T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TÜREV ALTINDA ÖTELEMEYİ KORUYAN TEK DEĞİŞKENLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER

NİHAL AYDINYER

HAZİRAN 2007

ÖZET

TÜREV ALTINDA ÖTELEMEYİ KORUYAN TEK DEĞİŞKENLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER

AYDINYER, Nihal

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN

HAZİRAN 2007, 69 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde ötelemeyi koruyan lineer pozitif operatörlerin i-yinci basamaktan türevlerinin süreklilik modülü ile olan ilişkisi incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise materyal ve yöntem olarak; tanımlanan bazı operatörlerin türevlerinin de ötelemeyi koruduğu ve bazı eşitsizlikleri sağladığı ve ayrıca bu operatörlerin olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuca ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Süreklilik Modülü, Ötelemeyi Koruyan Operatör, Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu, Genelleştirilmiş Operatörler

ABSTRACT

DIFFERENTIATED SHIFT INVARIANT UNIVARIATE INTEGRAL OPERATORS

AYDINYER, Nihal

Kırıkkale University

Graduate School Of and Applied Sciences

Department of Mathematics, M.Sc. Thesis

Supervisor Asst. Prof. Dr. Ali OLGUN

June 2007, 69 pages

This thesis consists of four chapter. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, i-th order derivatives of shift invariant linear positive operators are given with modulus of continuity. In the third chapter, some operators are defined and it is shown that their derivatives are shift invariant and they satisfy some inequalities. Finally, the fourth chapter is devoted to the discussion and conclusions.

Key Words: Modulus Of Contunuity, Shift Invariant Operator, Probability Density Function, Generalized Operators.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanmasında bana yol gösterici olan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN ‘ a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca, tez yazım süresince bana destek olan ailemin değerli fertlerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL SAYFASI

$L(f;x)$:	Lineer operatör
X,Y :	Lineer normlu fonksiyon uzayları
$L_k(f;x)$:	Lineer pozitif operatör dizisi
$\|f\|_p$:	$L_p(a,b)$ de f ‘ nin p normu
ω_1 :	Süreklilik modülü
l_k :	Lineer operatör
φ :	Lebesque ölçülebilir özel bir fonksiyon
$L_k^{(i)}$:	L_k operatörünün i-yinci türevi
$\delta_0^{\ f}$:	Lineer operatör
$D_k(f;x)$:	Pozitif lineer operatör
$(\phi_0 f;x)$:	Lineer operatör
$(\Omega_k f;x)$:	Pozitif lineer operatör
$(\tau_0 f;x)$:	Lineer operatör
$A_k(f;x)$:	Lineer pozitif operatör dizisi
$B_k(f;x)$:	Lineer pozitif operatör dizisi
$L_k(f;x)$:	Lineer pozitif operatör dizisi
$\Gamma_k(f;x)$:	Lineer pozitif operatör dizisi

1.GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisinde genel integral tipli lineer pozitif operatörlerin ötelemeyi ve süreklilik modülünü koruduğu gösterilmiştir[5]. Benzer düşünce genel integral tipli lineer pozitif operatörlerin i-yinci basamaktan türevlerinin de ötelemeyi ve süreklilik modülünü koruduğu ve elde edilen eşitliklerin doğruluğu örneklerle gösterilmektedir.

Tanımlı ve konvolüsyon tipli bir lineer pozitif operatörün sonlu lineer kombinasyonu yardımıyla bir integral operatör oluşturulabilir. Bu şekilde oluşturulan integral operatörler, Matematikte lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri teorisinde önemli bir uygulama alanına sahiptir. Ayrıca yaklaşımlar teorisinde olasılık yoğunluk ve sürekli dağılım fonksiyonlarında da önemli uygulama alanlarına sahiptir. Biz bu çalışmada bu şekilde oluşturulan operatörlerin türetilmesini ve sağladığı bazı özellikleri ele alacağız. Belirtelim ki bu tip genelleştirmeler ile yakınsaklık hızı açısından klasik duruma göre daha iyi sonuçlar alınmaktadır. Bunun için önce bazı temel tanım ve teoremleri verelim.

1.1. Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 1.1.1. (Operatör) X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları olsunlar. Eğer X deki her bir fonksiyona karşılık Y de bir fonksiyon bulunabiliyorsa, bu durumda dönüşümü yapan bağıntıya "operatör" denir.

Bir operatör fonksiyonlar kümesini fonksiyonlar kümesine dönüştürür ve operatör genellikle $L(f;x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım1.1.2. (Lineer Operatör) Bir $L(f;x)$ operatörü için; $\alpha,\beta \in R$ ve $f,g \in X$ olsun. Eğer L;

$L(\alpha f+\beta g)=\alpha L(f)+\beta L(g)$ özelliğini sağlıyorsa operatöre lineer operatör denir.

Tanım 1.1.3.(Pozitif Operatör) X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları olmak üzere $L: X \to Y$ operatörünü göz önüne alalım. Eğer X deki her $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ oluyor ise L operatörüne pozitif operatör denir.

Pozitif L operatörlerinin $k \in Z$ için bir dizisini oluşturur ve L_k ile gösterirsek $L_k(f;x)$ bir lineer pozitif operatör dizisi olacaktır.

1.2.Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

x , $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rastgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna x rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

1. $f(x) \geq 0$; $-\infty < x < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Teorem 1.2.1.

$-\infty < a < b < \infty$ için $[a,b]$ aralığında ölçülebilir ve $p \geq 1$ için

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına $L_p(a,b)$ uzayı denir. Bu uzaylarda norm $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.2.2. $X = C_U(R)$ olmak üzere $C_U(R)$, R de düzgün sürekli reel değerli fonksiyonlar sınıfı olsun. l_k, X den $C(R)$ ye bir lineer pozitif operatör, f; R den R ye sürekli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu, $l_k f$ bir sürekli dağılım fonksiyonu, ayrıca $a > 0$ için $[-a,a]$ da $\varphi > 0$, $\sup(\varphi) \subseteq [-a,a]$ ve $\forall x \in R$ için $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-u)du = 1$ olsunlar. O taktirde

$$L_k(f;x) := \int_{-a}^{a} (l_k f)(2^k u - x)\, \varphi(u) du\,; \qquad k \in Z$$

şeklinde tanımlanan L_k operatörü f ye uygulandığında R den R ye bir sürekli dağılım fonksiyonu oluşturur.

1.3.Süreklilik Modülü

X integrallenebilen fonksiyonların uzayı ve $f \in X$ olmak üzere her $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega_1(f;\delta) = \sup_{|t|\le\delta} |f(x+t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlanan $\omega_1(f;\delta)$ ifadesine f nin süreklilik modülü denir.

Bu şekilde tanımlanan süreklilik modülü aşağıdaki önemli özellikleri sağlar.

1. $\lim_{\delta\to 0} \omega_1(f;\delta) = 0$

2. $m \in N$ olmak üzere

   $\omega_1(f;m\delta) \le m\omega_1(f;\delta)$

3. Keyfi bir pozitif λ reel sayısı için

   $\omega_1(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\omega_1(f;\delta)$

Bunların yanında ω_1 süreklilik modülü negatif olmayan monoton artan bir fonksiyondur.

1.4. Kaynak Özetleri

G. Anastassion ve H. Gonksa [3] bir makalelerinde tek değişkenli ötelemeyi koruyan operatörler için süreklilik modülünün bütün özelliklerini koruduğunu göstermişlerdir. Daha sonra tek değişkenli ötelemeyi koruyan operatörlerin türevlerinin de ötelemeyi koruduğunu ve bunların da süreklilik modülünün temel özelliklerini koruduğunu göstermişlerdir[5]. Bu çalışmalar G. Anastassion ve G. Gal'ın kitabında toparlanmıştır.

1.5. Çalışmanın Amacı

Çekirdeği negatif olmayan ve bazı monotonluk koşullarını sağlayan integrallere singüler integraller diyoruz. Bu tezde genelleştirilmiş singüler integrallerin i. dereceden türevlerinin yaklaşım fonksiyonunun süreklilik modülü yardımıyla düzgün yakınsaklığı incelenecektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, ötelemeyi koruyan genel integral tipli lineer pozitif operatörler ve süreklilik modülü tanımlanacaktır. Ayrıca bu genelleştirilmiş integral operatörlerin i. basamaktan türevleri alınarak süreklilik modülü ile olan ilişkisi ve fonksiyonun özel seçimi durumunda sağladığı eşitlikler gösterilecektir.

2.1. Ötelemeyi Koruyan İntegral Operatörleri

L_k integral operatörleri, R üzerinde tanımlı ve konvülüsyon tipli lineer pozitif operatörler ve temel integral operatörlerin sonlu lineer kombinasyonu yardımı ile oluşturulsun. Biz bu tezde önce tanımlanacak genel integral tipli lineer pozitif operatörlerin ötelemeyi koruduğunu, daha sonra da bu operatörlerin i. türevlerinin süreklilik modülünü koruduğunu ve bazı temel özellikleri sağladığını göstereceğiz.

$X := C_U(R)$, R de düzgün sürekli reel değerli fonksiyonların sınıfı, $C(R)$ R de sürekli fonksiyonlar sınıfı olsun. $f \in X$ için $\omega_1(f;\delta) < +\infty$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

$\{l_k\}_{k\in z}$ pozitif lineer operatörler dizisinin $x \in R$, $f \in X$ için

$$l_k(f;x) = l_0(f(2^{-k}t);x)$$

veya

$$l_k(f;x) = l_0(f(2^{-k}\cdot);x) \qquad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanan eşitlikler yardımıyla $C(R)$ deki fonksiyonları $X := C_U(R)$ deki fonksiyonlara dönüştürdüğünü kabul edelim. Burada f fonksiyonun bağımsız değişkenini diğer değişkenlerle karışmaması için nokta ile göstereceğiz.

Sabit bir $a>0$, $m\in N$, $n\in Z$, $r\in Z$ ve $f\in X$ için

$$\sup\left| l_0(f;u)-f(y)\right| \leq \omega_1\left(f;\frac{ma+n}{2^r}\right) \tag{2.1.2}$$

kabul edelim. Ayrıca φ, $[-a,a]$ aralığında pozitif reel değerli Lebesque ölçülebilir ve $\forall x\in R$ için

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-u)\,du=1 \tag{2.1.3}$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\,du=1 \tag{2.1.4}$$

dır.

Örneğin:

$$\varphi(x):=\begin{cases}\dfrac{\cos^2 x}{\pi} & , \quad -\pi<x<\pi \\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^2(x-u)}{\pi}du=1 \qquad \text{olup}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)du=\int_{-\infty}^{-\pi}\varphi(u)du+\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)\,du+\int_{\pi}^{\infty}\varphi(u)du$$

$$=\int_{-\infty}^{-\pi}0\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 u\,du+\int_{\pi}^{\infty}0\,du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[u+\frac{\sin 2u}{2}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\pi+\frac{1}{2}\sin 2\pi-(-\pi)+\frac{1}{2}\sin 2\pi\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\{2\pi\}$$

$$=1$$

yani

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)du=1$$

olur ki bu ifade etmek istediğimizdir.

$\{L_k\}_{k\in z}$ X üzerinde pozitif lineer bir operatör dizisi olsun. Bu dizi için bir eşitlik

$$L_k(f;x):=\int_{-\infty}^{\infty}l_k(f;u)\,\varphi(2^k x-u)du \tag{2.1.5}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu eşitlikte özel olarak $k=0$ alınırsa

$$L_0(f;x):=\int_{-\infty}^{\infty}l_0(f;u)\,\varphi(x-u)du \tag{2.1.6}$$

yazabilir. Ayrıca $\forall x\in R$ için

$$L_k(f;x)=\int_{-\infty}^{\infty}l_k(f;u)\varphi(2^k x-u)du\,.$$

(2.1.1) eşitsizliğinden

$$=\int_{-\infty}^{\infty}l_0\left(f\left(2^k\cdot\right);u\right)\varphi\left(2^k x-u\right)du$$

$$=L_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x)$$

olur. Buradan da

$$L_k(f,x)=L_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);2^k x\right) \tag{2.1.7}$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 2.1.1. $\alpha \in R$ için $f_\alpha(\cdot) := f(\cdot + \alpha)$ olsun. Eğer $\phi(f_\alpha) = (\phi f)_\alpha$ ise ϕ' ye ötelemeyi koruyan operatör denir.

Teorem 2.1.1. $\forall k \in Z$, $u \in R$, $\alpha \in R$ (α sabit) ve her $f \in X$ için

$$l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot + \alpha\right); 2^k u\right) = l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right); 2^k (u+\alpha)\right) \tag{2.1.8}$$

oluyorsa, bu durumda L_k ötelemeyi koruyan operatördür.

İspat:

$$(L_0 f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (l_0 f)(u)\varphi(x-u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (l_0 f)(x-u)\,\varphi(u)\,du$$

yazılabilir. L_k operatörünün (2.1.7) ifadesinin yardımıyla ötelemeyi koruduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$L_k\left(f(.+\alpha);x\right) = L_k\left(f_\alpha;x\right) = L_0\left(f_\alpha\left(2^{-k}\cdot\right);\ 2^k x\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot + \alpha\right);\left(2^k x - u\right)\right)\varphi(u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot + \alpha\right);\left(2^k\left(x - 2^{-k}u\right)\right)\right)\varphi(u)\,du$$

olup, buna (2.1.8) ifadesi uygulanırsa

$$L_k\left(f(\cdot+\alpha);x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k\left(x - 2^{-k}u + \alpha\right)\right)\right)\varphi(u)\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k(x+\alpha) - u\right)\right)\varphi(u)\,du$$

$$= L_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\ 2^k(x+\alpha)\right) = L_k\left(f;x+\alpha\right)$$

elde edilir. Bu ise

$$L_k\left(f_\alpha\right) = \left(L_k(f)\right)_\alpha$$

olması demektir. Yani L_k operatörü ötelemeyi koruyan bir operatördür. Bu şekilde tanımlanan L_k operatörü süreklilik modülünü korur. Bu, bir teorem olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.1.2. Herhangi bir $f \in X$, $\forall u \in R$ ve $x, y \in R$ için

$$| l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u) | \leq \omega_1(f; |x-y|) \tag{2.1.9}$$

olsun. Bu durumda $\delta > 0$ için

$$\omega_1(L_k f; \delta) \leq \omega_1(f; \delta) \tag{2.1.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

(2.1.4), (2.1.6) ve (2.1.9) ifadelerini kullanırsak

$$| L_0(f; x) - L_0(f; y) | = \left| \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; x) \varphi(x-u) du - \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; y) \varphi(y-u) du \right|$$

olup, burada $u \to x-u$ ve $u \to y-u$ dönüşümü yapılırsa,

$$|L_0(f; x) - L_0(f; y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; x-u) \varphi(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} l_0(f; y-u) \varphi(u) du \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) | l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u) | du$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du \right) \sup_{u \in R} | l_0(f; x-u) - l_0(f; y-u) |$$

$$|L_0(f; x) - L_0(f; y)| \leq \omega_1(f; |x-y|) \tag{2.1.11}$$

sonucunu elde ederiz. L_k operatörü için (2.1.7) eşitliğinden ve (2.1.11) eşitsizliğinden

$$| L_k(f; x) - L_k(f; y) | = \left| L_0\left(f\left(2^{-k} \cdot\right); 2^k x\right) - L_0\left(f\left(2^{-k} \cdot\right); 2^k y\right) \right|$$

$$\leq \omega_1\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);2^k\left|x-y\right|\right)=\omega_1\left(f;\left|x-y\right|\right)$$

bulunur. Bu eşitlikte her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|L_k(f;x)-L_k(f;y)\right| \leq \sup_{|x-y|\leq\delta}\omega_1\left(f,\left|x-y\right|\right)$$

yani

$$\omega_1(L_k f;\delta)\leq\omega_1(f;\delta)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3. $f\in X$ için (2.1.2) ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

Bu durumda $m\in N$, $n\in Z^+$, $k,r\in Z$ için

$$\left|L_k(f;x)-f(x)\right|\leq\omega_1\left(f;\frac{ma+n}{2^{k+r}}\right) \tag{2.1.12}$$

dir.

