T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEİJER'İN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONU VE İSTATİSTİKTE KULLANIMI

FUNDA ERDUGAN

NİSAN 2007

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEİJER'İN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONU VE İSTATİSTİKTE KULLANIMI

FUNDA ERDUGAN

NİSAN 2007

ÖZET

MEİJER'İN GENELLEŞTİRİLMİŞ FONKSİYONU

VE İSTATİSTİKTE KULLANIMI

ERDUGAN, Funda

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL

Nisan 2007, 72 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmanın amacı ve kullanılan kaynaklar hakkında ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde G fonksiyonu tanıtılarak temel özellikleri ve türevi ile ilgili bazı özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde rasgele değişkenlerin bir fonksiyonunun dağılımı G fonksiyonu biçiminde elde edilmiş ve sıralı değişkenlerle bazı dağılımların karakterizasyonunda G fonksiyonunun kullanımı üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde G fonksiyonunun İstatistik teorisinde kullanımı ve yararları tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Meijer'in G fonksiyonu, Rasgele değişkenlerin dönüşümünün dağılımı, Karakterizasyon.

ABSTRACT

THE MEIJER'S GENERALIZED FUNCTIONS

AND USAGE IN STATISTICS

ERDUGAN, Funda

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Deparment of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor :Asst.Prof.Dr. Sevgi YURT ÖNCEL

April 2007, 72 pages

This study consists of four parts. In the first part, the aim of the study and pre-information about used sources have given. In the second part G function has been defined then its some basic and derivative properties have been given. In the third part, distribution of function random variables has been obtained as a G function and role of G function on characterization of ordered variables' distribution has been mentioned. In the last part, using G function in Statistics theorem and its benefits have been discussed.

Key Words : Meijer's G function, Distribution of transformation of random variables, Characterization.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve bu çalışmanın hazırlanması esnasında yardımlarını esirgemeyen, önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam,
Sayın Yrd. Doç. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL'e, bir insanın ne kadar mütevazi kişiliğe sahip olabileceğini gösteren ve engin bilgisi ile örnek aldığım hocam,
Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya, vakit ayırıp tezimi okuyup değerlendiren Sayın jüri üyelerine, her konuda olduğu gibi tez çalışmalarım sırasında da gösterdiği desteğinden dolayı değerli arkadaşım Sayın Öğr. Gör. Serap YÖRÜBULUT'a ve yardımlarını gördüğüm arkadaşlarıma, ayrıca çalışmalarım boyunca manevi desteğini benden esirgemeyen eşime ve her zaman gösterdikleri anlayış ve desteklerinden dolayı beni yetiştiren sevgili aileme, en derin teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

SİMGELER DİZİNİ

$G_{p,q}^{m,n}\left(z\,\middle\vert\,\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)$	Meijer'in G fonksiyonu
$R(s)$	s'nin reel kısmı
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu
$(a)_m$	$a(a+1)\cdots(a+m-1)$
${}_pF_q(z)$	Hipergeometrik fonksiyon
$F(x)$	Dağılım fonksiyonu
$f(x)$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu

KISALTMALAR

o.y.f.	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
g.s.i.	Genelleştirilmiş sıra istatistiği
b.b.a.d.	Birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip

1.GİRİŞ

Bu çalışmada Meijer (1936) tarafından ileri sürülen ve genelleştirilmiş bir fonksiyon olan G fonksiyonu tanıtılacak ve uygulamalarına değinilecektir. Meijer tarafından formüle edildiğinden literatürde Meijer'in G fonksiyonu olarak da geçmektedir. Genelleştirilmiş fonksiyonlar ile ilgili teoremler 20. yüzyılın ilk yarısında gelişmeye başlamıştır. Barnes (1907) tarafından kullanılan Gamma fonksiyonunu izleyen çalışmaların sonucunda, ${}_2F_1$ Hipergeometrik fonksiyonu ortaya konulmuştur. G fonksiyonu Hipergeometrik fonksiyonun devamı olarak da çalışılmıştır. Bu konuda Meijer'in çalışmaları olmasına rağmen 1960'lı yıllara kadar bir durgunluk görülmüştür ki bu zaman sürecinde Fox, G fonksiyonunun bir genellemesi olan H fonksiyonunu Mellin Barnes tipi integral olarak yeniden tanımlamıştır. 60'lı yılların sonuna doğru G ve H fonksiyonu ile ilgili birçok çalışma, bu fonksiyonların matematiksel özellikleri ve integral gösterimleri ile ilgilidir. 1930'lu yıllarda hem MacRobert'in E fonksiyonu hem de Meijer'in G fonksiyonu ile $p > q + 1$ durumu için ${}_pF_q$ sembolüne anlam verilmeye çalışılmıştır. Aslında E fonksiyonu G fonksiyonunun özel bir halidir ve literatürde G fonksiyonundan daha az tanınmaktadır(2,17).

