T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LEBESGUE İNTEGRALİ VE BAZI İSTATİSTİKSEL UYGULAMALARI

ALTAN TUNCEL

HAZİRAN 2007

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

Doç. Dr. Gülay BAYRAMOĞLU

…./…./…..

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Prof.Dr. Kerim KOCA

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Kerim KOCA ______________________

Doç.Dr. Hasan ERBAY ______________________

Yrd.Doç.Dr. Ali ARAL ______________________

ÖZET

LEBESGUE İNTEGRALİ VE BAZI İSTATİSTİKSEL UYGULAMALARI

TUNCEL, Altan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Kerim Koca

Haziran 2007, 95 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı ve kullanılan kaynaklar hakkında ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde gerekli temel kavramlar verilmiş, daha sonra Lebesgue integrali, Riemann integrali ve Lebesgue-Stieltjes integrali, İstatistikteki uygulamaları incelenmiştir. Dördüncü bölüm ise Tartışma ve Sonuç'a yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ölçü, Lebesgue Ölçüsü, Lebesgue İntegrali, Lebesgue-Stieltjes Ölçüsü, Lebesgue-Stieltjes İntegrali, Beklenen Değer

ABSTRACT

LEBESGUE INTEGRAL AND SOME APPLICATIONS TO STATISTICS

TUNCEL, Altan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M.Sc. Thesis

Supervisor : Prof. Dr. Kerim Koca

June 2007, 95 pages

This study consists of four chapters. In the first chapter, the goal of the study and detailed literature review is given. In the second chapter, definitions and basic concepts are given, then some applications of Lebesgue, Riemann and Lebesgue-Stieltjes integrals in statistics are analyzed. The last chapter is devoted to discussion and conclusion.

Key Words: Measure, Lebesgue Measure, Lebesgue Integral, Lebesgue-Stieltjes Measures , Lebesgue-Stieltjes Integral, Expectation Values

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan, beni bu konuda çalışmaya yönlendiren ve çalışmamın her safhasında yakın ilgisini gördüğüm danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA (Bölüm Başkanı, Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)'ya,

Bana her zaman verdiği desteklerden dolayı Sayın Yard.Doç.Dr. Ali ARAL (Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)'a

Çalışmalarım süresince bana gösterdikleri anlayış ve destekten dolayı Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'ndeki çalışma arkadaşlarım Öğr.Gör. Emel KIZILOK, Ar.Gör. Abdullah YILMAZ ve Ar.Gör Kübra ABA'ya

Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Bölüm Başkanı Sayın Yard.Doç.Dr. Sevgi YURT ÖNCEL'e

Teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Ölçü ve Lebesgue integrali kavramları uygulama alanı olarak en çok istatistikte kullanılmakla beraber Reel Analizin temel konularından biridir. Özellikle ölçü ve buna bağlı kavramların istatistik ile ilgisi 1933 yılında A.N. Kolmogorov tarafından ortaya konmuştur. Bilindiği gibi olasılık uzayı F özelliğinin sağlandığı (Ω, U, P) üçlüsüdür. Burada Ω evrensel küme, U Ω üzerinde bir σ-cebir ve P, Ω üzerinde bir olasılık ölçüsüdür. Olasılığın temel konuları reel analiz ve ölçü kavramlarıyla birleştirildiğinde bazı istatistiksel olaylar daha sade biçimde ortaya konmakta ve istatistiksel modeller yardımıyla daha iyi analiz edilmektedir. Örneğin son bölümde incelenen Fatou lemması sınırlı yakınsama ve monoton yakınsaklık teoremleri bu konuya ilişkin en tipik özelliklerdir. Bu konu "Araştırma Bulguları" alt başlığında detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Reel analizin konuları ile olasılık ve istatistik teorisinin konularını ilişkilendiren bol miktarda kitap ve makale bulmak mümkündür. Hatta 1970'li yıllardan sonra olasılık ve istatistiğin konuları topolojik kavramlar yardımıyla da açıklanmaya çalışılmıştır. Bu konuya ilişkin daha geniş bilgi için [4] nolu kaynağın son bölümüne bakılabilir.

1.1. Tezin Amacı

Bu tezin esas amacı ölçü ve Lebesgue integrali hakkında bilinen temel özellikleri incelemektir. Daha sonra bu temel özellik ve kurallardan yararlanarak olasılık ve istatistik teorisinde yeni sonuçlar ortaya koymaktır. Reel analizin Lebesgue ölçüsü ve integrali ile ilgili sonuçlarını, istatistiğin başka bir alanına uygulamayı araştırmak diğer bir amaçtır. Uygulamalı matematiğin problemlerinde genelleştirmeler yapılmak istendiğinde genellikle düşünülen ilk metod Riemann anlamındaki integralden Lebesgue anlamındaki integrale geçmek şeklindedir. Çünkü Lebesgue anlamındaki integral Riemann anlamındaki integralden daha geneldir ve Riemann anlamında mevcut olmayan bir integral Lebesgue anlamında mevcut olabilir. Riemann anlamındaki integralde fonksiyonun tanım aralığının veya tanım bölgesinin uygun şekilde parçalanması ve fonksiyonların bu parçalar üzerinde sınırlı değerler alması esas olduğu halde Lebesgue integralinde fonksiyonun tanım kümesinin bir kümeler sınıfı olması ve bu kümeler sınıfının σ-cebir olması gerekliliği öne çıkmaktadır. Ayrıca integrali alınacak fonksiyonun ölçülebilir bir fonksiyon olması da diğer bir koşuldur. Tanım bölgesi değişmediği sürece Riemann anlamındaki integralin sonucu fonksiyona bağlı olduğu halde Lebesgue anlamında integralde sonuç σ-cebir üzerinde tanımlanan ölçüye bağlıdır. Çünkü bir σ-cebir üzerinde birden fazla ölçü tanımlanabilir. Ayrıca Riemann anlamındaki integralde sonuç bölgenin parçalanış şeklinden bağımsız olduğu halde Lebesgue integralinde sonuç fonlsiyonun tanım kümesinin σ-cebir yapısına ve σ-cebir üzerinde tanılanan ölçüye bağlıdır.

Bu benzerlik ve farklılıklardan yararlanarak Riemann anlamında geçerli olmayan bazı problemin çözümlerini Lebesgue anlamında araştırmak yine bu tezin amaçları arasındadır.

Bu tezde verilen temel kavramlardan yararlanılarak araştırmaya yönelik yeni sonuçlar ortaya konulabilir. Örneğin bilinen çeşitli uzaylarda norm, metrik, ölçü, σ-cebir gibi kavramlar vererek Lebesgue anlamında integraller tanımlanabilir ve özellikleri karşılaştırmalı olarak incelenebilir.

1.2. Kaynak Özetleri

Öncelikle konuya M. Balcı'nın Reel Analiz kitabının incelenmesiyle başlanmıştır. Bu kitaptan σ-cebir, ölçü ve özellikleri incelendikten sonra R.B. Ash'in Reel Analysis and Probability ve M. Capinski ve E. Kopp'un Measure, Integral and Probability isimli kitaplardan ileri düzeyde ölçü ve Lebesgue integraline ilişkin kurallar incelenmiştir. S.V. Fomin ve A.N. Kolmogorovun Ölçüm, Lebesgue İntegrali ve Hilbert Uzayları adlı çeviri kitabından ise Riemann ve Lebesgue anlamındaki integraller karşılaştırmalı olarak ele alınmıştır. H.L. Royden'in Reel Analysis kitabından ise $\mathcal{L}_p$ uzayı ve bu uzaydaki norm özellikleri incelenerek bu uzaydaki Lebesgue integralinin sağladığı bazı bağıntılar öğrenilmiştir. Lebesgue integrali ve Lebesgue ölçüsü kavramlarının olasılık ve istatistik teorisine uygulaması ile ilgili kısım ise H. Körezlioğlu ve A. Hayfavi'nin Elements of Probability Theory adlı kitabından ve Lebesgue-Stieltjes integralinin özellikleri, istatistiğe uygulamaları için J.L. Dobb'un Probability and Statistics adlı makalesi incelenmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Küme Teorisinin Temel Kavramları

Tanım 2.1.1: $A \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in A$ için $x \geq a$ olacak şekilde bir a reel sayısı varsa A kümesi alttan sınırlıdır denir ve a sayısına da A kümesinin bir alt sınırı denir. Benzer olarak, A kümesinin her x elamanı için $x \leq b$ olacak şekilde bir b reel sayısı varsa A kümesi üstten sınırlıdır denir ve b sayısına da A kümesinin bir üst sınırı adı verilir. Alttan ve üstten sınırlı olan kümeye kısaca, sınırlı küme adı verilir. Bir küme için k bir üst sınır ise, k'dan büyük her sayı da bir üst sınırdır. Benzer olarak, m değeri A kümesinin bir alt sınırı ise m'den küçük her sayı A kümesinin bir alt sınırıdır. Bu durumda üstten sınırlı bir kümenin sonsuz çoklukta üst sınırı, alttan sınırlı bir kümenin sonsuz çoklukta alt sınırı vardır denilebilir.

Tanım 2.1.2: Üstten sınırlı bir A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir. Alttan sınırlı bir A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne de A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf A$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3: Bir A kümesinin en küçük sınırı A kümesinin bir elemanı ise bu elemana kümenin en büyük elemanı veya maksimum elemanı denir. Benzer olarak, A kümesinin en büyük alt sınırı A kümesine ait ise bu elemanına A kümesinin en küçük elemanı veya minimum elemanı adı verilir.

Tanım 2.1.4: X *ve* Y herhangi iki küme olsun. X kümesinin her bir elemanını Y

kümesinin bir ve yalnız bir elemanına karşılık getiren f kuralına X'den Y'ye bir fonksiyon denir ve

$$f : X \to Y$$

biçiminde gösterilir. X kümesine tanım kümesi, Y kümesine de değer kümesi denir.
$\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ ve $\mathrm{B} \subset \mathrm{Y}$ olmak üzere,

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$$

kümesine A' nın f altındaki görüntüsü denir.

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}$$

kümesine de B'nin f altındaki ters görüntüsü adı verilir. Eğer $f(X) = Y$ ise f fonksiyonu örtendir denir. $x_1, x_2 \in X$ olsun. $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna birebir fonksiyon adı verilir. Hem birebir hem de örten olan fonksiyona birebir örten fonksiyon denir.

Tanım 2.1.5: $\begin{array}{l} f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \to f(n) = S(n) \end{array}$, şeklindeki bir fonksiyona reel sayı dizisi denir ve $(S_n)_1^\infty = (S_1, ..., S_n, ...)$ şeklinde sıralı çokluk olarak gösterilir. $S_n \in \mathbb{R}$ sayısına dizinin genel terimi adı verilir.

Tanım 2.1.6: $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$M = \{ x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon \} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

aralığına a'nın $\varepsilon -$komşuluğu adı verilir.

Tanım 2.1.7: $(S_n)_1^\infty$ reel sayı dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0(\varepsilon)$ olduğunda

$|S_n - s| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı ve $s \in \mathbb{R}$ sayısı bulunabiliyorsa S'ye dizinin limitidir denir ve $\lim_{n\to\infty} S_n = s \; veya \; S_n \to s$ şeklinde yazılır. Limiti mevcut olan dizilere yakınsak, aksi halde ıraksaktır denir.

Tanım 2.1.8: Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $(x_n)_1^\infty$ dizisi üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu dizinin bir üst sınırı adı verilir. Üst sınırların en küçüğüne dizinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $\sup x_n$ ile gösterilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \ge m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa $(x_n)_1^\infty$ dizisi alttan sınırlıdır denir, m sayısına da bu dizinin bir alt sınırı adı verilir. Alt sınırların en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf x_n$ ile gösterilir. Bir dizi alttan ve üstten sınırlı ise bu diziye sınırlı dizi denir.

Tanım 2.1.9: $(x_n)_1^\infty$ reel sayıların bir dizisi olsun.

$$\lim\sup x_n = \inf_{\mathrm{m}\ge 1}\left(\sup_{n\ge m} x_n\right)$$

$$\lim\inf x_n = \sup_{\mathrm{m}\ge 1}\left(\inf_{n\ge m} x_n\right)$$

sayılarına sırasıyla, $(x_n)_1^\infty$ dizisinin üst limiti ve alt limiti denir.

Bu tanımı aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz.

Tanım 2.1.10: X bir küme $(A_n)_1^\infty$ dizisi de X kümesinin alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim\sup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right)$$

$$\lim\inf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right)$$

kümelerine sırası ile $(A_n)_1^{\infty}$ dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Eğer

$$\lim\sup A_n = \lim\inf A_n = A$$

ise $(A_n)_1^{\infty}$ dizisi yakınsak bir dizi ve limiti de A'dır denir.

Tanım 2.1.11: Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$ ise $(A_n)_1^{\infty}$ dizisi artan bir dizidir denir. Benzer olarak Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \supset A_{n+1}$ ise $(A_n)_1^{\infty}$ dizisi azalan bir dizidir denir. Eğer $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ ise $(A_n)_1^{\infty}$ dizisine ayrık dizi adı verilir.

Tanım 2.1.12: A ve B iki küme olsun. Eğer A kümesinden B kümesine birebir örten bir f fonksiyonu varsa A ile B kümeleri birbirine denktir denir ve $A \approx B$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: Bir A kümesi doğal sayılar kümesi ile birebir eşlenebiliyorsa A kümesine sayılabilir küme denir.

2.2 Küme Sınıfları

Tanım 2.2.1: $X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere X' in alt kümelerinden oluşan bir kümeye sınıf denir. X, n elemanlı bir küme ise X kümesinin alt kümelerinin sayısı 2^n olur.

Tanım 2.2.2: Bir X kümesinin boş olmayan herhangi bir sınıfı U olsun. Eğer;

1. $\forall\ A, B \in U$ için $A \setminus B \in U$

2. $\forall\ A, B \in U$ için $A \cup B \in U$

oluyorsa U sınıfına bir halka denir.

Tanım 2.2.3: Bir X kümesinin boş olmayan herhangi bir sınıfı U olsun. Eğer;

1. $\forall\ A, B \in U$ için $A \setminus B \in U$

2. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A_i \in U$ olduğunda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U$

oluyorsa U sınıfına X üzerinde $\sigma -$halka adı verilir.

Tanım 2.2.4: $X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere, X kümesinin alt kümelerinin bir sınıfı U olsun. Eğer;

1. $X \in U$,

2. $\forall\ A \in U$ için $A^t = X \setminus A \in U$,

3 $i = 1, 2, ..., n$ için $A_i \in U$ olduğunda $\bigcup_{i=1}^{n} A_n \in U$

oluyor ise U sınıfına X üzerinde bir cebir denir.

Tanım 2.2.5: $X \neq \varnothing$ bir küme olmak üzere X 'in alt kümelerinin bir sınıfı U olsun.

1. $X \in U$

2. Her $A \in U$ için $A^t = X \setminus A \in U$

3. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A_i \in U$ olduğunda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in U$ oluyor ise U sınıfına X üzerinde bir $\sigma -$cebir denir.

Uyarı 2.2.1: Her $\sigma -$cebir bir cebirdir, fakat bunun tersi doğru değildir.

Teorem 2.2.1: U sınıfı X üzerinde bir cebir ve $(A_n)_1^{\infty}$, U sınıfı üzerinde herhangi bir dizi ise U sınıfında her $n \neq m$ için $B_n \cap B_m = \varnothing$ olacak şekilde bir $\left(B_n\right)_1^\infty$ dizisi vardır ve

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

dır.

İspat: $\left(A_n\right)_1^\infty$ dizisi yardımıyla terimleri

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2, ..., B_n = A_n / \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = A_n \cap A_1^t \cap A_2^t \cap ... \cap A_{n-1}^t$$

olan $\left(B_n\right)_1^\infty$ dizisi tanımlayalım U cebir olduğundan her n için,

$$B_n = A_n \cap A_1^t \cap A_2^t \cap ... \cap A_{n-1}^t \in U$$

olur. $\left(B_n\right)_1^\infty$ dizisi terimleri tanımından; her n için,

$$B_n \subset A_n$$

dır. $\left(B_n\right)_1^\infty$ dizisindeki B_m ve B_n terimleri $m < n$ olmak üzere;

$$B_n = A_n \cap A_1^t \cap A_2^t \cap ... \cap A_m^t \cap ... \cap A_{n-1}^t$$
$$B_m = A_m \cap A_1^t \cap A_2^t \cap ... \cap A_{m-1}^t$$

olarak yazabilir.Her zaman $B_m \subset A_m$ olacağından $\left(B_m \cap B_n\right) \subset \left(A_m \cap B_n\right)$ olur. Böylece

$$\left(B_n \cap B_m\right) = A_n \cap A_1^t \cap A_2^t \cap ... \cap A_m^t \cap ... \cap A_{n-1}^t$$
$$\left(B_m \cap B_n\right) \subset \varnothing$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$\left(B_m \cap B_n\right) = \varnothing$$

dır. O halde $\left(B_n\right)_1^\infty$ ayrık bir dizidir. Her n için $B_n \subset A_n$ olduğundan;

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{2.1}$$

olacaktır. $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ alalım. O halde $\exists\ n$ için $y \in A_n$'dir. $p = \min\{n : y \in A_p\}$ olarak tanımlanırsa $y \in A_p$ olacaktır. Bu durumda;

$$B_p = A_p \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \ldots \cap A_{p-1}^t = A_p \cap \left(\bigcup_{n=1}^{p-1} A_n \right)^t$$

olup p elemanın tanımından $y \notin \bigcup_{n=1}^{p-1} A_n$ dır. O halde;

$$y \in \left(\bigcup_{n=1}^{p-1} A_n \right)^t$$

'dır. $y \in A_p$ ve $y \in \left(\bigcup_{n=1}^{p-1} A_n \right)^t$ olduğundan $y \in B_p$ olacaktır. Böylece $y \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)$ elde edilir. Böylece;

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{2.2}$$

(2.1) ve (2.2) ifadelerinden;

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.2: Herhangi bir X kümesinde U_1 ve U_2 sınıfları $\sigma-$cebir ise $U_1 \cap U_2$ $\sigma-$cebirdir.

İspat: $U_1 \cap U_2$ 'nin $\sigma-$cebir koşullarını sağladığını gösterelim.

1. $X \in U_1$ ve $X \in U_2 \Rightarrow X \in U_1 \cap U_2$;

2. $A \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow A \in U_1$ ve $A \in U_2$ ise $A^t \in U_1$ ve $A^t \in U_2 \Rightarrow A^t \in U_1 \cap U_2$ olur.

3. $(A_n)_1^\infty$ $U_1 \cap U_2$'da bir dizi olsun $A_n \in U_1$ ve $A_n \in U_2 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in U_1$ ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in U_2$

dir. O halde $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in U_1 \cap U_2$ olup gerekli üç koşul sağlandığı için $U_1 \cap U_2$ $\sigma-$cebirdir .