İspat:

$\varphi\subset[-a,a]$ olduğundan, (2.1.3) ve (2.1.7) ifadelerinden görebiliriz ki

$$\left|L_k(f;x)-f(x)\right|=\left|L_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);2^k x\right)-f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left\{l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);u\right)-f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right\}\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$=\left|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\left\{l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);u\right)-f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right\}\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$\leq\sup_{2^k x-a\leq u\leq 2^k x+a}\left|l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);u\right)-f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right|\left(\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\varphi\left(2^k x-u\right)du\right)$$

yani

$$\left|L_k(f;x)-f(x)\right|\leq\sup_{2^k x-a\leq u\leq 2^k+a}\left|l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);u\right)-f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right|. \tag{2.1.13}$$

$g:=f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\in X$ olarak alalım. Bu ifade (2.1.12) ye sağdan uygulanırsa

$$\sup_{|u-2^k x|\le a} \left| l_0(g;u) - g\left(2^k x\right)\right| \le \omega_1\left(g;\frac{ma+n}{2^r}\right)$$

$$= \sup_{|h|<\frac{ma+n}{2^r}} \left| g(x+h) - g(x)\right|$$

$$= \sup_{\left|2^k h\right|<\frac{ma+n}{2^r}} \left| f\left(2^{-k}\cdot + h\right) - f\left(2^{-k}\cdot\right)\right|$$

$$= \sup_{|h|<\frac{ma+n}{2^{r+k}}} \left| f\left(2^{-k}\cdot + h\right) - f\left(2^{-k}\cdot\right)\right|$$

$$\le \omega_1\left(f;\frac{ma+n}{2^{k+r}}\right)$$

elde edilir.   Buradan da

$$\left|L_k(f;x) - f(x)\right| \le \omega_1\left(f;\frac{ma+n}{2^{k+r}}\right)$$

olduğu görülür.

$f \in X$ için $\omega_1(f;\delta) < +\infty$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. $\{l_k\}_{k\in Z}$ pozitif lineer operatörler dizisi, $x \in R$, $f \in X$ için

$l_k : C'(R) \to C'(R)$ olmak üzere (2.1.5) ifadesine $2^k x - u \to u$ dönüşümü uyguladıktan sonra Leibnitz kuralı uygulanırsa

$$(L_k f)'(x) = 2^k \int_{-\infty}^{\infty} (l_k f)'(2^k x - u)\varphi(u)du$$

elde edilir. Burada $(L_k f)'$ ve $(l_k f)'$ sürekli fonksiyonlardır. Buradan $k \in Z$ ve $f \in X$ için L_k operatörünün türevlenebilen bir operatör olduğunu söyleyebiliriz. Bu şekilde türev alınarak elde edilen $\left(L_k^{(i)}\right)_{k\in Z}$ $i \in N$ şeklindeki operatörlerin özellikleri bizim bu tezdeki inceleme konumuzu oluşturacaktır. Bu arada dikkat etmeliyiz ki

$$(L_k f)^{(i)} \neq L(f^{(i)}), \quad f \in C^{(i)}(R)$$

dir.

Yine $k \in Z$ için $L = L_k$ olsa bile

$$(L_k f)^{(i)} \neq L(f^{(i)})$$

dir.

Şimdi $i \in N$ için $f \in C^{(i)}(R)$ ve $f^{(i)} \in C_u(R)$ olmak üzere

$$\delta_0^f(u) := \int_0^1 f(tu)dt \qquad u \in R \tag{2.1.14}$$

operatörünü tanımlayalım ve bu fonksiyonun Leibnitz kuralı yardımıyla i-kere türevini alalım. Bu durumda

$$(\delta_0^f(u))^{(i)} = \int_0^1 \frac{\partial^i f(ut)}{\partial u^i} dt$$

$$(\delta_0^f(u))^{(i)} = \int_0^1 t^i f^{(i)}(ut)dt$$

olur. (2.1.14) tanımı gereğince

$$\delta_0^{f^{(i)}}(u) = \int_0^1 f^{(i)}(tu)dt$$

olacağından

$$(\delta_0^f(u))^{(i)} \neq \delta_0^{f^{(i)}}(u)$$

dir. Yani operatörün fonksiyona uygulanışının türevi ile operatörün fonksiyonun türevine uygulanışı ile elde edilen sonuçlar aynı değildirler. Bu özellikleri sağlayacak operatörlerin süreklilik modülü koruduğunu bir teorem ile ifade edelim.

Teorem 2.1.4 Herhangi bir $f \in C^{(i)}(R)$ ve $f^{(i)} \in C_U(R)$, $i \in N$ için

$$\left|\left(\delta_0^f(x-u)\right)^{(i)} - \left(\delta_0^f(y-u)\right)^{(i)}\right| \leq \omega_1\left(f^{(i)}; |x-y|\right) \tag{2.1.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$\left| \left(\delta_0^{\,f}(x-u)\right)^{(i)} - \left(\delta_0^{\,f}(y-u)\right)^{(i)} \right| = \left| \int_0^1 t^i f^{(i)}(t(x-u))dt - \int_0^1 t^i f^{(i)}(t(y-u))dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 t^i \left\{ f^{(i)}\left(t(x-u)\right) - f^{(i)}\left(t(y-u)\right) \right\} dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |t|^i \left| f^{(i)}(t(x-u)) - f^{(i)}(t(y-u)) \right| dt \, .$$

t için, $0 \leq t \leq 1$ aralığında supremum alınırsa

$$\leq \left(\int_0^1 t^i dt\right) \sup_{|x-y|\leq\delta} \left| f^{(i)}(x-u) - f^{(i)}(y-u) \right|$$

$$\leq \omega_1\left(f^{(i)}; |x-y|\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$\left| \left(\delta_0^{\,f}(x-u)\right)^{(i)} - \left(\delta_0^{\,f}(y-u)\right)^{(i)} \right| \leq \omega_1\left(f^{(i)}; |x-y|\right)$$

elde edilir. Bu da türev altında süreklilik modülünün korunduğunu gösterir.

Şimdi de (2.1.1) tanımı gereğince

$$\delta_k^{\,f}(x) := \delta_0^{\,f(2^{-k})}(x) \tag{2.1.16}$$

olarak alalım ve $D_k(f;x)$ operatörünü

$$D_k(f;x) := \int_{-\infty}^{\infty} \delta_k^{\,f}(u)\varphi(2^k x - u)du \, , \quad x \in R \tag{2.1.17}$$

olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $D_k(f;x)$ operatörü için

$$D_k(f;x) = D_0(f(2^{-k}\cdot))(2^k x) \tag{2.1.18}$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten de

(2.1.17) ifadesinde $k = 0$ alınırsa

$$D_0(f;x) := \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0^{\,f}(u)\varphi(2^0 x-u)du$$

$$D_0(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0^{\,f}(u)\varphi(x-u)du$$

yazılabilir. Buradan $D_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k x\right)\right)$ eşitliğini yazarsak

$$D_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\left(2^k x\right) := \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0^{\,f\left(2^{-k}\right)}\varphi(2^k x-u)du \tag{2.1.19}$$

olur. Buna göre her $x \in R$ için (2.1.17) ifadesinde (2.1.16) yerine yazılırsa

$$D_k(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_0^{\,f(2^{-k}.)}(u)\varphi(2^k x-u)du$$

elde edilir. Buradan da (2.1.19) ifadesi göz önüne alınırsa

$$D_k(f;x) = D_0(f(2^{-k}\cdot);(2^k x))$$

elde edilir.

Şimdi $D_k(f;x)$ operatörünün i-yinci türevinin de süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

Teorem 2.1.5 Herhangi $f \in X$, $u,x,y \in R$ ve $i \in N$ olmak üzere herhangi $\delta > 0$ için

$$\omega_1\left((D_k f)^{(i)};\delta\right) \le \omega_1\left(f^{(i)};\delta\right) \tag{2.1.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat :

İspat için daha önce göstermiş olduğumuz $\forall x,y \in R$ için (2.1.15) ifadesinden faydalanacağız.

$$\left|(D_0(f;x))^{(i)} - (D_0(f;y))^{(i)}\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta_0^{\,f}(u)\right)^{(i)}\varphi(x-u)du - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta_0^{\,f}(u)\right)^{(i)}\varphi(y-u)du\right|$$

ifadesini hesaplayalım. Bu ifade de $x-u \to u$ ve $y-u \to u$ değişken değiştirmeleri yapalım. Bu durumda

$$\left|(D_0(f;x))^{(i)}-(D_0(f;y))^{(i)}\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta_0^{\ f}(x-u)\right)^{(i)}\varphi(u)du-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\delta_0^{\ f}(y-u)\right)^{(i)}\varphi(u)du\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\left|\left(\delta_0^{\ f}(x-u)\right)^{(i)}-\left(\delta_0^{\ f}(y-u)\right)^{(i)}\right|du$$

$$\leq (\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du)\sup_{x,y\in R}\left|\left(\delta_0^{\ f^{(i)}}(x-u)\right)-\left(\delta_0^{\ f^{(i)}}(y-u)\right)\right|$$

olur. (2.1.15) ve (2.1.4) göz önüne alınırsa

$$\left|(D_0(f;x))^{(i)}-(D_0(f;y))^{(i)}\right| \leq \omega_1(f^{(i)};|x-y|)$$

elde edilir. Bu ise $(D_0(f;x))^{(i)}$ operatörünün süreklilik modülünü koruduğunu gösterir. Şimdi $(D_k(f;x))^{(i)}$ operatörüne bakalım. Bunun için (2.1.17) kullanılırsa

$$\left|(D_k(f;x))^{(i)}-(D_k(f;y))^{(i)}\right| = \left|\left(D_0\left(f(2^{-k}.);2^k x\right)\right)^{(i)}-\left(D_0\left(f(2^{-k}.);2^k y\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$=\left|2^{ki}\left(D_0^{\ (i)}\left(f(2^{-k}.);2^k x\right)\right)-2^{ki}\left(D_0^{\ (i)}\left(f(2^{-k}.);2^k y\right)\right)\right|$$

$$\leq \omega_1(2^{ki}(f(2^{-k}.))^{(i)};2^k|x-y|)$$

$$\leq \omega_1(2^{ki}2^{-ki}(f^{(i)}(2^{-k}.));2^k|x-y|)$$

$$\leq \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

elde ederiz.

Her iki tarafın $\delta>0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|\left(D_k^{\ (i)}(f;x)\right)-\left(D_k^{\ (i)}(f;y)\right)\right| \leq \sup_{|x-y|\leq\delta}\omega_1(f^{(i)};|x-y|)$$

olur. Yani

$$\omega_1(D_k^{\ (i)}f;\delta) \leq \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

elde edilir.

Şimdi $i \in N$ için

$$(\phi_0 f; x) := f(x) + f(0) \tag{2.1.21}$$

operatörünü tanımlayalım. Bu operatörün fonksiyona uygulanışının türevi ile operatörün fonksiyonun türevine uygulanışı ile elde edilen sonuçlar aynı değildir. Gerçekten

$$(\phi_0 f^{(i)}; x) := f^{(i)}(x) + f^{(i)}(0)$$

olur.

$f(0)$ sabit olduğundan $f^{(i)}(0) = 0$ olacaktır. Dolayısıyla

$$(\phi_0 f; x)^{(i)} := f^{(i)}(x)$$

olarak elde edilir.

Görüldüğü gibi

$$(\phi_0 f; x)^{(i)} \neq (\phi_0 f^{(i)}; x)$$

olduğu anlaşılır.

Şimdi bu şekilde tanımlanan operatörün süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

Teorem 2.1.6 Herhangi bir $f \in X$, $f^{(i)} \in C^i(R)$ ve her $u \in R$ olmak üzere herhangi $x, y \in R$ için

$$\left|(\phi_0(f; x-u))^{(i)} - (\phi_0(f; y-u))^{(i)}\right| \leq \omega_1\left(f^{(i)}; |x-y|\right) \tag{2.1.22}$$

olması halinde $\delta > 0$ için

$$\omega_1\left((\phi_0 f)^{(i)}; \delta\right) \leq \omega_1\left(f^{(i)}; \delta\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$\left|\left(\phi_0\left(f;x-u\right)\right)^{(i)}-\left(\phi_0\left(f;y-u\right)\right)^{(i)}\right|=\left|\ f^{(i)}(x-u)-f^{(i)}(y-u)\right|$$

$$\le \sup_{|x-y|\le\delta}\left|\ f^{(i)}(x-u)-f^{(i)}(y-u)\right|$$

$$\le \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

$$\left|\left(\phi_0\left(f;x-u\right)\right)^{(i)}-\left(\phi_0\left(f;y-u\right)\right)^{(i)}\right|\le \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

olur. Buradan $\delta>0$ için her iki yanın supremumu alınırsa

$$\omega_1\left((\phi_0 f)^{(i)};\delta\right)\le \omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$$

olur ki bu da istenilendir.

Şimdi de bu şekilde tanımlanan operatör yardımıyla tanımlanan $\phi_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);u\right)$ operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim.

Teorem 2.1.7 $\forall k\in Z$, $u,\alpha\in R$ ve her $f^{(i)}\in X$ için, (2.1.21) de tanımlanan operatör için

$$(\phi_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot+\alpha)))(2^k u)=(\phi_0^{(i)}(f(2^{-k})))(2^k\cdot(u+\alpha))$$

dir. Yani $\left(\phi_0 f\right)^{(i)}$ operatörü ötelemeyi korur.

