Bernstein polinomları $B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k f(0)\,x^k$ şeklinde de yazılabilir. Burada Δ, Tanım 2.3.2 de tanımlanan ileri fark operatörüdür.

İspat: $B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$, $(1-x)$ in Binom açılımı yapılırsa

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k\sum_{s=0}^{n-k}\binom{n-k}{s}(-1)^s x^s$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-k}\binom{n-k}{s}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)(-1)^s x^{k+s},$$

$k+s=t$ denirse,

$$B_n(f;x)=\sum_{t=0}^{n}\left[\sum_{k=0}^{t}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{t}{k}(-1)^{t-k}\right]x^t\binom{n}{t}$$

$$=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}\Delta^t f(0)\,x^t$$

bulunur. Şimdi $B_n\left(x^k,x\right)$ polinomunu hesaplayalım.(2.3.5) den

$$\frac{\Delta^m f(x_0)}{h^m}=f^{(m)}(\zeta)$$

olduğunu biliniyor. $h=\frac{1}{n}$, x_0=0 ve $f(x)=x^k$ alınırsa $n^k\Delta^k f(0)=k!$ dir. Teorem 3.1.1 den

$$B_n(x^k;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k f(0)\,x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}x^k$$

dır. $a_k=\binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}$ denirse

$$a_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{n^k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-(k+1))}{n^k}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right)$$

için

$$B_n(x^k;x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

bulunur. Örneğin $f(x)=x^2$ için

$$B_n(x^2;x)=\binom{n}{0}\Delta^0 f(0)+\binom{n}{1}\Delta f(0)x+\binom{n}{2}\Delta^2 f(0)x^2$$

şeklinde yazılır.

$\Delta f(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)$, $\Delta^2 f(0)=f\left(\frac{2}{n}\right)-2f(\frac{1}{n})+f(0)$ olup

$$B_n(x^2;x)=\frac{x}{n^2}+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{4}{n^2}-\frac{2}{n^2}\right)x^2=x^2+\frac{x}{n}(1-x)$$

dir.

Lemma 3.1.1: $P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ olmak üzere;

$$T_{n,r}(x)=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^r P_{n,k}(x).$$

şeklinde $T_{n,r}$ fonksiyonunu tanımlayalım.Bu taktirde her $x\in\mathbb{R}$ için

a) $T_{n,0}(x)=1;$

b) $T_{n,1}(x)=0;$

c) $T_{n,2}(x)=nx(1-x);$

d) $T_{n,r+1}(x)=x(1-x)\left(T'_{n,r}(x)+nrT_{n,r-1}(x)\right),\ r\geq 1;$

e) $X=x(1-x)$ olmak üzere

$$T_{n,4}(x)=3n^2X^2-2nX^2+nX(1-2x)^2.$$

İspat: (a) ve (b) 3.1.1 de birinci ve üçüncü özellikte verilmiştir. (c) ise Teorem 3.1.1 de gösterilmişti. Şimdi (d) nin ispatını yapalım.

$$P'_{n,k}(x) = \binom{n}{k} k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \binom{n}{k}(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\left\{k(1-x)-(n-k)x\right\}$$

$$= \frac{P_{n,k}(x)}{x(1-x)}(k-nx)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$T'_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left\{-nr(k-nx)^{r-1}P_{n,k}(x) + (k-nx)^r P'_{n,k}(x)\right\}$$

$$= -nrT_{n,r-1}(x) + \frac{1}{x(1-x)}T_{n,r+1}(x).$$

olup böylece d) şıkkının ispatı tamamlanmış olur.

(d) de özel olarak $r=2$ yazılıp $T_{n,3}(x)$ hesaplanırsa

$$T_{n,3}(x) = X\left\{T'_{n,2}(x) + 2nT_{n,1}(x)\right\}$$

$$= nX(1-2x)$$

bulunur.

(e) nin ispatı için $T_{n,2}(x)$ ve $T_{n,3}(x)$ in türevleri alınırsa

$$T'_{n,2}(x) = nx(1-x)(1-2x),$$

$$T'_{n,3}(x) = n(1-2x)^2 - 2nX$$

elde edilir. Buradan $T_{n,4}(x)$ (d) den hesaplanırsa

$$T_{n,4}(x) = X\left[T'_{n,3}(x) + 3nT_{n,2}(x)\right]$$

$$= X\left[n(1-2x)^2 - 2nX + 3n^2X\right]$$

$$= Xn\left(1-2x\right)^2 - 2nX^2 + 3n^2X^2$$

olup bu da e) şıkkının ispatını verir.

Teorem 3.1.2: $B_{n+1}(f;x)$ in türevi, k. ileri fark yardımı ile $n \geq 0$ için aşağıdaki gibidir.

$$B'_{n+1}(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \Delta f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad .$$

İspat: $B_{n+1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) x^k (1-x)^{n+1-k}$

dır. Şimdi B_n fonksiyonunun x e göre türevini alalım.

$B'_{n+1}(f;x)$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right)\frac{d}{dx}\left[x^k (1-x)^{n+1-k}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) k\ x^{k-1}\ (1-x)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} f\left(\frac{k}{n+1}\right)(n+1-k)\ x^k (1-x)^{n-k}$$

olup, k yerine $k+1$ yazılırsa

$$B'_{n+1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\ (\mathrm{k+1})\, f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\ (\mathrm{n+1-k})\ f\left(\frac{k}{n+1}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

elde edilir.

$(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$ ve $(n+1-\mathrm{k})\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k}$ eşitlikleri yukarı yerine yazılırsa

$$B'_{n+1}(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] x^k (1-x)^{n-k}$$

elde edilir. Tanım 2.3.2 den

$$B'_{n+1}(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \Delta f\left(\frac{k}{n+1}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

yazabiliriz. (2.3.5) den

$$B'_{n+1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f'(\zeta)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3: $f \in C[0,1]$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ olmak üzere $\exists n_0 \in N \ni \forall n > n_0$ için

$$\left|B_n(f;x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

dir.

İspat: $\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2x\frac{k}{n} + x^2$ ifadesi operatörde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(t^2;x) - 2x\,B_n(t;x) + x^2 B_n(1;x)$$

Bernstein polinomlarının dördüncü özelliğinden

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x}{n}(1-x) - 2x\,x + x^2$$

$$= \frac{x(1-x)}{n} \qquad (3.1.1)$$

yazılabilir.

$$B_n(f;x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$\delta > 0$ bir sayı olmak üzere

$$S_\delta = \left\{k : \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta\right\}$$

kümesini tanımlayalım ve

$$B_n(f;x)-f(x)=\sum_{k\in S_\delta}+\sum_{k\notin S_\delta}=A_1+A_2$$

şeklinde toplamı ikiye ayıralım.

$$k\in S_\delta \Rightarrow \left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{1}{\delta^2}\geq 1$$

dir. Ayrıca $[0,1]$ aralığında sürekli her fonksiyon sınırlı olduğundan

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leq\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\left|f(x)\right|\leq 2M$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır. Buna göre

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \left|\sum_{k\in S_\delta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k\in S_\delta}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M\sum_{k\in S_\delta}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq 2M\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\ ,\ \text{(3.1.1) den} \\
&= \frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n}<\frac{M}{2n\delta^2}
\end{aligned}$$

dir. f , $[0,1]$ üzerinde sürekli olduğundan aynı zamanda da düzgün süreklidir. O zaman $\forall\,\varepsilon>0$ için $\exists n_0 \ni |x-x'|<\delta$ şartını sağlayan her x için $|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}$ dir. Şimdi A_2 için üst sınır bulalım.

$$|A_2|=\left|\sum_{k\notin S_\delta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum_{k \notin S_\delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Buradan

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq |A_1| + |A_2| < \frac{M}{2n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olup δ sayısı $n_0 > \dfrac{M}{\varepsilon\delta^2}$ şartını sağlayacak şekilde seçilirse

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{M}{2n_0\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. O zaman $B_n(f;x)$ polinomu, f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Teorem 3.1.4: Eğer $f \in C^1[0,1]$ ise $B_n'(f;x)$ dizisi $f'(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat: $k \geq 1$ için (2.3.5) den

$$B_{n+1}'(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f'(\zeta) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \frac{k}{n+1} < \zeta < \frac{k+1}{n+1}$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz.

$$f'(\zeta) = f'\left(\frac{k}{n}\right) + \left[f'(\zeta) - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right]$$

olduğundan

$$B'_{n+1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \left[f'(\zeta) - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$:= S_1(x) + S_2(x)$$

şeklinde gösterilebilir. $f' \in C[0,1]$ olduğundan

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \quad \text{öyleki } \left|\zeta - \frac{k}{n}\right| < \delta \text{ ise } \left|f'(\zeta) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Buradan

$$|S_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.1.2}$$

olur. Bir önceki teoremden

$$\lim_{n\to\infty} S_1(x) = 0 \tag{3.1.3}$$

dır. Öyleyse (3.1.2) ve (3.1.3) den

$$\lim_{n\to\infty} B'_{n+1}(f;x) - f'(x) = 0$$

dır.

Tanım 3.1.2:Eğer $x_1, x_2 \in [a,b]$ için $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon adı verilir. Geometrik olarak $y = f(x)$ eğrisi verildiğinde, eğrinin üst tarafında kalan bölgeyi, yani

$$K = \{(x,y) : x \in [a,b] \; ve \; y \geq f(x)\}$$

cümlesini gözönüne alalım.$[a,b]$ aralığındaki herhangi iki x_1 ve x_2 noktası için $x_1 < x_2$ olsun. Eğri üzerinde $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren $[AB]$ doğru parçası üzerinde bulunan noktalar, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere,

$$P(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$$

tipindeki noktalardır. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ de konveks ise

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanacağından P noktalarının tümü K bölgesindedir. Yani $[AB]$ doğru parçasının bütün noktaları K bölgesindedir. O halde K bölgesi konveks bir cümledir.

Ayrıca f fonksiyonunun ikinci türevi mevcut ve $f''(x)\geq 0$ ise, f fonksiyonu $[a,b]$ de konvekstir.

Teorem 3.1.5: f, $[a,b]$ de konveks $\Leftrightarrow$ $f[x_0,x_1,x_2]\geq 0$ dır.