Teorem 2.2.3: U sınıfı X üzerinde bir $\sigma-$cebir olsun. Eğer $i = 1, 2, ...$ için $A_i \in U$ ise

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in U$ $\sigma-$cebirdir.

İspat: $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in U$ ve U bir $\sigma-$cebir olsun. Bu durumda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in U$ olur $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

birleşimini de $i>n$ için $A_i = \varnothing$ alınabilir. Böylece

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup ... = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U$$

olur. Diğer taraftan $A_i \in U$ için $A_i^t \in U$ dır ve U $\sigma-$cebir olduğundan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^t \in U$$

dır. Böylece,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^t = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^t \in U \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in U$$

olur.

Tanım 2.2.6: X ' in bütün alt kümelerinin sınıfını $P(X)$ ile gösterelim. $P(X)$ in X üzerinde bir $\sigma-$cebir olduğu kolayca gösterilebilir. Bir U sınıfını kapsayan

$\sigma-$cebirlerin en küçüğüne U sınıfının ürettiği (doğurduğu) $\sigma-$cebir denir ve $\sigma(U)$ ile gösterilir.

U sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin kümesi boş değildir. Çünkü en azından kuvvet kümesi $P(X)$ U sınıfını kapsayan bir $\sigma-$cebirdir. U sınıfını kapsayan tüm $\sigma-$cebirlerin kesişimleri de bir $\sigma-$cebir olduğundan U sınıfını kapsayan en küçük bir $\sigma-$cebir vardır.

Tanım 2.2.7: U_1 ve U_2 sınıfı X üzerinde herhangi iki küme sınıfı olmak üzere $U_1 \subset U_2$ ise U_1 sınıfı U_2 sınıfından daha küçüktür denir.

Tanım 2.2.8: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ kümesine genişletilmiş reel sayılar kümesi denir.

2.3 Borel Kümeleri

Şimdi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini ve bunun alt aralıklarını göz önüne alalım. Kapalı kümelerin herhangi bir sınıfının kesişiminin kapalı ve kapalı kümelerin herhangi bir sonlu sınıfının birleşiminin kapalı olmasına karşın, kapalı kümelerin sayılabilir bir sınıfının birleşiminin kapalı olması gerekmemektedir. Örnek olarak rasyonel sayılar kümesi ele alındığında bu küme her biri yalnızca bir tek sayı içeren kapalı kümelerin sayılabilir bir sınıfının birleşimidir. Ancak birleşim kümesi açıktır. Kapalı kümelerin bir $\sigma-$cebiri ile ilgilenildiğinde, açık ve kapalı kümelerden daha genel olan bazı küme tiplerini de ele almak gerekmektedir.

Tanım 2.3.1: $\mathbb{R}$ ’de açık aralıkların sınıfının doğurduğu minimal $\sigma-$cebirene Borel

$\sigma-$cebiri denir ve $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Borel $\sigma-$cebirinin her elemanına Borel kümesi denir.

Teorem 2.3.1: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel cebiri aşağıdaki sınıflar tarafından üretilebilir:

1. $\mathbb{R}$ **'**nin tüm kapalı alt aralıkların sınıfı $[a,b]$,

2. $\mathbb{R}$ **'**deki $(-\infty,b]$ biçimindeki aralıkların sınıfı,

3. $\mathbb{R}$ **'**deki $(a,b]$ biçimdeki aralıkların sınıfı,

İspat: $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ ve $\mathcal{B}_3$ (1), (2) ve (3) şıklarında belirtilen sınıfların doğurduğu $\sigma-$cebirini göstermek üzere,

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel cebiri $\mathbb{R}$ 'nin tüm açık alt kümelerini kapsadığından ve tümleme altında kapalı olduğundan $\mathbb{R}$ 'nin tüm kapalı alt kümelerini de kapsar. Kapalı alt kümelerinin doğurduğu $\mathcal{B}_1$ olduğundan $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ olduğu açıktır.

2. $(-\infty,b]$ biçimindeki kümeler zaten kapalı olduğundan $\mathcal{B}_1$ sınıfına aittir. Dolayısıyla $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ 'dır. $(a,b]=(-\infty,b]\cap(-\infty,a]^t$ şeklinde yazabileceğinden $(a,b]$ tipindeki yarı açık aralıklar $\mathcal{B}_2$ ye aittir. Bundan dolayı $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$ olduğu açıktır. Buna göre ;

$$\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \qquad (2.3)$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a,b-\frac{1}{n}\right)$$

yazılabileceğinden $\mathcal{B}_3$, $\mathbb{R}$ 'deki tüm açık aralıkları kapsar. Bu durumda

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_3 \tag{2.4}$$

olur (2.3) ve (2.4)'den $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bulunur.

2.4. Ölçü

Tanım 2.4.1: Bir küme sınıfındaki her bir kümeyi, bir genişletilmiş reel sayı ile eşleyen fonksiyona küme fonksiyonu denir.

Örneğin her bir aralığı, aralığın uzunluğuna karşılık getiren bir fonksiyon küme fonksiyonudur. Bu fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlar**:**

1. $\{I\}$**,** ayrık aralıkların sayılabilir sınıfı olsun.Yani her $n \neq m$ için $I_n \cap I_m = \varnothing$ ise**;**

$$\ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \ell(I_1) + \ell(I_2) + \ell(I_3) + \dots,$$

2. $\ell(\varnothing) = 0$**.**

Sonuç olarak reel sayıların her A açık kümesi, ayrık ve açık aralıkların sayılabilir birleşimi şeklinde ifade edilebildiğinden A açık kümesinin uzunluğu

$$\ell(A) = \ell(I_1) + \ell(I_2) + \ell(I_3) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$$

olur. Burada;

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ ve her } n \neq m \text{ için } I_n \cap I_m = \varnothing$$

dir. Bilindiği gibi, bir I aralığının $\ell(I)$ uzunluğu aralığın uç noktalarının farkı olarak tanımlanır. Uzunluk söz konusu olduğu zaman, tanım bölgesi bütün aralıkların sınıfı olarak alınabilir. Uzunluk kavramının aralıklardan daha geniş kümelere genişletilmesinin düşünülmesi doğaldır. Bu düşünceyi gerçekleştirmek amacıyla, örneğin bir açık kümenin uzunluğunu o açık kümeyi oluşturan açık aralıkların uzunlukları toplamı olarak yorumlanabileceği gösterilmişti.

Tanım 2.4.2: U sınıfı, X üzerinde bir $\sigma-$cebir olsun. Bu takdirde (X,U) ikilisine bir ölçülebilir uzay; U sınıfının her bir elamanına da ölçülebilir küme denir.

Tanım 2.4.3: (X,U) ölçülebilir uzay olsun. Eğer $\mu : U \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa μ fonksiyonuna U üzerinde bir ölçüdür denir.

1. $\mu(\varnothing)=0$,

2. $\forall\ A\in U$ için $\mu(A)\geq 0$,

3. $\forall\ i\in I$ için $A_i\in U$ ve $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$ olmak üzere $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$ dır.

Burada I herhangi bir indis kümesidir. 3 özelliğine ölçümün sayılabilir toplamsallık özelliği denir.

Tanım 2.4.4: (X,U,μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir. Özel olarak $\mu(X)=1$ ise μ ölçüsüne bir olasılık ölçüsü denir.

Teorem 2.4.1: μ, U $\sigma-$cebirinde tanımlı sayılabilir toplamsal bir ölçü olsun. $(E_n)_1^{\infty}$ U $\sigma-$cebirinde herhangi bir dizi olmak üzere;

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

olur .

İspat: Teorem 2.2.1 ‘de U $\sigma-$cebirinde bir $(B_n)_1^\infty$ ayrık dizisinin var olduğu ifade edilmişti. Yani;

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

olup, her n için $B_m \subset E_n$ olduğu açıktır. O halde her n için $\mu(B_n) \le \mu(E_n)$ dır.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

olduğundan,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

ve (B_n) ayrık bir dizi olduğundan,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$$

dır. O halde;

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 2.4.2: (Ölçümün Monotonluk Özelliği) μ, U $\sigma-$cebirinde tanımlı sayılabilir toplamsal bir ölçü olsun. $A, B \in U$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \le \mu(B)$ olur.

İspat: $A \subset B$ ise $B = A \cup (B \setminus A)$ ve $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ olduğundan

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

yazılabilir. Buradan $\mu(B \setminus A) \ge 0$ olduğundan $\mu(A) \le \mu(B)$ bulunur.

2.5. Dış Ölçü ve Lebesgue Ölçüsü

Bu bölümde uzunluk kavramını aralıklardan daha karmaşık kümeler için tanımlayacağız. Örneğin bir açık kümenin uzunluğunu, bu kümeyi oluşturan açık, ayrık aralıkların uzunlukları toplamı olarak tanımlayacağız.

Acaba $\mathbb{R}$ 'nin alt kümelerinin $\mathfrak{M}$ sınıfı üzerinde tanımlı olan

1. λ, $\mathbb{R}$ 'nin her bir E alt kümesi üzerinde tanımlı olmak üzere $\mathfrak{M} = P(\mathbb{R})$ dir.

2. Her bir I aralığı için $\lambda(I) = l(I)$ dır.

3. Eğer $(E_n)_1^\infty$ ayrık bir dizi ve λ bu dizi üzerinde tanımlı ise $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$

4. λ fonksiyonu ötelemeye göre değişmezdir, yani $y \in \mathbb{R}$ için;

$$E + y = \{x + y : x \in E\}$$

olmak üzere $\lambda(E + y) = \lambda(E)$

özelliklerini sağlayan bir λ fonksiyonunun bulunup bulunmayacağını araştıralım.

Bu dört özelliği sağlayan bir küme fonksiyonu tanımlamak mümkün değildir. Bu nedenle λ fonksiyonunu $P(\mathbb{R})$ üzerinde değilde daha dar bir $\sigma-$cebiri üzerinde tanımlayalım. Yani $\mathfrak{M}$ olarak $P(\mathbb{R})$ kuvvet kümesi değil, üzerinde λ fonksiyonunu tanımlayabileceğimiz uygun bir $\sigma-$cebirini alacağız.

Tanım 2.5.1: X bir küme, $P(X)$, X ' in tüm alt kümelerinin kümesi olsun. Eğer $\mu^* : P(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$,

2. Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$,

3. $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

4. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ olduğunda $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=}^{\infty} \mu^*(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçü denir.

Tanım 2.5.2: $A \subset \mathbb{R}$ kümesini göz önüne alalım. Elemanları A kümesini örten aralıklar sınıfının her seçimi için, sınıfı oluşturan aralıkların toplamı olan kümenin en büyük alt sınırına A kümesinin Lebesgue dış ölçüsü denir ve $\lambda^*(A)$ ile gösterilir.

Böylece tanımı daha açık matematiksel sembollerle ifade etmek istersek

$$Z_A = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \forall\, n \text{ için } I_n = (a_n, b_n) \text{ ve } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$$

olmak üzere

$$\lambda^*(A) = \inf Z_A$$

biçiminde tanımlanan λ^* fonksiyonu bir dış ölçüdür. Bu dış ölçü Lebesgue dış ölçüsüdür ve dış ölçümün özelliklerini sağlar. Bir μ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $A \subset X$ kümeler sınıfını $\mathfrak{M}(X, \mu^*)$ ile gösterelim. λ^* Lebesgue dış ölçüsüne göre ölçülebilen, $\mathbb{R}$ ' nin alt kümelerinin sınıfı kısaca $\mathfrak{M}$ ile gösterelim ve $\mathfrak{M}$ ' nin $\sigma -$cebir özelliklerini de sağladığı açıktır. Lebesgue dış ölçüsü olan λ^*'ın hem $\mathfrak{M}(\mathbb{R}, \mu^*)$ sınıfına hem de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlamasına Lebesgue Ölçüsü denir, λ ile gösterilir. Bu iki ifadeyi birbirinden ayırmak gerektiğinde, üzerinde Lebesgue ölçüsünün tanımlandığı sınıf belirtilir. Yani $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ üzerinde Lebesgue ölçüsü veya $\mathfrak{M}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü gibi.

Teorem 2.5.1: (Dış ölçümün alt toplamsallık özelliği) $\{A_k\}$ reel sayı kümelerinin sayılabilir bir sınıfı ise

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

dır.

İspat: En az bir A_n için $\mu^*(A_n) = \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \infty$ olacağından teorem doğrudur.

Her n için $\mu^*(A_n) < \infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde μ^* tanımından bir $\{I_{n,i}\}$ sınıfı bulunabilir. Bu sınıf için;

$$A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i} \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

sağlanır. Burada $l(I_n)$, I_n aralığın boyudur. Böylece her bir A_n için elde edilen $\{I_{n,i}\}_i$ sınıfının birleşimi olan $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i}$ sınıfı sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimi olduğu için sayılabilirdir. Ayrıca her n için $A_n \subset \{I_{n,i}\}$ olduğundan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} l\{I_{n,i}\}$$

dır. O halde;

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{n,i}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{n,i})$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n)\right)+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ olması nedeniyle

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n)\right)+\varepsilon$$

bulunur. Bu sonuç her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$$

elde edilir.

Teorem 2.5.2: $A \subset \mathbb{R}$ kümesi sayılabilir küme ise $\mu^*(A)=0$ 'dır.

İspat: A sayılabilir olduğundan $A=\bigcup_{a_n\in A}\{a_n\}$ $n=1,2,...$ yazılabilir. $\varepsilon > 0$ verildiğinde her n için $I_n=\left(a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},a_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$ aralıklar sistemini göz önüne alalım. I_n kümesinin tanımından açıkça görüleceği gibi $\{I_n\}$ topluluğu A kümesinin bir örtüsüdür. Yani $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ olup $\mu^*(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$ ve $\mu^*(A)\leq\varepsilon$ ifadesi her $\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan $\mu^*(A)=0$ bulunur.

Sonuç 2.5.1 : A kümesi sayılabilirse $\mu^*(A)=0.$

Teorem 2.5.3: I herhangi bir sonlu aralık olsun. O zaman $\mu^*(I)\le l(I)$ 'dır.

İspat:

1. Eğer $I=(a,b)\Rightarrow I\subset(a,b)\Rightarrow \mu^*(I)\le(b-a)=l(I)$

2. Eğer $I=[a,b]$ ise bu durumda her $\varepsilon>0$ için $I\subset(a-\varepsilon,b-\varepsilon)$ olacaktır. Bu durumda $\mu^*(I)\le(b+\varepsilon-(a-\varepsilon))=b-a+2\varepsilon=l(I)+2\varepsilon$ ve ε keyfi bir sabit olduğu için $\varepsilon>0$ için $\mu^*(I)\le l(I)$ bulunur.

3. Eğer $I=(a,b]$ ise bu durumda $I\subset(a,b+\varepsilon)$ olacağı açıktır.

4. Eğer $I=[a,b)$ ise bu durumda $I\subset(a-\varepsilon,b)$ olup buradan $\mu^*(\varnothing)\le(a-a)=0$ olur.

Teorem 2.5.4: Bir aralığın dış ölçümü aralığın uzunluğuna eşittir. Yani, $\mu^*(I)=\ell(I)$'dır.

İspat: Teorem öncelikle $I=[a,b]$ kapalı aralığı için ispatlayalım.Her $\varepsilon>0$ için $[a,b]\subset(a-\varepsilon,b-\varepsilon)$ yazabiliriz. Dış ölçümün tanımından hareketle $\mu^*[a,b]=\ell(a-\varepsilon,b+\varepsilon)=b-a+2\varepsilon$ olup her $\varepsilon>0$ için bu ifade doğru olduğundan

$$\mu^*[a,b]\le b-a \tag{2.5}$$

bulunur.

$\{I_n\}$ açık aralıkların sayılabilir topluluğu $[a,b]$ aralığının bir örtüsü olsun. Böylece, $[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$ olur. Ayrıca, $[a,b]\le\ell\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k)$ olup buradan

$$b-a \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

yazabiliriz. $[a,b]$ yi örten $\{I_k\}$ açık aralıklar topluluğunun sonlu bir alt topluluğu

$$[b-a] \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$$

olacak şekilde bulunabilir. O halde en az bir k için $a \in I_k$ olacaktır. Bu özelliklerin sağlandığı açık aralığı (a_1, b_1) ile gösterelim. Yani $a_1 < a < b_1$ olur. $b_1 \leq b$ ise $b_1 \in [a,b]$ olacağı açıktır. $\{I_k\}$, $[a,b]$ kapalı aralığının sonlu açık aralıklar örtüsü olduğundan en az bir (a_2, b_2) için $b_1 \in (a_2, b_2)$ yani $a_2 < b_1 < b_2$ olur. Eğer $b_2 < b$ ise $b_2 \in (a_3, b_3)$ olacak şekilde bir I_k vardır. Bu şekilde devam edildiğinde $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ topluluğundan $a_i < b_{i-1} < b_i$ olacak şekilde sonlu bir $(a_1,b_1),(a_2,b_2),...,(a_m,b_m)$ aralıklar topluluğu elde edilir. Bu şekilde bir dizi oluşturmak için , $a_m < b < b_m$ olmalıdır. Böylece;

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq \sum_{i=1}^{m} \ell(a_i, b_i) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + ... + (b_m - a_m)$$

ya da;

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq b_m + (b_{m-1} - a_m) + ... + (b_1 - a_2) - a_1$$

olup her i için $a_i < b_{i-1}$ elde edilir. Eğer $b_{i-1} - a_i > 0$ terimleri toplamda ihmal edilirse $\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq b_m - a_1$ bulunur. Oysa $b_m > b$ ve $a_1 < a$ olduğundan $b_m - a_1 > b - a$ olacağı için $\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq b - a$ olur. Diğer taraftan; $\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)$ dır. O halde

$\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k)>b-a$ ifadesi $[a,b]$ aralığının her $\{I_k\}$ açık aralıklar örtüsü için doğru olduğundan $\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\ell_k\right\}$ için de her zaman doğru olacaktır. Yani;

$$\mu^*[a,b]>b-a \tag{2.6}$$

dır. Böylece (2.5) ve (2.6) ifadelerinden $\mu^*[a,b]=b-a=l[a,b]$ bulunur.

2.6. Ölçülebilir Kümeler

Tanım 2.6.1: Her $A\subset\mathbb{R}$ kümesi için; $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^t)$ eşitliği gerçekleniyorsa, $E\subset\mathbb{R}$ ve $E^t=\mathbb{R}\setminus E$ olmak üzere E kümesine (Lebesgue) ölçülebilir küme ya da μ^*'ye göre ölçülebilir küme denir.