İspat:

(2.1.7) ifadesi göz önüne alınarak

$$(\phi_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot+\alpha)))(2^k u)=\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);\left(2^k u\right)\right)^{(i)}$$

$$=2^{-ki}f^{(i)}\left(\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);\left(2^{-k}u\right)\right)$$

$$=2^{-ki}f^{(i)}(2^{-k}\cdot;2^k(u+\alpha))$$

$$=2^{-ki}f^{(i)}(u+\alpha)$$

$$=\phi_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot);(2^k(u+\alpha)))\,.$$

Yani

$$\phi_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot+\alpha;2^k u)=\phi_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot);2^k(u+\alpha))$$

elde edilir.

Şimdi de (2.1.21) ile tanımlanan operatörün süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim. Yani

$$\omega_1(\phi_0 f;|x-y|)\le\omega_1(f;|x-y|)$$

olduğunu gösterelim. Operatörün tanımı gereğince

$$\begin{aligned}|\ \phi_0(f;x-u)-\phi_0(f;(y-u)| &= |(f(x-u)+f(0))-(f(y-u)+f(0))| \\ &= |f(x-u)-f(y-u)|\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. İki yanın da $\delta>0$ için supremumu alınırsa;

$$\sup_{|x-y|\le\delta}|\phi_0(f;x-u)-\phi_0(f;y-u)|\le\sup_{|x-y|\le\delta}|f(x-u)-f(y-u)|\le\omega_1(f;|x-y|)$$

$$\omega_1(\phi_0 f;|x-y|)\le\omega_1(f;|x-y|)$$

elde edilir. Tanımlanan bu operatörler yardımıyla oluşturulan ve

$$\phi_k(f;x):=\phi_0(f(2^{-k}\cdot);x) \tag{2.1.24}$$

eşitliğini sağlayan operatörler olmak üzere, her $x\in R$, $k\in Z$ için

$$\Omega_k(f;x):=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_k(f;u)\varphi(2^k x-u)du \tag{2.1.25}$$

şeklinde tanımlanan Ω_k pozitif lineer operatörü süreklilik modülünü koruma özelliğine ve $\Omega_k^{(i)}$, $i\in N$ için ötelemenin tüm özelliklerine sahiptir.

τ_0 operatörünü

$$(\tau_0 f)(x):=f(\frac{x}{2}) \tag{2.1.26}$$

olarak tanımlayalım.

Şimdi bu operatörün i -kez türevini alalım.

Operatörün türevi

$$\left(\tau_0 f\right)^{(i)}(x) = \frac{1}{2^i} f^{(i)}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.1.27}$$

olur. Tanım gereğince f fonksiyonun i -kez türevi alınırsa

$$\tau_0 f^{(i)} = f^{(i)}(\frac{x}{2})$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left(\tau_0 f\right)^{(i)} \neq \tau_0 f^{(i)}$$

dir.

Şimdi bu şekilde tanımlanan operatörün süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

Yani

$$\left|\tau_0{}^{(i)}(f; x-u) - \tau_0{}^{(i)}(f; y-u)\right| \leq \frac{1}{2^i}\,\omega(f^{(i)}; \frac{|x-y|}{2}) \tag{2.1.28}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için $\left|\tau_0{}^{(i)}(f; x-u) - \tau_0{}^{(i)}(f; y-u)\right|$ ifadesinden hareket edelim.

$$\left|\tau_0{}^{(i)}(f; x-u) - \tau_0{}^{(i)}(f; y-u)\right| = \left|\frac{1}{2^i} f^{(i)}\left(\frac{x-u}{2}\right) - \frac{1}{2^i} f^{(i)}\left(\frac{y-u}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2^i}\left[f^{(i)}\left(\frac{x-u}{2}\right) - f^{(i)}\left(\frac{y-u}{2}\right)\right]\right|$$

yazılabilir. Buradan $\delta > 0$ için supremum alırsak;

$$\leq \frac{1}{2^i} \sup_{|x-y|\leq\delta}\left|f^{(i)}\left(\frac{x-u}{2}\right) - f^{(i)}\left(\frac{y-u}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2^i}\,\omega_1\left(f^{(i)}; \frac{|x-y|}{2}\right)$$

elde edilir. Bu ise (2.1.28) in gerçeklendiğini gösterir.

τ_k operatörü (2.1.7) ifadesine benzer şekilde

$$\tau_k(f;x) := \tau_0(f(2^{-k}\cdot);x) \tag{2.1.29}$$

tanımlansın. Bu durumda $x \in R$ için

$$\tau_k(f;x) := \int_{-\infty}^{\infty} \tau_k(f;u)\varphi(2^k x - u)du \tag{2.1.30}$$

şeklinde bir operatör tanımlanabilir. Tanımlanan bu yeni operatörün süreklilik modülünü koruduğunu bir teorem ile gösterelim.

Teorem 2.1.8

$\delta > 0$ için (2.1.30) da tanımlanan τ_k operatörü

$$\omega_1(\tau_k f^{(i)};\delta) \le \frac{1}{2^i}\omega_1\left(f^{(i)};\frac{\delta}{2}\right) \tag{2.1.31}$$

eşitsizliğini gerçekler.

İspat

İspat için (2.1.29) eşitliğinden faydalanalım

$$\begin{aligned}
\left|\tau_k^{(i)}(f;x-u) - \tau_k^{(i)}(f;y-u)\right| &= \left|\tau_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot);x-u) - \tau_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot);y-u)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2^i}f^{(i)}\left((2^{-k}\cdot);\left(\frac{x-u}{2}\right)\right) - \frac{1}{2^i}f^{(i)}\left((2^{-k}\cdot);\left(\frac{y-u}{2}\right)\right)\right| \\
&\le \left|\frac{1}{2^i}\right|\left|f^{(i)}\left((2^{-k}\cdot);\left(\frac{x-u}{2}\right)\right) - f^{(i)}\left((2^{-k}\cdot);\left(\frac{y-u}{2}\right)\right)\right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Her iki yanın $\delta > 0$ için supremumu alırsa;

$$\sup_{|x-y|\le\delta}\left|\tau_k^{(i)}(f;x-u) - \tau_k^{(i)}(f;y-u)\right| \le \frac{1}{2^i}\sup_{|x-y|\le\delta}\left|f^{(i)}\left((2^{-k}\cdot);\left(\frac{x-u}{2}\right)\right) - f^{(i)}\left((2^{-k}\cdot);\left(\frac{y-u}{2}\right)\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2^i}\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right);\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2^i}\omega_1\left(f^{(i)}(2^{-k}\cdot);\frac{|x-y|}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2^i}\omega_1(f^{(i)};\frac{\delta}{2})$$

sonuç olarak

$$\omega_1((\tau_k f)^{(i)};\delta)\leq \frac{1}{2^i}\omega_1(f^{(i)};\frac{\delta}{2})$$

eşitsizliği elde edilir ki bu istenilendir.

2.2. Genel Sonuçlar

$l_0 : C^{(i)}(R)\to C^{(i)}(R)$ operatörünü göz önüne alalım. Türevlenebilen fonksiyonlar sürekli olduğundan $f\in C^{(i)}(R)$ için $\frac{\partial^{i-1}(l_0 f)}{\partial x^{i-1}}(x-u)$, $\frac{\partial^{i}(l_0 f)}{\partial x^{i}}(x-u)$ kısmi türevleri x ve u noktalarında süreklidir. $f\in C^{(i)}(R)$ olmak üzere $f^{(i)}\in X$ ve $\varphi\subset[-a,a]$, $\varphi\geq 0$ fonksiyonu sürekli olsun. (2.1.6) ifadesinde, $u\to x-u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$L_0(f;x):=\int_{-\infty}^{\infty} l_0(f;x-u)\varphi(u)du$$

olur. İntegral aralığını φ' nin tanımlı olduğu aralığa indirgersek

$$L_0(f;x):=\int_{-a}^{a} l_0(f;x-u)\varphi(u)du \tag{2.1.32}$$

yazılabilir.

φ'nin tanımlı olduğu aralıkta (2.1.32) ile tanımlanan operatörün i-kere türevi alınırsa, Leibnitz kuralı gereğince

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(L_0 f\right)(x) = \int_{-a}^{a} \frac{\partial^i (l_0 f)}{\partial x^i}(x-u)\varphi(u)du \tag{2.1.33}$$

elde edilir. Yani L_0, i-defa türevlenebilen operatördür.

Benzer şekilde

$$L_k(f;x) := \int_{-a}^{a} l_k(f;2^k x-u)\varphi(u)du$$

operatörü için her iki tarafın i-kere türevi alınırsa

$$\frac{d^i\left(L_k f\right)}{dx^i}(x) = 2^{ki}\int_{-a}^{a} \frac{\partial^i (l_k f)}{\partial x^i}(2^k x-u)\varphi(u)du \tag{2.1.34}$$

bulunur. Burada da $2^k x-u \to u$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d^i\left(L_k f\right)}{dx^i}(x) = 2^{ki}\int_{-a}^{a} \frac{\partial^i (l_k f)}{\partial x^i}(u)\varphi(2^k x-u)du$$

olur. Şimdi aralık genişletilirse

$$\frac{d^i\left(L_k f\right)}{dx^i}(x) = 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^i (l_k f)}{\partial x^i}(u)\varphi(2^k x-u)du$$

elde edilir ki bu da L_k operatörünün i-kere türevlenebilir olduğunu gösterir. Buna göre (2.1.33) ve (2.1.34) göz önüne alındığında L_k operatörünün i- kere türevlenebilir bir operatör olduğundan, L_k operatörünün i- kere türevinin değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir. (2.1.1) ve (2.1.7) ifadelerinden

$$\left(L_k f\right)^{(i)}(x) = \left(L_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);2^k x\right)\right)^{(i)}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);2^k x-u\right)\varphi\left(u\right)du\right)^{(i)}$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)\varphi(u)du$$

yazılır. Burada $2^k x-u \to u$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(l_0\big(f\big(2^{-k}\,\cdot\big)\big)\Big)^{(i)}(u)\varphi\big(2^k x-u\big)du$$

$$\big(L_k f\big)^{(i)}(x) = 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}(l_k f)^{(i)}(u)\varphi(2^k x-u)du$$

eşitliği elde edilir ki bu da gösterilmek istenendir.

Tanım 2.2.1. $L_k^{(i)}(f) := (L_k f)^{(i)}$ eşitliğini sağlayan $L_k^{(i)}$ operatörüne lineer operatör denir.

$f \in C^{(i)}(R)$, $f^{(i)} \in X$, $\alpha > 0$ $m,i \in N$, $n,r \in Z$ için

$$\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u) - f^{(i)}(y)\right| \le \omega_1\left(f^{(i)};\frac{m\alpha+n}{2^r}\right) \qquad (2.1.35)$$

olsun.

Lemma 2.2.1. $\forall k \in Z$, u reel bir değişken, $\alpha \in R$ sabit ve her $f \in C^{(i)}(R)$, $i \in N$ için

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot+\alpha\right);2^k u\right) = l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);2^k(u+\alpha)\right) \qquad (2.1.36)$$

oluyorsa, $L_k^{(i)}$ ötelemeyi koruyan operatördür.

İspat:

$$(L_0 f)^{(i)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(l_0 f)^{(i)}(u)\varphi(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty}(l_0 f)^{(i)}(x-u)\,\varphi(u)\,du$$

yazılabileceğinden (2.1.7) gereğince

$$\big(L_k(f(\cdot+\alpha);x)\big)^{(i)} = \big(L_k(f_\alpha;x)\big)^{(i)} = \Big(L_0\big(f_\alpha\big(2^{-k}\,\cdot\big);2^k x\big)\Big)^{(i)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(l_0\big(f\big(2^{-k}\,\cdot+\alpha\big);\big(2^k x-u\big)\big)\Big)^{(i)}\varphi(u)du$$

elde edilir. Bu eşitlikte (2.1.36) uygulanırsa

$$L_k^{(i)}(f(\cdot+\alpha);x) = 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(l_0 f\big(2^{-k}\,\cdot\big)\Big)^{(i)};\big(2^k\big(x-2^{-k}u+\alpha\big)\big)\varphi(u)du$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0 f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)^{(i)};\left(2^k\left(x+\alpha\right)-u\right)\varphi\left(u\right)du$$

$$= 2^{ki}\left(L_0 f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)^{(i)}(2^k\left(x+\alpha\right)=L_k^{(i)}\left(f;x+\alpha\right)\ .$$

olur ki buradan

$$L_k^{(i)}\left(f_\alpha\right)=\left(L_k^{(i)}\left(f\right)\right)_\alpha \tag{2.1.37}$$

yazılabilir ve bu da istenendir.

Teorem 2.2.1. Herhangi bir $f^{(i)}\in X$, $i\in N$, herhangi $x,y\in R$, her $u\in R$ için

$$\left|\left(l_0^{(i)}\left(f;x-u\right)\right)-\left(l_0^{(i)}\left(f;y-u\right)\right)\right|\le\omega_1\left(f^{(i)};\left|x-y\right|\right) \tag{2.1.38}$$

olsun. Bu durumda $\delta>0$ için

$$\omega_1\left(\left(L_k f\right)^{(i)};\delta\right)\le\omega_1\left(f^{(i)};\delta\right) \tag{2.1.39}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat :

$\forall x,y\in R$ için (2.1.38) eşitsizliğinden faydalanalım.

$$\left|\left(L_0\left(f;x\right)\right)^{(i)}-\left(L_0\left(f;y\right)\right)^{(i)}\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0^{(i)}\left(f;x\right)\right)\varphi(x-u)du-\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0^{(i)}\left(f;y\right)\right)\varphi(y-u)\,du\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0^{(i)}\left(f;x-u\right)\right)\varphi(u)du-\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0^{(i)}\left(f;y-u\right)\right)\varphi(u)\,du\right|$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\left|\left(l_0^{(i)}\left(f;x-u\right)\right)-\left(l_0^{(i)}\left(f;y-u\right)\right)\right|du$$

$$\le\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du\sup_{x,y\in R}\left|\left(l_0^{(i)}(f;x-u)\right)-\left(l_0^{(i)}(f;y-u)\right)\right|$$

$$\le\omega_1\left(f^{(i)};\left|x-y\right|\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left|\left(L_0^{(i)}\left(f;x\right)\right)-\left(L_0^{(i)}\left(f;y\right)\right)\right|\le\omega_1(f^{(i)};\left|x-y\right|)$$

eşitsizliği geçerlidir. Şimdi L_k operatörü için bu eşitsizliğin geçerli olduğunu görelim.

$$\left|\left(L_k^{(i)}(f;x)\right)-\left(L_k^{(i)}(f;y)\right)\right| = \left|\left(L_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)\right)^{(i)} - \left(L_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k y\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$= \left|2^{ki}\left(L_0\left(\left(f(2^{-k}\cdot)\right)^{(i)};2^k x\right)\right) - 2^{ki}\left(L_0\left(\left(f(2^{-k}\cdot)\right)^{(i)};2^k y\right)\right)\right|$$

$$\leq \sup\left|2^{ki}\left[(L_0(f(2^{-k}\cdot)))^{(i)}(2^k x) - (L_0(f(2^{-k}\cdot)))^{(i)}(2^k y)\right]\right|$$

$$\leq \omega_1\left(2^{ki}(f(2^{-k}\cdot))^{(i)};2^k|x-y|\right)$$

$$\leq \omega_1\left(2^{ki}2^{-ki}(f^{(i)}(2^{-k}\cdot));2^k|x-y|\right)$$

$$\leq \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizliği her iki yanının $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|\left(L_k^{(i)}(f;x)\right)-\left(L_k^{(i)}(f;y)\right)\right| \leq \sup_{|x-y|\leq\delta}\omega_1(f^{(i)};|x-y|)$$

$$\omega_1(L_k f;\delta) \leq \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

eşitsizliği yazılabilir ki bu da gösterilmek istenendir.