İspat: $\Leftarrow$ Eğer bölünmüş farkı değiştirmeden, elemanların sırasını değiştirirsek ki bu Tanım 2.3.1 de gördüğümüz simetrik formdur ve

$a\leq x_0 < x_1 < x_2 \leq b$ için $f[x_0,x_1,x_2]\geq 0$ olduğu göstermek yeterlidir. Böylece indirgeme bağıntısı, (2.3.2) eşitliğinden

$$f[x_0,x_1,x_2]\geq 0 \Leftrightarrow f[x_1,x_2]\geq f[x_0,x_1] \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$f[x_1,x_2]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ve $f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ eşitlikleri (3.1.4) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

bulunur. Eşitsizlik düzenlenirse

$$(x_1-x_0)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_0)\geq(x_2-x_0)f(x_1) \tag{3.1.5}$$

olur. Eşitsizliğin her iki yanı (x_2-x_0) ile bölünürse

$$\frac{(x_1-x_0)}{(x_2-x_0)}f(x_2)+\frac{(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)}f(x_0)\geq f(x_1)$$

bulunur.

$\dfrac{(x_2-x_1)}{(x_2-x_0)}=\lambda$ ve $\dfrac{(x_1-x_0)}{(x_2-x_0)}=1-\lambda$ denirse $x_1=x_2-\lambda(x_2-x_0)$ olup

$$\lambda x_0+(1-\lambda)x_2=x_0\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}x_2$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_2)\geq f(\lambda x_0+(1-\lambda)x_2)$$

dir.

Teorem 3.1.6: f, $[0,1]$ aralığında konveks ise $n\geq 1\ ve\ x\in[0,1]$ için

$$B_n(f;x)\geq f(x)$$

dir.

İspat: $x\in[0,1]$ için

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\quad .$$

$x_k=\dfrac{k}{n}$, $\lambda_k=\dbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ denirse

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k=\lambda_0+\lambda_1+\lambda_1+\ldots\lambda_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$$

dir.

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=B_n(t;x)=x$$

dir. Bu durumda

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f(x_k)\geq f\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k\right)=f(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.7: (E.V. Voronovskaya) $f \in C^2[0,1]$ olsun. Burada $C^2[0,1]$; $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonların normlu uzayını göstermek üzere

$$\lim_{n\to\infty} \left\| n\left[f(x) - B_n(f;x) \right] - f''(x)\frac{x(1-x)}{2} \right\| = 0 \tag{3.1.6}$$

dır.

İspat: $f'' \in C[0,1]$ olduğundan

$$\lim_{t\to x} g(x,t) = 0 \text{ ve } \max_{x,t\in[0,1]} \left| g(x,t) \right| = M < \infty \tag{3.1.7}$$

olmak üzere

$$g(x,t) = (t-x)^{-2}\left\{ f(t) - f(x) - (t-x)f'(x) - \frac{(t-x)^2}{2} f''(x) \right\} \tag{3.1.8}$$

fonksiyonu sınırlıdır.

$\varepsilon > 0$ ve $x \in [0,1]$ olsun. f'', $[0,1]$ aralığında düzgün sürekli olduğundan

$$|x-t| < \delta \Rightarrow |g(x,t)| < \varepsilon/4 \tag{3.1.9}$$

olacak şekilde x ten bağımsız bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$n \geq 1$ için

$$A_n(x,\delta) = A_n = \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Buradan (3.1.8) kullanılarak

$$B_n(f;x) - f(x) - f'(x)\frac{T_{n,1}(x)}{n} - \frac{f''(x)}{2n^2}T_{n,2}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}, x\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \tag{3.1.10}$$

elde edilir. Lemma 3.1.1 den $T_{n,1}(x)$ ve $T_{n,2}(x)$ nin değerleri yerine yazılırsa

$$\left| B_n(f;x) - f(x) - \frac{f''(x)}{2n} x(1-x) \right|$$

$$\leq \sum_{k\in A_n} \binom{n}{k} \left| g\left(\frac{k}{n},x\right) \right| \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\notin A_n} \binom{n}{k} \left| g\left(\frac{k}{n},x\right) \right| \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{T_{n,2}(x)}{n^2}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) + M \sum_{k\notin A_n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{16n} + \frac{M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}-x\right)^4 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{\varepsilon}{16n} + \frac{M}{n^4\delta^2} T_{n,4}(x)$$

$$= \frac{\varepsilon}{16n} + \frac{M}{\delta^2 n^2}\left[3X^2 - \frac{2}{n}X^2 + \frac{X}{n^3}(1-2x)^2 \right]$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{16n} + \frac{5M}{16n^2\delta^2}$$

elde edilir. Eğer $n \geq M\big/\left(3\varepsilon\delta^2\right)$ seçilirse

$$\left\| n\left[B_n(f;x) - f(x)\right] - \frac{f''(x)x(1-x)}{2} \right\| \leq \varepsilon$$

bulunur.

Teorem 3.1.8: f **,** $[0,1]$ aralığında düzgün sürekli olsun**.**

$$\left| B_n(f;x) - f(x) \right| \leq c\, w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c sabit bir sayıdır.

İspat: $\left| B_n(f;x) - f(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

olup Lemma 2.4.6 dan

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\leq\sum_{k=0}^{n}w\left(f;\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

dir. Lemma 2.4.7 den

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\leq w(f;\delta)\sum_{k=0}^{n}\left(1+\left|\frac{k}{n}-x\right|\delta^{-1}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

dır. Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\leq w(f;\delta)\left\{1+\delta^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leq w(f;\delta)\left\{1+\delta^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-2x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}+x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\right\}$$

$$=w(f:\delta)\left\{1+\delta^{-1}\left(B_n(t^2;x)-2xB_n(t;x)+x^2\right)^{1/2}\right\}$$

$$=w(f;\delta)\left\{1+\delta^{-1}\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leq w(f;\delta)\left(1+\delta^{-1}\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$$

olup yukarıda $\delta=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ yazılırsa

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|=w\left(f;\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)2=3w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

elde edilir.

Örnek 3.1.1: $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$ fonksiyonu için Bernstein polinomunun $f(x)$ e yakınsadığını gösterelim.

$$B_n(f;x)=\sum_{r=0}^{n}\left|\frac{r}{n}-\frac{1}{2}\right|\binom{n}{r}x^r(1-x)^{n-r}.$$

$x=\dfrac{1}{2}$ için $B_n(f;x)$ ile $f(x)$ arasındaki fark e_n olsun. Öyleyse

$$\frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\left|\frac{r}{n}-\frac{1}{2}\right|\binom{n}{r}=e_n$$

dir. n çift olsun. $\forall\ r$ için

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r}=\left(\frac{n-r}{n}-\frac{1}{2}\right)\binom{n}{n-r}$$

eşitliği vardır ve bu eşitliğin her iki yanı $r=\dfrac{n}{2}$ için sıfırdır. Buradan devam edilirse

$$2^n e_n=\sum_{r=0}^{n}\left|\frac{r}{n}-\frac{1}{2}\right|\binom{n}{r}=2\sum_{r=0}^{n/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{r}{n}\right)\binom{n}{r} \tag{3.1.11}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte son toplamı ikiye ayırırsak,

$$\frac{r}{n}\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1},\quad r\geq 1$$

olduğundan

$$\sum_{r=0}^{n/2}\binom{n}{r}=\frac{1}{2}\left(\binom{n}{n/2}+\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\right)=\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}+2^{n-1}$$

elde edilir ve

$$2\sum_{r=0}^{n/2}\frac{r}{n}\binom{n}{r}=2\sum_{r=1}^{n/2}\binom{n-1}{r-1}=\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1}=2^{n-1}$$

bulunur. (3.1.11) den çok büyük n ler için

$$e_n=\frac{1}{2^{n+1}}\binom{n}{n/2}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

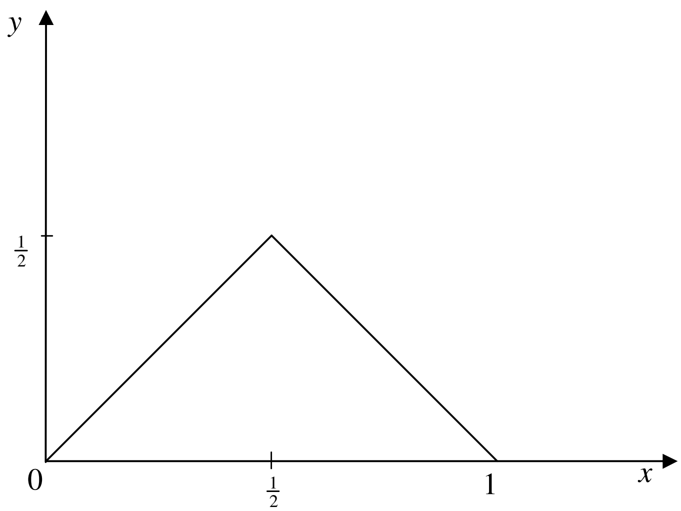
dir. Son olarak

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^n$$

şeklinde de verilen Stirling Formülü [(1)] kullanılarak

$$\mu_n=\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\sim\frac{2^n}{\sqrt{\pi n}}$$

eşitliği gösterilmiştir. Bu formül, $\|.\|$ maksimum normu gösterdiğinde $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ fonksiyonu için $\|f-B_n f\|$ in yaklaşım hızı, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ nin sıfıra yaklaşım hızından daha hızlıdır.



Şekil 3.1 $[0,1]$ aralığında $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$ fonksiyonu

Teorem 3.1.9: $f\in C[0,1]$ ve $f^{'}\in C[0,1]$ olmak üzere;

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\le\frac{3}{4}n^{-1/2}w\left(f^{'};n^{-1/2}\right)$$

dir.