Her zaman $A=(A\cap E)+(A\cap E^t)$ olduğundan dış ölçümün alt toplamsallık özelliğinden $\mu^*(A)\le\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^t)$ eşitsizliği daima sağlanır. O halde E kümesinin ölçülebilir küme olması için her bir $A\subset\mathbb{R}$ kümesi için $\mu^*(A)\ge\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^t)$ koşulunun sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

Ölçülebilir küme tanımı, E ve E^t kümelerine göre simetrik olduğundan E kümesi ölçülebilir ise E^t kümesi de ölçülebilirdir. Ayrıca E_1 ve E_2 ölçülebilir küme ise $E_1\setminus E_2=E_1\cap E_2^t$ kümesi de tanım gereği ölçülebilir kümelerdir. Örneğin $E=\varnothing$, $A\subset\mathbb{R}$ için; $\mu^*(A)\le\mu^*(A\cap\varnothing)+\mu^*(A\cap\mathbb{R})$ olduğundan $\varnothing$ ve bütün reel sayıların $\mathbb{R}$ kümesi ölçülebilirdir.

Teorem 2.6.1: $\mu^*(E)=0$ ise E kümesi ölçülebilirdir.

İspat: $A\subset\mathbb{R}$ herhangi bir alt küme olsun. Bu durumda $(A\cap E)\subset E$ olacağından $\mu^*(A\cap E)\le\mu^*(E)=0$'dır. $\mu^*(A\cap E)<0$ olamayacağı için ve $\mu^*(A\cap E)=0$ ve aynı zamanda $A\supset(A\cap E^t)$ olduğundan $\mu^*(A)\ge\mu^*(A\cap E^t)$ ya da $\mu^*(A)\ge\mu^*(A\cap E^t)+\mu^*(A\cap E)$ olduğundan E kümesi ölçülebilirdir.

Teorem 2.6.2: E_1 ve E_2 ölçülebilir kümeler ise $E_1\cup E_2$ kümesi de ölçülebilirdir.

İspat: A kümesi, $A\subset\mathbb{R}$ olmak üzere herhangi bir küme olsun. E_1 ölçülebilir küme olduğundan; $\mu^*(A)\ge\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^t)$ eşitsizliği sağlanır. $(A\cap E^t)\subset\mathbb{R}$ ve E_2 ölçülebilir küme olduğundan, ölçülebilir küme tanımından

$$\mu^*(A\cap E^t)=\mu^*((A\cap E_1^t)\cap E_2)+\mu^*((A\cap E_1^t)\cap E_2^t)$$

eşitliği her zaman yazılabilir. $\mu^*(A\cap E^t)$ yerine yazıldığında

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*((A\cap E_1^t)\cap E_2)+\mu^*((A\cap E_1^t)\cap E_2^t)$$

olacaktır. Teorem 2.4.1'deki dış ölçünün alt toplamsallık özelliği kullanılarak

$$\mu^*\left[(A\cap E_1)\cup((A\cap E_1^t)\cap E_2)\right]\le\mu^*(A\cap E_1)+\mu^*\left[(A\cap E_1^t)\cap E_2\right]$$

yazılabilir.Buradan

$$\mu^*(A)\ge\mu^*\left[(A\cap E_1)\cup((A\cap E_1^t)\cap E_2)\right]+\mu^*\left[(A\cap E_1^t)\cap E_2\right],$$

$$\ge\mu^*\left[(A\cap E_1)\cup(A\cap(E_1^t\cap E_2))\right]+\mu^*\left[(A\cap(E_1\cup E_2)^t)\right],$$

$$\geq \mu^*\left[A\cap\left(E_1\cup\left(E_1^t\cap E_2\right)\right)\right]+\mu^*\left[\left(A\cap\left(E_1\cup E_2\right)^t\right)\right],$$

$$\geq \mu^*\left[A\cap\left(E_1\cup E_1^t\right)\cap\left(E_1\cup E_2\right)\right]+\mu^*\left[\left(A\cap\left(E_1\cup E_2\right)^t\right)\right],$$

$$\geq \mu^*\left[A\cap\left(E_1\cup E_2\right)\right]+\mu^*\left[\left(A\cap\left(E_1\cup E_2\right)^t\right)\right],$$

olduğundan $E_1\cup E_2$ kümesinin ölçülebilir kümedir.

Benzer şekilde $E_1\cap E_2$ kümesinin de ölçülebilir olduğu gösterilebilir.

Teorem 2.6.3: $A\subset\mathbb{R}$ herhangi bir küme olmak üzere $E_1, E_2, \cdots, E_n$ ölçülebilir kümelerin sonlu bir dizisi için $\mu^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\mu^*\left(A\cap E_i\right)$ dır.

İspat: Teoremin ispatını n üzerinden Tümevarım metodunu kullanarak yapalım. $n=1$ için teoremin doğruluğu açıktır. Şimdi $n-1$ tane E_i kümesinin bulunması halinde teoremin doğru olduğunu varsayarsak, E_i 'ler ayrık kümeler olduğu için

$$\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right]\cap E_n=\left(A\cap E_n\right),$$

$$\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right]\cap E_n^t=A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i\right]$$

yazılabilir. E_n kümelerinin her biri ölçülebilir olduğundan

$$\mu^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right]=\mu^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\cap E_n\right]+\mu^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\cap E_n^t\right]$$

$$=\mu^*\left(A\cap E_n\right)+\mu^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i\right)\right]$$

olup teoremin $n-1$ küme için doğru olduğu varsayıldığından

$$\mu^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right]=\mu^*\left(A\cap E_n\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\mu^*\left(A\cap E_i\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mu^*\left(A\cap E_i\right)$$

elde edilir.

Sonuç 2.6.1: (Sonlu Toplamsallık) E_n ölçülebilir kümelerin sonlu ayrık bir dizisi ise;

$$\mu^*\left[A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\mu^*\left(A\cap E_i\right)$$

dır.

Teorem 2.6.4: $E_1, E_2, \cdots, E_n$ ölçülebilir kümeler olmak üzere bu kümeler içinden seçilen herhangi bir küme topluluğunun sonlu birleşimleri ve kesişimleri de ölçülebilirdir.

İspat: Önce $\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ kümesinin ölçülebilir bir küme olduğunu gösterelim. E_1 ve E_2 ölçülebilir kümeler olduğu için Teorem 2.6.2'den $E_1\cup E_2$ kümesi ölçülebilirdir. Aynı nedenden dolayı $\left(E_1\cup E_2\right)\cup E_3$ kümesi de ölçülebilirdir. Böyle devam ederse verilen birleşim kümesinin ölçülebilir olduğu görülür. Şimdi de $\bigcap_{i=1}^{n}E_i$ sonlu kesişim kümesinin ölçülebilir küme olduğunu gösterelim. $\bigcap_{i=1}^{n}E_i=\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i^t\right)^t$ olup sonlu birleşimler ölçülebilir olduğundan sonlu keşişimler de ölçülebilir kümedir.

Teorem 2.6.5: Ölçülebilir kümelerin $\mathfrak{M}$ sınıfı bir $\sigma-$cebirdir (Lebesgue cebiri). Yani ölçülebilir bir kümenin tümleyeni ölçülebilirdir ve ölçülebilir kümelerin sayılabilir topluluğunun birleşimi (veya kesişimi) ölçülebilirdir.

İspat: $\mathfrak{M}$ sınıfının bir küme cebiri olduğu kabul edilirse gösterilmesi gereken tek şey, sayılabilir çokluktaki ölçülebilir kümelerin birleşimlerinin de ölçülebilir olduğunu ispatlamaktır. Bunun için $\mathfrak{M}$ sınıfında $(E_n)_1^\infty$ ayrık dizisini göz önüne alalım ve $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ olarak tanımlanan kümenin ölçülebilir olduğu gösterelim. Eğer $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ dersek $F_n \subset E$ ve $F_n^t \supset E^t$ olacağı açıktır. $A \subset \mathbb{R}$ ve F_n ler ölçülebilir kümeler olduğundan; $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^t)$ dır. Diğer taraftan $F_n^t \supset E^t$ olduğu için $(A \cap F_n^t) \supset (A \cap E^t)$ ve dolayısıyla; $\mu^*(A \cap F_n^t) \geq \mu^*(A \cap E^t)$ dır. Böylece;

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap E^t),$$

$$\geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) + \mu^*(A \cap E^t),$$

ve buradan

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left[\bigcup_{k=1}^{n} (A \cap E_k)\right] + \mu^*(A \cap E^t)$$

elde edilir . E_n ayrık dizi olduğundan;

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^t) \geq \mu^*\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)\right] + \mu^*(A \cap E^t),$$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right) + \mu^*\left(A \cap E^t\right) \geq \mu^*\left(A \cap E\right) + \mu^*\left(A \cap E^t\right),$$

yazılabilir. O halde $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ kümesi ölçülebilir bir kümedir. Şimdi ispatı $\mathfrak{M}$ sınıfındaki herhangi bir $(A_n)_1^{\infty}$ dizisi için yapalım. $(A_n)_1^{\infty}$ dizisi yardımıyla Teorem 2.2.1'den bir $(E_n)_1^{\infty}$ ayrık dizisi tanımlanabilir. Bu dizinin terimleri;

$$E_1 = A_1, E_2 = A_2 \setminus A_1, ..., E_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

olarak ifade edilirse her n için $A_n \in \mathfrak{M}$ olduğundan $E_n \in \mathfrak{M}$ olur. Ayrıca;

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

dır. Ayrık diziler için yapılan ispattan dolayı $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{M}$ olduğu açıktır. Böylece ölçülebilir kümelerin $\mathfrak{M}$ sınıfı bir $\sigma -$cebirdir.

Teorem 2.6.6: Her $a \in \mathbb{R}$ için (a, ∞) ölçülebilirdir**.**

İspat: A herhangi bir küme olsun. $A_1 = A \cap (a, \infty)$**,** $A_2 = A \cap (-\infty, a]$ olarak tanımlandığında (a, ∞)'in ölçülebilir olduğunu göstermek için $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \leq \mu^*(A)$ olduğu gösterilmelidir. Eğer $\mu^*(A) = \infty$ ise teorem gerçekleşmektedir. Diğer taraftan $\mu^*(A) < \infty$ olsun. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sum \ell(I_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$ olacak şekilde A yı örten sayılabilir bir $\{I_n\}$ aralıklar sınıfı bulunabilir. Bu durumda $I_n^{'} = I_n \cap (a, \infty)$ ve $I_n^{''} = I_n \cap (-\infty, a]$ olmak üzere

$\ell(I_n)=\ell(I_n^{'})+\ell(I_n^{''})=\mu^*(I_n^{'})+\mu^*(I_n^{''})$ yazılabilir. O halde $A_1\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_n^{'}$ ve

$\mu^*(A_1)\le\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_n^{'}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(I_n^{'})$ ve $A_2\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_n^{''}$ olduğundan

$$\mu(A_2)\le\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}I_n^{''}\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(I_n^{''})$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Böylece

$$\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)\le\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu^*(I_n^{'})+\mu^*(I_n^{''})\right]\le\sum_{n=1}^{\infty}(I_n)\le\mu^*(A)+\varepsilon$$

bulunur. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan $\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)\le\mu^*(A)$ olup bu da (a,∞) kümesinin ölçülebilir olduğunu gösterir.

Teorem 2.6.7: Her Borel kümesi ölçülebilirdir. Özel olarak her açık ve kapalı kümeler ölçülebilirdir.

İspat: Ölçülebilir cümlelerin $\mathfrak{M}$ sınıfı bir $\sigma-$cebir olduğundan her a için $(-\infty,a]$ ölçülebilirdir**.** Çünkü $(-\infty,a]=(a,\infty)^t$ olduğu için ölçülebilirdir.

$$(-\infty,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\infty,b-\frac{1}{n}\right]$$

olduğundan $(-\infty,b)$ ölçülebilirdir. O halde $a<b$ olmak üzere; $(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,\infty)$ açık aralığı ölçülebilirdir. Halbuki her açık küme sayılabilir çokluktaki açık aralıkların bir birleşimidir; yani ölçülebilirdir. Demek ki $\mathfrak{M}$ sınıfı bütün açık kümeleri içeren en küçük $\sigma-$cebirdir. Borel kümeleri açık aralıkları içeren en küçük $\sigma-$cebir olduğundan her Borel kümesi ölçülebilirdir.

Eğer E ölçülebilir küme ise $\mu(E)$ Lebesgue ölçüsü E'nin dış ölçüsü olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla μ küme fonksiyonu, μ^* fonksiyonun $\mathfrak{M}$ ölçülebilir küme ailesine kısıtlanması ile elde edilir. Yani; her $E \in \mathfrak{M}$ için $\mu^*(E) = \mu(E)$ dir.

Teorem 2.6.8: $(E_i)_1^\infty$ ölçülebilir kümelerin ayrık bir dizisi ise $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ dir.

İspat: $\{E_1, ..., E_n\}$ ayrık ölçülebilir kümelerin sonlu bir sınıfı olsun. Dış ölçümün sonlu alt toplamsallık özelliğinden; $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i)$ sonucu yazılabilir. toplamsaldır. Ölçü fonksiyonunun tanımından dolayı

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

yazılabilir. $(E_i)_1^\infty$ ler ölçülebilir kümelerin ayrık bir dizisi olduğunda ise

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

yazılabilir. Böylece;

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

yani;

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \qquad (2.7)$$

olur. Bu eşitsizliğin sol yanı n'den bağımsız ve bu eşitsizlik her n için doğru olduğundan

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \tag{2.8}$$

elde edilir. Eşitsizliğin tersi Teorem 2.4.1 yardımıyla doğrudan yazılabilir. Yani; $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ olduğundan (2.7) ve (2.8) eşitsizliklerinden

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

elde edilir.

Teorem 2.6.9: Her $n \in \mathbb{N}$ için E_n ler ölçülebilir kümeler olsun.

1. Eğer $E_n \subset E_{n+1}$ ise o zaman $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$
2. Eğer $E_n \supset E_{n+1}$ ve $\mu(E_1) < \infty$ ise, o zaman $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$

dır.

İspat:

1. $F_1 = E_1$ olsun ve her $i > 1$ için $F_i = E_i \setminus E_{i-1}$ kümelerini göz önüne alalım. Bu durumda $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ve F_i ölçülebilir ayrık kümeler olduğundan Teorem 2.6.8 in de kullanılmasıyla

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$$

ve

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_i) \; = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(F_i) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

yazılabilir ve böylece ispat tamamlanmış olur .

2. $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ ve $F_i = E_i \setminus E_{i+1}$ olsun $(F_i)_1^{\infty}$ dizisi ayrık olduğundan ve $E_1 \setminus E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$

yazılabilir. O halde

$$\mu(E_1 \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i \setminus E_{i+1})$$

dır. Diğer taraftan $E \subset E_1$ olduğundan $E_1 = E \cup (E_1 \setminus E)$ ve $E_{i+1} \subset E_1$ olduğundan

$E_i = E_{i+1} \cup (E_1 \setminus E_{i+1})$ yazılabilir. Böylece

$$E \cap (E_1 \setminus E) = \varnothing \;\; , E_i = E_{i+1} \cap (E_i \setminus E_{i+1}) = \varnothing$$

olması nedeniyle

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \mu(E_1 \setminus E),$$

$$\mu(E_i) = \mu(E_{i+1}) + \mu(E_i \setminus E_{i+1})$$

elde edilir. $\mu(E_1) < \infty$ olduğundan her k için $\mu(E_k) < \infty$ dır. O halde

$$\mu(E_1 \setminus E) = \mu(E_1) - \mu(E),$$

$$\mu(E_i \setminus E_{i+1}) = \mu(E_i) - \mu(E_{i+1})$$

olup

$$\mu(E_1 \setminus E) = \sum_{k=1}^{\infty}(E_i \setminus E_{i+1})$$

yazılabilir. Buradan

$$\mu(E_1)-\mu(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu(E_i)-\mu(E_{i+1})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\mu(E_i)-\mu(E_{i+1})\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\mu(E_1)-\mu(E_n)\right]$$

$$=\left[\mu(E_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)\right]$$

elde ederiz. Öte yandan $\mu(E_1)<\infty$ olduğundan;

$$\mu(E_1)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

ve böylece

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 2.6.1: Genel olarak E_1 ve E_2 ölçülebilir kümeler ise;

$$\mu(E_1)+\mu(E_2)=\mu(E_1\cup E_2)+\mu(E_1\cap E_2)$$

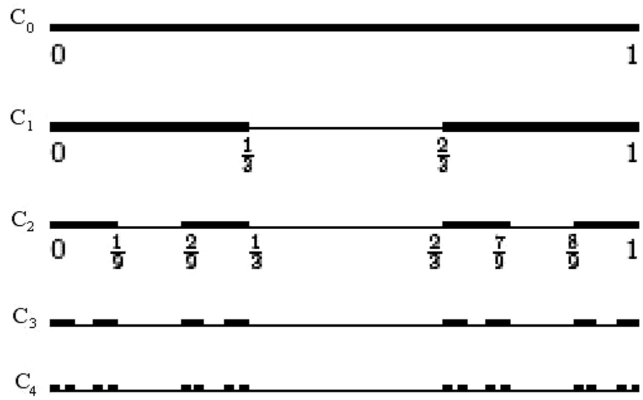
dir. E_1 ve E_2 herhangi iki ölçülebilir kümeler olduğundan $E_1=(E_1\setminus E_2)\cup(E_1\cap E_2)$ ve $(E_1\setminus E_2)\cap(E_1\cap E_2)=\varnothing$ dır. Aynı şekilde, $E_2=(E_2\setminus E_1)\cup(E_1\cap E_2)$ ve $(E_2\setminus E_1)\cap(E_1\cap E_2)=\varnothing$ olduğundan μ ölçümünün ayrık kümelerin birleşimleri olan E_1 ve E_2 kümelerindeki değerleri sırasıyla;

$$\mu(E_1)=\mu(E_1\setminus E_2)+\mu(E_1\cap E_2)$$

$$\mu(E_2)=\mu(E_2\setminus E_1)+\mu(E_1\cap E_2)$$

olur. Buradan $\mu(E_1)+\mu(E_2)=\mu(E_1 \setminus E_2)+\mu(E_1 \cap E_2)+\mu(E_2 \setminus E_1)+\mu(E_1 \cap E_2)$ elde edilir. Bu kümeler ayrık kümelerdir ve $(E_1 \setminus E_2)\cup(E_1 \cap E_2)\cup(E_2 \setminus E_1)=(E_1 \cup E_2)$'dır. Böylece $\mu(E_1 \cup E_2)=\mu(E_1 \setminus E_2)+\mu(E_1 \cap E_2)+\mu(E_2 \setminus E_1)$ yazılabilir. O halde bu eşitlik kullanılarak; $\mu(E_1)+\mu(E_2)=\mu(E_1 \cup E_2)+\mu(E_1 \cap E_2)$ bulunur.