Teorem 2.2.2. $i \in N$, $\forall x, y \in R$, $u \in R$ olmak üzere

$g_i(x) := \dfrac{x^{i+1}}{(i+1)!}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon için

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x - u\right) - \left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y - u\right) = (x-y)2^{-ki} \tag{2.1.40}$$

ve

$$L_k^{(i)}(g_i;x) - L_k^{(i)}(g_i;y) = x - y = \left(g_i^{(i)}(x) - g_i^{(i)}(y)\right) \tag{2.1.41}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa , o taktirde $\delta > 0$ için

$$\omega_1\left(L_k^{(i)}(g_i),\delta\right) = \omega_1\left(g_i^{(i)},\delta\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\left(L_k f\right)^{(i)}(x) = 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)\varphi(u)\,du$$

operatöründe $f = g_i$ yerine yazılırsa

$$\left(L_k f\right)^{(i)}(x) = 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)\varphi(u)du$$

elde edilir. (2.1.41) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\left(L_k g_i\right)^{(i)}(x)-\left(L_k g_i\right)^{(i)}(y) = \left(L_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right);2^k x\right)\right)^{(i)} - \left(L_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right);2^k y\right)\right)^{(i)}$$

$$= 2^{ki}\left(L_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x\right)-2^{ki}\left(L_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y\right)$$

$$= 2^{ki}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)\varphi(u)du - \int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)\varphi(u)du\right)\right]$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)-\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)\right]\varphi(u)du$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\left[\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)-\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)\right]du\,.$$

(2.1.40) eşitliğine göre

$$\left(L_k g_i\right)^{(i)}(x)-\left(L_k g_i\right)^{(i)}(y) = 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du\;2^{-ki}(x-y)$$

$$= 2^{ki}2^{-ki}(x-y) = x-y$$

elde edilir. Yani

$$\left(L_k g_i\right)^{(i)}(x)-\left(L_k g_i\right)^{(i)}(y) = x-y = g_i^{(i)}(x)-g_i^{(i)}(y)$$

$$\left|\left(L_k g_i\right)^{(i)}(x)-\left(L_k g_i\right)^{(i)}(y)\right| = \left|g_i^{(i)}(x)-g_i^{(i)}(y)\right|$$

yazılabilir. Her iki yanın $\delta>0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|<\delta}\left|\left(L_k g_i\right)^{(i)}(x)-\left(L_k g_i\right)^{(i)}(y)\right| = \sup_{|x-y|<\delta}\left|g_i^{(i)}(x)-g_i^{(i)}(y)\right|$$

$$\omega_1\left(L_k^{(i)}(g_i);\delta\right)=\omega_1\left(g_i^{(i)};\delta\right)$$

elde edilir ki bu da istenendir.

Teorem 2.2.3. $f\in C^{(i)}(R)$, $m\in N$, $n\in Z^+$, $r,k\in Z$, $f^{(i)}\in X$ ve $i\in N$ için

$$\left|L_k^{(i)}(f;x)-f^{(i)}(x)\right|\le\omega_1\left(f^{(i)};\frac{m\alpha+n}{2^{r+k}}\right) \tag{2.1.42}$$

sağlanır.

İspat:

(2.1.7) gereğince

$$\left|\left(L_k^{(i)}(f;x)\right)-\left(f^{(i)}(x)\right)\right|=\left|\left(L_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);2^k x\right)\right)^{(i)}-f^{(i)}\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right|$$

$$=\left|\ 2^{ki}\left(L_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x\right)-f^{(i)}\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\ \right|$$

$$=\left|2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(u)\varphi\left(2^k x-u\right)du-f^{(i)}\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$=\left|\int_{2^k x-\alpha}^{2^k x+\alpha}\left[\ \left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(u)-f^{(i)}\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\ \right]\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$\le\sup_{2^k x-\alpha\le u\,2^k x+\alpha}\left|\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(u)-f^{(i)}\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right|\left(\int_{2^k x-\alpha}^{2^k x+\alpha}\varphi\left(2^k x-u\right)du\right) \tag{2.1.43}$$

yazılabilir. $g:=f\left(2^{-k}\cdot\right)\in C^{(i)}(R)$ ve $g^{(i)}\in X$ şeklinde gösterilip bu ifadenin i-kez türevi alınırsa

$$g^{(i)}=2^{-ki}f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right)$$

$$2^{ki}g^{(i)}=f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right)$$

bulunur. Bulunan bu ifade (2.1.43) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|L_k^{(i)}(f;x)-f^{(i)}(x)\right|=\sup_{\left|u-2^k x\right|\le\alpha}\left|\left(l_0\left(2^{ki}g\right)\right)^{(i)}(u)-\left(2^{ki}g\right)^{(i)}\left(2^{-k}x\right)\right|$$

bulunur ve bu ifade de (2.1.35) deki kabul göz önüne alındığında

$$\left|L_k^{(i)}(f;x)-f^{(i)}(x)\right|\le \omega_1\left(\left(2^{ki}g\right)^{(i)};\frac{m\alpha+n}{2^r}\right)$$

$$=\omega_1\left(f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right);\frac{m\alpha+n}{2^r}\right)$$

$$=\omega_1\left(f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right);\frac{2^k}{2^k}\frac{m\alpha+n}{2^r}\right)$$

$$=\omega_1\left(f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right);2^k\frac{m\alpha+n}{2^{r+k}}\right)$$

$$=\omega_1\left(f^{(i)};\frac{m\alpha+n}{2^{r+k}}\right).$$

Sonuç olarak (2.1.42) eşitsizliği elde edilir ki buda istenendir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. $L_k^{(i)}$ Operatörü İçin Bazı Uygulamalar

Bu bölümde $L_k^{(i)}$, $i \in N$ sabit, operatörü için dört operatör örneği vereceğiz. Buradaki l_k operatörü Yaklaşım teorisinde iyi bilinen ve bizim operatörümüze benzeyen özel bir operatördür. Üstelik bunlar olasılık teoride önemli özelliklere sahiptir. Bu operatörler şu ana kadar verilen bütün kabulleri gerçekler. Sadece $(A_k)_{k\in Z}$ operatöründe φ çift fonksiyondur.

1. $$(A_k f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_k^{f}(u)\varphi(2^k x - u)du \qquad (3.1.1)$$

operatörünü göz önüne alalım. Burada

$$l_k(f;u) = r_k^{f}(u) \quad \text{olup,}$$

$$r_k^{f}(u) = 2^k \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(2^k t - u)dt \qquad (3.1.2)$$

$u \in R$ noktasında süreklidir.

2. $$(B_k f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{2^k}\right)\varphi(2^k x - u)du \qquad (3.1.3)$$

operatörünü göz önüne alalım. Burada

$$l_k(f,u) = f\left(\frac{u}{2^k}\right) \qquad (3.1.4)$$

olup, $u \in R$ noktasında süreklidir.

3. $$(L_k f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} c_k^{f}(u)\varphi(2^k x - u)du \qquad (3.1.5)$$

operatörü için

$$c_k^{\,f}(u) := 2^k \int_{2^{-k}u}^{2^{-k}(u+1)} f(t)dt \tag{3.1.6}$$

olup, $u \in R$ için

$$l_k(f;u) = c_k^{\,f}(u) \tag{3.1.7}$$

dir.

4. $$(\Gamma_k f) := \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^{\,f}(u)\varphi\left(2^k x - u\right)du \tag{3.1.8}$$

operatörü için $n \in N, w_j \geq 0, u \in R$ olmak üzere

$$\gamma_k^{\,f}(u) := \sum_{j=0}^{n} w_j f\left(\frac{u}{2^k} + \frac{j}{2^k n}\right) \tag{3.1.9}$$

şeklinde bir fonksiyon olup,

$$\sum_{j=0}^{n} w_j = 1 \tag{3.1.10}$$

olarak alınırsa

$$l_k(f;u) = \gamma_k^{\,f}(u) \tag{3.1.11}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$(L_k f)^{(i)} = L_k(f^{(i)}); \qquad \forall k \in Z$$

$$(l_k f)^{(i)} = 2^{-ki}(l_k(f^{(i)}))$$

olur.

(2.1.1) ile gösterilen l_k operatörlerinin sağladığı eşitlik, $k \in Z$, A_k, B_k, L_k, Γ_k larda bulunan bütün l_k larda aynı anlamdadır. Dolayısıyla bütün A_k, B_k, L_k, Γ_k için (2.1.7) doğrudur. O halde $k \in Z$ için

$$A_k(f;x)=A_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x)$$

$$B_k(f;x)=B_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x)$$

$$L_k(f;x)=L_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x) \tag{3.1.12}$$

$$\Gamma_k(f;x)=\Gamma_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x)$$

eşitlikleri geçerlidir.

(2.1.33) ve (2.1.34) ifadeleri göz önüne alındığında $\forall i\in N$ için (3.1.12) ile gösterilen eşitlikler i-kere türevlenebilirdir. O taktirde aşağıdakiler yazılabilir.

$$(A_k f)^{(i)}(x)=(A_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x))^{(i)}$$

$$(B_k f)^{(i)}(x)=(B_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x))^{(i)}$$

$$(L_k f)^{(i)}(x)=(L_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x))^{(i)} \tag{3.1.13}$$

$$(\Gamma_k f)^{(i)}(x)=(\Gamma_0(f(2^{-k}\cdot);2^k x))^{(i)}.$$

Bu ifadelerden sonra aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1. $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, L_k^{(i)}, \Gamma_k^{(i)}$ operatörleri ötelemeyi koruyan operatörlerdir.

İspat:

1. φ çift bir fonksiyon olmak üzere A_k nın ötelemeyi koruduğunu göstermek için önce $r_0^f(x)$ operatörü için (φ çift) ;

$$r_0^f(x)=l_0(f;x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t-x)dt \qquad , \qquad f\in C^{(i)}(R)$$

operatörünün i-kez türevi alınırsa;

$$\left(l_0(f;x)\right)^{(i)}=\int_{-\infty}^{\infty} f^{(i)}(x-t)\varphi(t)dt$$

$$\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);x\right)\right)^{(i)}=2^{-ki}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}\left(2^{-k}(x-t)\right)\varphi(t)\,dt$$

elde edilir.

Öteleme operatörü için;

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot+\alpha\right);x\right)=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(f\left(2^{-k}(x-t)+\alpha\right)\right)\varphi(t)\,dt\right)^{(i)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f\left(2^{-k}(x-t)+\alpha\right)\right)^{(i)}\varphi(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}2^{-ki}f^{(i)}\left(2^{-k}(x-t)+\alpha\right)\varphi(t)\,dt$$

olduğundan dolayı

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot+\alpha\right);2^k u\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f\left(2^{-k}\left(2^k u-t\right)+\alpha\right)\right)^{(i)}\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^{(i)}\left(2^{-k}\left(2^k u-t\right)+\alpha\right)\right)\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-ki}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}\left(u+\alpha-2^{-k}t\right)\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-ki}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}\left(2^{-k}2^k(u+\alpha)-2^{-k}t\right)\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-ki}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}\left(2^{-k}\left[2^k(u+\alpha)-t\right]\right)\varphi(t)\,dt$$

$$=l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);2^k(u+\alpha)\right)$$

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot+\alpha\right);2^k u\right)=l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right);2^k(u+\alpha)\right)\qquad(3.1.14)$$

elde edilir. Şimdi, A_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim. Yani, $A_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right)=A_k^{(i)}\left(f;x+\alpha\right)$ olduğunu gösterelim.

$$\left(A_k\left(f(\cdot+\alpha);x\right)\right)^{(i)}=\left(A_k\left(f_\alpha;x\right)\right)^{(i)}=\left(A_0\left(f_\alpha\left(2^{-k}\,\cdot\right);2^k x\right)\right)^{(i)}$$

$$=\left(A_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot+\alpha\right);2^k x\right)\right)^{(i)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{f_\alpha(2^{-k}\cdot)}(u)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k x-u\right)du$$

$u\to 2^k x-u$ dönüşümü yapılırsa

$$A_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha)\,;x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{f_\alpha(2^{-k}\cdot)}\left(2^k x-u\right)\right)^{(i)}\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{f_\alpha(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot+\alpha\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot+\alpha\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k\left(x-2^{-k}u\right)\right)\varphi(u)du$$

bulunur. (3.1.14) eşitliği kullanılırsa

$$A_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right)=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k\left(x-2^{-k}u+\alpha\right)\right)\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k(x+\alpha)-u\right)\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{\left(f(2^{-k}\cdot)\right)}\right)^{(i)}\left(2^k(x+\alpha)-u\right)\varphi(u)\,du$$

yazılabilir. Burada $2^k(x+\alpha)-u\to u$ dönüşümü yapılırsa;

$$A_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right)=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{\left(f(2^{-k}\cdot)\right)}\right)^{(i)}(u)\varphi\left(2^k(x+\alpha)-u\right)du$$

$$=A_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot);2^k(x+\alpha))$$

$$=A_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right)$$

elde edilir ki, bu da istenendir.

2. B_k operatörü için;

$$l_0(f;u) = f(u)$$

operatörünün i-kez türevi alınırsa;

$$l_0^{(i)}(f;u) = f^{(i)}(u)$$

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)(x) = 2^{-ki} f^{(i)}\left(2^{-k} x\right), \quad x \in R$$

elde edilir.