İspat: $B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$B_n(1;x)=1$, $B_n(t;x)=x$ ve $B_n(t^2;x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$ olduğu gösterilmişti.

$$B_n\left((t-x);x\right)=B_n(t;x)-xB_n(1;x)=x-x=0$$

ve

$$B_n\left((t-x)^2;x\right)=\frac{x(1-x)}{n}$$

dir. $x \in [0,1]$ için $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ dir. Ortalama Değer Teoreminden

$$f(t) - f(x) = f^{'}(\zeta)(t-x)\ ; \quad x < \zeta < t$$

dir. Eşitliğin sağ tarafına $f^{'}(x)(t-x)$ eklenip çıkarılırsa;

$$f(t) - f(x) = \left(f^{'}(\zeta) - f^{'}(x)\right)(t-x) + f^{'}(x)(t-x) \tag{3.1.12}$$

olup mutlak değeri alınırsa Lemma 2.4.7 den

$$|t-x|\left|f^{'}(\zeta) - f^{'}(x)\right| \leq |t-x|\, w\left(f^{'};\delta\right)\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \tag{3.1.13}$$

elde edilir. (3.1.12) eşitliği Bernstein operatörüne uygulanırsa,

$$B_n\left(f(t) - f(x);x\right) = B_n\left(\left(f^{'}(\zeta) - f^{'}(x)\right)(t-x);x\right) + f^{'}(x)B_n\left((t-x);x\right)$$

elde edilir.

$$\left|B_n(f;x) - f(x)\right| \leq B_n\left(\left|f(t) - f(x)\right|;x\right) + f(x)\left|B_n(1;x) - 1\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f^{'}(\zeta) - f^{'}(x)\right|\left|\frac{k}{n} - x\right|$$

dır. Lemma 2.4.7 den devam edilirse

$$\left|B_n(f;x) - f(x)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\, w\left(f^{'};\delta\right)\left|\frac{k}{n} - x\right|\left(1 + \left|\frac{k}{n} - x\right|\delta^{-1}\right)$$

$$= w\left(f^{'};\delta\right)\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|\frac{k}{n} - x\right| + \frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]$$

elde edilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right| \le w\left(f^{'};\delta\right)\left[\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right]$$

$$=w\left(f^{'};\delta\right)\left[\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{1/2}+\frac{1}{\delta}\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)\right]$$

$$\le w\left(f^{'};\delta\right)\left[\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{\delta}\frac{1}{4n}\right]$$

bulunur. Yukarıda $\delta=n^{-1/2}$ yazılırsa,

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|=w\left(f^{'};\delta\right)\left[\frac{1}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{4}n^{-1/2}\right]$$

$$=\frac{3}{4}n^{-1/2}w\left(f^{'};n^{-1/2}\right)$$

elde edilir.

$f(x)\in C[0,1]$ olsun. n.dereceden Bernstein polinomu $B_n(f;x)$ ile gösterilsin

ve

$$P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

için

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlansın. Stancu'nun[(5)] makalesinde

$$f(x)=B_n(f;x)+R_n(f;x)$$

Bernstein yaklaşım formülünün kalıntısı olan $R_n(f;x)$ ispatlanmış ve bölünmüş farklarla gösterimi,

$$R_n(f;x) = -\frac{x(1-x)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1,k}(x) f\left[x, \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$$

şeklinde verilmiştir. $x(1-x)$ çarpımının yukarıdaki ifadede bulunması : $B_n(f;0)=0$ ve $B_n(f;1)=1$ olması ile açıklanabilir.

$[0,1]$ aralığı üzerinde $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden bölünmüş farkları sınırlı ise, yani $M_2(f)$, $[0,1]$ aralığı üzerindeki $f(x)$ fonksiyonlarının ikinci mertebeden bölünmüş farkların en küçük üst sınırı ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|R_n(f;x)| \le \frac{x(1-x)}{n} M_2(f).$$

$\{B'_n(f;x)\}$ dizisinin monotonluğunu göstermek için, iki ardışık Bernstein polinomunun farkı için bir formül bulalım.

Teorem 3.1.10: $B_{n+1}(f;x)$ ve $B_n(f;x)$ Bernstein polinomları arasındaki fark:

$$B_{n+1}(f;x) - B_n(f;x) = -\frac{x(1-x)}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1,k}(x) f\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}\right] \quad (3.1.14)$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat: Öncelikle $B_{n+1}(f;x)$ polinomunu yazalım.

$$B_{n+1}(f;x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} x^k (1-x)^{n+1-k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) + (1-x)^{n+1} f(0) + x^{n+1} f(1) \quad (3.1.15)$$

dir**.** $B_n(f;x)$ ise

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} x P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n} (1-x) P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplamda k yerine $k-1$ yazılırsa

$$B_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} x^k (1-x)^{n+1-k} f\left(\frac{k-1}{n}\right) + x^{n+1} f(1) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k}\left(1-x\right)^{n+1-k}\ f\left(\frac{k}{n}\right)+\left(1-x\right)^{n+1}f(0) \qquad (3.1.16)$$

elde edilir. (3.1.15) ve (3.1.16) kullanılarak

$$B_{n+1}(f;x)-B_{n}(f;x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\binom{n+1}{k}f\left(\frac{k}{n+1}\right)-\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)-\binom{n}{k-1}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}x^{k}\left(1-x\right)^{n+1-k}$$

olup,

$$\binom{n}{k-1}=\frac{k}{n+1-k}\binom{n}{k} \text{ ve } \binom{n+1}{k}=\frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}$$

ifadeleri yukarıda yerine yazılırsa

$$B_{n+1}(f;x)-B_{n}(f;x)$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left\{\frac{k}{n+1-k}f\left(\frac{k-1}{n}\right)-\frac{n+1}{n+1-k}f\left(\frac{k}{n+1}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}x^{k}\left(1-x\right)^{n+1-k}$$

elde edilir. Burada k yerine $k+1$ yazılırsa

$$B_{n+1}(f;x)-B_{n}(f;x)$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\left\{\frac{k+1}{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{n+1}{n-k}f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right\}x^{k+1}\left(1-x\right)^{n-k}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\binom{n+1}{k}=\frac{n}{k+1}\binom{n-1}{k}$$

olduğundan

$$B_{n+1}(f;x)-B_{n}(f;x)=-x(1-x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k}\left(1-x\right)^{n-1-k}$$

$$\left\{\frac{n}{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{n(n+1)}{(k+1)(n-k)}f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)+\frac{n}{k+1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right\}$$

yazılabilir. $f(x)$ fonksiyonunun

$$\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}$$

noktalarındaki bölünmüş farkları

$$f\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}\right]$$

$$= n(n+1)\left\{\frac{n}{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{n(n+1)}{(k+1)(n-k)} f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) + \frac{n}{k+1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right\}$$

dır. Böylece (3.1.14) bağıntısı ispatlanmış olur.

Şimdi yüksek mertebeden konveks fonksiyonlar kavramı için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1.3: I aralığı üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyonun, I üzerinde $n+2$ farklı noktada, $n+1.$ mertebeden tüm bölünmüş farkları pozitif ise bu fonksiyon I üzerinde $n.$ mertebeden konvekstir denir. Eğer I üzerinde $n+2$ farklı noktada, $n+1.$ mertebeden tüm bölünmüş farkları negatif olmayan ise bu fonksiyon I üzerinde $n.$ mertebeden konkav olmayandır denir.

Teorem 3.1.13: Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $[0,1]$ aralığı üzerinde birinci mertebeden konveks ise, $\{B_n(f;x)\}$ Bernstein polinomları dizisi $(0,1)$ aralığında azalandır yani;

$x \in (0,1)$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$B_n(f;x) > B_{n+1}(f;x)$$

dır. Eğer $f(x)$, $[0,1]$ aralığı üzerinde konkav olmayan bir fonksiyon ise, $\{B_n(f;x)\}$ dizisi $[0,1]$ aralığı üzerinde azalmayandır yani;

$x \in [0,1]$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$B_n(f;x) \geq B_{n+1}(f;x)$$

dir. Bu sonuç ilk defa 1954 te Temple[11] ve sonra 1957 de Arama[13] ; 1958 de ise Schoenberg[12] ye dahil edilmiştir.

(3.1.14) özdeşliği, Bernstein polinomlarının birinci mertebeden türevi ile oluşturulan dizinin, monotonluğunu çalışmak için yararlı olacaktır.

Teorem 3.1.14: $[0,1]$ aralığı üzerinde iki ardışık Bernstein polinomunun türevleri arasındaki fark,

$$B'_{n+1}(f;x)-B'_n(f;x)=\frac{2x-1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}P_{n-1,k}(x)f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]$$

$$-\frac{(n-1)x(1-x)}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-2}P_{n-2,k}(x)\left\{\frac{2}{n}f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1},\frac{k+2}{n}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n+1}f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1}\right]\right\} \qquad (3.1.17)$$

dir.

İspat : (3.1.14) özdeşliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$B'_{n+1}(f;x)-B'_n(f;x) \qquad (3.1.18)$$

$$=\frac{2x-1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}P_{n-1,k}(x)f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]-\frac{x(1-x)}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}P'_{n-1,k}(x)f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]$$

elde edilir.

$$P'_{n-1,k}(x)=\binom{n-1}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-1-k}-\binom{n-1}{k}(n-1-k)x^k(1-x)^{n-2-k}$$

olup, bu eşitlik (3.1.18) de yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-1}P'_{n-1,k}(x)f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-1-k}f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]+$$

$$-\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}(n-1-k)x^k(1-x)^{n-2-k}f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki ilk toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa,

$$\binom{n-1}{k+1}=\frac{n-1}{k+1}\binom{n-2}{k} \text{ ve } \binom{n-1}{k}=\frac{n-1}{n-1-k}\binom{n-2}{k}$$

olduğundan;

$$\sum_{k=0}^{n-1} P'_{n-1,k}(x) f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right] \tag{3.1.19}$$

$$=(n-1)\sum_{k=0}^{n-2} P_{n-2,k}(x) \quad \left(f\left[\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1},\frac{k+2}{n}\right]-f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]\right)$$

bulunur. Bölünmüş farkların tekrarlama formülünü kullanarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1},\frac{k+2}{n}\right]=\frac{n}{2}\left(f\left[\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1},\frac{k+2}{n}\right]-f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1}\right]\right)$$

ve

$$f\left[\frac{k+1}{n+1},\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1}\right]=(n+1)\left(f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1}\right]-f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]\right).$$

dır. Sonuç olarak eşitliği

$$f\left[\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1},\frac{k+2}{n}\right]-f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n+1},\frac{k+1}{n}\right]$$

$$=\frac{2}{n} f\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1},\frac{k+2}{n}\right]+\frac{1}{n+1} f\left[\frac{k+1}{n+1},\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\frac{k+2}{n+1}\right] \tag{3.1.20}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1.19) ve (3.1.20) eşitlikleri kullanılarak (3.1.18) eşitliği bizi istenen (3.1.17) formülüne götürür.

3.2. q- tamsayıları üzerinde Bernstein Polinomları

Bernstein polinomları, bir çok özelliğe sahip olduğundan çeşitli genelleştirmeler ileri sürülmüştür. Bu bölümde q-tamsayıları için genelleştirmeler verilecektir.

$f \in C[0,1]$ için klasik Bernstein polinomu

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanmıştı. Şimdi q-Bernstein polinomları için birkaç tanım verelim.