Örnek 2.6.2: Cantor kümesi ölçülebilir ve ölçüsünün sıfır olduğunu gösterilim. Öncelikle Cantor kümesinin nasıl elde edildiğine bakalım. Reel sayılardaki $[0,1]$ kapalı aralığını C_0 ile gösterelim ve C_0 evrensel küme olsun. C_0 kümesinden $j_{1,1}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ açık aralığını çıkaralım ve bu aralığı V_1 ile gösterelim. Geriye uzunlukları $\frac{1}{3}$ olan $I_{1,1}=\left[0,\frac{1}{3}\right]$ ve $I_{1,2}=\left[\frac{2}{3},1\right]$ kapalı aralıkları kalır. Bunların ikisine birden C_1 diyelim. Yani $C_1=I_{1,1}\cup I_{1,2}$ olsun. Daha sonra $I_{1,1}$ ve $I_{1,2}$ aralıklarından $V_2=J_{2,1}\cup J_{2,2}=\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right]\cup\left[\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right]$ kümesini çıkaralım. Geriye kalan C_2 kümesi uzunlukları $\frac{1}{9}$ olan dört kapalı aralıktan oluşur. Yani $C_2=I_{2,1}\cup I_{2,2}\cup I_{2,3}\cup I_{2,4}$. İlk 5 aşama şekil 2.6.1 de görülmektedir.



Şekil 2.6.1. Cantor Kümesinin ilk 5 Adımı

Bu şekilde devam edilirse genel olarak n'inci aşamada atılan açık aralıklar 2^{n-1} tanedir. Böylece $V_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n,k}$ olup kalan kapalı aralıklar ise 2^n tanedir. Ayrıca $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$ C_n ve V_n'i meydana getiren her bir aralığın uzunluğu $\dfrac{1}{3^n}$ 'dir ve bu aralıklar birbirinden ayrıktır. (Bakınız Şekil 2.6.1) kalan C_n kümelerinin $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ biçimindeki kesişimine Cantor kümesi adı verilir.

Reel sayılarda kapalı aralıklar ölçülebilirdir. Her n için C_n sayılabilir çoklukta kapalı aralıkların birleşimi olduğundan ve $\mathfrak{M}$ sınıfının $\sigma -$cebir yapısından C_n kümeleri ölçülebilirdir ve yine aynı nedenden Cantor kümesi ölçülebilirdir. $C \subset [0,1]$ olduğundan $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^t$ yazılabilir. Cantor kümesinin tanımına göre her n için C_n

kümelerinin oluşumunda, uzunlukları $\frac{1}{3^n}$ olan ayrık aralıklardan 2^{n-1} tane atılmaktadır.

Böylece;

$$\mu(C)=\mu[0,1]-\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n^t\right)=\mu[0,1]-\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(C_n^t\right)=1-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

olduğundan; $\mu(C)=0$ bulunur.

Örnek 2.6.3: Her n için $I_n=\left\{x:\frac{1}{n+1}\leq x<\frac{1}{n}\right\}$ olduğuna göre $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ kümesinin

$$I_n=\left\{x:\frac{1}{n+1}\leq x<\frac{1}{n}\right\} \text{ ise } I_1=\left\{x:\frac{1}{2}\leq x<1\right\},I_2=\left\{x:\frac{1}{2}\leq x<1\right\},...$$

olacağı açıktır. Buradan I_n ayrık aralıkları için Lebesgue ölçüsü

$$\lambda(I_1)=1-\frac{1}{2},\lambda(I_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},...,\lambda(I_n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

olur. Bu durumda,

$$\lambda\left[\bigcup_{i=1}^{n}I_n\right]=\sum_{i=1}^{n}\lambda(I_n)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

ve

$$\lambda\left[\bigcup_{i=1}^{\infty}I_n\right]=\lim_{n\to\infty}\lambda\left[\bigcup_{i=1}^{n}I_n\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

bulunur.

Örnek 2.6.4: Her n için $I_n=\left(n-\frac{1}{2^n},n+\frac{1}{2^n}\right)$ olduğuna göre $E=\bigcup_{n=1}^{n}I_n$ kümesinin

Lebesgue ölçümü

$$\lambda(E)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}2^{-n+1}=2$$

olur.

Ölçülebilir Fonksiyonlar

Daha önceki kesimlerde kümelerin ölçülebilirliğini gördük. Bu kesimde ise bir σ-cebiri üzerinde tanımlanmış genişletilmiş reel değerli fonksiyonların ölçülebilirliğinden bahsedeceğiz. Fonksiyonların ölçülebilirliği, Lebesgue integrali kavramında önemli rol almaktadır. Fonksiyonlarda ölçülebilme, görüntü aralıklarına ilişkin ters görüntülerinin σ-cebirine ait olup olmadığı ile ilgili bir kavamdır.

Tanım 2.7.1: (X,U) ölçülebilir bir uzay ve $A\in U$ olsun. Eğer her $\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\big((-\infty,\alpha]\big)=\{x\in X : f(x)<\alpha\}\in U$$

oluyorsa $f:X\to[-\infty,\infty]$ fonksiyonuna X üzerinde Lebesgue anlamında ölçülebilirdir veya kısaca ölçülebilir fonksiyon denir.

X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli ölçülebilir bütün fonksiyonların sınıfını $M(X,U)$ ile gösterelim.

Tanım 2.7.2: $X=\mathbb{R}$ ve $U=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ olsun $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere, eğer her $\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\big((-\infty,\alpha]\big)=\{x\in\mathbb{R} : f(x)<\alpha\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

oluyorsa her açık küme Borel cebirine ait olduğundan f 'e Borel ölçülebilir ya da Borel fonksiyonu denir. $\mathbb{R}$ 'nin Borel kümesi olmayan fakat Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri mevcut olduğundan. $\mathbb{R}$'de herbir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue anlamında ölçülebilirdir.

Lemma 2.7.1: (X,U) ölçülebilir bir uzay olsun. O zaman $f: X \to \mathbb{R}$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

1. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\quad A_\alpha = f^{-1}\big((\alpha,\infty)\big) = \{x : f(x) > \alpha\} \in U$ (2.9)

2. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\quad B_\alpha = f^{-1}\big([\alpha,\infty)\big) = \{x : f(x) \geq \alpha\} \in U$ (2.10)

3. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\quad C_\alpha = f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big) = \{x : f(x) < \alpha\} \in U$ (2.11)

4. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}\quad D_\alpha = f^{-1}\big((-\infty,\alpha]\big) = \{x : f(x) \leq \alpha\} \in U.$ (2.12)

İspat: A_α ifadesi ile D_α ifadesi birbirinin tümleyeni olduğundan kümelerden biri U sınıfına ait ise diğeri de aynı sınıfa aittir. Dolayısıyla B_α ifadesi ile C_α ifadesi içinde aynı durum geçerlidir.

Şimdi (2.9) ve (2.10) ifadelerinin denk olduklarını gösterilim. (2.9) ifadesi doğru olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_{\alpha-\frac{1}{n}} = \left\{x : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\} \in U ,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(\alpha - \frac{1}{n}, \infty\right)\right) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\alpha - \frac{1}{n}, \infty\right)\right)$$
$$= f^{-1}\big([\alpha,\infty)\big) = \{x : f(x) \geq \alpha\} = B_\alpha$$

yazılabilir. Bu durumda $B_\alpha \in U$ olur. Böylece $(2.9) \Rightarrow (2.10)$ elde edilir. Benzer düşünce ile $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$ olacağından $(2.10) \Rightarrow (2.9)$ olur. Bu durumda (2.9) *ve* (2.10) denktir. Benzer şekilde (2.11) *ve* (2.12) denk olduğu da gösterilebilir.

Uyarı 2.7.1 :Eğer $I = (a,b)$ ise,

$$\begin{aligned} f^{-1}((a,b)) &= f^{-1}((-\infty,b) \cap (a,\infty)) \\ &= f^{-1}((-\infty,b)) \cap f^{-1}((a,\infty)) \end{aligned}$$

ve $I = [a,b]$ ise;

$$\begin{aligned} f^{-1}([a,b]) &= f^{-1}((-\infty,b] \cap [a,\infty)) \\ &= f^{-1}((-\infty,b]) \cap f^{-1}([a,\infty)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer f ölçülebilir ise eşitliğin sağ tarafındaki ifadeler de ölçülebilirdir. Benzer özellik benzer şekilde yarı açık aralıklar için de geçerlidir .

Teorem 2.7.1: $c \in \mathbb{R}$ sabit ve f ile g reel değerli ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu takdirde $f+c$, cf, $f+g$, $g-f$, f^2, fg ve $|f|$ fonksiyonları da ölçülebilirdir.

İspat: Lemma 2.7.1'deki (2.11) koşulunu kullanırsak,

$$\{x : f(x) + c < \alpha\} = \{x : f(x) < \alpha - c\}$$

olduğundan f ölçülebilir olduğunda $f+c$ nin de ölçülebilir olduğu görülür. Aynı düşünceyle $c > 0$ olduğunda

$$\{x : cf(x) < \alpha\} = \left\{x : f(x) < \frac{\alpha}{c}\right\}$$

yazılabileceğinden cf 'in tanımından ölçülebilirdir. $c=0$ iken; cf sabit fonksiyon olacağından ve sabit fonksiyon ölçülebilir olduğundan cf 'de ölçülebilirdir.

$\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$\left\{x : f^2(x) > \alpha\right\} = \left\{x : f^2(x) > \sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{x : f^2(x) > -\sqrt{\alpha}\right\}$$

yazılabileceğinden f ölçülebilir olduğunda tanım nedeniyle f^2 de ölçülebilirdir. $\alpha < 0$ için $\left\{x : f^2(x) > \alpha\right\} = X$ olduğundan f^2 yine ölçülebilirdir.

Şimdi $f+g$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösterelim. $(f+g)(x) > \alpha$ olması için gerek ve yeter şart $f(x) > r$ $g(x) > \alpha - r$ olacak şekilde r rasyonel sayısının var olmasıdır. Böylece $\left\{x : f(x) + g(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\left\{x : f(x) > r\right\} \cap \left\{x : g(x) > \alpha - r\right\}\right)$ yazılabilir. Rasyonel sayılar sayılabilir olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki küme ve dolayısıyla $f+g$ ölçülebilirdir. g ölçülebilir olduğundan $-g = (-1)g$ de ölçülebilirdir. O halde $g-f$ ölçülebilirdir. Dolayısıyla $(f+g)^2$ de ölçülebilirdir. Buna göre $fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$ şeklinde yazıldığında fg ' nin de ölçülebilir olduğu açıkça görülmektedir.

$\alpha < 0$ için $\left\{x : \left|f(x)\right| > \alpha\right\} = X \in U$ olacağından $|f|$ her zaman ölçülebilirdir. $\alpha > 0$ ise

$$\left\{x : \left|f(x)\right| > \alpha\right\} = \left\{x : f(x) > \alpha\right\} \cup \left\{x : f(x) < -\alpha\right\}$$

olacağından birleşimdeki her bir küme ayrı ayrı ölçülebilir olduğundan eşitliğin solundaki küme de ölçülebilirdir. Dolayısıyla $|f|$ ölçülebilirdir. Fakat tersi doğru değildir.

Teorem 2.7.2: $(f_n)_1^\infty$ tanım bölgeleri aynı olan ölçülebilir fonksiyonların ardışık bir dizisi olsun. Bu durumda $\max\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\min\limits_{n\leq k} f_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ fonksiyonlarının tümü ölçülebilirdir.

İspat: Aşağıdaki kümelerin ölçülebilir olduğunu göstermek teoremin ispatı için yeterlidir:

$$\left\{x : \left(\max_{n\leq k} f_n\right)(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{n=1}^{k}\{x : f_n(x) > \alpha\}$$

$$\left\{x : \left(\min_{n\leq k} f_n\right)(x) > \alpha\right\} = \bigcap_{n=1}^{k}\{x : f_n(x) > \alpha\}$$

olacaktır. Her n için f_n'ler ölçülebilir olduğundan birleşimler de ölçülebilirdir. Dolayısıyla eşitliğin solundaki küme ölçülebilir. Benzer şekilde her n için f_n'ler ölçülebilir olduğundan kesişimleri de ölçülebilirdir. Diğer taraftan

$$\left\{x : \left(\sup_{n\geq k} f_n\right)(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{n=k}^{\infty}\{x : f_n(x) > \alpha\}$$

$$\left\{x : \left(\inf_{n\leq k} f_n\right)(x) \geq \alpha\right\} = \bigcap_{n=k}^{\infty}\{x : f_n(x) \geq \alpha\}$$

yazılabilir. Her n için f_n'ler ölçülebilir olduğundan birinci eşitsizlikteki birleşimler de ölçülebilirdir. Dolayısıyla eşitliğin solundaki küme ölçülebilirdir. O halde $\sup\limits_{n} f_n$ ölçülebilirdir. Benzer şekilde her n için f_n'ler ölçülebilir olduğundan kesişimleri de ölçülebilirdir, yani $\inf\limits_{n} f_n$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.

$$\lim_{n\to\infty} \sup f_n = \inf_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq m} f_n\right), \ \lim_{n\to\infty} \inf f_n = \sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m} f_n\right)$$

olduğu bilinmektedir. $h_m = \sup_{n\geq m} f_n$ ve $g_m = \inf_{n\geq m} f_n$ dersek bu ifadeler de ölçülebilir fonksiyonlar olur. $\inf_m h_m$ ve $\sup_m g_m$'in de ölçülebilir olduğu açıktır. O zaman $\limsup_n f_n = \inf_m h_m$ ve $\liminf_n f_n = \sup_m h_m$ olduğundan $\limsup_{n\to\infty} f_n$ ve $\liminf_{n\to\infty} f_n$ ifadeleri de ölçülebilirdir.

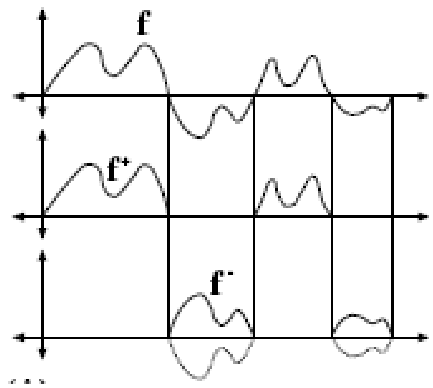
Tanım 2.7.7: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin.Buradan

$$f^+ = \begin{cases} f(x) & , f(x) > 0 \\ 0 & , f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$f^- = \begin{cases} 0 & , f(x) > 0 \\ -f(x) & , f(x) \leq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonlarına sırasıyla f' in pozitif ve negatif kısmı denir.

Bu fonksiyonlar X üzerinde negatif değerler almadıkları yani f^+ ve f^- negatif olmayan fonksiyonlar olduğu açıktır. (Bakınız Şekil 2.7.1)



Şekil 2.7.1 f fonksiyonun pozitif ve negatif kısımları

Lemma 2.7.2: f 'in sırasıyla pozitif ve negatif kısmı olan f^+ ve f^- aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $f = f^+ - f^-$
2. $|f| = f^+ - f^-$
3. $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$
4. $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

İspat: Tanımdan hareket ederek ispatı basit işlemlerle yapabiliriz.

Sonuç: $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır.

Tanım 2.7.8: Bir A kümesi için

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan χ_A fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

χ_A fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul A'nın ölçülebilir olmasıdır. Gerçekten

$$\chi_A^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)=\begin{cases} X & ,\alpha<0 \\ A & ,0\le\alpha<1 \\ \varnothing & ,\alpha\ge 1 \end{cases}$$

olduğundan her $\alpha\in\mathbb{R}$ için χ_A fonksiyonu ölçülebilirdir.

Örnek 2.7.1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monoton azalan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f Borel ölçülebilirdir. Çünkü, f monoton azalan olduğundan $b<a$ iken $f(a)<f(b)$ olur. $\{x\in\mathbb{R}: f(x)>\alpha\}=f^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)=(-\infty,\beta)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ olduğundan f fonksiyonu ölçülebilirdir.

Örnek 2.7.2: I, $\mathbb{R}$'nin bir alt aralığı olsun. $f:I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu monoton artan ise ölçülebilirdir. Burada $\sigma-$cebir olarak kuvvet kümesini alalım. (I,U) ölçülebilir uzay olsun. Dolayısıyla f ölçülebilirdir. Her $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\{x\in I: f(x)\le\alpha\}\in U$ ise bu küme ya I aralığı ya da I'nın bir alt aralığıdır veya tek elemanlı bir küme ya da $\varnothing$ kümedir. Her iki durumda da ortaya çıkan kümeler ölçülebilirdir. O halde f fonksiyonu da ölçülebilirdir. $I=[a,b]$ için f fonksiyonu artan olduğundan $x\in I$ için $f(a)\le f(x)\le f(b)$ olacağı açıktır. Diğer taraftan

$$\alpha\ge f(b)\Rightarrow \{\mathrm{x}\in\mathrm{I}: f(x)\le\alpha\}=[a,b]=I\in U\ ,$$

$$\begin{aligned} f(a)\le\alpha\le f(b) &\Rightarrow \{x\in I: f(x)\le\alpha\}\subset[a,b]=I, \\ &\Rightarrow \{x\in I: f(x)\le\alpha\}\in U\ \ (U=P(I)), \end{aligned}$$

$$\alpha = f(a) \Rightarrow \{x \in I : f(x) \le \alpha\} = \{a\} \subset I \Rightarrow \{a\} \in U$$
$$\Rightarrow \{x \in I : f(x) \le \alpha\} \in U$$

$\alpha < f(a) \Rightarrow \{x \in I : f(x) \le \alpha\} = \varnothing \in U$ olacağından f fonksiyonu ölçülebilirdir.