Öteleme operatörü için;

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot + \alpha\right)\right)(x) = 2^{-ki} f^{(i)}\left(2^{-k} x + \alpha\right)$$

olduğundan

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot + \alpha\right);2^k u\right) = 2^{-ki} f^{(i)}\left(2^{-k}\left(2^k u\right) + \alpha\right)$$

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot + \alpha\right);2^k u\right) = l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\left(2^k(u+\alpha)\right) \tag{3.1.15}$$

elde edilir. Şimdi B_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim. Yani $B_k^{(i)}\left(f(\cdot + \alpha)\,;x\right) = B_k^{(i)}\left(f\,;x+\alpha\right)$ olduğunu gösterelim. Tanım gereği

$$\left(B_k\left(f(\cdot + \alpha);x\right)\right)^{(i)} = \left(B_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot + \alpha\right);2^k x\right)\right)^{(i)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(2^k x - u\right)\right)^{(i)} \varphi(u)\, du$$

$$= 2^{ki} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(i)}\left(2^k x - u\right)\varphi(u)du$$

$$= 2^{ki} \int_{-\infty}^{\infty} \left(l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot + \alpha\right)\right)^{(i)};2^k x - u\right)\varphi(u)du$$

yazılabilir. Buna (3.1.15) uygulanırsa

$$B_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right)=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)};\left(2^k\left(x-2^{-k}u+\alpha\right)\right)\varphi(u)\,du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)};\left(2^k(x+\alpha)-u\right)\varphi(u)\,du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}\left(2^k(x+\alpha)-u\right)\varphi(u)\,du$$

olur. Burada $2^k(x+\alpha)-u\to u$ dönüşümü yapılırsa;

$$B_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right)=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}(u)\varphi\left(2^k(x+\alpha)-u\right)du$$

$$=B_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot);2^k(x+\alpha)\right)$$

$$=B_k^{(i)}\left(f;x+\alpha\right)$$

elde edilir ki bu da istenendir.

3. L_k operatörü için;

$$l_0(f;x)=\int_x^{x+1}f(t)\,dt=\int_0^1 f(t+x)\,dt$$

operatörünün i-kez türevi alırsa

$$l_0^{(i)}(f;x)=\int_0^1 f^{(i)}(t+x)\,dt$$

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);x\right)=2^{-ki}\int_0^1 f^{(i)}\left(2^{-k}(t+x)\right)dt$$

elde edilir.

Öteleme için;

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);x\right)=\left(\int_0^1 f\left(2^{-k}(t+x)+\alpha\right)dt\right)^{(i)}$$

$$= 2^{-ki}\int_0^1 f^{(i)}\left(2^{-k}(t+x)+\alpha\right)dt$$

eşitliğinde $x = 2^k u$ yazılırsa

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);2^k u\right) = 2^{-ki}\left(\int_0^1 f^{(i)}\left(2^{-k}\left(t+2^k u\right)+\alpha\right)dt\right)$$

$$= 2^{-ki}\int_0^1 f^{(i)}\left(2^{-k}t+2^{-k}2^k u+\alpha\right)dt$$

$$= 2^{-ki}\int_0^1 f^{(i)}\left(2^{-k}\left[t+2^k(u+\alpha)\right]\right)dt$$

$$= l_0^{(i)} f\left(2^{-k}\cdot;2^k(u+\alpha)\right)$$

olur. Dolayısıyla genel olarak

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);2^k u\right) = l_0^{(i)} f\left(2^{-k}\cdot;2^k(u+\alpha)\right) \tag{3.1.16}$$

yazılabilir. Şimdi L_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim. Yani $L_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right) = L_k^{(i)}\left(f;x+\alpha\right)$ olduğunu gösterelim. (3.1.13) ten hareketle

$$\left(L_k\left(f(\cdot+\alpha);x\right)\right)^{(i)} = \left(L_0\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);2^k x\right)\right)^{(i)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(c_0^{f_\alpha\left(2^{-k}\cdot\right)}(u)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k x-u\right)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(c_0^{f_\alpha\left(2^{-k}\cdot\right)}\left(2^k x-u\right)\right)^{(i)}\varphi(u)\,du$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(c_0^{f_\alpha\left(2^{-k}\cdot\right)}\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)\varphi(u)\,du$$

bulunur. Bu eşitliğe (3.1.16) uygulanarak bir önceki örnekteki işlemler tekrarlanırsa

$$L_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right) = 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)};\left(2^k\left(x-2^{-k}u+\alpha\right)\right)\varphi(u)\,du$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)};\left(2^k(x+\alpha)-u\right)\varphi(u)du$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(c_0^{\,f\left(2^{-k}\cdot\right)}\right)^{(i)}\left(2^k(x+\alpha)-u\right)\varphi(u)du$$

elde edilir. $2^k(x+\alpha)-u\to u$ dönüşümü yapılırsa;

$$L_k^{(i)}\left(f\left(\cdot+\alpha\right);x\right)= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(c_0^{\,f\left(2^{-k}\cdot\right)}\right)^{(i)}(u)\varphi\left(2^k(x+\alpha)-u\right)du$$

$$= L_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot);2^k(x+\alpha))$$

$$= L_k^{(i)}\left(f;x+\alpha\right)$$

bulunur ki bu da istenendir.

4. Γ_k operatörü için;

$$l_0(f;x)=\sum_{j=0}^{n}w_j f\left(x+\frac{j}{n}\right)$$

operatörünün i-kez türevi alınırsa

$$l_0^{(i)}(f;x)=\sum_{j=0}^{n}w_j f^{(i)}\left(x+\frac{j}{n}\right),\qquad x\in R$$

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);x\right)=2^{-ki}\sum_{j=0}^{n}w_j f^{(i)}\left(2^{-k}\left(x+\frac{j}{n}\right)\right)$$

elde edilir.

Öteleme operatörü için

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);x\right)=\left(\sum_{j=0}^{n}w_j f\left(2^{-k}\left(x+\frac{j}{n}\right)+\alpha\right)\right)^{(i)}$$

$$=2^{-ki}\sum_{j=0}^{n}w_j f^{(i)}\left(2^{-k}\left(x+\frac{j}{n}\right)+\alpha\right)$$

eşitliğinde $x=2^k u$ dönüşümü yapılırsa

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);2^k u\right)=2^{-ki}\sum_{j=0}^{n}w_j f^{(i)}\left(2^{-k}\left(2^k u+\frac{j}{n}\right)+\alpha\right)$$

$$=2^{-ki}\sum_{j=0}^{n}w_j f^{(i)}\left(2^{-k}\left(\frac{j}{n}+2^k(u+\alpha)\right)\right)$$

$$=l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}.\right);2^k(u+\alpha)\right)$$

bulunur. Dolayısıyla genel olarak $x\in R$ için

$$l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);2^k u\right)= \ =l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);2^k(u+\alpha)\right)$$

elde edilir. Γ_k operatörünün ötelemeyi koruduğunu gösterelim. Yani $\Gamma_k^{(i)}\left(f(\cdot+\alpha);x\right)=\Gamma_k^{(i)}\left(f;x+\alpha\right)$ olduğunu gösterelim. (3.1.13) ten hareketle

$$\left(\Gamma_k\left(f(\cdot+\alpha);x\right)\right)^{(i)}=\left(\Gamma_0\left(f\left(2^{-k}\cdot+\alpha\right);2^k x\right)\right)^{(i)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma_0^{f_\alpha\left(2^{-k}.\right)}(u)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k x-u\right)du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma_0^{f_\alpha\left(2^{-k}.\right)}\left(2^k x-u\right)\right)^{(i)}\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma_0^{f_\alpha\left(2^{-k}.\right)}\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)\varphi(u)\,du$$

yazılabilir. (3.1.17) uygulanarak önceki işlemler tekrarlanırsa

$$\Gamma_k^{(i)}\left(f(+\alpha);x\right)=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)};\left(2^k\left(x-2^{-k}u+\alpha\right)\right)\varphi(u)\,du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)};\left(2^k(x+\alpha)-u\right)\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma_0^{f\left(2^{-k}.\right)}\right)^{(i)}\left(2^k(x+\alpha)-u\right)\varphi(u)du$$

olur. Burada $2^k(x+\alpha)-u\rightarrow u$ dönüşümü yapılırsa;

$$\Gamma_k^{(i)}\left(f\left(\cdot+\alpha\right);x\right)=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma_0^{f\left(2^{-k}\cdot\right)}\right)^{(i)}(u)\varphi\left(2^k\left(x+\alpha\right)-u\right)du$$

$$=\Gamma_0^{(i)}(f(2^{-k}\cdot);2^k(x+\alpha))$$

$$=\Gamma_k^{(i)}\left(f;x+\alpha\right)$$

elde edilir ki, bu da istenendir.

Teorem 3.1.2 $f\in C^{(i)}(R)$, $i\in N$, $f^{(i)}\in X=C_U(R)$, $\delta>0$ ve A_k, B_k, L_k, Γ_k lar tanımlanan operatörler olmak üzere

$$\omega_1\left((A_k f)^{(i)};\delta\right)\leq\omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$$

$$\omega_1\left((B_k f)^{(i)};\delta\right)\leq\omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$$

$$\omega_1\left((L_k f)^{(i)};\delta\right)\leq\omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$$

$$\omega_1\left((\Gamma_k f)^{(i)};\delta\right)\leq\omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$$

eşitsizlikleri sağlar.

İspat:

1. A_k operatörü için önce $l_0^{(i)}\left(f;x\right)$ operatörünün süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

$$\left(l_0(f;x)\right)^{(i)}=\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}(x-t)\varphi(t)dt \quad \text{için}$$

$$\left|l_0^{(i)}\left(f;x-u\right)-l_0^{(i)}\left(f;y-u\right)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}\left(x-u-t\right)\varphi\left(t\right)dt-\int_{-\infty}^{\infty}f^{(i)}\left(y-u-t\right)\varphi\left(t\right)dt\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(f^{(i)}\left(x-u-t\right)-f^{(i)}\left(y-u-t\right)\right)\varphi\left(t\right)dt\right|$$

$$\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(i)}\left(x-u-t\right)-f^{(i)}\left(x-u-t\right)\right|\varphi\left(t\right)dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt \sup_{|x-u|\leq\delta} \left| f^{(i)}(x-u-t) - f^{(i)}(y-u-t) \right|$$

$$\leq \omega_1\left(f^{(i)}; |x-y|\right)$$

yazılabilir. Buna göre A_k lar için

$$\left| (A_k(f; x-u))^{(i)} - (A_k(f; y-u))^{(i)} \right|$$

$$= \left| \left(A_0\left(f(2^{-k}\cdot); 2^k(x-u)\right)\right)^{(i)} - \left(A_0\left(f(2^{-k}\cdot); 2^k(y-u)\right)\right)^{(i)} \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(r_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v)\right)^{(i)} \varphi\left(2^k(x-u)-v\right)dv - \int_{-\infty}^{\infty} \left(r_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v)\right)^{(i)} \varphi\left(2^k(y-u)-v\right)dv \right|$$

yazılabilir. Burada $2^k(x-u)-v \to v$ ve $2^k(y-u)-v \to v$ dönüşümleri yapılırsa

$$\left| \left(A_k^{(i)}(f; x-u)\right) - \left(A_k^{(i)}(f; y-u)\right) \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(r_0^{f(2^{-k}\cdot)}\left(2^k(x-u)-v\right)\right)^{(i)} - \left(r_0^{f(2^{-k}\cdot)}\left(2^k(y-u)-v\right)\right)^{(i)} \right] \varphi(v)dv \right|$$

$$= \left| 2^{ki} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(r_0^{f(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k(x-u)-v\right) - \left(r_0^{f(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k(y-u)-v\right) \right] \varphi(v)dv \right|$$

$$= \left| 2^{ki} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(l_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot); \left(2^k(x-u)-v\right)\right)\right) - \left(l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right); \left(2^k(y-u)-v\right)\right)\right) \right] \varphi(v)dv \right|$$

$$\leq \sup_{|x-y|\leq\delta} \left| 2^{ki} \left[\left(l_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot); \left(2^k(x-u)-v\right)\right)\right) - \left(l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right); \left(2^k(y-u)-v\right)\right)\right) \right] \right| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)dv$$

$$\leq \omega_1(2^{ki}(f(2^{-k}\cdot))^{(i)}; 2^k|x-y|)$$

$$= \omega_1(2^{ki}2^{-ki}(f^{(i)}(2^{-k}\cdot)); 2^k|x-y|)$$

$$= \omega_1\left(f^{(i)}; |x-y|\right)$$

elde edilir. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\leq\delta} \left| \left(A_k^{(i)}(f; x)\right) - \left(A_k^{(i)}(f; y)\right) \right| \leq \sup_{|x-y|\leq\delta} \omega_1(f^{(i)}; |x-y|)$$

bulunur. Yani

$$\omega_1(A_k^{(i)}f;\delta)\le\omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

elde edilir.

2. B_k operatörü için önce $l_0^{(i)}(f;x)$ operatörünün süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

$l_0^{(i)}(f;u)=f^{(i)}(u)$ olduğundan

$$\left|l_0^{(i)}(f;x-u)-l_0^{(i)}(f;y-u)\right|=\left|f^{(i)}(x-u)-f^{(i)}(y-u)\right|$$

$$\le\sup_{|x-u|\le\delta}\left|f^{(i)}(x-u)-f^{(i)}(y-u)\right|$$

$$\le\omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

yazılabilir. Buradan B_k operatörü için

$$\left|(B_k(f;x-u))^{(i)}-(B_k(f;y-u))^{(i)}\right|$$

$$=\left|\left(B_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k(x-u)\right)\right)^{(i)}-\left(B_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k(y-u)\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(v))^{(i)}\varphi\left(2^k(x-u)-v\right)dv-\int_{-\infty}^{\infty}(f(v))^{(i)}\varphi\left(2^k(y-u)-v\right)dv\right|$$

olup $2^k(x-u)-v\to v$ ve $2^k(y-u)-v\to v$ dönüşümleri yapılırsa

$$\left|\left(B_k^{(i)}(f;x-u)\right)-\left(B_k^{(i)}(f;y-u)\right)\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(f\left(2^k(x-u)-v\right)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^k(y-u)-v\right)\right)^{(i)}\right]\varphi(v)dv\right|$$

$$=\left|2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)^{(i)}\left(2^k(x-u)-v\right)-\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)^{(i)}\left(2^k(y-u)-v\right)\right]\varphi(v)dv\right|$$

$$=\left|2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot);\left(2^k(x-u)-v\right)\right)\right)-\left(l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k(y-u)-v\right)\right)\right)\right]\varphi(v)dv\right|$$

$$\le \sup_{|x-y|\le\delta} \left|2^{ki}\left[\left(l_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot);\left(2^k(x-u)-v\right)\right)\right)-\left(l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k(y-u)-v\right)\right)\right)\right]\right| \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(v)\,dv$$

$$\le \omega_1(2^{ki}(f(2^{-k}\cdot))^{(i)};2^k|x-y|)$$

$$=\omega_1(2^{ki}2^{-ki}(f^{(i)}(2^{-k}\cdot));2^k|x-y|)$$

$$=\omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

elde edilir. Her iki tarafın $\delta>0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\le\delta}\left|\left(B_k^{(i)}(f;x)\right)-\left(B_k^{(i)}(f;y)\right)\right| \le \sup_{|x-y|\le\delta}\omega_1(f^{(i)};|x-y|)$$

olur. Yani

$$\omega_1(B_k^{(i)}f;\delta)\le\omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

olarak bulunur.