Negatif olmayan bir q tamsayısı için, q-tamsayısı $[i]$ ile gösterilir ve

$$[i] = \begin{cases} \dfrac{1-q^i}{1-q}, & q \neq 1 \\ i \quad , & q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır

q faktöriyel: $[i]!$ ile gösterilir ve

$$[i]! = \begin{cases} [i][i-1]\cdots[1], & i = 1,2,\cdots \\ 1 \quad , & i = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. q-binom katsayısı ise $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ ile gösterilir ve

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1]\cdots[n-r+1]}{[r]!}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi q-farkları tanımlayalım

$x_j = [j]$ olsun.

$$x_{j+k+1} - x_j = \frac{1-q^{j+k+1}}{1-q} - \frac{1-q^j}{1-q} = q^j [k+1] \tag{3.2.1}$$

dir. Eğer $k = 0$ ise,

$$f\left[x_j, x_{j+1}\right] = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{q^j}$$

dir.

$$f(x_{j+1}) - f(x_j) = \Delta_q f(x_j)$$

olarak tanımlanırsa

$$f\left[x_j, x_{j+1}\right] = \frac{\Delta_q f(x_j)}{q^j} \tag{3.2.2}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece q fark $\Delta_q f(x_j)$ ile ileri fark $\Delta f(x_j)$ aynıdır. Ancak $q = 1$ olmadıkça, $k \geq 2$ için k. mertebeden q-fark $\Delta_q^k f(x_j)$ ile k. mertebeden ileri fark $\Delta^k f(x_j)$ aynı değildir. (2.3.2) den, bölünmüş farklar için indirgeme bağıntısı ve (3.2.2) den

$$f\left[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\right] = \left(\frac{\Delta_q f(x_{j+1})}{q^{j+1}} - \frac{\Delta_q f(x_j)}{q^j} \right) \Big/ \left(x_{j+2} - x_j \right)$$

elde edilir.(3.2.1) den devam edilirse

$$x_{j+2} - x_j = q^j \left[2\right]$$

olup, ikinci mertebeden bölünmüş fark

$$f\left[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\right] = \frac{\Delta_q f(x_{j+1}) - q\Delta_q f(x_j)}{q^{2j+1}\left[2\right]} \tag{3.2.3}$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.3) den

$$\Delta_q^2 f(x_j) = \Delta_q f(x_{j+1}) - q\Delta_q f(x_j)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$f\left[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\right] = \frac{\Delta_q^2 f(x_j)}{q^{2j+1}\left[2\right]}$$

elde edilir. $\left[3\right]! = \left[3\right]\left[2\right]\left[1\right]$ olmak üzere üçüncü mertebeden bölünmüş fark

$$f\left[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}\right] = \frac{\Delta_q^2 f(x_{j+1}) - q^2 \Delta_q f(x_j)}{q^{3j+3}[3]!}$$

dir. Bu şekilde devam edilirse $\Delta_q^0 f(x_j) = f(x_j)$ ve $\Delta_q^1 f(x_j) = \Delta_q f(x_j)$ olmak üzere $k \geq 0$ tamsayısı için

$$\Delta_q^{k+1} f(x_j) = \Delta_q^k f(x_{j+1}) - q^k \Delta_q^k f(x_j)$$

şeklinde tanımlanır.

q-Bernstein polinomunu ise,

$$B_n^q(f;x) = \sum_{r=0}^{n} f_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n-r-1} (1 - q^s x) \tag{3.2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada f_r, her n pozitif tamsayısı için f fonksiyonunun $x = \frac{[r]}{[n]}$ noktasındaki değerini verir. $n - r = 0$ için $\prod_{s=0}^{n-r-1} (1 - q^s x)$ çarpımının değerini bir olarak kabul edelim. (3.2.4) de $q = 1$ yazılırsa klasik Bernstein polinomu elde edilir. Klasik Bernstein polinomlarında olduğu gibi q-Bernstein polinomları da f fonksiyonunu $[0,1]$ aralığının uç noktalarında interpole eder. Yani

$$B_n^q(f;0) = f(0) \quad ve \quad B_n^q(f;1) = f(1) \tag{3.2.5}$$

dir. (3.2.4) de tanımlanan B_n^q operatörü lineer olup, $0 < q < 1$ için $[0,1]$ aralığından P_n e dönüşüm yapan monoton bir operatördür. Şimdi ispatlayacağımız teorem q-farkları içerir ve $q = 1$ alındığında sonuç Teorem 3.1.1 i verir.

Teorem 3.2.1: $x_j = [j]$ ve $[k]! = [k][k-1]\ldots[1]$ olmak üzere her $j, k \geq 0$ için

$$f\left[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}\right] = \frac{\Delta_q^k f(x_j)}{q^{k(2j+k-1)/2}[k]!} \tag{3.2.6}$$

eşitliği vardır.

İspat: İspatı k üzerinden tümevarım yardımıyla yapalım.

Her $j \geq 0$ ve $k = 0$ için eşitlik doğrudur.

$k \geq 0$ ve her $j \geq 0$ için doğru olsun.

$$f\left[x_j, x_{j+1}, \ldots x_{j+k+1}\right] = \frac{f\left[x_{j+1}, \ldots x_{j+k+1}\right] - f\left[x_j, \ldots x_{j+k}\right]}{x_{j+k+1} - x_j}$$

$$= \frac{1}{q^j\left[k+1\right]}\left(\frac{\Delta_q^k f(x_{j+1})}{q^{k(2j+k+1)/2}\left[k\right]!} - \frac{\Delta_q^k f(x_j)}{q^{k(2j+k-1)/2}\left[k\right]!}\right)$$

$$= \frac{\Delta_q^k f(x_{j+1}) - q^k \Delta_q^k f(x_j)}{q^{(k+1)(2j+k)/2}\left[k+1\right]!}$$

$$= \frac{\Delta_q^{k+1} f(x_j)}{q^{(k+1)(2j+k)/2}\left[k+1\right]!}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Lemma 3.2.1: $x_j = \left[j\right]$, $q > 0$ ve her $j,k \geq 0$ için

$$\Delta_q^k f(x_j) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r q^{r(r-1)/2} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix} f\left(x_{j+k-r}\right)$$

dir. İspatı Schoeneberg[20] , Lee and Phillips[21] tarafından yapılmıştır.

Teorem 3.2.2: Genelleştirilmiş Bernstein polinomu,

$$\Delta_q^0 f_j = f_j = f\left([j]/[n]\right)$$

ve

$$\Delta_q^r f_j = \Delta_q^{r-1} f_{j+1} - q^{r-1}\Delta_q^{r-1} f_j \quad r \geq 1$$

olmak üzere

$$B_n^q(f;x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \Delta_q^r f_0 x^r \tag{3.2.7}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat. Burada, ispatı tümevarım yardımıyla Phillips[1] de yapılan,

$$\prod_{s=0}^{n-r-1}(1-q^s x)=\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}}\begin{bmatrix} n-r \\ s \end{bmatrix} x^s \tag{3.2.8}$$

özdeşliğini kullanmamız gerekir. (3.2.8) de $q=1$ yazılırsa bu özdeşlik binom açılımına dönüşür. (3.2.8) eşitliği (3.2.4) te yerine yazılırsa

$$B_n^q(f;x)=\sum_{r=0}^{n} f_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r \sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s q^{\frac{s(s-1)}{2}}\begin{bmatrix} n-r \\ s \end{bmatrix} x^s$$

elde edilir. Burada t yerine $r+s$ yazılırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-r \\ s \end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[n-r]![r]!}\frac{[n-r]!}{[n-r-s]![s]!}\frac{[t]!}{[t]!}=\begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu eşitlik yukarıda yerine yazılırsa

$$B_n^q(f;x)=\sum_{t=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix} x^t \sum_{r=0}^{t}(-1)^{t-r} q^{\frac{(t-r)(t-r-1)}{2}}\begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix} f_r$$

elde edilir. Böylece lemma (3.2.1) den

$$B_n^q(f;x)=\sum_{t=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix}\Delta_q^t f_0\, x^t$$

bulunur. Tanım 2.3.1 ve (3.2.6) dan $x_j=[j]$ ve $\zeta\in(x_0,x_k)$ için

$$\frac{\Delta_q^k f(x_0)}{q^{k(k-1)/2}[k]!}=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\zeta)}{[k]!}$$

dir. Öyleyse $f(x)=x^k$ fonksiyonu için k dan büyük mertebeli türevler sıfır olacağından q farklarda sıfırdır ve Teorem 3.2.2 den $\forall n\geq k$ için $B_n^q(x^k;x)$ polinomu k .dereceden bir polinomdur.

Teorem 3.2.2 den

$$B_n^q(1;x)=1 \tag{3.2.9}$$

dir. $f(x)=x$ ise

$$\Delta_q^0 f_0=f_0=0$$

ve

$$\Delta_q^1 f_0 = f_1 - f_0 = 1/[n]$$

olup Teorem 3.2.2 den

$$B_n^q(x;x) = x \tag{3.2.10}$$

elde edilir. $f(x) = x^2$ ise,

$$\Delta_q^0 f_0 = f_0 = 0,$$

$$\Delta_q^1 f_0 = f_1 - f_0 = 1/[n]^2,$$

$$\Delta_q^2 f_0 = f_2 - (1+q)f_1 + qf_0 = \left(\frac{[2]}{[n]}\right)^2 - (1+q)\left(\frac{[1]}{[n]}\right)^2$$

eşitlikleri için (3.2.7) den Bernstein polinomu

$$B_n^q(x^2;x) = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_q^0 f_0 x^0 + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \Delta_q^1 f_0 x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \Delta_q^2 f_0 x^2$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$B_n^q(x^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]} \tag{3.2.11}$$

bulunur. $B_n^q(1;x)$, $B_n^q(x;x)$ ve $B_n^q(x^2;x)$ için yukarıdaki ifadeler, $q=1$ olması durumunda, klasik Bernstein polinomu için elde ettiğimiz eşitliklere indirgenir. Korovkin Teoremi yardımı ile genelleştirilmiş Bernstein polinomları için yakınsaklık, bize Teorem 3.2.3 için yol gösterir.

Teorem 3.2.3 (q_n)**,** $0 < q_n < 1$ ve $n \to \infty$ için $q_n \to 1$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. Eğer her bir $f \in C[0,1]$ için $q = q_n$ ise (3.2.4) de tanımlanan $B_n^q(f;x)$ polinomu, $[0,1]$ aralığında $f(x)$ e düzgün yakınsar.

İspat: (3.2.9) ve (3.2.10) da $f(x)=x$ ve $f(x)=1$ için $B_n^q(f;x)=f(x)$ olduğu gösterildi. $n\to\infty$ için $q_n\to 1$ olduğundan (3.2.11) den $f(x)=x^2$ için $B_n^q(f;x)$ $f(x)$ e düzgün yakınsaktır. Aynı zamanda $0<q_n<1$ olduğundan B_n^q operatörü monotondur ve ispat Bohmann-Korovkin Teoremi uygulanarak tamamlanır. Teoremin sonucunda $q=1$ için, Teorem 3.1.6 ve Teorem 3.1.7 ye indirgenir.