2.8. Sınırlı Ölçülebilir Fonksiyonların İntegrali

f, $E = [a,b]$ kapalı aralığında sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon olsun. Ayrıca θ ve β $\theta < f(x) < \beta$ olacak şekilde iki reel sayı olarak verilsin. $[\theta, \beta]$ aralığını, $\theta = \inf_{x \in E} f(x)$ ve $\beta = \sup_{x \in E} f(x)$ olmak üzere $\theta = y_1 < y_2 < ... < y_{n-1} < y_n = \beta$ olacak biçimde $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ noktaları yardımıyla n parçaya bölelim. Bu noktalar Y ekseni üzerindedir. $[\theta, \beta]$ aralığı bu şekilde bölünerek elde edilen noktaların kümesine, bu aralığın parçalanışı denir. $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere, $y_{k-1} \le f(x) \le y_k$ olacak şekilde, $[a,b]$ kapalı aralığının tüm x noktalarının kümesine E_k diyelim. Yani $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k = \{x : y_{k-1} \le f(x) \le y_k\}$ olsun. f ölçülebilir fonksiyon olduğundan E_k kümeleri ölçülebilirdir. Bu kümelerin her biri ayrık olmak üzere

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(E_k)$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \mu(E_k)$$

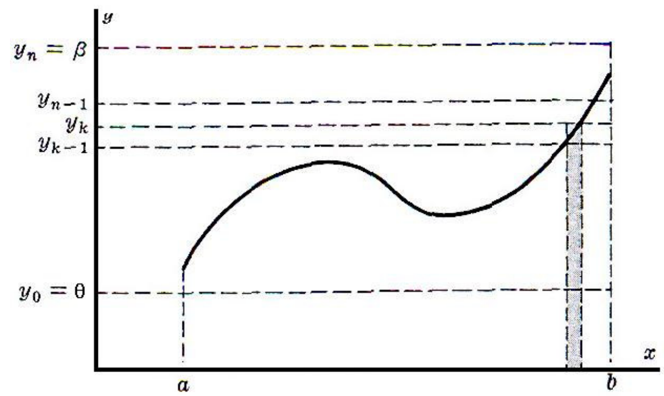
toplamlarını göz önüne alalım. $[\theta, \beta]$ aralığının herbir parçalanmaları için $I = \inf(S)$ $J = \sup(s)$ ifadelerini tanımlayalım.

Tanım 2.8.1: $I=\inf(S)$, $J=\sup(s)$ ifadelerine sırasıyla f 'nin $[a,b]$ aralığı üzerindeki alt ve üst Lebesgue integralleri denir ve

$$I=\int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx \ , \ J=\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx$$

ile gösterilir. Tanımdan $I \leq J$ olduğu açıktır.

Tanım 2.8.2: Eğer tüm parçalanmalar için $I=J$ ya da $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\mu(E_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu(E_k)=J$ oluyorsa f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir denir. Eğer tüm parçalanmalara karşı $I \neq J$ oluyorsa f 'nin $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrali yoktur denir. f 'nin $[a,b]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrali varsa sonludur. Şekil 2.8.1' de görüldüğü gibi $y_k\mu(E_k)$ değerleri, noktalarla işaretli dikdörtgenlerin alanı ve değeri ise çizgili taranmış olan dikdörtgenlerin alanıdır. E_k kümesi ise X ekseni üzerinde bu dikdörtgenlerin tabanına karşılık gelen aralıklar kümesini göstermektedir. O zaman Lebesgue integrali $y=f(x)$ eğrisi, $x=a$ ve $x=b$ doğruları tarafından sınırlanan sınırlı alanı ifade etmektedir.



Şekil 2.8.1 Lebesgue İntegralinin Geometrik Gösterimi

Basit Fonksiyonların İntegrali

Tanım 2.9.1: Reel değerli bir φ fonksiyonu eğer ölçülebilirse ve yalnızca sonlu sayıda değerler alabiliyorsa yani görüntü kümesi sonlu elemanlardan oluşuyorsa bu fonksiyona basit fonksiyon denir.

φ reel değerli basit fonksiyon ve değerleri de $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ olsun. φ'nin sıfırdan farklı olan değerlerinin kümesi $A_i = \varphi^{-1}(\{\alpha_i\}) = \{x : \varphi(x) = \alpha_i\}$ ve χ_{A_i}'de A_i kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere eğer A_i kümeleri ölçülebilirse

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

gösterilim şekli mevcuttur. A_i kümelerinin seçimi tek olmadığından φ'nin gösterimi de tek değildir. Bu gösterimde A_i kümeleri ayrık ve α_i'ler ise sıfır olmayan birbirinden farklı sabitlerdir.

Tanım 2.9.2: (X,U,μ) bir ölçü uzayı olsun. α_i'ler negatif olmayan reel sayılar ve A_i $i=1,2,...,n$, U sınıfına ait ayrık kümeler olmak üzere

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$$

ise $\int\limits_X \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$ ifadesine

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

biçiminde tanımlanan φ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre Lebesgue integrali denir.

Bu tanıma göre φ'nin μ'ye göre integrali ya negatif olmayan bir reel sayı ya da ölçünün sonlu olmadığı hale karşılık gelen $+\infty$ değerine eşittir.

Teorem 2.9.1: (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve φ ve ψ negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere

1. $\int\limits_X c\,\varphi\, d\mu = c\int\limits_X \varphi\, d\mu$, $c \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$

2. $\int\limits_X (\varphi+\psi)\, d\mu = \int\limits_X \varphi\, d\mu + \int\limits_X \psi\, d\mu$

3. $\forall\ x \in X$ için $\varphi(x) \le \psi(x) \Rightarrow \int\limits_X \varphi\, d\mu \le \int\limits_X \psi\, d\mu$

dır.

İspat:

1. $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ olsun. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$ olmak üzere Lebesgue integralinin

tanımından $c\varphi=\sum_{i=1}^{n}c\alpha_i\chi_{A_i}$ olup böylece $\int_X c\varphi\, d\mu=\sum_{i=1}^{n}c\alpha_i\mu(A_i)=c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i)$ olur.

2. $b_1,b_2,...,b_m$ negatif olmayan reel sayılar, $B_1,B_2,...,B_m$ kümeleri U sınıfına ait ayrık kümeler ve $\psi=\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{B_k}$ olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=X$ ve $\bigcup_{k=1}^{m}B_k=X$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\varphi+\psi &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}+\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{B_k}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{(A_i\cap X)}+\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{(B_k\cap X)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{\left(A_i\cap\left(\bigcup_{k=1}^{m}B_k\right)\right)}+\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{\left(B_k\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{\bigcup_{k=1}^{m}(A_i\cap B_k)}+\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B_k)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{k=1}^{m}\chi_{(A_i\cap B_k)}+\sum_{k=1}^{m}b_k\sum_{i=1}^{n}\chi_{(A_i\cap B_k)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_i+b_k)\chi_{(A_i\cap B_k)}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $A_i\cap B_k$ ’lar ayrık olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_X (\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_i+b_k)\mu(A_i\cap B_k)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_i)\mu(A_i\cap B_k)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(b_k)\mu(A_i\cap B_k)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i)\sum_{k=1}^{m}\mu(A_i\cap B_k)+\sum_{k=1}^{m}(b_k)\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i\cap B_k)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i)\,\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m}(A_i\cap B_k)\right)+\sum_{k=1}^{m}(b_k)\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B_k)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i)\,\mu\left(\left(A_i\cap\bigcup_{k=1}^{m}B_k\right)\right)+\sum_{k=1}^{m}(b_k)\mu_k\left(B_k\cap\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i)\,\mu\big((A_i\cap X)\big)+\sum_{k=1}^{m}(b_k)\mu_k\big((B_k\cap X)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i)\,\mu(A_i)+\sum_{k=1}^{m}(b_k)\mu_k(B_k)\\
&= \int_X \varphi\,d\mu+\int_X \psi\,d\mu
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $\forall\ x\in X$ için $\varphi(x)\le\psi(x)$ olduğunda $\psi-\varphi$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

Diğer taraftan

$$\int_X \psi d\mu=\int_X \big(\varphi+(\psi-\varphi)\big)\,d\mu=\int_X \varphi\,d\mu+\int_X (\psi-\varphi)\,d\mu$$

yazılabilir. $\psi-\varphi$ integrali negatif olmayan bir genişletilmiş reel sayı olacağı için

$$\int_X \varphi\,d\mu\le\int_X \psi\,d\mu$$

eşitsizliği daima geçerlidir.

Örnek 2.9.1: Aşağıda verilen φ fonksiyonlarının E üzerinden Lebesgue integrallerini hesaplayalım

1. $\varphi(x)=[\![x]\!],\ E=[0,10]$,

$$\int_0^{10} [\![x]\!]dx = 0\mu([0,1)) + 1\mu([1,2)) + 2\mu([2,3)) + ... + 9\mu([9,10)) + 10\mu([10,10])$$
$$= 45,$$

2. $\varphi(x) = [\![x^2]\!]$, $E = [0,2]$,

$$\int_0^4 [\![x^2]\!]dx = 0\mu([0,1]) + 1\mu\left(\left[1,\sqrt{2}\right]\right) + 2\mu\left(\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]\right) + 3\mu\left(\left[\sqrt{3},4\right]\right) + 4\mu([4,4])$$
$$= 11 - \sqrt{3} - \sqrt{2},$$

3. $\varphi(x) = [\![\sin x]\!]$, $E = [0,2\pi]$,

$$\int_0^{2\pi} [\![\sin x]\!]dx = 0\mu\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right) + 1\mu\left(\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right) + 0\mu\left(\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]\right) - 1\mu((\pi,2\pi])$$
$$= -\pi,$$

2.10. Pozitif Fonksiyonların İntegrali

Bu kesimde basit fonksiyonların integrallerinden yararlanarak pozitif fonksiyonların integralini tanımlayıp, bu fonksiyonların integraline ait özellikler incelenecektir.

Tanım 2.10.1: (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve f negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. φ negatif olmayan basit bir fonksiyon ve $\mu\{x:\varphi(x)\neq 0\}<\infty$ olmak üzere

$$\int_X f\,d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : \varphi \leq f\right\}$$

genişletilmiş reel sayısına f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali denir. Ayrıca $E \in U$ olmak üzere f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre E üzerindeki integrali

$$\int_E f\,d\mu = \int_X f\,\chi_E\,d\mu$$

dır.

Teorem 2.10.1: f ve g negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar ve $E, F \in U$ olsun. Bu takdirde:

1. Her $x \in X$ için

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu \qquad 2.13$$

dır.

2. $E \subset F$ ise

$$\int_E f\,d\mu \le \int_F g\,d\mu \qquad 2.14$$

dır.

İspat:

1.Tanım 2.10.1' den $\sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : 0 \le \varphi \le f\right\} \subset \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : 0 \le \varphi \le g\right\}$ olacağı açıktır.

Buradan

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : 0 \le \varphi \le f\right\}\\ &\le \sup\left\{\int_X \varphi\,d\mu : 0 \le \varphi \le g\right\}\\ &\le \int_X g\,d\mu\end{aligned}$$

elde edilir.

2. $E \subset F$ olmak üzere yine Tanım 2.10.1' den

$$\sup\left\{\int_E \varphi\, d\mu : 0\le\varphi\le f\right\}\subset \sup\left\{\int_F \varphi\, d\mu : 0\le\varphi\le f\right\}$$

olur.

Bu durumda $(f\,\chi_E)\le(f\,\chi_F)$ olur. Böylece

$$\int_X f\,\chi_E\, d\mu \le \int_X f\,\chi_F\, d\mu \Rightarrow \int_E f\ d\mu \le \int_F f\ d\mu$$

bulunur.

Teorem 2.10.2: (Monoton Yakınsaklık Teoremi) (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve $(f_n)_1^\infty$ negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer genel terimi f_n olan monoton artan dizi f fonksiyonuna yakınsar yani her x için $f_n\to f$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu=\int_X f\,d\mu$ 'dır.

İspat: $(f_n)_1^\infty$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olduğundan f de ölçülebilirdir. $f_n\le f$ olduğundan Teorem 2.10.1' deki (2.13) nedeniyle $\int_X f_n(x)\,d\mu=\int_X f\,d\mu$ yazılabilir. $f_n\to f$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu=\int_X f\,d\mu$ elde edilir.

Teorem 2.10.3: (Fatou Lemması) (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve $(f_n)_1^\infty$ negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyonlar dizisi ise $\int_X \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu\le\liminf\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu$ dır.

İspat: $h_m:=\inf\{f_m,f_{m+1},...\}$ diyelim. $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n=\sup\limits_{m\ge1}\left(\inf\limits_{n\ge m} f_n\right)$ olduğundan $m\le n$ için $g_m\le f_n$ olacağı açıktır. Dolayısıyla $m\le n$ için

$$\int_X g_m(x)d\mu \le \int_X f_n(x)d\mu \Rightarrow \int_X g_m d\mu \le \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\int_X g_m\,d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$$

bulunur.

g_m artan ve $\lim\limits_{m\to\infty} g_m = \sup g_m = \liminf\limits_{m\to\infty} f_n$ olduğundan Teorem 2.10.2' den dolayı

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu = \int_X \lim_{m\to\infty} g_m(x)\,d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_X g_m(x)\,d\mu \le \liminf_{m\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.10.4: (Beppo-Levi Teoremi) (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k|$ ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu takdirde $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k|$ serisi her x için yakınsak ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_X |f_k|$ sonlu ise $\int\limits_X\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\right)d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_X f_k\,d\mu$'dır.

İspat: $g_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$ olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ yazılabilir. Teorem 2.10.2' den

$$\int_X\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)d\mu = \int_X\left(\lim_{n\to\infty} g_n\right)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X (f_1+f_2+...+f_n)\,d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_X\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\,d\mu\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_X f_k\,d\mu\right)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.10.5: (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve $f \ge 0$ olsun. Bu takdirde U üzerinde $V(A) = \int\limits_A f\,d\mu$ şeklinde tanımlanan V fonksiyonu bir ölçüdür.

İspat: Eğer $A=\varnothing$ ise $f\chi_A$ her yerde sıfırdır. Dolayısıyla

$$V(\varnothing)=\int_{\varnothing} f\,d\mu=\int_X f\chi_{\varnothing}d\mu=0$$

$\mu(X)=0$ olur. $f\geq 0$ olduğundan

$$V(A)=\int_A f\,d\mu\geq\int_A 0\,d\mu=0\Rightarrow V(A)\geq 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_n$ olmak üzere $f_n=\sum_{k=1}^{n}f\chi_{A_k}$ eşitliği ile tanımlanan

$(f_n)_1^{\infty}$ monoton artan dizisini ele alındığında

$$\int_X f_n d\mu=\int_X\left(\sum_{k=1}^{n}f\chi_{A_k}\right)d\mu=\sum_{k=1}^{n}\left(\int_X f\chi_{A_k}\right)d\mu=\sum_{k=1}^{n}\left(\int_X f\,d\mu\right)=\sum_{k=1}^{n}V(A_k)$$

bulunur. Diğer taraftan, $\lim_{n\to\infty}f_n=f\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}=f\chi_E$ olduğundan Teorem 2.10.2' den

$$V\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_k\right)=V(A)=\int_A f\,d\mu=\int_X f\chi_A\,d\mu=\int_X\lim_{n\to\infty}f_n\,d\mu$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}V(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}V(A_k)$$

olarak bulunur. Yani

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}V(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}f\,d\mu$$

elde edilir. Buda V' nin U üzerinde bir ölçü fonksiyonu olduğunu gösterir.

2.11 İntegrallenebilen Fonksiyonlar

f^+, f fonksiyonun pozitif kısmı ve f^-, f fonksiyonun negatif kısmı olsun. Yani $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$ ve $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$ tanımlansın. Doğal olarak f ölçülebilir ise f^+ ve f^-de ölçülebilirdir. Böylece $f=f^+-f^-$ ve $|f|=f^++f^-$ olduğundan aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Tanım 2.11.1: (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve f negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f^+ ve f^- fonksiyonlarının her ikisi de sonlu integrale sahip ise f fonksiyonu X üzerinde integrallenebilirdir denir ve bu integral

$$\int_X f\,d\mu=\int_X f^+d\mu-\int_X f^-d\mu$$

reel sayısıdır.

Eğer $E\in U$ ise f fonksiyonunun μ'ye göre E üzerindeki integrali

$$\int_E f\,d\mu=\int_E f^+d\mu-\int_E f^-d\mu$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu şekilde integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonların sınıfını $\mathcal{L}(E)$ ile gösterelim. Eğer integrallenebilirlik kuralında ölçü uzayını $X=\mathbb{R}, U=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ olarak seçilir ve $\mu=\lambda$ Lebesgue ölçüsü olarak alınırsa, $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda$ integraline Lebesgue integrali adı verilir.

Lemma 2.11.1: f ve g fonksiyonları E üzerinde integrallenebilir olsun.

1. $c>0$ ve cf negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon ise $\int_E cf\,d\mu=c\int_E f\,d\mu$,

2. $f+g$ negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon ise $\int_E (f+g)d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$,

3. $f \leq g$ ise $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$,

4. A ve B kümeleri, E üzerinde ölçülebilir ayrık kümeler ise $\int_{A\cup B} fd\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B g\,d\mu$,

dır.

İspat: Lemma'nın ispatı tanımdan hareket edilerek basit işlemlerle yapılabilir.

Teorem 2.11.1: (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve f ölçülebilir bir fonksiyon ve $\mathcal{L}$, X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı olsun. Eğer $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$ özelliği gerçekleniyorsa $\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$ dır.

İspat: Tanım 3.4.1'den $f \in \mathcal{L}$ olması için f^+ ve f^- fonksiyonları sonlu integrallere sahip olmalıdır. $|f| = f^+ + f^-$ olduğundan $|f|$ fonksiyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının integrallenebilir olmasıdır. Dolayısıyla *f*' nin integralenebilir olması $|f|$' nin integralelenebilir olmasına denktir. O zaman

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- \,d\mu\right| \leq \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- \,d\mu = \int_X f\,d\mu$$

elde edilir.

Teorem 2.11.2: (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve $f: X \to [0,\infty]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\alpha > 0$ için $B_\alpha = \{x : f(x) \geq \alpha\}$ olmak üzere

$$\mu(B_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{B_\alpha} f\, d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\int_X f\, d\mu$$

dır.

İspat: Her $x \in X$ için $0 \leq \alpha\chi_{B_\alpha}(x) \leq f\chi_{B_\alpha}(x) \leq f(x)$ olduğundan (3.1) nedeniyle

$$\int_X \alpha\chi_{B_\alpha} d\mu \leq \int_X f\chi_{B_\alpha} \leq \int_X f d\mu$$

yazılabilir.

$$\int_X \alpha\chi_{B_\alpha} d\mu = \alpha\int_X \chi_{B_\alpha} d\mu = \alpha\int_{B_\alpha} d\mu = \alpha\mu(B_\alpha),$$

$$\int_X f\chi_{B_\alpha} d\mu = \int_{B_\alpha} f d\mu \text{ ,}$$

olduklarından

$$\alpha\mu(B_\alpha) \leq \int_{B_\alpha} f\, d\mu \leq \int_X f\, d\mu$$

elde edilir. Böylece bu eşitsizliği α' ya bölersek ispatı tamamlanmış oluruz.

Teorem 2.11.3: (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) (X, U, μ) bir ölçü uzayı ve g, ise X üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Ayrıca $(f_n)_1^\infty$ X üzerinde ölçülebilen reel değerli fonksiyonlar dizisi ve hemen hemen her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olduğunu kabul edelim. Eğer her n için $|f_n(x)| \leq g(x)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde integrallenebilen $g(x)$ fonksiyonu varsa, f ve f_n fonksiyonları integrallenebilirdir ve $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu$ dır.