3. L_k operatörü için önce $l_0^{(i)}(f;x)$ operatörünün süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

$l_0(f;x)=\int_0^1 f^{(i)}(t+x)dt$ olduğundan

$$\left|l_0^{(i)}(f;x-u)-l_0^{(i)}(f;y-u)\right| = \left|\int_0^1 f^{(i)}(t+x-u)dt-\int_0^1 f^{(i)}(t+y-u)dt\right|$$

$$=\left|\int_0^1\left(f^{(i)}(t+x-u)-f^{(i)}(t+y-u)\right)dt\right|$$

$$\le\int_0^1\left|f^{(i)}(t+x-u)-f^{(i)}(t+x-u)\right|dt$$

$$\le\left(\int_0^1 dt\right)\sup_{|x-u|\le\delta}\left|f^{(i)}(t+x-u)-f^{(i)}(t+y-u)\right|$$

$$\le\omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

yazılabilir. Buradan, L_k operatörü için

$$\left|(L_k(f;x))^{(i)}-(L_k(f;y))^{(i)}\right|$$

$$=\left|\left(L_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k(x-u)\right)\right)^{(i)}-\left(L_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k(y-u)\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(c_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k(x-u)-v\right)dv-\int_{-\infty}^{\infty}\left(c_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k(y-u)-v\right)dv\right|$$

yazılabilir. Burada $2^k(x-u)-v\to v$ ve $2^k(y-u)-v\to v$ dönüşümleri yapılırsa

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(c_0^{f(2^{-k}\cdot)}\left(2^k(x-u)-v\right)\right)^{(i)}-\left(c_0^{f(2^{-k}\cdot)}\left(2^k(y-u)-v\right)\right)^{(i)}\right]\varphi(v)\,dv\right|$$

$$=\left|2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(c_0^{f(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k(x-u)-v\right)-\left(c_0^{f(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k(y-u)-v\right)\right]\varphi(v)\,dv\right|$$

$$=\left|2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot);\left(2^k(x-u)-v\right)\right)\right)-\left(l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k(y-u)-v\right)\right)\right)\right]\varphi(v)dv\right|$$

$$\leq\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|2^{ki}\left[\left(l_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot);\left(2^k(x-u)-v\right)\right)\right)-\left(l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k(y-u)-v\right)\right)\right)\right]\right|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(v)dv$$

$$\leq\omega_1(2^{ki}(f(2^{-k}.))^{(i)};2^k|x-y|)$$

$$=\omega_1(2^{ki}2^{-ki}(f^{(i)}(2^{-k}\cdot));2^k|x-y|)$$

$$=\omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

elde ederiz. Her iki tarafın $\delta>0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|\left(L_k^{(i)}(f;x-u)\right)-\left(L_k^{(i)}(f;y-u)\right)\right|\leq\sup_{|x-y|\leq\delta}\omega_1(f^{(i)};|x-y|)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\omega_1(L_kf;\delta)\leq\omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

elde edilir.

4. Γ_k operatörü için önce $l_0^{(i)}(f;x)$ operatörünün süreklilik modülünü koruduğunu gösterelim.

$$l_0^{(i)}(f;x)=\sum_{j=0}^{n} w_j f^{(i)}\left(x+\frac{j}{n}\right) \text{ olduğundan}$$

$$\left|l_0^{(i)}(f;x-u)-l_0^{(i)}(f;y-u)\right|$$

$$=\left|\sum_{j=0}^{n} w_j f^{(i)}\left(x-u+\frac{j}{n}\right)-\sum_{j=0}^{n} w_j f^{(i)}\left(y-u+\frac{j}{n}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} w_j \sup_{|x-u|\leq\delta}\left|f^{(i)}\left(x-u+\frac{j}{n}\right)-f^{(i)}\left(y-u+\frac{j}{n}\right)\right|$$

$$\leq \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

olur. Buradan Γ_k operatörü için

$$\left|(\Gamma_k(f;x-u))^{(i)}-(\Gamma_k(f;y-u))^{(i)}\right|$$

$$=\left|\left(\Gamma_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k(x-u)\right)\right)^{(i)}-\left(\Gamma_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k(y-u)\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k(x-u)-v\right)dv-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma_0^{f(2^{-k}\cdot)}(v)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k(y-u)-v\right)dv\right|$$

yazılabilir. Bu eşitlikte $2^k(x-u)-v\to v$ ve $2^k(y-u)-v\to v$ dönüşümleri yapılırsa

$$=\left|2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\gamma_0^{f(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k(x-u)-v\right)-\left(\gamma_0^{f(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k(y-u)-v\right)\right]\varphi(v)\,dv\right|$$

$$=\left|2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot);\left(2^k(x-u)-v\right)\right)\right)-\left(l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k(y-u)-v\right)\right)\right)\right]\varphi(v)\,dv\right|$$

$$\leq \sup_{|x-y|\leq\delta}\left|2^{ki}\left[\left(l_0^{(i)}\left(f(2^{-k}\cdot);\left(2^k(x-u)-v\right)\right)\right)-\left(l_0^{(i)}\left(f\left(2^{-k}\cdot\right);\left(2^k(y-u)-v\right)\right)\right)\right]\right|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(v)\,dv$$

$$\leq \omega_1(2^{ki}(f(2^{-k}\cdot))^{(i)};2^k|x-y|)$$

$= \omega_1(2^{ki}2^{-ki}(f^{(i)}(2^{-k}\cdot));2^k|x-y|)$

$= \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$

elde edilir. Her iki tarafın $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\le\delta}\left|\left(\Gamma_k^{(i)}(f;x-u)\right)-\left(\Gamma_k^{(i)}(f;y-u)\right)\right| \le \sup_{|x-y|\le\delta}\omega_1(f^{(i)};|x-y|)$$

bulunur. Buradan da

$$\omega_1(\Gamma_k^{(i)}f;\delta) \le \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.3.

$f(x) = \dfrac{x^{i+1}}{(x+1)!}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon için

(i) $\omega_1\left((A_k f)^{(i)};\delta\right) \le \omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$

(ii) $\omega_1\left((B_k f)^{(i)};\delta\right) \le \omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$

(iii) $\omega_1\left((L_k f)^{(i)};\delta\right) \le \omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$

(iv) $\omega_1\left((\Gamma_k f)^{(i)};\delta\right) \le \omega_1\left(f^{(i)};\delta\right)$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

İspatta kolaylık sağlaması için

$$g_i(x) := \frac{x^{i+1}}{(x+1)!} \qquad f = g_i$$

olarak gösterelim. Şimdi g_i fonksiyonunun i - kez türevi alınırsa;

$g_i^{(i)}(x) = x, \quad x \in X$ elde edilir. (i) eşitsizliğini göstermek için

$$\left(l_0(f;x)\right)^{(i)} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(i)}(x-t)\varphi(t)dt$$

operatöründen faydalanalım.

$\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f\left(2^{-k}(x-t)\right)\right)^{(i)}\varphi(t)\,dt$ eşitliğinde $f=g_i$ yazılırsa

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(g_i\left(2^{-k}(x-t)\right)\right)^{(i)}\varphi(t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2^{-k}x^{i+1}}{(i+1)!}-t\right)^{(i)}\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-k(i+1)}\int_{-\infty}^{\infty}(x-t)\varphi(t)\,dt$$

olur. Burada $x=2^k x-u$ ve $x=2^k y-u$ dönüşümleri uygulanırsa;

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)=2^{-k(i+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2^k x-u-t\right)\varphi(t)\,dt$$

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)=2^{-k(i+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2^k y-u-t\right)\varphi(t)\,dt$$

bulunur. Buradan

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)-\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)$$

$$=2^{-k(i+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2^k x-u-t\right)\varphi(t)\,dt-2^{-k(i+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2^k y-u-t\right)\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-k(i+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(2^k x-u-t\right)-\left(2^k y-u-t\right)\right)\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-k(i+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2^k(x-y)\right)\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-k(i+1)}2^k(x-y)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt$$

$$=2^{-ki}(x-y) \tag{3.1.18}$$

olduğu görülür. Buradan hareketle

$$\left(A_k\left(f;x\right)\right)^{(i)}-\left(A_k\left(f;y\right)\right)^{(i)}=\left(A_0\left(g_i(2^{-k}\cdot);2^k x\right)\right)^{(i)}-\left(A_0\left(g_i(2^{-k}\cdot);2^k y\right)\right)^{(i)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}\left(u\right)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k x-u\right)du-\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}\left(u\right)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k y-u\right)du$$

yazılabilir. Burada da $u\rightarrow 2^k x-u$ ve $u\rightarrow 2^k y-u$ dönüşümleri yapılırsa

$$\left(A_k^{(i)}\left(f;x\right)\right)-\left(A_k^{(i)}\left(f;y\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(r_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}\left(2^k x-u\right)\right)^{(i)}-\left(r_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}\left(2^k y-u\right)\right)^{(i)}\right]\varphi(u)\,du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(r_0^{\,g_i(2^{-k}.)}\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)-\left(r_0^{\,g_i(2^{-k}.)}\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)\right]\varphi(u)\,du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0\left(g_i(2^{-k}.)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)-\left(l_0^{(i)}\left(g_i\left(2^{-k}.\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)\right]\varphi(u)\,du$$

bulunur. (3.1.18) eşitliğinden

$$\left(A_k^{(i)}\left(f;x\right)\right)-\left(A_k^{(i)}\left(f;y\right)\right)=2^{ki}2^{-ki}\left(x-y\right)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(u\right)du=x-y$$

yazılır. Her iki yanın $\delta>0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|\left(A_k g_i\right)^{(i)}\left(x\right)-\left(A_k g_i\right)^{(i)}\left(y\right)\right|\leq\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|x-y\right|$$

$$\omega_1\left(A_k^{(i)}\left(g_i\right);\delta\right)\leq\omega_1\left(g_i^{(i)};\left|x-y\right|\right)$$

$$\omega_1\left(A_k^{(i)}f;\delta\right)\leq\omega_1\left(f^{(i)};\left|x-y\right|\right)$$

olduğu görülür ki bu da istenendir.

Şimdi (ii) eşitsizliğini göstermek için

$l_0^{(i)}\left(f;u\right)=f^{(i)}(u)$ operatöründen faydalanalım.

$\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(u\right)=\left(f\left(2^{-k}u\right)\right)^{(i)}$ eşitliğinde $f=g_i$ yazılırsa

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(u\right)=\left(g_i\left(2^{-k}u\right)\right)^{(i)}$$

$$=\left(\frac{\left(2^{-k}u\right)^{i+1}}{(i+1)!}\right)^{(i)}$$

$$=2^{-k(i+1)}u$$

olur. Bu eşitlikte $u=2^{k}x-u$ ve $u=2^{k}y-u$ dönüşümleri yapılırsa

bulunur. Buradan

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^{k}x-u\right)-\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^{k}y-u\right)$$

$$=2^{-k(i+1)}\left(2^{k}x-u\right)-2^{-k(i+1)}\left(2^{k}y-u\right)$$

$$=2^{-k(i+1)}\left(2^{k}x-2^{k}y\right)$$

$$=2^{-k(i+1)}2^{k}\left(x-y\right)$$

$$=2^{-ki}\left(x-y\right) \tag{3.1.19}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\left(B_k\left(f;x\right)\right)^{(i)}-\left(B_k\left(f;y\right)\right)^{(i)}=\left(B_k{}^{(i)}\left(g_i;x\right)\right)-\left(B_k{}^{(i)}\left(g_i;y\right)\right)$$

$$=\left(B_0\left(g_i(2^{-k}\cdot);2^{k}x\right)\right)^{(i)}-\left(B_0\left(g_i(2^{-k}\cdot);2^{k}y\right)\right)^{(i)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(f(u))^{(i)}\varphi\left(2^{k}x-u\right)du-\int_{-\infty}^{\infty}(f(u))^{(i)}\varphi\left(2^{k}y-u\right)du$$

yazılabilir. Burada $u\rightarrow 2^{k}x-u$ ve $u\rightarrow 2^{k}y-u$ dönüşümleri yapılırsa

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(f\left(2^{k}x-u\right)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{k}y-u\right)\right)^{(i)}\right]\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)^{(i)}\left(2^{k}x-u\right)-\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)^{(i)}\left(2^{k}y-u\right)\right]\varphi(u)du$$

$$=2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0\left(g_i(2^{-k}\cdot)\right)\right)^{(i)}\left(2^{k}x-u\right)-\left(l_0{}^{(i)}\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^{k}y-u\right)\right]\varphi(u)du$$

elde edilir. (3.1.19) eşitliğinden

$$= \left| 2^{ki} 2^{-ki} (x-y) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du \right|$$

yazılır. Her iki yanın $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\le\delta} \left| (B_k g_i)^{(i)}(x) - (B_k g_i)^{(i)}(y) \right| = \sup_{|x-y|\le\delta} |x-y| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du$$

$$\omega_1\left(B_k^{(i)}(g_i);\delta\right) = \omega_1\left(g_i^{(i)};|x-y|\right)$$

$$\omega_1\left(B_k^{(i)} f;\delta\right) \le \omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

olduğu görülür ki bu da istenendir.

(iii) eşitsizliğini göstermek için

$$l_0(f;x) = \int_0^1 f^{(i)}(t+x) dt$$

$$\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(x) = \int_0^1 \left(f\left(2^{-k}(x+t)\right)\right)^{(i)} dt$$

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(x) = \int_0^1 \left(g_i\left(2^{-k}(x+t)\right)\right)^{(i)} dt$$

$$= 2^{-k(i+1)} \int_0^1 (x+t) dt$$

olup, $x = 2^k x - u$ ve $x = 2^k y - u$ dönüşümleri uygulanırsa;.