Teorem 3.2.4: Eğer f , $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks ise, her $n\geq 1$ ve $0<q\leq 1$ olmak üzere $[0,1]$ aralığındaki her x için

$$B_n^q(f;x)\geq f(x) \tag{3.2.12}$$

dir.

İspat $[0,1]$ aralığından alınan her bir x için ve $0\leq r\leq n$ için

$$x_r=\frac{[r]}{[n]}$$

ve

$$\lambda_r=\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n-r-1}\left(1-q^s x\right)$$

olsun. $0<q\leq 1$ ve $x\in[0,1]$ için $\lambda_r\geq 0$ dır. (3.2.9) ve (3.2.10) dan sıra ile

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n}\lambda_r &= \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n \\ &= \sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n-r-1}\left(1-q^s x\right) \\ &= B_n^q(1;x)=1\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{r=0}^{n}\lambda_r x_r = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

$$. \qquad = \sum_{r=0}^{n}\frac{[r]}{[n]}\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n-r-1}\left(1-q^s x\right)$$

$$= B_n^q(t;x) = x$$

dir. Böylece

$$B_n^q(f;x) = \sum_{r=0}^{n}\lambda_r f(x_r) \geq f\left(\sum_{r=0}^{n}\lambda_r x_r\right) = f(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5: Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $[0,1]$ aralığında konveks ise, $[0,1]$ aralığında $B_n^q(f;x)$ ve $B_{n-1}^q(f;x)$ polinomları, her $n \geq 2$ ve q parametresinin aynı değeri için,

$$B_{n-1}^q(f;x) \geq B_n^q(f;x) \tag{3.2.13}$$

şartını sağlar. Aksi halde f lineer ise $B_{n-1}^q(f;x) = B_n^q(f;x)$ olur.

İspat: $q=1$ için bu teoremin özel hali Davis[3] tarafından verilmiştir. İki ardışık Bernstein polinomu arasındaki fark $\dfrac{x}{1-x}$ in kuvvetlerinin terimleri ile ifade edilmiştir. Eğer $q \neq 1$ ise bu ifade doğru olmaz. İspata Oruç ve Phillips[7] den devam edilirse $0 < q < 1$ için

$$B_{n-1}^q(f;x) = \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n-r-2}\left(1-q^s x\right)$$

ve

$$B_n^q(f;x) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{[r]}{[n]}\right)\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n-r-1}\left(1-q^s x\right)$$

dir. İki ardışık Bernstein polinomu arasındaki fark, $\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-q^s x\right)^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\left[B_{n-1}^{q}(f;x)-B_{n}^{q}(f;x)\right]\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right)\begin{bmatrix}n-1\\ r\end{bmatrix}x^{r}\prod_{s=0}^{n-r-2}\left(1-q^{s}x\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}$$

$$-\sum_{r=0}^{n}f\left(\frac{[r]}{[n]}\right)\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}x^{r}\prod_{s=0}^{n-r-1}\left(1-q^{s}x\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right)\begin{bmatrix}n-1\\ r\end{bmatrix}x^{r}\prod_{s=0}^{n-r-2}\left(1-q^{s}x\right)\prod_{s=0}^{n-r-2}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}\prod_{s=n-r-1}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}$$

$$-\sum_{r=0}^{n}f\left(\frac{[r]}{[n]}\right)\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}x^{r}\prod_{s=0}^{n-r-1}\left(1-q^{s}x\right)\prod_{s=0}^{n-r-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}\prod_{s=n-r}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right)\begin{bmatrix}n-1\\ r\end{bmatrix}x^{r}\prod_{s=n-r-1}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}-\sum_{r=0}^{n}f\left(\frac{[r]}{[n]}\right)\begin{bmatrix}n\\ r\end{bmatrix}x^{r}\prod_{s=n-r}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}$$

elde edilir.

$$W_{r}(x)=x^{r}\prod_{s=n-r}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}\tag{3.2.14}$$

olsun. Buradan

$$W_{r+1}(x)=x^{r+1}\prod_{s=n-r-1}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}$$

olur. Bu iki eşitlikten

$$W_{r}(x)+q^{n-r-1}W_{r+1}(x)=x^{r}\prod_{s=n-r}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}+q^{n-r-1}\left[x^{r+1}\prod_{s=n-r-1}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}\right]$$

$$=x^{r}\prod_{s=n-r}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}+x^{r}\prod_{s=n-r-1}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}x\,q^{n-r-1}$$

$$=\frac{x^{r}}{\left(1-q^{n-r-1}x\right)^{-1}}\prod_{s=n-r-1}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}+x^{r}\prod_{s=n-r-1}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}x\,q^{n-r-1}$$

$$= x^r \prod_{s=n-r-1}^{n-1} \left(1-q^s x\right)^{-1} \left[\frac{1}{\left(1-q^{n-r-1}x\right)^{-1}} + x\, q^{n-r-1} \right]$$

$$= x^r \prod_{s=n-r-1}^{n-1} \left(1-q^s x\right)^{-1} \left[1-q^{n-r-1}x + q^{n-r-1}x\right]$$

$$= x^r \prod_{s=n-r-1}^{n-1} \left(1-q^s x\right)^{-1}$$

elde edilir. $W_0(x)$ ve $W_n(x)$ terimleri atılarak yukarıdaki sonuçlar birleştirilirse

$$\left[B_{n-1}^q(f;x) - B_n^q(f;x)\right] \prod_{s=0}^{n-1} \left(1-q^s x\right)^{-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right) \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} \left(W_r(x) + q^{n-r-1} W_{r+1}(x)\right) - \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{[r]}{[n]}\right) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} W_r(x)$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \frac{[n-r]}{[n]} W_r(x) + \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right) \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} W_{r+1}(x)\, q^{n-r-1} - \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{[r]}{[n]}\right) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} W_r(x)$$

elde edilir. İkinci toplamda r yerine $r-1$ yazılırsa

$$\left[B_{n-1}^q(f;x) - B_n^q(f;x)\right] \prod_{s=0}^{n-1} \left(1-q^s x\right)^{-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \frac{[n-r]}{[n]} W_r(x) + \sum_{r=1}^{n-1} f\left(\frac{[r-1]}{[n-1]}\right) \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} W_r(x)\, q^{n-r}$$

$$- \sum_{r=1}^{n-1} f\left(\frac{[r]}{[n]}\right) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} W_r(x)$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \frac{[n-r]}{[n]} W_r(x) + \sum_{r=1}^{n-1} f\left(\frac{[r-1]}{[n-1]}\right) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \frac{[r]}{[n]} W_r(x)\, q^{n-r} - \sum_{r=1}^{n-1} f\left(\frac{[r]}{[n]}\right) \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} W_r(x)$$

dir.

$$\frac{[n-r]}{[n]} f\left(\frac{[r]}{[n-1]}\right) + q^{n-r} \frac{[r]}{[n]} f\left(\frac{[r-1]}{[n-1]}\right) - f\left(\frac{[r]}{[n]}\right) = a_r \qquad (3.2.15)$$

olsun. O zaman

$$\left[B_{n-1}^{q}(f;x)-B_{n}^{q}(f;x)\right]\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-q^{s}x\right)^{-1}=\sum_{r=1}^{n-1}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}a_{r}\;W_{r}(x) \tag{3.2.16}$$

şeklinde yazılabilir. (3.2.14) den görülüyor ki $0<q\leq 1$ için $W_r(x)$, $[0,1]$ aralığında negatif değildir ve böylece (3.2.16) den, her bir a_r nin negatif olmadığını göstermek yeterlidir.

$\dfrac{[n-r]}{[n]}=\lambda$, $\dfrac{[r]}{[n-1]}=x_1$ ve $\dfrac{[r-1]}{[n-1]}=x_2$ denirse,

$$1-\lambda=1-\frac{[n-r]}{[n]}=\frac{[n]-[n-r]}{[n]}=\frac{-q^{n}+q^{n-r}}{1-q^{n}}=\frac{q^{n-r}(1-q^{r})}{1-q^{n}}=q^{n-r}\frac{[r]}{[n]}$$

ve

$$\begin{aligned}\lambda x_1+(1-\lambda)x_2&=\frac{[n-r]}{[n]}\frac{[r]}{[n-1]}+q^{n-r}\frac{[r-1]}{[n-1]}\frac{[r]}{[n]}\\&=\frac{[r]}{[n]}\left(\frac{1-q^{n-r}}{1-q^{n-1}}+q^{n-r}\frac{1-q^{r-1}}{1-q^{n-1}}\right)\\&=\frac{[r]}{[n]}\left(\frac{1-q^{n-r}+q^{n-r}-q^{n-1}}{1-q^{n-1}}\right)\\&=\frac{[r]}{[n]}\end{aligned}$$

dir. (3.2.15) ve konvekslik tanımından

$$a_r=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)-f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq 0$$

dır. O halde

$$B_{n-1}^{q}(f;x)\geq B_{n}^{q}(f;x)$$

dir. Bernstein polinomları f i aralığın uç noktalarında interpole ettiğinden bu eşitlik $x=0$ ve $x=1$ için de sağlanır. $0<x<1$ için $B_{n-1}^{q}(f;x)=B_{n}^{q}(f;x)$ iken

$0 \leq r \leq n-1$ olmak üzere ardışık $\dfrac{[r]}{[n-1]}$ noktaları arasındaki her bir aralıkta f lineer ise, sıfırdan farklı her a_r için bu eşitsizlik kesin vardır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Klasik Bernstein polinomlarında gösterildiği gibi, $[0,1]$ aralığında q-Bernstein polinomlarının birinci türevinin, f nin birinci türevine düzgün yakınsak olduğunu ispatlayalım.