İspat: $|f_n(x)| \le g(x)$ olduğu için $|f(x)| \le g(x)$ eşitsizliği yazılabilir. g integrallenebilir olduğundan hemen hemen her $x \in X$ için $g(x)$' in X üzerinden integrali sonludur. $(g+f_n)$ ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi ise her $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty}(g+f_n) = (g+f)$ yazılabilir. Teorem 3.3.3' den

$$\int_X (f+g)\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n+g)\,d\mu$$

ve

$$\int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\int_X f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

olur. Benzer düşünce ile $(g-f_n)$ dizisi için uygulanırsa

$$\int_X (g-f)\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X (g-f_n)\,d\mu$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\int_X g\,d\mu - \int_X f\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_X f_n\,d\mu \right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$-\int_X f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_X f_n\,d\mu \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \Rightarrow \int_X f\,d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

ve diğer taraftan

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

olduğu için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ elde edilir. Böylece ispatı tamamlamış oluruz.

Sonuç 2.11.1: (Sınırlı Yakınsaklık Teoremi) (X, U, μ) bir ölçü uzayı ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \mathcal{L}$ olsun. Ayrıca $(f_n)_1^\infty$ dizisi için her n ve her x için $|f_n(x)| \leq M$ olacak şekilde M reel sayısının bulunduğunu varsayalım. Her x için $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ise $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$’dır.

Sonuç 2.11.2 : $(f_n)_1^\infty$ ölçülebilir fonksiyonların monoton artan ve negatif olmayan bir dizisi olsun. Eğer $(f_n)_1^\infty$ hemen hemen her yerde sınırlı bir f fonksiyonuna yakınsak ve μ sonlu ise f integrallenebilirdir ve $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$’dır.

Uyarı 2.11.1: Eğer $(f_n)_1^\infty$ hemen hemen her yerde f fonksiyonuna yakınsayan ölçülebilir bir fonksiyonların dizisi ise; Fatou Lemması, Monoton Yakınsaklık Teoremi ve Lebesgue Yakınsaklık Teoremlerinin her biri $\int f$ için uygun varsayımlar altında $\int f_n$ integralinin limiti cinsinden ifade edilebileceğini belirtir. Bu varsayımlardan en zayıf olanı Fatou Lemmasıdır**.** Bu lemmaya göre f_n’lerin alttan sınırlı olduğunu ya da daha genel bir ifade ile bir integrallenebilir fonksiyon ile sınırlı olduğunun varsayılması yeterli olacaktır. Dolayısıyla Fatou Lemmasının sonucu ötekilerden daha zayıftır. Lebesgue Yakınsaklık teoremi ise f_n’lerin alttan ve üstten integrallenebilir fonksiyonlarla sınırlı olmasını varsaymaktadır. Monoton Yakınsaklık Teoremi ise yukarıda sözü edilen iki teoremden ortaya çıkan karmaşık bir yaklaşımdır. Buna göre

f_n'lerin alttan bir integrallenebilir fonksiyon ile sınırlı olduğu ve üstten de f limit fonksiyonunun kendisi ile sınırlandırılması hipotez olarak alınmıştır. Doğal olarak f integrallenebilirdir, çünkü bu durum Lebesgue Yakınsaklık teoreminin özel bir halidir. Ancak Fatou Lemmasının ve Monoton Yakınsaklık Teoreminin Lebesgue Yakınsaklık Toremine göre daha iyi olan yanı integrallenemeyen f fonksiyonlarına da uygulanabiliyor olması ve f nin integrallenebilir olduğunu göstermesi için iyi bir yol oluşudur. Yalnızca integralin negatif olmama özelliğini kullanarak Fatou Lemması ve Monoton Yakınsaklık Teoreminden birini diğeri yardımıyla elde edebiliriz.

2.12 RİEMANN İNTEGRALİ

f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ noktalarıyla n tane alt aralığa bölelim. $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesine $[a,b]$ kapalı aralığının bölüntüsü veya parçalanması adı verilir. $k = 1,2,3,...,n$ olmak üzere $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ olsun. Δx_k değerinin en büyüğüne, bu P bölüntüsünün normu denir. $x \in [x_{k-1}, x_k]$ için

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

dersek bu durumda

$$S = \ddot{U}\left(f.P\right) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

$$s = A\left(f.P\right) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

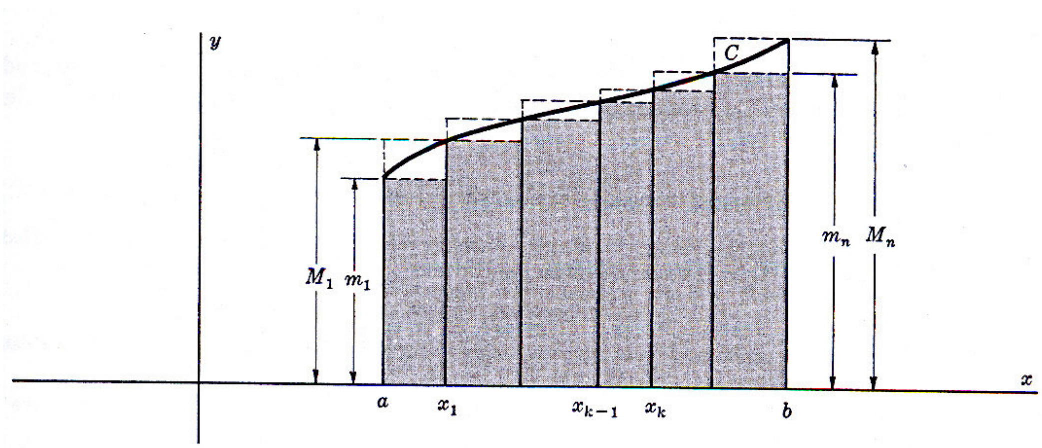
olarak tanımlanan ifadelere sırasıyla f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen Üst Darboux Toplamı ve Alt Darboux Toplamı adı verilir. Her zaman $\Delta x_k > 0$ ve $M_k \geq m_k$ olduğundan, üst toplam S, alt toplam olan s değerinden küçük olamaz. Yani $S \geq s$ olduğu için, $\ddot{U}\left(f,P\right) = S \geq s = A\left(f,P\right)$ yazılabilir. $\left[a,b\right]$ aralığının P parçalanması değişirse buna bağlı olarak değişen bu noktalar için S ve s toplamları da değişir. Böylece üst toplamlar için bir küme ve alt toplamlar için bir küme elde edilir. Mümkün olan tüm parçalanmalar için, $I = \sup\left(S\right)$ ve $J = \inf\left(s\right)$ olsun. Bu şekilde her zaman var olan I ve J değerlerine sırasıyla $\left[a,b\right]$ aralığında f fonksiyonun üst Darboux ve alt Darboux integralleri denir ve sırasıyla

$$I = \overline{\int_a^{b}} f\left(x\right)dx = \lim_{n\to\infty} \ddot{U}\left(f,P\right) \text{ ve } J = \underline{\int_{a}^b} f\left(x\right)dx = \lim_{n\to\infty} A\left(f,P\right)$$

ile gösterilir. $\left[a,b\right]$ herhangi bir aralığının P parçalanması için $A\left(f,P\right) \leq I \leq \ddot{U}\left(f,P\right)$ ve $A\left(f,P\right) \leq J \leq \ddot{U}\left(f,P\right)$ yazılabilir. Ayrıca üst Darboux integrali hiçbir zaman bir alt Darboux integralden küçük olamaz. Eğer üst Darboux ve alt Darboux integralleri birbirine eşit ise f fonksiyonuna $\left[a,b\right]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir ve

$$\left(R\right)\int_a^b f\left(x\right)dx$$

ile gösterilir. Bu ifadeleri geometrik olarak da yorumlamak mümkündür.



ŞEKİL 2.12.1 Riemann İntegralinin Geometrik Gösterimi

Şekil 2.12.1 de görüldüğü gibi $s = A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ noktalı olarak taralı alan ve $S = \ddot{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ olduğu açıktır. Ayrıca bu eğri, $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan alan $\int_a^b f(x)dx$ olmak üzere

$$s \le \int_a^b f(x)dx \le S$$

eşitsizliği sağlanır.

Riemann ve Alt Darboux, Üst Darboux toplamlarının aşağıdaki özellikleri vardır:

1. P, $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanması ise $A(f,P) \le \ddot{U}(f,P)$ dır.

2. $[a,b]$ aralığının herhangi iki parçalanması P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 parçalanmasına P_1'den daha incedir denir. P_2 parçalanması P_1'den daha ince ise $A(f,P_1) \leq A(f,P_2)$ ve $\ddot{U}(f,P_1) \geq \ddot{U}(f,P_2)$'dır.

3. Eğer P_1 ve P_2 $[a,b]$ aralığının herhangi iki parçalanması ise $A(f,P_1) \leq \ddot{U}(f,P_2)$'dır.

Teorem 2.12.1: $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı olan f fonksiyonunun Riemann anlamında integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, herhangi bir parçalanma için $S - s < \varepsilon$ olmasıdır.

İspat. $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, herhangi bir parçalanma için $S - s < \varepsilon$ olsun. $s \leq J \leq I \leq S$ olduğundan $0 \leq I - J \leq S - s < \varepsilon$ yazılabilir ve ε keyfi olduğundan $\varepsilon \to 0$ için $I = J$ olur. Bu da f fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığında Riemann anlamında integrallenebilir olduğunu gösterir.

2.13 Lebesgue İntegrali ile Riemann İntegrali Arasındaki İlişki

Daha önceki bölümde, sürekli fonksiyonların oldukça geniş bir genellemesi olan ölçülebilir fonksiyonların temel özellikleri incelenmişti. Riemann İntegrali geçerli değildir. Çünkü genel olarak ölçülebilir fonksiyonlar için kullanılamaz. Örneğin irrasyonel noktalarda sıfır, rasyonel noktalarda bir olan Dirichlet fonksiyonu ölçülebilirdir. Bu fonksiyonun Riemann anlamında integrali yoktur. Bu örnekten de görüldüğü gibi Riemann integralinin ölçülebilir fonksiyonlar için pek de kullanışlı olmadığı söylenebilir. Bunun nedeni Riemann integralinin tanımından kaynaklanmaktadır. Klasik analizden de bilindiği gibi bir f fonksiyonunun Riemann integralinin mevcut olması için f ' nin tanım aralığında sürekli olması ya da süreksiz olduğu noktalar kümesinin çok geniş olmaması gerekir. Başka bir deyişle f, integrallenme bölgesinde sınırlı salınımlı olmalıdır. Teorem 2.11.1'den anlaşılacağı gibi sınırlı fonksiyonların Riemann anlamında integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul süreksiz olduğu noktaların kümesinin ölçümünün sıfır olmasıdır. Lebesgue integralinin temeli ise Riemann integralinin tersine x noktalarının x-ekseni üzerindeki yakınlıkları ile değil fonksiyonların değerlerinin bu noktalardaki yakınlıkları ile ilgilidir. Ayrıca Lebesgue integrali, herhangi bir ölçüm uzayında tanımlanabilir. Örnek olarak olasılık uzayı verilebilir. Ancak aynı durum genel olarak Riemann integrali için geçerli değildir.

Lemma 2.13.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.

1. f Riemann anlamında integrallenebilir $\Leftrightarrow$ f, $[a,b]$ kapalı aralığının hemen hemen her noktasında süreklidir.
2. f Riemann anlamında integrallenebiliyorsa Lebesgue anlamında da integrallenebilirdir ve her iki integral birbirine eşittir.

İspat: Tanımlardan hareket ederek bu lemmanın ispatı yapılabilir.

2.14 $\mathcal{L}_p$ Uzayları

(X,U,μ) bir ölçü uzayı olsun. $0<p<\infty$ ve $M(X,U)$ X üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi olmak üzere

$\mathcal{L}_p = \left\{ f \in M(X,U) : |f|^p \in \mathcal{L}(X,U,\mu) \right\}$ kümesine p.inci kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir. Özel olarak $p = 1$ alınırsa bu sınıfı $\mathcal{L}_1$ yada $\mathcal{L}$ ile göstereceğiz. Önceki bölümde belirtmiş olduğumuz gibi f fonksiyonunun integrallenebilir olması ile $|f|$' nin integrallenebilir olması aynıdır. $f \in \mathcal{L}_p$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\alpha f \in L^p$ dir. $|f|^p$ integrallenebilir olduğunda $|\alpha|^p |f|^p$'de integrallenebilirdir. Diğer taraftan $f, g \in \mathcal{L}_p$ ise $f + g \in \mathcal{L}_p$ dir.

$$|f+g| \le \left(|f|+|g|\right) \le \left(2\text{maks}\left\{|f|,|g|\right\}^p\right) \le 2^p\left(|f|^p + |g|^p\right)$$

olduğundan $|f+g|^p$ integrallenebilir olduğundan $f + g \in \mathcal{L}_p$'dir. Bu durumda $\mathcal{L}_p$ uzayı bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde $p \ge 1$ olmak üzere

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde tanımlanan $\|.\| : \mathcal{L}_p \to \mathbb{R}$ norm bir yarı normdur. Norm olabilmesi için,

1. $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = 0$,

2. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f \in \mathcal{L}_p$ $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$,

3. $\|f+g\| \le \|f\|_p + \|g\|_p$

şartlarının sağlanması gerekir. Bu yarı normu, norm yapabilmek için (1) koşulunun tüm f'ler için sağlaması gerektiğini göstermemiz gerekir. Bunun için de aşağıdaki denklik sınıfını göz önüne alalım.

$f \sim g \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = g$ bağıntısı bir denklik bağınıtısıdır ve $\mathcal{L}_p$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıfının elamanlarını $[f]$ ile gösterirsek bu tipteki elemanların kümesi olan $\mathcal{L}_p$ üzerinde

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu bir normdur. Denklik sınıfı oluşturmamızdaki amaç birbirine hemen hemen her yerde eşit olan fonksiyonları bir sınıfta toplamaktır. Böylece hepsini tek bir eleman gibi düşünebiliriz. Şimdi bu konuyuda içine alan bazı önemli eşitsizlikleri verelim;

1. (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f \in L_p$ $g \in L_q$ ise $fg \in L_1$ dir ve

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır.

2. (Minkowsky Eşitsizliği) Eğer $p > 1$, $f, g \in L_p$ ise $f + g \in L_p$ ’ dir ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliklerin ispatları Araştırma Bulguları kısmında verilmiştir.

Tanım 2.14.1: Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu $(X, \|.\|)$ norm uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir. Uygulamalarda bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayının tamlığını ya da Banach uzayı olduğunu ispatlamak için X ’de keyfi bir (x_n) Cauchy dizisi alınıp bunun X ’de yakınsak yani $\lim\limits_{m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0$ olduğunu göstermek gerekir.

Lemma 2.14.1: (Riesz-Fisher) (X, U, μ) bir ölçü uzayı ve $1 \le p < \infty$ olsun. L_p uzayı

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu altında tamdır.

İspat: Bu Lemmanın ispatı için $[17]$' e bakılabilir.

2.15. $\mathcal{L}_\infty$ Uzayı

Tanım 2.15.1 : (X, U, μ) bir ölçü uzayı $E \subset X$ ve E kümesi $\mu -$boş $\Leftrightarrow X$ in

1. $B \in A$, 2. $\mu(B) = 0$ 3. $E \subset B$ ise ve $E \in A$, $\mu(E) \subset \mu(B) \Rightarrow \mu(E) = 0$. Yani ölçüsü sıfır olan ve ölçülebilen her küme $\mu -$boştur.

Tanım 2.15.2 : E local $\mu -$boştur $\Leftrightarrow$ Sonlu ölçülü her $S \in A$ kümesi için $S \cap E$ $\mu -$boştur.

Örnek 2.15.1: $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ ve bu aralıktaki rasyonel sayıların kümesi A, irrasyonel sayıların kümesi B olsun. Bu durmda $U = \{\emptyset, A, B, X\}$ sınıfı X üzerinde bir $\sigma -$cebidir. $\mu : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçüsünü

$$\mu(C) = \begin{cases} 1 \text{ , } C = A \text{ veya } C = A \\ 0 \text{ , } C = \emptyset \text{ veya } C = X \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $E=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ kümesi $\mu-$boştur. Çünkü A kümesi (1), (2) ve (3) özelliklerini sağlayan bir kümedir. Ancak $E\notin U$ ' dır. Ancak $F=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ kümesi $\mu-$boş değildir. Çünkü U 'da F 'i kapsayan ve ölçüsü sıfır olan bir küme yoktur.

Tanım 2.15.2 : (X,U,μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer X in her $\mu-$boş alt kümesi U $\sigma-$cebirine aitse (X,U,μ) ölçü uzayına tamdır denir.

Tanım 2.15.3 : (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve $E\subset X$ olsun. Sonlu ölçülü her $S\in U$ kümesi için $S\cap E$ kümesi $\mu-$boş ise E kümesine lokal $\mu-$boştur denir.

Sonuç 2.15.1 :

1. X ' in her bir $\mu-$boş kümesi lokal $\mu-$boştur.

2. μ ölçüsü $\sigma-$sonlu ise X ' in her lokal $\mu-$boş kümesi lokal $\mu-$boştur.

3. Local $\mu-$boş kümelerinin sayılabilir birleşimleri lokal $\mu-$boştur.

Tanım 2.15.4: (X,U,μ) bir ölçü uzayı ve $f:X\to\mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. $\left\{x\in X:\left|f(x)\right|>M\right\}$ lokal $\mu-$boş olacak şekilde M sayısı varsa f fonksiyonuna esas sınırlı fonksiyon denir ve $\mathcal{L}_\infty$ ile gösterilir. $M_1>M$ olmak üzere $\left\{x\in X:\left|f(x)\right|>M_1\right\}$ local $\mu-$boş kümenin her alt kümesi de lokal $\mu-$boştur. $\left\{x\in X:\left|f(x)\right|>M\right\}$ lokal $\mu-$boş olacak şekilde M sayılarının infumumuna f ' nin $\mathcal{L}_\infty$ uzayındaki normu denir ve $\|f\|_\infty$ ile gösterilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Olasılık Ölçüsü ve Olasılık Uzayları

Olasılık uzayı, Olay ve Olasılık ölçüsü kavramları fonksiyonlar teorisinde ölçü uzayı ölçülebilir küme ve ölçü kavramlarının özel bir halidir. Bu kavram ilk kez 1933 yılında A.N. Kolmogorov tarafından verilmiştir. Bu kavram hem olasılık teorisinin hem de onunla ilgili matematik kavramlarının gelişiminde önemli rol oynamıştır.