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x - u\right) = 2^{-k(i+1)} \int_0^1 \left(2^k x + t\right) dt$$

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y - u\right) = 2^{-k(i+1)} \int_0^1 \left(2^k y + t\right) dt$$

elde edilir. Buradan

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x - u\right) - \left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\,\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y - u\right)$$

$$= 2^{-k(i+1)}\int_0^1 \left(2^k x + t\right)dt - 2^{-k(i+1)}\int_0^1 \left(2^k y + t\right)dt$$

$$= 2^{-k(i+1)}\int_0^1 \left(\left(2^k x + t\right) - \left(2^k y + t\right)\right)dt$$

$$= 2^{-k(i+1)}\int_0^1 \left(2^k (x-y)\right)dt$$

$$= 2^{-k(i+1)} 2^k (x-y)\int_0^1 dt$$

$$= 2^{-ki}(x-y) \tag{3.1.20}$$

$$\left(L_k(f;x)\right)^{(i)} - \left(L_k(f;y)\right)^{(i)} = \left(L_k(g_i;x)\right)^{(i)} - \left(L_k(g_i;y)\right)^{(i)}$$

$$= \left(L_0\left(g_i(2^{-k}\cdot);2^k x\right)\right)^{(i)} - \left(L_0\left(g_i(2^{-k}\cdot);2^k y\right)\right)^{(i)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(c_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}(u)\right)^{(i)} \varphi\left(2^k x - u\right)du - \int_{-\infty}^{\infty} \left(c_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}(u)\right)^{(i)} \varphi\left(2^k y - u\right)du$$

elde edilir. Burada $u \to 2^k x - u$ ve $u \to 2^k y - u$ dönüşümleri yapılırsa

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(c_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}\left(2^k x - u\right)\right)^{(i)} - \left(c_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}\left(2^k y - u\right)\right)^{(i)}\right] \varphi(u)du$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(c_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k x - u\right) - \left(c_0^{\,g_i(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)}\left(2^k y - u\right)\right] \varphi(u)du$$

$$= 2^{ki}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(l_0\left(g_i(2^{-k}\cdot)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x - u\right) - \left(l_0^{(i)}\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y - u\right)\right] \varphi(u)du$$

olur. (3.1.20) eşitliğinden

$$\left(L_k^{(i)}(f;x)\right) - \left(L_k^{(i)}(f;y)\right) = 2^{ki}2^{-ki}(x-y)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)du = x - y$$

yazılır. Her iki yanın $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y|\le\delta}\left|\left(L_k g_i\right)^{(i)}(x) - \left(L_k g_i\right)^{(i)}(y)\right| \le \sup_{|x-y|\le\delta}|x-y|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)du$$

$$\omega_1\left(L_k^{(i)}(g_i);\delta\right)\leq\omega_1\left(g_i^{(i)};|x-y|\right)$$

$$\omega_1\left(L_k^{(i)}f;\delta\right)\leq\omega_1\left(f^{(i)};|x-y|\right)$$

olduğu görülür bu da istenendir.

Şimdi (iv) eşitsizliğini göstermek için

$l_0^{(i)}(f;x)=\sum_{j=0}^{n}w_j f^{(i)}\left(x+\frac{j}{n}\right)$ operatöründen faydalanalım.

$$\left(l_0\left(f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(x)=\sum_{j=0}^{n}w_j\left(f\left(2^{-k}\left(x+\frac{j}{n}\right)\right)\right)^{(i)}$$

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}(x)=\sum_{j=0}^{n}w_j\left(g_i\left(2^{-k}\left(x+\frac{j}{n}\right)\right)\right)^{(i)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}w_j\,2^{-k(i+1)}\left(x+\frac{j}{n}\right)$$

yazılabilir. Burada $x=2^k x-u$ ve $x=2^k y-u$ dönüşümleri uygulanırsa

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)=\sum_{j=0}^{n}w_j\,2^{-k(i+1)}\left(2^k x-u+\frac{j}{n}\right)$$

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)=\sum_{j=0}^{n}w_j\,2^{-k(i+1)}\left(2^k y-u+\frac{j}{n}\right)$$

elde edilir. Bu taktirde

$$\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k x-u\right)-\left(l_0\left(g_i\left(2^{-k}\cdot\right)\right)\right)^{(i)}\left(2^k y-u\right)$$

$$=2^{-k(i+1)}\sum_{j=0}^{n}w_j\left(2^k x-u+\frac{j}{n}\right)-2^{-k(i+1)}\sum_{j=0}^{n}w_j\left(2^k y-u+\frac{j}{n}\right)$$

$$=2^{-k(i+1)}\sum_{j=0}^{n}w_j\left((2^k x-u+\frac{j}{n})-(2^k y-u-\frac{j}{n})\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}w_j\,2^{-k(i+1)}\left(2^k x-2^k y\right)$$

$$= 2^{-k(i+1)} 2^{k} \left(x - y \right)$$

$$= 2^{-ki} \left(x - y \right) \qquad (3.1.21)$$

olur. Buradan hareketle

$$\left(\Gamma_k \left(f ; x\right)\right)^{(i)} - \left(\Gamma_k \left(f ; y\right)\right)^{(i)} = \left(\Gamma_k \left(g_i ; x\right)\right)^{(i)} - \left(\Gamma_k \left(g_i ; y\right)\right)^{(i)}$$

$$= \left(\Gamma_0 \left(g_i (2^{-k} \cdot);2^k x\right)\right)^{(i)} - \left(\Gamma_0 \left(g_i (2^{-k} \cdot);2^k y\right)\right)^{(i)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\gamma_0^{g_i(2^{-k}.)} \left(u\right)\right)^{(i)} \varphi\left(2^k x - u\right) du - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\gamma_0^{g_i(2^{-k}.)} \left(u\right)\right)^{(i)} \varphi\left(2^k y - u\right) du$$

$u \to 2^k x - u$ ve $u \to 2^k y - u$ dönüşümleri yapılırsa

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\gamma_0^{g_i(2^{-k}\cdot)} \left(2^k x - u\right)\right)^{(i)} - \left(\gamma_0^{g_i(2^{-k}\cdot)} \left(2^k y - u\right)\right)^{(i)} \right] \varphi(u) du$$

$$= 2^{ki} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\gamma_0^{g_i(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)} \left(2^k x - u\right) - \left(\gamma_0^{g_i(2^{-k}\cdot)}\right)^{(i)} \left(2^k y - u\right) \right] \varphi(u) du$$

$$= 2^{ki} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(l_0 \left(g_i (2^{-k} \cdot)\right)\right)^{(i)} \left(2^k x - u\right) - \left(l_0^{(i)} \left(g_i \left(2^{-k} \cdot\right)\right)\right)^{(i)} \left(2^k y - u\right) \right] \varphi(u) du$$

elde edilir. (3.1.21) eşitliğinden

$$\left(\Gamma_k^{(i)} (f ; x)\right) - \left(\Gamma_k^{(i)} (f ; y)\right) = 2^{ki} 2^{-ki} (x - y) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du$$

yazılabilir. Her iki yanın $\delta > 0$ için supremumu alınırsa

$$\sup_{|x-y| \le \delta} \left| \left(\Gamma_k g_i\right)^{(i)} (x) - \left(\Gamma_k g_i\right)^{(i)} (y) \right| \le \sup_{|x-y| \le \delta} |x - y| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du$$

$$\omega_1 \left(\Gamma_k^{(i)} (g_i); \delta\right) \le \omega_1 \left(g_i^{(i)} ; |x - y|\right)$$

$$\omega_1 \left(\Gamma_k^{(i)} f ; \delta\right) \le \omega_1 \left(f^{(i)} ; |x - y|\right)$$

olduğu görülür ki bu da istenendir.

Teorem 3.1.4. $f \in C^{(i)}(R)$, $i \in N$, $f^{(i)} \in X = C_U(R)$ olmak üzere

1. $\left|A_k^{(i)}(f;x) - f^{(i)}(x)\right| \le \omega_1\left(f^{(i)};\dfrac{\alpha}{2^{k-1}}\right)$

2. $\left|B_k^{(i)}(f;x) - f^{(i)}(x)\right| \le \omega_1\left(f^{(i)};\dfrac{\alpha}{2^{k}}\right)$

3. $\left|L_k^{(i)}(f;x) - f^{(i)}(x)\right| \le \omega_1\left(f^{(i)};\dfrac{\alpha+1}{2^{k}}\right)$

4. $\left|\Gamma_k^{(i)}(f;x) - f^{(i)}(x)\right| \le \omega_1\left(f^{(i)};\dfrac{\alpha+1}{2^{k}}\right)$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

1. A_k ile tanımlanan operatörü göz önüne alıp, aşağıdaki işlemleri yapalım.

$$\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u) - f^{(i)}(y)\right| = \sup_{|u-y|\le\alpha}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(i)}(u-t)\varphi(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(i)}(y)\varphi(t)dt\right|$$

$$= \sup_{|u-y|\le\alpha}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f^{(i)}(u-t) - f^{(i)}(y))\varphi(t)dt\right|$$

eşitliğinde $u-t=t$ dönüşümünü yapalım. Bu durumda

$$\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u) - f^{(i)}(y)\right| = \sup_{|u-y|\le\alpha}\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f^{(i)}(t) - f^{(i)}(y))\varphi(u-t)dt\right|$$

$$\le \sup_{|u-y|\le\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f^{(i)}(t) - f^{(i)}(y)\right|\varphi(u-t)dt$$

$$\le \sup_{|u-y|\le\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\omega_1\left(f^{(i)};|t-y|\right)\varphi(u-t)dt$$

$$\le \omega_1\left(f^{(i)};2\alpha\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u-t)dt\right)$$

$$= \omega_1\left(f^{(i)};2\alpha\right)$$

elde edilir. Şimdi elde edilen

$$\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u)-f^{(i)}(y)\right|\le\omega_1\left(f^{(i)};2\alpha\right)$$

eşitsizliği göz önüne alınarak;

$$\left|(A_k(f;x))^{(i)}-f^{(i)}(x)\right|=\left|\left(A_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)\right)^{(i)}-\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)^{(i)}\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{f(2^{-k}\cdot)}(u)\right)^{(i)}\varphi(2^k x-u)du-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(2^k x-u)du\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right]\varphi\left(2^k x-u\right)\ du\right|$$

$$\le\left|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\left[\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right)\ ;(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right]\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$\le\sup_{2^k x-a\le u\le 2^k x-a}\left|\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\varphi\left(2^k x-u\right)du$$

yazılabilir. Burada $g^{(i)}:=f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right)$ şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanırsa

$$\left|(A_k(f;x))^{(i)}-f^{(i)}(x)\right|=\sup_{2^k x-a\le u\le 2^k x-a}\left|\left(l_0(g;u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^k x\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$\le\omega_1\left(g^{(i)};2a\right)=\omega_1\left(f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right);2a\right)=\omega_1\left(f^{(i)};\frac{a}{2^{k-1}}\right)$$

elde edilir.

2. B_k ile tanımlanan operatörü göz önüne alıp, aşağıdaki işlemleri yapalım.

$$\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u)-f^{(i)}(y)\right|=\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|f^{(i)}(u)-f^{(i)}(y)\right|$$

$$\le\sup_{|u-y|\le\alpha}\omega_1\left(f^{(i)};|u-y|\right)$$

$$=\omega_1\left(f^{(i)};\alpha\right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u)-f^{(i)}(y)\right|\le\omega_1\left(f^{(i)};\alpha\right)$$

eşitsizliği göz önüne alınarak;

$$\left|(B_k(f;x))^{(i)}-f^{(i)}(x)\right|=\left|\left(B_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)\right)^{(i)}-\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)^{(i)}\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(u))^{(i)}\varphi\left(2^k x-u\right)du-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right]\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$\le\left|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\left[\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right]\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$\le\sup_{2^k x-a\le u\le 2^k x-a}\left|\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\varphi\left(2^k x-u\right)du$$

yazılabilir. Burada $g^{(i)}:=f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right)$ şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanırsa

$$\left|(B_k(f;x))^{(i)}-f^{(i)}(x)\right|=\sup_{2^k x-a\le u\le 2^k x-a}\left|(l_0(g;u))^{(i)}-\left(g\left(2^k x\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$\le\omega_1\left(g^{(i)};a\right)=\omega_1\left(f^{(i)};\frac{a}{2^k}\right)$$

elde edilir ki bu da istenilendir.

3. L_k operatörü için

$$\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u)-f^{(i)}(y)\right|=\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|\int_0^1 f^{(i)}(u+t)dt-\int_0^1 f^{(i)}(y)dt\right|$$

$$=\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|\int_0^1\left(f^{(i)}(u+t)-f^{(i)}(y)\right)dt\right|$$

$$\le\sup_{|u-y|\le\alpha}\int_0^1\left|f^{(i)}(u+t)-f^{(i)}(y)\right|dt$$

$$\leq \sup_{|u-y|\leq\alpha} \int_0^1 \omega_1\left(f^{(i)};|u+t-y|\right)dt$$

$$\leq \omega_1\left(f^{(i)};1+|u-y|\right)$$

$$=\omega_1\left(f^{(i)};1+\alpha\right)$$

yazılabilir. Bu durumda

$\sup_{|u-y|\leq\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u)-f^{(i)}(y)\right|\leq\omega_1\left(f^{(i)};1+\alpha\right)$ eşitsizlik göz önüne alınarak

$$\left|\left(L_k(f;x)\right)^{(i)}-f^{(i)}(x)\right|=\left|\left(L_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)\right)^{(i)}-\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)^{(i)}\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(c_0^{f\left(2^{-k}\cdot\right)}(u)\right)^{(i)}\varphi\left(2^k x-u\right)du-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right]\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$\leq\left|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\left[\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right]\varphi\left(2^k x-u\right)du\right|$$

$$\leq\sup_{2^k x-a\leq u\leq 2^k x-a}\left|\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\varphi\left(2^k x-u\right)du$$

elde edilir. Burada da $g^{(i)}:=f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right)$ denirse

$$\left|\left(L_k(f;x)\right)^{(i)}-f^{(i)}(x)\right|=\sup_{2^k x-a\leq u\leq 2^k x-a}\left|\left(l_0(g;u)\right)^{(i)}-\left(g\left(2^k x\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$\leq\omega_1\left(g^{(i)};1+a\right)=\omega_1\left(f^{(i)};\frac{a+1}{2^k}\right)$$

elde edilir.