$0 < q_n \leq 1$ ve $n \to \infty$ için $q_n \to 1$ olsun. Burada genelleştirilmiş Bernstein operatörünün farklı gösterimini kullanmamız gerekir. Yani $f_r = f\left(\dfrac{[r]}{[n]}\right)$ için

$$\tilde{B}_{n-1}^{q}(f;x) = \sum_{r=0}^{n-1} f_r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n-r-2}\left(1-q_n{}^s x\right) \tag{3.2.17}$$

olsun. Burada $\tilde{B}_{n-1}^{q}(f;x)$ ile $B_{n-1}^{q}(f;x)$ birbirinden farklıdır. Çünkü $B_{n-1}^{q}(f;x)$ polinomunda $q = q_{n-1}$ dir ve f fonksiyonu $[r]/[n-1]$ noktalarında değer alır. Teorem 3.2.2 den

$$B_n^q(f;x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \Delta_{q_n}^r f_0 x^r$$

dir. (3.2.17) denklemi q-farklar yardımıyla yazılırsa

$$\tilde{B}_{n-1}^{q}(f;x) = \sum_{r=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} \Delta_{q_n}^r f_0 x^r \tag{3.2.18}$$

dir. (3.2.18) formülünden

$$\tilde{B}_{n-1}^{q}(1;x) - 1 = 0,$$

$n \geq 1$ için

$$\tilde{B}_{n-1}^{q}(x;x)-x=-\frac{q_n^{n-1}}{[n]}x$$

ve $n\geq 3$ için

$$\tilde{B}_{n-1}^{q}(x^2;x)-x^2=\frac{[n-1]}{[n]^2}x+\left(\frac{q_n[n-1][n-2]}{[n]^2}-1\right)x^2$$

olduğunu gösterelim.

$$\tilde{B}_{n-1}^{q}(x;x)=\begin{bmatrix}n-1\\0\end{bmatrix}\Delta_{q_n}^{0}f_0+\begin{bmatrix}n-1\\1\end{bmatrix}\Delta_{q_n}f_0\,x$$

$$=[n-1]\frac{[1]}{[n]}x$$

$$=\frac{1-q_n^{n-1}}{1-q_n}\frac{1-q_n}{1-q_n^{n}}x$$

$$=\frac{1-q_n^{n-1}}{1-q_n^{n}}x$$

elde edilir. $\tilde{B}_{n-1}^{q}(x^2;x)$ operatörü

$$\tilde{B}_{n-1}(x^2;x)=\begin{bmatrix}n-1\\0\end{bmatrix}\Delta_{q_n}^{0}f_0\,x^0+\begin{bmatrix}n-1\\1\end{bmatrix}\Delta_{q_n}f_0\,x+\begin{bmatrix}n-1\\2\end{bmatrix}\Delta_{q_n}^{2}\,f_0\,x^2$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\Delta_{q_n}^{0}f_0=0\,,$$

$$\Delta_{q_n}f_0=f_1-f_0=\frac{[1]}{[n]^2}$$

ve

$$\Delta_{q_n}^{2}f_0=f_2-(1+q_n)f_1+q_nf_0=\frac{[2]^2}{[n]^2}-(1+q_n)\frac{[1]}{[n]^2}$$

eşitlikleri yukarıda yerine yazılırsa , $n\geq 3$ için

$$\tilde{B}_{n-1}^{q}(x^2;x)-x^2=[n-1]\frac{[1]}{[n]^2}x+\left(\frac{q_n[n-1][n-2]}{[n]^2}-1\right)x^2$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\tilde{B}_{n-1}^{q}(x^2;x)-x^2=\frac{1}{q_n[n]}\left(1-\frac{1}{[n]}\right)x+\frac{1}{q_n^2}\left(1-q_n^2-\frac{2+q_n}{[n]}+\frac{1+q_n}{[n]^2}\right)x^2$$

elde edilir. Böylece $\tilde{B}_{n-1}^{q}(f;x)$, $[0,1]$ aralığında 1, x ve x^2 fonksiyonları için f ye düzgün yakınsaktır. $\tilde{B}_{n-1}^{q}(f;x)$, $[0,1]$ aralığında monoton operatör olduğundan Bohman-Korovkin teoreminden her $f\in C[0,1]$ için $\tilde{B}_{n-1}^{q}(f;x)$ $[0,1]$ aralığında f ye düzgün yakınsaktır.

Şimdi q-farklarla ifade edilen $B_n^q(f;x)$ polinomunun türevini alalım.

$$B_n^{q\prime}(f;x)=\sum_{r=1}^{n}r\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}\Delta_{q_n}^{r}f_0x^{r-1}=\sum_{r=0}^{n-1}(r+1)\begin{bmatrix}n\\r+1\end{bmatrix}\Delta_{q_n}^{r+1}f_0x^{r}$$

dir. Eşitliğin sağ tarafı $[r+1]$ ile çarpıp bölünürse ve

$$\begin{bmatrix}n\\r+1\end{bmatrix}[r+1]=[n]\begin{bmatrix}n-1\\r\end{bmatrix}$$

eşitliği yukarıda yerine yazılırsa

$$B_n^{q\prime}(f;x)=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(r+1)}{[r+1]}\begin{bmatrix}n-1\\r\end{bmatrix}[n]\Delta_{q_n}^{r+1}f_0x^{r}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(r+1)}{[r+1]}\begin{bmatrix}n-1\\r\end{bmatrix}\Delta_{q_n}^{r}\left([n]\Delta_{q_n}f_0\right)x^{r} \qquad (3.2.19)$$

elde edilir. Eğer f' varsa yeterince büyük n ler için $[n]\Delta_{q_n}f_0$ ile $f'(0)$ birbirine yakındır. Eğer $\frac{r+1}{[r+1]}$ ifadesi ihmal edilirse (3.2.18) den

$$B_n^{q\prime}(f;x)=\sum_{r=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}\Delta_{q_n}^r\left([n]\Delta_{q_n}f_0\right)x^r=\tilde{B}_{n-1}^q\left([n]\Delta_{q_n}f;x\right) \qquad (3.2.20)$$

elde edilir. Operatörler lineer olduğundan (3.2.20) deki $\tilde{B}_{n-1}^q\left([n]\Delta_{q_n}f;x\right)$ ile $\tilde{B}_{n-1}^q\left(f';x\right)$ operatörünü karşılaştırabiliriz. Bu iki operatör arasındaki fark

$$\tilde{B}_{n-1}^q\left(f';x\right)-\tilde{B}_{n-1}^q\left([n]\Delta_{q_n}f;x\right)=\sum_{r=0}^{n-1}\left(f_r'-[n]\Delta_{q_n}f_r\right)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}x^r\prod_{s=0}^{n-r-2}\left(1-q_n^s x\right) \quad (3.2.21)$$

şeklinde yazılabilir. $f\in C^1[0,1]$ olsun. Ortalama Değer Teoreminden $0<\theta<1$ olacak şekilde $\theta\in\mathbb{R}$ vardır. Yani $0<\theta<1$ için

$$f'\left[\frac{[r]}{[n]}+\theta\left(\frac{[r+1]}{[n]}-\frac{[r]}{[n]}\right)\right]=\left(f\left(\frac{[r+1]}{[n]}\right)-f\left(\frac{[r]}{[n]}\right)\right)\left(\frac{[r+1]}{[n]}-\frac{[r]}{[n]}\right)^{-1}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} f_r'-[n]\Delta_{q_n}f_r &= f'\left(\frac{[r]}{[n]}\right)-[n]\left(f\left(\frac{[r+1]}{[n]}\right)-f\left(\frac{[r]}{[n]}\right)\right) \\ &= f'\left(\frac{[r]}{[n]}\right)-[n]\left(f\left(\frac{[r+1]}{[n]}\right)-f\left(\frac{[r]}{[n]}\right)\right)\left(\frac{[r+1]}{[n]}-\frac{[r]}{[n]}\right)^{-1}\left(\frac{[r+1]-[r]}{[n]}\right) \\ &= f'\left(\frac{[r]}{[n]}\right)-f'\left(\frac{[r]}{[n]}+\theta\frac{[r+1]-[r]}{[n]}\right)\left([r+1]-[r]\right) \end{aligned}$$

dır. Burada

$$[r+1]=1+q_n+q_n^2+\cdots+q_n^r$$

ve

$$[r]=1+q_n+\cdots q_n^{r-1}$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$f_r'-[n]\Delta_{q_n}f_r=f'\left(\frac{[r]}{[n]}\right)-q_n^r f'\left(\frac{[r]+\theta q_n^r}{[n]}\right)$$

bulunur. $n \to \infty$ için $q_n \to 1$ ve $f \in C^1[0,1]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır öyleki her $n \geq N$ için

$$\left| f_r' - [n]\Delta_{q_n} f_r \right| < \varepsilon \ , \quad 0 \leq r \leq n-1$$

dir. (3.2.21), (3.2.9), (3.2.10) ve (3.2.11) eşitliklerinden

$$\left| \tilde{B}_{n-1}^{q}\left(f';x\right) - \tilde{B}_{n-1}^{q}\left(\left[n\right]\Delta_{q_n} f;x\right) \right| < \varepsilon \sum_{r=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} x^r \prod_{s=0}^{n-r-2} \left(1 - q_n^s x\right) = \varepsilon \,.$$

dır. $\varepsilon > 0$ sayısı için $N = N(\varepsilon)$ vardır öyleki

$$\left\| \tilde{B}_{n-1}^{q}\left(f';x\right) - \tilde{B}_{n-1}^{q}\left(\left[n\right]\Delta_{q_n} f;x\right) \right\| < \varepsilon$$

dır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} f_r' - [n]\Delta_{q_n} f_r = \lim_{n\to\infty} f'\left(\frac{[r]}{[n]}\right) - q_n^r f'\left(\frac{[r]+\theta q_n^r}{[n]}\right) = 0$$

bulunur.

3.3 İki Değişkenli Genelleştirilmiş Bernstein Operatörleri

Klasik Bernstein operatörü, her bir $f \in C[0,1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanmıştı. Şimdi iki değişkenli q-Bernstein operatörlerini tanımlayalım.

$I^2 = [0,1] \times [0,1]$ birim kare ve bu kare üzerinde tanımlı iki değişkenli reel fonksiyonların uzayı $R^{I^2} = \{ f \,/\, f : I^2 \to \mathbb{R} \}$ ile gösterilsin. Her bir $f \in R^{I^2}$ fonksiyonu ve her $q_1, q_2 > 0$ pozitif reel sayıları için

$$B_{n_1}^{x}(f;x,y) = B_{n_1}^{x}(f) = \sum_{r_1=0}^{n_1} f_{r_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} x\right) \tag{3.3.1}$$

ve

$$B_{n_2}^{y}(f;x,y) = B_{n_2}^{y}(f) = \sum_{r_2=0}^{n_2} f_{r_2} \begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2} \prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1} \left(1 - q_2^{s_2} x\right) \tag{3.3.2}$$

operatörleri sırasıyla (3.2.1) operatörünün parametrik genişlemeleridir. (3.3.1) ve (3.3.2) de $n - r = 0$ için çarpımın değeri 1 dir. Burada f_{r_1}, f_{r_2} ve f_{r_1,r_2}

$$f_{r_1} = f\left(\frac{[r_1]}{[n_1]}, y\right),$$

$$f_{r_2} = f\left(x, \frac{[r_2]}{[n_2]}\right)$$

ve

$$f_{r_1,r_2} = f\left(\frac{[r_1]}{[n_1]}, \frac{[r_2]}{[n_2]}\right)$$

şeklinde tanımlanır. Açıkça $q_1 = q_2 = 1$ ise (3.3.1) ve (3.3.2) eşitlikleri, klasik Bernstein operatörünün parametrik genişlemelerine dönüşür.