Daha önceki bölümlerde verilen tanımlarda kullanılan bazı semboller bu bölümde farklı anlamda kullanılacak olup X ile borel ölçülebilir bir fonksiyon olan rasgele değişkeni göstereceğiz.

Tanım 3.1.1: $\Omega \neq \emptyset$ ve U, Ω'da bir $\sigma-$cebir olsun. Bu durumda her bir $A \in U$ kümesine olay denir.

Tanım 3.1.2: U, Ω'da bir $\sigma-$cebir olmak üzere,

$$P : U \to [0,1]$$
$$\mathrm{A} \to P(\mathrm{A})$$

olarak tanımlanan P fonksiyonu

1. $\forall\ A \in U$ için $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. U'daki ayrık kümelerin herbir $(A_n)_1^\infty$ dizisi için

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerine sahip ise P fonksiyonuna U üzerinde bir olasılık ölçüsü denir. $P(A)$ değerine A'nın olasılık ölçüsü veya A' nın olasılığı adı verilir. Bu özelliklere olasılık aksiyomları adı verilir. Özellikle 3. üncü aksiyom $\sigma-$alt toplamsallık olarak adlandırılır. Eğer sonlu tane olay için geçerli olduğunda P olasılığı sonlu toplamsaldır.

Tanım 3.1.3: Ω boş olmayan bir küme U ve Ω'da bir $\sigma-$cebir ise P fonksiyonu U üzerinde bir olasılık ölçüsü olmak üzere (Ω, U, P) üçlüsüne olasılık uzayı adı verilir.

Lemma 3.1.1: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. Bu durumda

1. $P(\varnothing)=0,$

2. $A_1, A_2, \cdots, A_n$, U'da ayrık kümeler olmak üzere $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$,

3. $P(A^t)=1-P(A),$

4. $A \subset B$ ise $P(A) \le P(B),$

5. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B),$

6. $0 \le P(A) \le 1,$

7. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ ve $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$

8. U'daki (A_n) dizisinde $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ veya $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ ise

$\lim_{n\to\infty} P(A_n)=P\left(\lim_{n\to\infty}(A_n)\right)$

özellikleri geçerlidir.

İspat: Bu Lemmanın ispatı için $[16]$**'** ya bakabilirsiniz.

3.2 Rasgele Değişkenler

Bir olasılık deneyinin tüm sonuçlarının kümesi olan Ω örnek uzayının elemanları çok değişik biçimde olabilir. Rasgele değişken yardımıyla Ω 'nın elemanlarına reel sayılar eşlenmektedir, öyleki (Ω, U, P) olasılık uzayındaki her $A \in U$ için $P(A)$ olasılığı reel sayılardaki $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ Borel cebiri üzerinde kurulmuş uygun bir olasılık ölçüsü ile verilmektedir. Böylece teorik olarak incelenmesi gereken olasılık ölçüleri Borel cebiri üzerindeki olasılık ölçülerine indirgenmiş olur.

Tanım 3.2.1 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\to X(\omega) \end{aligned}$$

olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\{X < x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in U$$

ise X fonksiyonuna rasgele değişken denir.

Yukarıdaki tanımda (Ω, U, P) olasılık uzayı (Ω, U) ikilisi ile değiştirilirse X fonksiyonuna ölçülebilir veya $U-$ölçülebilir fonksiyon denir. Her rasgele değişken aynı zamanda bir ölçülebilir fonksiyondur, ancak bir $U-$ölçülebilir fonksiyonunun rasgele değişken olması için Ω daki U $\sigma-$cebiri üzerinde bir P olasılık ölçüsünün var olması gerekir. Bir $U-$ölçülebilir fonksiyonu yardımıyla U üzerinde değişik olasılık ölçüleri tanımlayarak değişik rasgele değişkenler elde edebiliriz.

Örnek 3.2.1 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı , $A \in U$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega \to X(\omega) = I_A(A) = \begin{cases} 0 & ,\omega \notin \mathrm{A} \\ 1 & ,\omega \in \mathrm{A} \end{cases}$$

olmak üzere X bir rasgele değişkendir**.** Gerçekten, $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{array}{lll} x < 0 & \text{ise} & (X < x) = \varnothing \in U \\ 0 \leq x < 1 & \text{ise} & (X < x) = \overline{A} \in U \\ x \geq 1 & \text{ise} & (X < x) = \Omega \in U \end{array}$$

olduğundan $X = I_A$ bir rasgele değişkendir**.**

Teorem 3.2.1: X ve Y herhangi iki rasgele değişken ise $c \in \mathbb{R}$ sabit olsun. Bu takdirde $X+c$, cX, $X+Y$, $Y-X$, X^2, XY ve $|X|$ fonksiyonları da rasgele değişkendir.

İspat: Teorem 2.7.1' de f ve g yerine X ve Y yazılır ve benzer işlemler yaparsak teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.2.2: $(X_n)_1^\infty$ rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Bu durumda $\max\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, $\min\limits_{n \leq k} X_n$, $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} \sup X_n$, $\lim\limits_{n \to \infty} \inf X_n$ fonksiyonlarının tümü rasgele değişkendir.

İspat: Teorem 2.7.2 de $(f_n)_1^\infty$ yerine $(X_n)_1^\infty$ yazılır ve benzer işlemler yaparsak teorem ispatlanabilir.

Tanım 3.2.2: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, $X:\Omega \to \mathbb{R}$ bir rasgele değişken olsun.

$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P(X \in B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

fonksiyonuna X rasgele değişkenin olasılık dağılımı veya sadece dağılımı denir. X rasgele değişken ve $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel kümesi olduğundan $\{X \in B\} \in U$ olduğu açıktır. Buna göre eşitliğin sağ tarafındaki olasılık her zaman mevcuttur. Dolayısıyla P_X fonksiyonu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$'de tanımlıdır. Bu fonksiyon $\mathcal{B}(\mathbb{R})$' de olasılıktır. Gerçekten P_X fonksiyonun Tanım 4.2' deki olasılık aksiyomlarını sağladığı açıktır. Böylece (Ω, U, P) uzayında tanımlı her bir $X:\Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişkeni yeni bir $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X\right)$ olasılık uzayı üretir.

3.3 Dağılım Fonksiyonları

Olasılık dağılımı kümenin bir fonksiyonu olduğundan bunun özelliklerinin klasik reel analiz metotlarıyla incelenmesi kolay değildir. Bundan dolayı olasılık dağılımı ile reel değişkenli bir fonksiyon arasında bağıntı kurmak çok önemlidir. Böyle bir bağıntıyı dağılım fonksiyonu yardımıyla elde edebiliriz. Şimdi de bu kavram ve bunun özellikleri üzerinde duralım.

Tanım 3.3.1 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve X bir rasgele değişken olmak üzere,

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \to [0,1] \\ &x \to F(x) = P(X \le x) = P\left(X^{-1}(-\infty, x]\right) \end{aligned}$$

fonksiyonuna X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu denir. Bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. F, $\mathbb{R}$' de monoton artan yani $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$

2 F, $\mathbb{R}$ ' de soldan süreklidir $\lim\limits_{y \to x, y<x} F(y) = F(x)$,

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$' deki her olasılık ölçüsü yardımıyla bu üç özelliğe sahip bir dağılım fonksiyonu tanımlanabilir.Böyle tanımlanan P fonksiyonu genişletme teoremindeki özellikleri sağlamaktadır ve F fonksiyonu yardımıyla $P\left(X^{-1}(-\infty, x]\right) = F(x)$ olacak şekilde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ' de yani Borel cebri üzerinde bir tek P olasılık ölçüsü tanımlanmış olur. Böyle belirlenen P olasılık ölçüsüne Lebesgue-Stieltjes olasılık ölçüsü adı verilir. Daha sonraki bölümlerde gösterileceği gibi, X rasgele değişkenin ölçülebilirliği Lebesgue integralinin tanımlanabilmesi için en önemli koşullardan biridir.

Ölçülebilirlik dağılım fonksiyonun tanımlanması içinde çok önemlidir. X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu $F(x)$ ile gösterirsek $F(x) = P(X \leq x) = P\left(X^{-1}(-\infty, x)\right)$ bu sonuç gösteriyor ki, rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonun tanımı da rasgele değişkenin ölçülebilir olmasını gerektirir.

3.4. Kesikli Rasgele Değişkenler ve Olasılık Fonksiyonları

Tanım 3.4.1: X rasgele değişkenin değer kümesi sonlu veya sayılabilir olduğunda X ’e kesikli rasgele değişken ve X ’ in belirlediği olasılık dağılımına da kesikli dağılım denir.

Kesikli X rasgele değişkenin aldığı değerlerinin kümesi D_X olsun, X rasgele değişkenin $x \in D_X$ değerlerini alması olasılığı,

$P(X = x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ olmak üzere

$$\sum_{x \in D_X} P(X = x) = P\left\{ \bigcup_{x \in D_X} (X = x) \right\} = 1$$

olur. Kesikli X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X \leq x)$ olmak üzere F fonksiyonu bir basamak fonksiyonudur.

Tanım 3.4.2: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve X, bu uzayda tanımlı bir rasgele değişken olsun. Bu takdirde

1. $f(x) \geq 0 \quad x \in D_X$

2. $\sum_{x \in D_X} f(x) = 1$

özelikleri sağlanıyorsa

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} P(X = x) & , x \in D_X \\ 0 & , \text{d.y} \end{cases}$$

fonksiyonuna X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu denir.

3.5 Sürekli Rasgele Değişkenler ve Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

Tanım 3.5.1: Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olsun.

1. $f(x) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

özelliklerini sağlıyorsa f fonksiyonuna olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

Tanım 3.5.2 : Bir X rasgele değişkenin F dağılım fonksiyonu bir f olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \quad , \ -\infty < x < \infty$$

olarak yazılabiliyorsa X rasgele değişkenine mutlak sürekli veya kısaca sürekli rasgele değişken ve f fonksiyonuna X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. X rasgele değişkeni sürekli ise

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{dF(x)}{dx}, & F(x) \text{ in türevlenebildiği yerlerde} \\ 0 & , \text{d.y} \end{cases}$$

yazılabilir.

3.6. Lebesgue-Stieltjes İntegrali

Lebesgue integrali tanımlandığında dikkate alınan fonksiyonun Lebesgue anlamında ölçülebilir kümede tanımlandığı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olduğu kabul edilmişitir. Şimdi Stieltjes ölçümü kavramından yola çıkarak aralıkların Stieltjes ölçümü ve elementer kümlerin Stieltjes ölçümü tanımı yardımıyla, Stieltjes anlamında ölçülebilir küme kavramı da tanımlayabiliriz. Burada önemli olan aralıkların Stieltjes ölçümüdür.

Lebesgue ölçümünde olduğu gibi Stieltjes ölçümünde de (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ aralıklarının ölçümünü tanımlamak gerekir. Bu aralıkların ölçümü herhangi bir F fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. F fonksiyonu, monoton artan ve soldan sürekli başka bir deyişle $F(x-0)=F(x)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $F(x)$ fonksiyonu yardımıyla aralıkların Stieltjes ölçümleri aşagıdaki gibi tanımlanır.

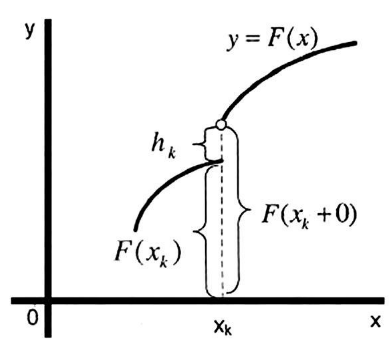
1. $\mu[a,b]=F(b+0)-F(a)$,

2. $\mu[a,b)=F(b)-F(a)$,

3. $\mu(a,b]=F(b+0)-F(a+0)$,

4. $\mu(a,b)=F(b)-F(a+0)$.

Stieltjes ölçümünün tanımında yer alan $F(x)$ fonksiyonu Şekil 4.1'de verilmiştir.



Şekil 3.6.1 Monoton azalmayan soldan sürekli bir fonksiyon

$x_k=[x_k,x_k]$ şeklinde yazılabildiği için $\mu(x_k)=\mu[x_k,x_k]=F(x_k+0)-F(x_k)=h_k$ olur. Bu durumda Lebesgue ölçümünde farklı olarak, bir noktanın Stieltjes ölçümü sıfır olmayabilir. Ancak, ölçümün kümeler için tanımlanması, daha sonra dış ölçüm kavramı ve ölçüm kavramı, Lebesgue ölçümünde olduğu gibidir. Bu açıdan şimdi ele alınan ölçüme Lebesgue-Stieltjes ölçümü denir. Lebesgue integrali kavramında Lebesgue-Stieltjes integrali ölçümü dikkate alınırsa, Lebesgue-Stieltjes integrali de önce basit fonksiyonlar için daha sonrada ölçülebilir fonksiyonlar için tanımlanabilir. Lebesgue-Stieltjes ölçümü μ_F ile gösterilir. Bu ölçü F fonksiyonu yardımıyla ortaya çıkan ölçüm anlamına gelir. Eğer Lebesgue-Stieltjes ölçümüne göre integral tanımlanmışsa, bu integrali

$$\int_A f(x)\, d\mu_F \text{ veya } \int_A f(x)\, dF$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan Lebesgue-Stieltjes integralinin Lebesgue integralinden farkının sadece ölçümün seçimine bağlı olduğu ortaya çıkmaktadır. Daha öncede ifade edildiği gibi, sonlu sayıda değerlere sahip olan ölçülebilir fonksiyona basit fonksiyon denir. Lebesgue ölçüm teorisi, Stieltjes ölçümü için de geçerlidir. Basit fonksiyon kavramında da ölçümün Lebesgue anlamında ölçülebilirlik söz konusudur. Benzer olarak Stieltjes anlamında da ölçülebilirlik söz konusudur. Bu açıdan da ölçülebilirlik için gerek ve yeter koşul, verilmiş fonksiyonun düzgün yakınsak basit fonksiyonlar dizisinin limiti gibi gösterilebilmesidir. Bu ifade genel Stieltjes integralinin basit fonksiyonların limiti gibi tanımlamaya imkan verir. Örneğin $f(x)$ fonksiyonu basit fonksiyon ise $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$ Stieljes anlamında ölçülebilir bir fonksiyondur. A_n'nin ölçümü $\mu_F(A_n)$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu_F(A_n)$ mutlak yakınsak bir seri yani $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \mu_F(A_n) < \infty$ ise bu serinin toplamına, $f(x)$ basit fonksiyonun $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesi üzerindeki Stieltjes integrali denir ve $\int_A f(x)\, dF$ şeklinde ifade edilir.

$$\int_A f(x)\, d\mu_F = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu_F A_n$$

Eğer $f(x)$ fonksiyonu Lebesgue-Stieltjes anlamında ölçülebilir bir fonksiyon ise basit fonksiyonların $\left(f_n(x)\right)_1^{\infty}$ dizisinin düzgün yakınsak limiti şeklinde ifade edilir. Yani $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun A kümesi üzerinde Lebesgue-Stieltjes integrali

$$\int_A f(x)\, d\mu_F = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu_F$$

şeklinde tanımlabilir.

3.7. Beklenen Değer

Rasgele değişkenin ağırlıkları olasılıklar olduğundan bir rasgele değişkenin beklenen değeri o rasgele değişkenin ağırlıklı ortalaması olduğu bilinmektedir. Rasgele değişkenin beklenen değeri söz konusu olduğunda Lebesgue-Stieltjes integrali daha önemlidir ve bu integralin tanımı da Lebesgue integralinin tanımına benzer şekildedir. Lebesgue-Stieltjes integrali ile Lebesgue integralinin farkı tanımlanan ölçüye bağlıdır. İntegralin tanım sürecine dikkat edilirse her iki integralin tanım sürecide aynıdır. Bu açıdan Lebesgue integralinin olasılık teorisinde bazı uygulamaları Lebesgue-Stieltjes integrali içinde geçerlidir.

X rasgele değişkeni (Ω, U, P) olasılık uzayında verilmiş olsun. Burada Ω olaylar kümesi U bu olaylar üzerine kurulmuş σ-cebir ve P, U üzerinde kurulmuş olasılık ölçüsüdür. X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu $F(x)$ olsun. Lebesgue integralinin tanımına göre,

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_{y_i \in A} y_i \mu A_i \tag{3.1}$$

olur.

$f = X$ ve A_i kümesinin ölçümü olarak $\mu_F A_i = F(y_i + 0) - F(y_i)$ Lebesgue-Stieltjes integrali dikkate alındığında ve $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \mu_F(A_n) < \infty$ varsayımı altında

$$\int_A f(x)\, d\mu = \int_A X(\omega)\, d\mu_F = \sum_{y_i \in A} y_i \mu_F A_i = \int_{-\infty}^{+\infty} y dF,\ \omega \in \Omega$$

olur. Son İntegralde y yerine x yazarsak

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x)$$

integrali elde edilir. Daha basit bir şekilde ifade etmek istersek X rasgele değişkeninin x_i değerlerinin ortaya çıkma olasılıkları olarak kabul edersek bu değerlerin gerçekleşme olasılıkları $P(X = x_i)$ olan kesikli rasgele değişkenin beklenen değeri $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| P(X = x_n) < \infty$ varsayımı altında

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

olur. X rasgele değişkeni kesikli rasgele değişken ise integral toplam şekline dönüşür. Gerçekten F kesikli rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu ise bu monoton artan parçalı sabit bir fonksiyondur. Bu F yardımıyla A kümesinin stieltjes ölçümünü tanımlama imkanı sağlar.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

$$\mu_F A = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

şeklindedir. Burada h_i, x_i noktasında $F(x)$ fonksiyonun sıçramasıdır ve $h_i = P(X = x_i)$ olur. Böylece A olayının Stieltjes ölçümü için $\mu_F A = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$ yazılabilir. f fonksiyonu verildiğinde ve bu fonksiyonun $x = x_i$ deki değerinin $f(x_i)$ olduğunu düşünelim. Bu durumda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\; dF(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) P(X = x_i)$$

olur. $F(x)$ basamak fonksiyonu olduğu için

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\; dF(x) = \sum_{i} x_i P(X = x_i)$$

ve benzer olarak

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

yazılabilir. Bu integrale X rasgele değişkenin beklenen değeri ortalaması ya da birinci momenti denir. E ise beklenen değer operatörüdür.