4. Γ_k operatörü için

$$\sup_{|u-y|\leq\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u)-f^{(i)}(y)\right|=\sup_{|u-y|\leq\alpha}\left|\sum_{j=0}^{n}w_j f^{(i)}\left(u+\frac{j}{n}\right)-f^{(i)}(y)\right|$$

$$= \sup_{|u-y|\le\alpha}\left|\sum_{j=0}^{n} w_j f^{(i)}\left(u+\frac{j}{n}\right)-\sum_{j=0}^{n} w_j f^{(i)}(y)\right|$$

$$= \sup_{|u-y|\le\alpha}\left|\sum_{j=0}^{n} w_j \left(f^{(i)}\left(u+\frac{j}{n}\right)-f^{(i)}(y)\right)\right|$$

$$\le \sup_{|u-y|\le\alpha}\left(\sum_{j=0}^{n} w_j \omega_1\left(f^{(i)};\left|u+\frac{j}{n}-y\right|\right)\right)$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{n} w_j\right)\omega_1\left(f^{(i)};1+|u-y|\right)$$

$$\le \omega_1\left(f^{(i)};1+\alpha\right)$$

yazılabilir. Elde edilen

$$\sup_{|u-y|\le\alpha}\left|l_0^{(i)}(f;u)-f^{(i)}(y)\right|\le \omega_1\left(f^{(i)};1+\alpha\right)$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\left|(\Gamma_k(f;x))^{(i)}-f^{(i)}(x)\right| = \left|\left(\Gamma_0\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)\right)^{(i)}-\left(f(2^{-k}\cdot);2^k x\right)^{(i)}\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma_0^{f(2^{-k}\cdot)}(u)\right)^{(i)}\varphi(2^k x-u)du-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(2^k x-u)du\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right]\varphi(2^k x-u)\,du\right|$$

$$\le \left|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\left[\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right]\varphi(2^k x-u)\,du\right|$$

$$\le \sup_{2^k x-a\le u\le 2^k x-a}\left|\left(l_0 f\left(2^{-k}\cdot\right);(u)\right)^{(i)}-\left(f\left(2^{-k}\left(2^k x\right)\right)\right)^{(i)}\right|\int_{2^k x-a}^{2^k x+a}\varphi(2^k x-u)du$$

yazılabilir. Burada da $g^{(i)} := f^{(i)}\left(2^{-k}\cdot\right)$ denirse

$$\left|(\Gamma_k(f;x))^{(i)}-f^{(i)}(x)\right| = \sup_{2^k x-a\le u\le 2^k x-a}\left|\left(l_0(g;u)\right)^{(i)}-\left(g\left(2^k x\right)\right)^{(i)}\right|$$

$$\leq \omega_1\left(g^{(i)};1+a\right)=\omega_1\left(f^{(i)};\frac{1+a}{2^k}\right)$$

Bu da istenilendir.

3.2. A_k' , B_k' , L_k' , Γ_k' Operatörlerinin Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları Olduğunun Gösterilmesi

Teorem 3.2.1. (Fubini Diferensiyelleme Teoremi):

(f_n) , $[a,b]$ üzerinde tanımlı, azalmayan fonksiyonların bir dizisi ve her $x\in[a,b]$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$$

ise hemen hemen her $x\in[a,b]$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=f'(x)$$

dir.

İspat:

$g_n(x)=f_n(x)-f_n(a)$ denirse

(g_n) negatif olmayan ve azalmayan fonksiyonların bir dizisi olur.

$g(x)=f(x)-f(a)$ denirse

g de negatif olmayan bir fonksiyondur.

Bu durumda her $x\in[a,b]$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n(x)-f_n(a)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$$

$$= f(x) - f(a) = g(x)$$

olur.

Dolayısıyla hemen hemen her x için

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

olacaktır. Şimdi

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} g_n$$

olsun. Her x ve $x+h \in [a,b]$ için

$$\frac{S_{k+1}(x+h) - S_{k+1}(x)}{h} = \frac{S_k(x+h) - S_k(x)}{h} + \frac{g_{k+1}(x+h) - g_{k+1}(x)}{h}$$

olacağından

$$\frac{S_k(x+h) - S_k(x)}{h} \leq \frac{S_{k+1}(x+h) - S_{k+1}(x)}{h} \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

olur.

$k = 1,2,\cdots$ için azalmayan S_k fonksiyonları ve g nin $[a,b]$ de türevlenemediği noktaların kümesi E olsun. E sıfır ölçülü bir kümedir. $x \in [a,b] \setminus E$ için

$$S_k'(x) \leq S_{k+1}'(x) \leq g'(x)$$

yazılabilir.

Bu durumda $(S_k'(x))$, $[a,b] \setminus E$ üzerinde azalmayan ve sınırlı bir dizidir.

Dolayısıyla yakınsaktır. Şu halde $(S_k'(x))$ bir Cauchy dizisidir. Bunun $g'(x)$ fonksiyonuna yakınsak olduğunu göstermek için bir alt dizinin $g'(x)$ sayısına yakınsadığını göstermek yeterlidir. (S_k) yakınsak ve limiti g olduğundan, (S_k) nın, her bir $i \in N$ için

$$g(b) - S_{k_i}(b) < \frac{1}{2^i}$$

olacak şekilde bir S_{k_i} alt dizisi vardır.

Her bir i için $g - S_{k_i}$ fonksiyonları azalmayan fonksiyonlar olduğundan, her $x \in [a,b]$ için

$$g(x) - S_{k_i}(x) < \frac{1}{2^i}$$

yazılabilir.

Her $x \in [a,b]$ için

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(g(x) - S_{k_i}(x) \right)$ serisi, $\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ ile aynı özelliklere sahip olduğundan, yukarıdaki ispattan,

$$\left(T_n'(x) \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} g(x) - S_{k_i}(x) \right)' = \left(\sum_{n=1}^{n} \left(g'(x) - S_{k_i}'(x) \right) \right)$$

dizisi $[a,b] \setminus E$ üzerinde yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{i=1}^{n} g'(x) - S_{k_i}'(x)$ serisi $[a,b] \setminus E$ üzerinde yakınsaktır.

Yakınsak serinin genel terimi sıfıra gideceğinden

$$\lim_{i \to \infty} \left[g'(x) - S_{k_i}'(x) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} S_{k_i}'(x) = g'(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} S_k'(x) = g'(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x) = g'(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. $f \in C^1(R)$ olasılık dağılım fonksiyonu ($f' \geq 0$ sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonudur.) olmak üzere $\forall\ k \in Z$ için

A'_k , B'_k , L'_k , Γ'_k sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır.

İspat:

İspatta kolaylık amacıyla operatörler için bazı gösterimleri belirleyelim.

A_k operatörü için;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)dt = 1 \quad \text{olsun.}$$

$$\left(r_0^{\,f}(x)\right)' = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi(t)\,dt\right)'$$

$$\left(r_0^{\,f}(x)\right)' = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(x-t)\,dt$$

olsun.

B_k operatörü için;

$$B_k(f;u) := f\left(\frac{u}{2^k}\right)$$

olmak üzere $k = 0$ için

$$B_0(f;u) = f(u)$$

$$B_0(f;x) = f(x)$$

$$B'_0(f;x) = f'(x)$$

olsun.

L_k operatörü için;

$$c_k^{\,f}(u) := 2^k \int_{2^{-k}u}^{2^{-k}(u+1)} f(t)dt$$

olmak üzere $k = 0$ için

$$c_0^{\,f}(u) := \int_{u}^{(u+1)} f(t)dt$$

$$c_0^{\,f}(x) := \int_{x}^{(x+1)} f(t)dt$$

$$c_0^{\,f}(x) := \int_{0}^{1} f(x+t)dt$$

$$(c_0^{\,f}(x))' := \int_{0}^{1} f'(x+t)dt$$

olsun.

Γ_k operatörü için;

$$\gamma_k^{\,f}(u) := \sum_{j=0}^{n} w_j f\left(\frac{u}{2^k} + \frac{j}{2^k n}\right)$$

olmak üzere $k = 0$ için

$$\gamma_0^{\,f}(u) := \sum_{j=0}^{n} w_j f\left(u + \frac{j}{n}\right)$$

$$(\gamma_0^{\,f}(u))' := \sum_{j=0}^{n} w_j f'\left(u + \frac{j}{n}\right)$$

olsun. Şimdi sırasıyla ispatı yapalım.

1. A_k' operatörü için (φ çift fonksiyon olmak üzere)

$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)dx = 1$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1$ olmak üzere bu iki eşitliği taraf tarafa çarpalım

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)dx\right)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)(1)dt$$

$$= 1 < +\infty$$

elde edilir. Yani

$\left(r_0^{\,f}(x)\right)' \geq 0$ dır. Dolayısıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(r_0^{\,f}(x)\right)' dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)\varphi(t)dt\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t)\varphi(t)dx\right)dt$$

$$= 1$$

dir ki bu da $\left(r_0^{\,f}(x)\right)' \geq 0$ fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyondur.

$$(A_0 f)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(r_0^{\,f})'(x-u)\varphi(u)du \geq 0$$

operatöründe Fubini teoremini kullanalım.

$$(A_k f)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(r_k^{\,f})'(x-u)\varphi(u)du$$

olmak üzere $k = 0$ için

$$(A_0 f)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(r_0^{\,f})'(x-u)\varphi(u)du$$

dır.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(A_0 f)'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(r_0^{\,f})'(x-u)\varphi(u)du\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(r_0^{\,f}\right)' (x-u)dx \right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u).1du$$

$$= 1$$

elde edilir.

Yani $(A_0 f)'$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

2. $(B_0 f)'$ operatörü için;

$$B_k f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{2^k}\right) \varphi\left(2^k x - u\right) du$$

olmak üzere $k = 0$ için

$$B_0 f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(x-u) du$$

$$(B_0 f(x))' = \int_{-\infty}^{\infty} f'(u) \varphi(x-u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-u) \varphi(u) du$$

$$= \left(r_0^{\,f}(x)\right)'$$

elde edilir.

Böylece $\left(r_0^{\,f}\right)'$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu durumda $(B_0 f)'$ de sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

3. $(L_0 f)'$ operatörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu göstermek için;

$$(c_0^{\,f})' \geq 0$$

ve

$$(c_0^{\,f}(x))' := \int_0^1 f'(x+t)dt$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} (c_0^{\,f}(x))' dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_0^1 f'(x+t)dt)dx$$

yazabiliriz.

Fubini Teoremi gereğince

$$= \int_0^1 (\int_{-\infty}^{\infty} f'(x+t)dx)dt$$

$$= \int_0^1 1dt = 1$$

olur. Böylece $(c_0^{\,f})'$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

$$(L_k f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_k^{\,f}(u)\varphi(2^k x - u)du$$

olmak üzere $k = 0$ için

$$(L_0 f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_0^{\,f}(u)\varphi(x-u)du$$

$$(L_0 f)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (c_0^{\,f}(u))'\varphi(x-u)du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (L_0 f)'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} (c_0^{\,f}(u))'\varphi(x-u)du)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} (c_0^{\,f}(x-u))'\varphi(u)du)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} (c_0^{\,f}(x-u))'\varphi(u)\,dx)du$$

$$= 1$$

elde edilir ki buda $(L_0 f)'$ nın olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunu gösterir.

4. $(\Gamma_0 f)'$ operatörü için;

$$(\gamma_0^f(u))' := \sum_{j=0}^{n} w_j f'\left(u + \frac{j}{n}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0^f(x))' dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sum_{j=0}^{n} w_j f'\left(x + \frac{j}{n}\right)) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0^f(x))' dx = \sum_{j=0}^{n} w_j \left(\int_{-\infty}^{\infty} f'\left(x + \frac{j}{n}\right) dx\right)$$

$$= 1$$

$$(\Gamma_k f) := \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^f(u) \varphi\left(2^k x - u\right) du$$

ve

$$(\gamma_0^f(u))' \geq 0$$

olmak üzere $k = 0$ için

$$(\Gamma_0 f) := \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_0^f(u) \varphi(x - u) du$$

$$(\Gamma_0 f)' := \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0^f(u))' \varphi(x - u) du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Gamma_0 f)'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0^f(u))' \varphi(x - u) du) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0^f(x - u))' \varphi(u) du) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) (\int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_0^f(x - u))' dx) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u).1du$$

$$= 1$$

elde edilir. Bu durumda $(\Gamma_0 f)'$ de olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

f bir olasılık yoğunluk fonksiyon ise $f(2^{-k}\cdot)$ de olasılık yoğunluk fonksiyondur. Bunun yanı sıra f' varsa ve sürekli ise;

$$\left(f\left(2^{-k}x\right)\right)' = 2^{-k} f'\left(2^{-k}x\right)$$

elde edilir.

$f(2^{-k}.)$ nın sürekli dağılım fonksiyonu da $2^{-k} f'(2^{-k}.)\cdot$ dır.

Buna göre $\left(A_0 f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)', \left(B_0 f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)', \left(L_0 f\left(2^{-k}\cdot\right)\right)', \left(\Gamma_0 f\left(2^{-k}\right)\right)'$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdırlar.

Burada $k \in Z$ olmak üzere $L_k := A_k, B_k, L_k, \Gamma_k$ ile tanımlanan L_k operatöründe sırasıyla yerine yazarsak

$$(L_k f)(x) = \left(L_0\left(f\left(2^{-k}.\right)\right)\right)\left(2^k x\right)$$

$$(L_k f)'(x) = 2^k \left(L_0\left(f\left(2^{-k}.\right)\right)\right)'\left(2^k x\right)$$

$$(L_k f)'(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (L_k f)'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(L_0\left(f\left(2^{-k}.\right)\right)\right)'\left(2^k x\right)d\left(2^k x\right)$$

$$= 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

Bu durumda $(L_k f)'$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Dolayısıyla

$L'_k := A'_k, B'_k, L'_k, \Gamma'_k$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Ötelemeyi koruyan Lineer Pozitif genelleştirilmiş integral operatörlerin yaklaşım özellikleri ile bu operatörlerin türevlerinin yaklaşım özellikleri karşılaştırıldığında; operatörün i-yinci türevinin yaklaşım hızı, operatörünün kendisinin yaklaşım hızına göre daha hızlı olmaktadır. Yani $L_k(f;x)$ operatörü için $L_k^{(i)}(f;x)$ in yaklaşım hızı $\frac{1}{2^k}$ kadar daha olmaktadır. Bu durum 3. bölümde özel olarak tanımlanan $A_k, B_k, L_k, \mathrm{G}_k$ operatörleri için tek tek incelenmiştir. Bu şekilde elde edilen operatörlerin birer Olasılık Yoğunluk fonksiyonu olduğu ve Olasılık teoride uygulamalara sahip olduğu anlaşılmaktadır.

5.KAYNAKLAR

1. George A. Anastassiou and Sorin G. Gal, Approximation Theory, Birhauser Verlag A6 (2000).
2. G. Anastassiou, C. Cottin H. Gonska , Global smoothness of approximating functions, Analysis 11,43-57 (1991).
3. G. Anastassiou and H. Gonksa, On some shift- invariant integral operators, univariate case, Ann. Pol. Math. L x L3, 225-243 (1995).
4. A.D. Haciyev , Deltasal çekirdekli integral operatörleri ailesi ve yaklaşım teorisi, Lisans üstü ders notları, Ankara Üniversitesi, Ankara (1999).
5. G.A Anastassiou, Differentiaed shift-invariant integral operators, univariate case, App. Anal., 68, (3-4) , 281-311 (1998).
6. O. Doğru, Lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri , Lisans üstü ders notları, Ankara Üniversitesi, Ankara (2005).
7. M. Balcı, Reel Analiz, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, 2000.
8. H.H Ganska, On approximation of continuously differentianle functions by positive linear operators, Bull. Austral math. Soc., 27,73-81 (1983).