Lemma 3.3.1: (3.2.1) operatörünün parametrik genişlemeleri olan (3.3.1) ve (3.3.2) operatörleri $C\left(I^2\right)$ de lineer pozitif operatörlerdir.

Lemma 3.3.2: $f \in C\left(I^2\right)$ olsun. (3.3.1) operatörü her $y \in [0,1]$ için aşağıdaki interpolasyon özelliklerine sahiptir.

i) $B_{n_1}^x(f;0,y) = f(0,y)$

ii) $B_{n_1}^x(f;1,y) = f(1,y)$

İspat: i) $B_{n_1}^x(f;x,y) = \sum_{r_1=0}^{n_1} f_{r_1} \begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1} \prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} x\right)$

$$= f_0 \begin{bmatrix} n_1 \\ 0 \end{bmatrix} \prod_{s_1=0}^{n_1-1} \left(1 - q_1^{s_1} x\right) + f_1 \begin{bmatrix} n_1 \\ 1 \end{bmatrix} x \prod_{s_1=0}^{n_1-2} \left(1 - q_1^{s_1} x\right) + \cdots + f_n \begin{bmatrix} n_1 \\ n_1 \end{bmatrix} x^n$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte x yerine 0 ve f_i yerine $i = \overline{0,1,\cdots,n}$ için $f_i = f\left(\frac{[i]}{[n]}, y\right)$ yazılırsa

$$B_{n_1}^x(f;0,y) = f_0 \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = f\left(\frac{[0]}{[n]}, y\right) = f(0,y)$$

elde edilir.

$$\textbf{ii)}\ B_{n_1}^x(f;1,y) = f_n \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = f\left(\frac{[n]}{[n]}, y\right) = f(1,y)$$

dir

Lemma 3.3.3: $x \in [0,1]$ ve $f \in C\left(I^2\right)$ için (3.3.2) operatörü aşağıdaki interpolasyon özelliklerine sahiptir.

i) $B_{n_2}^{y}(f;x,0)=f(x,0)$

ii) $B_{n_2}^{y}(f;x,1)=f(x,1)$

İspatı, lemma (3.3.2) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 3.3.4: $B_{n_1}^{x}$ ve $B_{n_2}^{y}$ operatörleri $C\left(I^2\right)$ uzayı üzerinde değişmeli olsun. Çarpımları olan $B_{n_1,n_2}(f;x,y):C\left(I^2\right)\to C\left(I^2\right)$ şeklinde tanımlanan operatör $f\in C\left(I^2\right)$ ile birlikte

$$B_{n_1,n_2}(f;x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2} f_{r_1,r_2}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} x^{r_1}y^{r_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\,s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\,s_2}y\right) \quad (3.3.4)$$

lineer pozitif operatördür.

İspat: $B_{n_1}^{x}B_{n_2}^{y}(f;x,y)=B_{n_1}^{x}(B_{n_2}^{y}(f;x,y))$

$$=B_{n_1}^{x}\left(\sum_{r_2=0}^{n_2} f_{r_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\,s_2}y\right)\right)$$

$$=\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\,s_2}y\right)B_{n_1}^{x}(f_{r_2})$$

$$=\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\,s_2}y\right)\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1} f_{r_1,r_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\,s_1}x\right)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2} f_{r_1,r_2}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} x^{r_1}y^{r_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\,s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\,s_2}y\right)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.3.4) te B_{n_1,n_2} operatörünün pozitifliği ve lineerliğinden

$$B_{n_2}^{y}B_{n_1}^{x}(f;x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2} f_{r_1,r_2}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} x^{r_1}y^{r_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\,s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\,s_2}y\right)$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 3.3.5: İki değişkenli genelleştirilmiş Bernstein operatörü, f fonksiyonunu birim karenin dört köşesinde interpole eder. Yani

$$B_{n_1,n_2}(f;0,0)=f(0,0)$$

$$B_{n_1,n_2}(f;1,1)=f(1,1)$$

$$B_{n_1,n_2}(f;1,0)=f(1,0)$$

$$B_{n_1,n_2}(f;0,1)=f(0,1)$$

eşitlikleri sağlanır.

Lemma 3.3.6: $e_{i,j}$ fonksiyonu, $e_{ij}:I^2\to I^2$ olmak üzere $e_{i,j}(x,y)=x^i y^j$ $(0\le i+j\le 2,\, j,i\in\mathbb{Z})$ şeklinde tanımlanan bir test fonksiyonu olsun. $(x,y)\in I^2$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

a) $B_{n_1,n_2}(e_{00};x,y)=e_{00}(x,y)$

b) $B_{n_1,n_2}(e_{10};x,y)=e_{10}(x,y)$

c) $B_{n_1,n_2}(e_{01};x,y)=e_{01}(x,y)$

d) $B_{n_1,n_2}(e_{11};x,y)=e_{11}(x,y)$

e) $B_{n_1,n_2}(e_{20};x,y)=e_{20}(x,y)+\dfrac{x(1-x)}{[n_1]}$

f) $B_{n_1,n_2}(e_{02};x,y)=e_{02}(x,y)+\dfrac{y(1-y)}{[n_2]}$

Şimdi bu eşitliklerin bazılarını gösterelim.

İspat b) $B_{n_1,n_2}(e_{10};x,y)=e_{10}(x,y)$

$$B_{n_1,n_2}(f_{r_1,r_2};x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2} f_{r_1,r_2}\begin{bmatrix}n_1\\ r_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_2\\ r_2\end{bmatrix}x^{r_1}y^{r_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$B_{n_1,n_2}(e_{10};x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\frac{[r_1]}{[n_1]}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}r_2\\n_2\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=1}^{n_1}\frac{[n_1-1]!}{[n_1-r_1][r_1-1]!}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}r_2\\n_2\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=1}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1-1\\r_1-1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}r_2\\n_2\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

dır. Bu eşitlikte r yerine $r+1$ yazılırsa

$$B_{n_1,n_2}(e_{10};x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1-1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1+1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-2}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}r_2\\n_2\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=x\sum_{r_1=0}^{n_1-1}\begin{bmatrix}n_1-1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-2}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}r_2\\n_2\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=e_{10}(x,y)$$

elde edilir.

c) $B_{n_1,n_2}(e_{01};x,y)=e_{01}(x,y)$

$$B_{n_1,n_2}(e_{01};x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_2\\r_2\end{bmatrix}y^{r_2}\frac{[r_2]}{[n_2]}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\frac{[r_2]}{[n_2]}\begin{bmatrix}n_2\\r_2\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\frac{[r_2]}{[n_2]}\frac{[n_2]!}{[n_2-r_2]![r_2]!}y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=1}^{n_2}y^{r_2}\frac{[n_2-1]!}{[r_2-1]![n_2-r_2]!}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

dir. Burada r yerine $r+1$ yazılırsa

$$B_{n_1,n_2}(e_{01};x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=1}^{n_2}\begin{bmatrix}n_2-1\\r_2-1\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2-1}\begin{bmatrix} n_2-1 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2+1}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-2}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right) y\sum_{r_2=0}^{n_2-1}\begin{bmatrix} n_2-1 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-2}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$=e_{01}(x,y)$$

elde edilir.

e) $B_{n_1,n_2}(e_{20};x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\left(\frac{[r_1]}{[n_1]}\right)^2\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$

$$=\sum_{r_1=2}^{n_1}\frac{[r_1]\left([r_1]-1\right)}{\left([n_1]\right)^2}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$+\sum_{r_1=0}^{n_1}\frac{[r_1]}{\left([n_1]\right)^2}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=2}^{n_1}\frac{\left([r_1]-1\right)[n_1-1]!}{[n_1][r_1-1]!}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$+\sum_{r_1=0}^{n_1}\frac{[r_1]}{[n_1][n_1]}\frac{[n_1]!}{[n_1-r_1]![r_1]!}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=2}^{n_1}\frac{[r_1-1]q[n_1-1]!}{[n_1][r_1-1]!}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$+\sum_{r_1=0}^{n_1}x^{r_1}\frac{[n_1-1]!}{[r_1-1]![n_1][n_1-r_1]}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$=\sum_{r_1=2}^{n_1}\frac{q[n_1-1][n_1-2]!}{[n_1][r_1-2]!}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$+\frac{1}{n_1}\sum_{r_1=1}^{n_1}x^{r_1}\begin{bmatrix} n_1-1 \\ r_1-1 \end{bmatrix}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$=\frac{[n_1-1]}{[n_1]}\sum_{r_1=0}^{n_1-2}\begin{bmatrix} n_1-2 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1+2}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-3}\left(1-q_1^{\ s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{\ s_2}y\right)$$

$$+\frac{1}{[n_1]}\sum_{r_1=0}^{n_1-1}\begin{bmatrix} n_1-1 \\ r_1 \end{bmatrix} x^{r_1+1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-2}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix} y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\frac{[n_1]-1}{[n_1]}x^2+\frac{x}{[n_1]}$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{[n_1]}$$

bulunur.

f) (3.3.4) ten

$$B_{n_1,n_2}(e_{02};x,y)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2}\left(\frac{[r_2]}{[n_2]}\right)^2\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)$$

$$=\left[\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix} n_1 \\ r_1 \end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right]\left[\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix} n_2 \\ r_2 \end{bmatrix}\left(\frac{[r_2]}{[n_2]}\right)^2 y^{r_2}\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right]$$

$$=B_{n_1}(e_0,x)B_{n_2}(e_2,y)$$

dir. Buradaki B_{n_1} ve B_{n_2} genelleştirilmiş Bernstein operatörleri, G.M. Phillips tarafından tanıtılan operatörlerdir(22). ve $e_i : I \to I$, $e_i(x)=x^i\ (i=0,1,2)$ tek değişkenli test fonksiyonlarıdır. Phillips(22) den bu operatörler aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

Her $x,y\in I$ için $\quad B_{n_1}(e_0;x)=e_0(x)$, $B_{n_2}(e_2;y)=e_2(y)+\dfrac{y(1-y)}{[n_2]}$

dir. Bu iki eşitlik kullanılarak,

$$B_{n_1,n_2}(e_{02};x,y)=e_{02}(x,y)+\frac{y(1-y)}{[n_2]}$$

operatörü elde edilir.