Bir rasgele değişkenin alabileceği değerlerin reel sayılar doğrusuna nasıl yerleştiğini karakterize etmek için çeşitli sayısal göstergeler kullanılmaktadır. Beklenen değer bu göstergelerden birisidir ve X rasgele değişkenin alabileceği değerler bu gösterge etrafında gruplaşmaktadır. Bu tanımda (3.1) serisinin mutlak yakınsak olma koşulu önemlidir. Bu koşul altında beklenen değer X rasgele değişkenlerinin sıralanışına bağlı değildir. Çünkü (3.1) serisinin toplamı terimlerin keyfi yer değiştirmesi sonucu değişmez. Pozitif değerli rasgele değişkenlerin beklenen değeri pozitif terimli serinin toplamı olduğundan sonlu veya sonsuzdur. (3.1) serisi mutlak yakınsak olmadığı halde beklenen değer sonlu veya sonsuz olabilir veya mevcut olmayabilir. Bu durumların her birisi için beklenen değer mevcut değildir.

Şimdi beklenen değerin birkaç özelliğini verelim:

1. $E(X)<\infty$ ve $E(Y)<\infty$ ise keyfi a ve b reel sayıları için $E(aX+bY)<\infty$ olur. Ayrıca

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y).$$

2. $X \le Y$ ve $E(Y)<\infty$ ise o zaman $E(X)\le E(Y)$' dır.

3. $E(X)<\infty$ ise o zaman $\left|E(X)\right| \le E\left|X\right|$' dır.

4. X ve Y iki bağımsız rasgele değişken ve $E(X)<\infty$, $E(Y)<\infty$ olsun. Bu durumda $E(XY)<\infty$ ve

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

eşitliği doğrudur.

5. $\left|Y(\omega)\right| \le X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ ise $E(X)<\infty$ ve $E(Y)<\infty$ olur .

6. $E(X)$'in mevcut olması $E|X|$' in mevcut olmasını gerektirir

7. Her bir X rasgele değişkeni için aşağıdaki önermeler doğrudur:

a) $E|X|<\infty \Rightarrow |X|<\infty$ (w.p.1) olur. $(w.p.1)$ $(X_n)_1^\infty$ rasgele değişkenlerin dizisi ve $X(\omega)$ (Ω, U, P) olasılık uzayında tanımlanmış olsun. $N=\{\omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}$, $\omega \in \Omega$ $n \to \infty$ için $P(N)=1$ ise 1'e eşit olasılıkla yakınsak ve kısaca $(w.p.1)$ ile gösterilir.

b) $X \geq 0, E(X)=0 \Rightarrow X=0$ (w.p.1).

8. X ve Y rasgele değişkenleri için

$X=Y$ (w.p.1), $E(X)<\infty \Rightarrow E(X)=E(Y)$ dır.

Lemma 3.7.1: $E(X)<\infty$ ve $A_n \in U$, $n \geq 1$ ise $n \to \infty$ için

$$P(A_n) \to 0 \Rightarrow E(X, A_n) \to 0 \text{ dır.}$$

Sonuç 3.7.1: $E|X|<\infty$ ve $A_n \in U$ **,** $A_n \to \varnothing$ ise $E(|X|;A) \to 0$

Sonuç 3.7.2 : $E|X|<\infty$**,** $P(A)=0$ ise $E(X;A)=0$

Tanım 3.7.5: X , (Ω, U, P) olasılık uzayı üzerinde bir rasgele değişken olsun. X rasgele değişkenin pozitif ve negatif kısımlarını sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$X^+ = \max\{X, 0\}, \quad X^- = \max\{-X, 0\}.$$

X^+ ve X^- (Ω, U, P) üzerinde negatif olmayan rasgele değişkenler oldukları açıktır. Bu durumda X rasgele değişkenin beklenen değeri

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $E(X^+)$ ve $E(X^-)$ sonlu olmalıdır. Eger $E(X^+) = \infty = E(X^-)$ ise X rasgele değişkenin beklenen değeri mevcut değildir denir. $E(X^+)$ ve $E(X^-)$ sonlu olduğunda yani, $E(|X|) < \infty$ ise X rasgele değişkeni integrallenebilir denir.

Teorem 3.7.1: (Monoton Yakınsaklık Teoremi) X **,** $X_1, X_2, ..., X_n$ rasgele değişkenler olmak üzere,

$$0 \leq X_n \uparrow X \Rightarrow E(X_n) \to E(X) \leq \infty$$

dir.

İspat: Teorem 2.10.3' de $f_n(x)$ yerine (X_n) alınırsa benzer işlemler yapılarak teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.7.2: (Sınırlı Yakınsama Teoremi) (X_n) rasgele değişkenlerin bir dizisi $X_n \xrightarrow{p} X$ $|X_n| \leq Y$ $(\omega \in \Omega,\ n \geq 1)$ $E(Y) < \infty$ koşulunu sağlıyorsa, o zaman

$$E(X_n) \to E(X) < \infty \text{ , } n \to \infty \text{ dır.}$$

İspat: Teorem 2.11.3 de $f_n(x)$ yerine (X_n) rasgele değişkenler dizisi ve $f(x)$ yerine X rasgele değişkeni alınırsa benzer işlemler yapılarak teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.7.3 (Fatou Lemması) $X_n \geq 0$ $n \geq 1$ ise

$$E(\liminf X_n) \leq \liminf E(X_n)$$

dır.

İspat: Teorem 2.10.4' de $f_n(x)$ yerine (X_n) yazılır ve Eşitsizliğin her iki tarafının beklenen değeri alınırsa benzer işlemler yapılarak teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.7.4 (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve X, $X_1, X_2, \ldots$ bu uzayda tanımlı rasgele değişkenler olsun, Eğer $E(X) < \infty$ ve her n için $|X_n| \leq X$ oluyorsa bu takdirde

$$E\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right) = \lim_{n\to\infty} E(X_n)$$

olur.

İspat: Teorem 3.7.3 kullanılırsa

$$E\left(\liminf_{n\to\infty} X_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_n) \leq \limsup_{n\to\infty} E(X_n) \leq E\left(\limsup_{n\to\infty} X_n\right)$$

olduğundan ispatı tamamlamış oluruz.

Teorem 3.7.5: (Young Eşitsizliği). $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $p, q \in \mathbb{R}^+$ için, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun.

Bu durumda, $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geq ab$ 'dır.

İspat: b 'yi sabit tutalım ve $g(a) = \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$ fonksiyonunu tanımlayalım. $g(a)$ fonksiyonunu minimum yapmak için a 'ya göre türev alıp sıfıra eşitlersek:

$$\frac{d}{da} g(a) = 0 \Rightarrow\Rightarrow a^{p-1} - b = 0 \Rightarrow\Rightarrow b = a^{p-1} \Rightarrow a = b^{1/(p-1)}$$

olur. Bunun gerçekten minimum olduğunu görmek için ikinci türeve bakılması gerekir. Dolayısı ile fonksiyon, $b = a^{p-1}$ da fonksiyon minimum değerini alır. Şimdi bu minimum değeri hesaplayalım. $q(p-1)=p$ olduğu göz önüne alınırsa, fonksiyonun bu noktadaki minimum değeri sıfırdır. Çünkü

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}(a^{p-1})^q-aa^{p-1} &= \frac{a^p}{p}+\frac{a^p}{p}-a^p \\ &= a^p(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}-1)=0.\end{aligned}$$

Yani, $g(a)$ fonksiyonunun minimum değeri sıfırdır. Başka bir ifade ile,

$$\begin{aligned}g(a)\geq 0 &\Leftrightarrow \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}-ab\geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq ab\end{aligned}$$

olarak aranan sonucu elde ederiz.

Tanım 3.7.6: X bir rasgele değişken olmak üzere,

$$\|X\|_p=(E(|X|^p))^{1/p}$$

ifedesine X in p. normu denir.

Teorem 3.7.6: (Hölder Eşitsizliği) X ve Y herhangi iki rasgele değişken ve $p,q\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu durumda, $\|XY\|_1\leq\|X\|_p\|Y\|_q$ 'dır. Yani,

$$E(|XY|)\leq(E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q}$$

olur.

İspat: Yukarıdaki young eşitsizliğinde,

$$a=\frac{|X|}{(E(|X|^p))^{1/p}} \quad , \quad a=\frac{|Y|}{(E(|Y|^q))^{1/q}}$$

alırsak. Bu durumda

$$\frac{|X|}{(E(|X|^p))^{1/p}}\frac{|Y|}{(E(|Y|^q))^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|X|^p}{(E(|X|^p))} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{(E(|Y|^q))}$$

$$\frac{|XY|}{(E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|X|^p}{(E(|X|^p))} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{(E(|Y|^q))}$$

olur. Her iki tarafın beklenen değeri alınırsa

$$\frac{E|XY|}{(E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{E|X|^p}{(E(|X|^p))} + \frac{1}{q}\frac{E|Y|^q}{(E(|Y|^q))} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$E|XY| \leq (E(|X|^p))^{1/p}(E(|Y|^q))^{1/q}$$

bulunur. Bu da aranan eşitsizliktir. Başka bir ifade ile, aranan eşitsizlik

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 3.7.3

1. Hölder eşitsizliğinde özel olarak, $p = q = 2$ alalım. Yani,

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$$

dır. Bu eşitsizlikte X yerine $X - \mu_x$ ve Y yerine $Y - \mu_y$ yazarsak

$$|Cov(X,Y)| = |E((X-\mu_x)(Y-\mu_y))| \leq \sqrt{E(X-\mu_x)^2(Y-\mu_y)^2}$$

$$|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$$

olur.Bu eşitsizlik Cauchy- Schwartz eşitsizliği olarak bilinmektedir ve bunlar İstatistik, Matematik, İktisat gibi birçok bilimlerde değişik şekillerde karşımıza çıkmaktadır. Cauchy- Schwartz eşitsizliğini başka şekillerde de ifade edebiliriz.

2. Hölder eşitsizliğinde özel olarak $Y=1$ alalım. O zaman,

$$E\left|XY\right| \le (E(\left|X\right|^p))^{1/p}(E(\left|Y\right|^q))^{1/q}$$

$$E\left|X\right| \le (E(\left|X\right|^p))^{1/p}$$

bulunur.

3. X yerine X^r yazalım. O zaman, $E(\left|X\right|^r) \le (E(\left|X\right|^{rp}))^{1/p}$ olup her iki tarafın r. kökü alınırsa,

$$(E(\left|X\right|^r))^{1/r} \le (E(\left|X\right|^{rp}))^{1/rp}$$

elde edilir. Dikkat edilirse, $p>1$ olduğundan dolayı $s=rp>r$ olacaktır. Yani $s>r$ için

$$(E(\left|X\right|^r))^{1/r} \le (E(\left|X\right|^s))^{1/s}$$

veya

$$\left\|X\right\|_r \le \left\|X\right\|_s$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlik, Liapunov Eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Teorem 3.7.7: (Minkowsky Eşitsizliği) X ve Y herhangi iki rasgele değişken, $E(\left|X\right|^p)$ ve $E(\left|Y\right|^p)$ sonlu olsun. Bu durumda, $\left\|X+Y\right\|_p \le \left\|X\right\|_p + \left\|Y\right\|_p$'dır.

İspat: Bu eşitsizliğin ispatı da Hölder eşitsizliği kullanılarak ispatlanabilir. Ayrıca eşitsizliğin ispatı için değişik teknikler kullanılabilir. Önce, $a,b \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left|a+b\right|^p \le 2^p \max[\left|a\right|^p, \left|b\right|^p] \le 2^p[\left|a\right|^p + \left|b\right|^p]$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre, $E(\left|X\right|^p)$ ve $E(\left|Y\right|^p)$ sonlu ise $E(\left|X+Y\right|^p)$ de sonludur. Ayrıca, $\left|X+Y\right|^p = \left|X+Y\right|\left|X+Y\right|^{p-1} \le \left|X\right|\left|X+Y\right|^{p-1} + \left|Y\right|\left|X+Y\right|^{p-1}$ yazılabilir. Buradan,

$\|X+Y\|_p^p = E(|X+Y|^p) \le E(|X||X+Y|^{p-1}) + E(|Y||X+Y|^{p-1})$ bulunur. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafı için Hölder eşitsizliğini kullanalım. Hölder eşitsizliğinde Y yerine $|X+Y|^{p-1}$ alınırsa, $E(|X||X+Y|^{p-1}) \le [E(|X|^p)]^{1/p}\ [E(|X+Y|^{q(p-1)})]^{1/q}$ ve benzer şekilde $E(|Y||X+Y|^{p-1}) \le [E(|Y|^p)]^{1/p}\ [E(|X+Y|^{q(p-1)})]^{1/q}$ elde edilir. Ayrıca, $q(p-1)=p$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$E(|X|\ |X+Y|^{p-1}) \le [E(|X|^p)]^{1/p}\ [E(|X+Y|^p)]^{1/q}$$

$$E(|Y|\ |X+Y|^{p-1}) \le [E(|Y|^p)]^{1/p}\ [E(|X+Y|^p)]^{1/q}$$

yazılabilir. O zaman, $E(|X+Y|^p) \le\ [E(|X+Y|^p)]^{1/q}([E(|X|^p)]^{1/p}+[E(|Y|^p)]^{1/p})$ yazılır. Böylece

$$\|X+Y\|_p^p \le [E(|X+Y|^p)]^{1/q}(\|X\|_p + \|Y\|_p)$$

$$\|X+Y\|_p^p \le \left[\left(E(|X+Y|^p)^{1/p}\right)\right]^{p/q}\left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right)$$

$$\|X+Y\|_p^p \le \left[\|X+Y\|_p\right]^{p/q}\left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right)$$

$$\|X+Y\|_p \le \left[\|X+Y\|_p\right]^{1/q}\left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right)^{1/p}$$

olup, $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\|X+Y\|_p \le \left[\|X+Y\|_p\right]^{1-1/p}\left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right)^{1/p}$$

$$\|X+Y\|_p \le \|X+Y\|_p\left[\|X+Y\|_p\right]^{-1/p}\left(\|X\|_p + \|Y\|_p\right)^{1/p}$$

$$1 \leq \left[\|X+Y\|_p \right]^{-1/p} \left(\|X\|_p + \|Y\|_p \right)^{1/p}$$

$$1 \leq \frac{\left(\|X\|_p + \|Y\|_p \right)^{1/p}}{\left[\|X+Y\|_p \right]^{1/p}} \quad \Rightarrow \quad \left[\|X+Y\|_p \right]^{1/p} \leq \left(\|X\|_p + \|Y\|_p \right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$$

bulunur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin temel amacı, önce Lebesgue ölçüsü ve integrali ile Lebesgue-Stieltjes integralini karşılaştırmalı olarak incelemek ve daha sonra bu kavramların olasılık ve istatistik teorisindeki bazı uygulamalarını ortaya koymaktır. Bu konu ile ilgili çeşitli kaynaklardan yararlanarak tezin hedefine ulaşılmış, Ölçü ve İntegrasyonun İstatistik uygulamaları tezin sonunda verilmiştir.

Lebesgue İntegrali Teorisi, Riemann İntegrallinin genelleştirmesi olup İstatistikte kullanılan ve klasik anlamda olan bazı genelleştirilmiş integraller uygun koşullar altında Lebesgue anlamında verilip verilmeyeceği ileri bir araştırma konusu olabilir. Ayrıca istatistikteki bazı kavramlar Ölçü ve İntegraller kavramlarına dayandırılarak daha geniş bir perspektif açısından değerlendirilebilir. Bu tez, bunun için gerekli temel bilgileri kapsamaktadır.

Literatüre bakıldığında 1990 lı yıllardan sonra Ölçü ve Olasılık ile ilgili çok miktarda uluslararası dergilerde yayınlamış makaleler olduğu görülür. Ayrıca tezin kaynaklar kısmından da görülebileceği gibi Olasılık, İstatistik, Ölçü, İntegrasyon kavramlarını içeren temel kitaplar mevcuttur.

Bu tezde verilen konular yardımıyla Stokastik Süreçler ve özellikle Markov Süreçleri incelenebilir. Ancak bu temel teorinin anlaşılması için Reel Analiz ve Topolojinin bazı kavramlarına da ayrıca ihtiyaç duyulmaktadır.

Dağılım fonksiyonun özellikleri literatürde değişik şekillerde verilmektedir. Bu çalışmada [19] nolu kaynaktan alıntı yapılmıştır. Diğer gösterim için [7] nolu kaynaktan faydalanılabilir.

KAYNAKLAR

1. ADAMS, M. and GUILLEMIN, V., Measure Theory and Probability; Birkheauser,Boston, (1996).
2. APOSTAL, T.M., Mathematical Analysis, Second Edition, Addission-Wesley Company, (1974).
3. ASH, R.B., Real Analysis and Probability, Academic Press, (1972).
4. BALCI, M., Reel Analiz, Ankara, (2000).
5. BARTLE, R., Lebesque Integral Kuramına Giriş. ODTÜ Matematik Vakfı Yayınları, Ankara, (1996).
6. BURRILL, C.W., Measure, Integration, and Probability, McGraw-Hill Book Company, (1972).
7. CAPINSKI, M. and KOPP. E., Measure, Integral and Probability, Springer, (1999).
8. CHAE, S.B., Lebesque Integration, Marcel Dekker, INC. New York and Basel, (1998).
9. CASELLA, G and BERGER.R. L., Statistical Inference, Duxbury (2002).
10. CRAVEN, B.D., Lebesque Measure & Integral, Pittman, (1982).
11. DOOB, J.L., Probabilty and Statistics, Transactions of the Mathematical Society Vol. 36, No.4 .(Oct 1934).
12. DUDLEY, R.M., Cambridge studies in advanced mathematics, Real Analysis and Probability, Cambridge Univ. Press. (2002).

13. FOMIN, S.V. and KOLMOGOROV, A.N., Çeviri: KARAÇAY, T. ve ATAMAN, T. Ölçüm Lebesque İntegrali ve Hilbert Uzayları. Türk Tarih Kurumu Basımevi, Ankara, (1977).

14. KÖREZLİOĞLU, H. and HAYFAVİ, A.B., Elements of Probability Theory.ODTU Yayınları, Ankara, (2000).

15. MUSAYEV. B. ve ALP, M., Fonksiyonel Analiz. Balcı Yayınları. Kütahya, (2000).

16. ÖZDAŞ. A., Lebesque Ölçümü. Anadolu Üniv. Yayınları; No. 980. Eğitim Fak. Yayınları, No. 44, Eskişehir, (1997).

17. ÖZTÜRK. F., Matematiksel İstatistik, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesiYayınları No:10, Ankara, (1993).

18. ROYDEN. H.L., Real Analysis. Second Edition, Macmillan Publishing Co, Inc. (1968).

19. SHAHBAZOV. A., Olasılık Teorisine Giriş. Birsen Yayınevi, (2005).

20. SPIEGEL. M.R.,Theory and Problems of Real Variables Lebesque Measure and Integration with Applications to Fourier Series. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, (1969).

21. ŞAMİLOV. A., Ölçüm Teorisi, Olasılık ve Lebesgue İntegrali, T.C Anadolu Üniversitesi Yayınları No: 1734, Eskişehir, (2007).