Teorem 3.3.1: $q_1 = q_1(n_1),\ q_2 = q_2(n_2)$ ve $n_1, n_2 \to \infty$ için $q_1(n_1) \to 1$ olsun. O zaman $f \in C\left(I^2\right)$ için (3.3.4) te tanımlanan iki değişkenli genelleştirilmiş Bernstein polinomları dizisi I^2 üzerinde $f(x,y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat: q-tamsayısının tanımından ve hipotezden $n_1 \to \infty$ iken $q_1 = q_1(n_1) \to 1$ dir. Buradan $n_1 \to \infty$ ise $[n_1] \to \infty$ olup benzer şekilde $n_2 \to \infty$ için $[n_2] \to \infty$ olur. Burada Lemma 3.3.6 kullanılırsa $n_1, n_2 \to \infty$ iken I^2 de, $B_{n_1,n_2}(e_{ij}; x, y)$ polinomu e_{ij} ye düzgün yakınsar. İki değişkenli polinomlar için Korovkin test teoremi uygulanarak

$$B_{n_1,n_2}(f; x, y) \rightrightarrows f(x,y)$$

bulunur.

Teorem 3.3.2: I^2 de sınırlı bir $f : I^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\left\| f - B_{n_1,n_2}(f) \right\|_\infty \leq \frac{9}{4} w\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]}}, \frac{1}{\sqrt{[n_2]}} \right) \tag{3.3.5}$$

dir. Burada $\| \ \|_\infty$ düzgün normu ve w ise birinci mertebeden süreklilik modülünü göstermektedir.

İspat: $f : I^2 \to \mathbb{R}$ iki değişkenli sınırlı bir fonksiyon olsun. I^2 de tanımlı tek değişkenli sınırlı bütün fonksiyonların kümesini $\mathbb{R}^{I^2}$ ile gösterelim. O zaman birinci mertebeden süreklilik modülü

$$w : \mathbb{R}_+^2 \to [0,1]$$

dönüşüm yapan bir fonksiyondur. Her bir $f \in R^{I^2}$ ve her bir $\left(\delta_1, \delta_2\right) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$w\left(\delta_1, \delta_2\right) = \sup\left\{ \left| f(x,y) - f(x',y') \right| (x,y) \in I^2, (x',y') \in I^2, \left| x - x' \right| < \delta_1, \left| y - y' \right| < \delta_2 \right\} \tag{3.3.6}$$

dir. Süreklilik modülü monoton artan bir fonksiyondur. Yani

$(\delta_1,\delta_2)\in\mathbb{R}_+^2$, $(\delta'_1,\delta'_2)\in\mathbb{R}_+^2$ için

$$\delta_1<\delta_1' \text{ ve } \delta_2<\delta'_2 \Rightarrow w(\delta_1,\delta_2)\le w(\delta_1',\delta_2') \tag{3.3.7}$$

dir. Lemma 3.3.6 (a) dan

$$\left|B_{n_1,n_2}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$=\left|\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_2\\r_2\end{bmatrix}x^{r_1}y^{r_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\left[f\left(\frac{[r_1]}{[n_1]},\frac{[r_2]}{[n_2]}\right)-f(x,y)\right]\right|$$

$$\le\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_2=0}^{n_2}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_2\\r_2\end{bmatrix}x^{r_1}y^{r_2}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\prod_{s_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\left|f\left(\frac{[r_1]}{[n_1]},\frac{[r_2]}{[n_2]}\right)-f(x,y)\right|$$

dır. Süreklilik modülü artan olduğundan

$$\left|f\left(\frac{[r_1]}{[n_1]},\frac{[r_2]}{[n_2]}\right)-f(x,y)\right|\le w\left(\left|\frac{[r_1]}{[n_1]}-x\right|,\left|\frac{[r_2]}{[n_2]}-y\right|\right)$$

$$\le\left(\left|\frac{[r_1]}{[n_1]}-x\right|\sqrt{[n_1]}+1\right)\left(\left|\frac{[r_2]}{[n_2]}-y\right|\sqrt{[n_2]}+1\right)w\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]}}\right) \tag{3.3.8}$$

dir. (3.3.7) ve (3.3.8) den devam edilirse,

$$K=w\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]}}\right)\times\left(\sqrt{[n_1]}\sum_{r_1=0}^{n_1}\left|\frac{[r_1]}{[n_1]}-1\right|\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{r_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)+1\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{[n_2]}\sum_{r_2=0}^{n_2}\left|\frac{[r_2]}{[n_2]}-1\right|\begin{bmatrix}n_2\\r_2\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{r_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)+1\right)$$

için

$$\left|B_{n_1,n_2}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le K \tag{3.3.9}$$

olur. Schwarz eşitsizliği uygulanırsa, bir tanesi

$$\left(\sum_{r_1=0}^{n_1}\left(\frac{[r_1]}{[n_1]}-x\right)\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^2$$

$$=\left(\sum_{r_1=0}^{n_1}\left|\frac{[r_1]}{[n_1]}-x\right|\left(\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^{1/2}\left(\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\leq\left(\sum_{s_1=0}^{n_1}\left(\frac{[r_1]}{[n_1]}-x\right)^2\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)\left(\sum_{r_1=0}^{n_1}\begin{bmatrix}n_1\\r_1\end{bmatrix}x^{r_1}\prod_{s_1=0}^{n_1-r_1-1}\left(1-q_1^{s_1}x\right)\right)$$

$$=\left\{B_{n_1}(e_2;x)-2x\,B_{n_1}(e_1;x)+B_{n_1}(e_0;x)\right\}B_{n_1}(e_0;x)$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{[n_1]}-2x^2+x^2$$

$$=\frac{x(1-x)}{[n_1]}$$

$$\leq\frac{1}{4[n_1]} \tag{3.3.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\left(\sum_{r_2=0}^{n_2}\left(\frac{[r_2]}{[n_2]}-y\right)\begin{bmatrix}n_2\\r_2\end{bmatrix}y^{r_2}\prod_{r_2=0}^{n_2-r_2-1}\left(1-q_2^{s_2}y\right)\right)^2\leq\frac{1}{4[n_2]} \tag{3.3.11}$$

elde edilir. Buradan (3.3.9), (3.3.10) ve (3.3.11) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\left|B_{n_1,n_2}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq w\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]}}\right)\left(\sqrt{n_1}\,\frac{1}{2\sqrt{n_1}}+1\right)\left(\sqrt{n_2}\,\frac{1}{2\sqrt{n_2}}+1\right)$$

$$=\frac{9}{4}\,w\left(\frac{1}{\sqrt{[n_1]}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]}}\right) \tag{3.3.12}$$

bulunur. (3.3.12) den, supremum hesaplanarak (3.3.5) ile devam edilirse ispat tamamlanır.

Not: **i)** Eğer $q_1 = q_2 = 1$ ise (3.3.4) operatörü, ilk kez Stancu[18] tarafından incelenen iki değişkenli klasik Bernstein operatörüne dönüşür.

Bu durumda Teorem 3.3.1 ve 3.3.2.nin sonuçları, Stancu[18,19] nın iyi bilinen sonuçlarına uygundur.

ii) Eğer $q_1 = 1,\ q_2 \neq 1$ veya $q_2 = 1,\ q_1 \neq 1$ ise bir diğer ilginç Bernstein type operatörü meydana gelir. Bu operatörlerin yaklaşım özellikleri, iki değişkenli klasik Bernstein operatörünün özellikleri ile benzerdir.

KAYNAKLAR

1. G.M. Phillips, Interpolation and Approximation by Polynomials, Springer-Verlag, New York, 2003.

2. H. Hacısalihoğlu, A.Hacıyev, Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 1995.

3. P.J. Davis, Interpolation and Approximation, Dover, New York, 1976.

4. H.N. Mhaskar, D.V.Pai, Fundamentals of Approximation Theory, Alpha Science International Ltd., UK, 2000.

5. D.D. Stancu, On the Monotonicity of the Sequence Formed by The First Order Derivatives of the Bernstein Polynomials, Math.Zeitschr., **98,** 46 (1967).

6. G.M. Phillips, Bernstein Polynomials Based on q-Integers, Annals of Numerical Mathematics, **4**, 511 (1997).

7. H.Oruç and G.M.Phillips, A Generalization of The Bernstein Polynomials, Proc. Edin. Math. Soc., **42**, 403 (1999).

8. D. Barbasu, Some Generalized Bivariate Bernstein Operators, Mathematical Notes, **1**, 3 (2000).

9. D.D. Stancu, The Remainder of Certain Linear Approximation Formula in Two Variables, Journ. SIAM Numer. Anal. Ser. B, **1**, 137 (1964).

10. T. Popoviciu, Les Fonctions Convexes, Actualite's Sci. Ind., **992**, (1994).

11. W.B. Temple, Stieltjes Integral Representation of Convex Functions, Duke Math.J., **21**, 527 (1954).

12. I.J. Schoenberg, On Variation Diminishing Approximation Methods, On Numerical Approximation, ed. R.E.Langer, Madison, The University of Wisconsin Press, 1959.

13. O. Aramă, Proprietăti Privind Monotonia Sirului Polinoamelor de Interpolare ale lui S.N.Bernstein si Aplicarea lor la studiul Approximării Functiilor. Acad. R.P. Rom.Fil.Cluj, Studii Cerc. Mat., **8**, 195 (1957).

14. S.Ostrovska, q-Bernstein Polynomials and Their Iterates, J.Approx.Theory, **123**, 232 (2003).

15. G.G. Lorentz, Bernstein Polynomials, University of Toronto Pres., Toronto, 1953.

16. A. Il'inski, S.Ostrovska, Convergence Of Generalized Bernstein Polynomials, J.Approx. Theory, **116**, 100 (2002).

17. T.N.T. Goodman, H. Oruç, G.M. Phillips, Convexity and Generalized Brenstein Polynomials, Proc. Edinburg Math.Soc., **1,** 179 (1999).

18. D.D. Stancu, A New Class Of Uniform Approximating Polynomial Operators In Two and Several Variables, Proceed. of the Conference On Constructive Theory Of Functions, Budapest, 31 (1969).

19. D.D. Stancu, Approximation Properties af a Class of Linear Positive Operators, Mathematica, **15**, 33 (1970).

20. I.J. Schoenberg, On Polynomial Interpolation At The Points Of A Geometric Progression, Proc.Roy.Soc.Edin.,**90,** 195 (1981).

21. S.L. Lee, G.M. Phillips, Polynomial Interpolatin at Points af a Geometric Mesh on a Triangle, Proc. Roy. Soc. Edin., **108,** 75 (1988)

22. G.M.Phillips, On Generalized Bernstein Polynomials, Numerical Analysis, World Scientific, Singapore, 1996.