1.1 Kaynak Özetleri

G fonksiyonu ile ilgili temel kavramlar için Mathai(2)'nin "A Handbook of Generalized Special Functions for Statistical and Physical Sciences", Andrews(17)'ün "Special Functions of Mathematics for Engineers" başlıklı kitaplarından yararlanılmıştır.

Sıralanmış rasgele değişkenler ile ilgili olarak Ahsanullah[18]'ın "Record Statistics", Kamps[29]'ın "A Concept of Generalized Order Statistics" başlıklı kitaplarından yararlanılmıştır.

Kompleks Analizi hakkında temel kavramlar için Karaoğlu[5]'nun "Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler", İdemen[22]'nin "Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi", San[25]'nın "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", Başkan[28]'nın "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", Spiegel[23]'in "Laplace Dönüşümleri", Spiegel[24]'in "Teori ve Problemlerle İleri Analiz" kitaplarından ve genel istatistiksel kavramlar için Akdi[30]'nin "Matematiksel İstatistiğe Giriş", Öztürk[14]'ün "Matematiksel İstatistik" adlı kitaplarından ve ayrıca kaynaklarda belirtilen diğer İngilizce Türkçe makale ve kitaplardan faydalanılmıştır.

1.2 Çalışmanın Amacı

Meijer'in G fonksiyonu Matematiğin çeşitli alanlarında kullanıldığı gibi özel durumları İstatistik, Ekonometri, Fizik ve ilişkili diğer alanlarda da görülmektedir. Son zamanlarda çalışılan istatistiksel ve fiziksel problemlerde Meijer'in G fonksiyonuna büyük önem verilmektedir. Elemanter özellikleri ve iyi bilinen serilerin açılımında genelleşmiş Hipergeometrik fonksiyonların sonlu toplamlarını ifade edebilmesi açısından Fizikte yararlı bir fonksiyondur. Bu nedenle G fonksiyonu sayısal hesaplamaları oldukça kolaylaştırmaktadır. Rezonans, biten rezonans, termonükleer reaksiyon oranı için integrallerin analitik değerlendirilmesi için istatistiksel tekniklerden yararlanılmaktadır. Bu teknikler İstatistiksel dağılım teorisine ve genelleştirilmiş özel fonksiyonlar teorisinin ana kategorilerinden olan Meijer'in G fonksiyonuna dayanmaktadır[2,3].

İstatistik teorisinde, rasgele değişkenlerin bir dönüşümünün dağılımını belirleyebilmek önemli bir problemdir. Bu problemin çözümünde kullanılan klasik tekniklerden biri de olasılık yoğunluk fonksiyonu tekniğidir.

Şamilov ve arkadaşları[4], olasılık yoğunluk fonksiyonu tekniğinde karşılaşılan: yeni ek rasgele değişkenler tanımlama, rasgele değişkenler arasında birebir dönüşüm yapma ve Jakobiyen hesaplama zorluklarından kurtulabilmek için Heaviside ve Dirac genelleştirilmiş fonksiyonunu kullanmışlardır.

Bu çalışmada rasgele değişkenlerin bir fonksiyonunun dağılımı, Mellin dönüşümü ve ters Mellin dönüşümünden yararlanarak Meijer'in G fonksiyonu biçiminde elde edilmiş ve bu genelleştirilmiş fonksiyonun rasgele değişkenlerin dağılım teorisindeki uygulaması ele alınmıştır.

İstatistikte kullanım alanı oldukça geniş olan sıra istatistikleri, rekor değerler ve bu rasgele değişkenlerin en genel hali olan genelleştirilmiş sıra istatistiklerinin önemi büyüktür. Meijer'in G fonksiyonu yardımıyla sürekli dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonları, dağılım fonksiyonları ve bunlardan yararlanarak momentleri ifade edilebilmektedir. Ayrıca bu çalışmada, literatürde mevcut olan bazı karakterizasyon problemlerinin çözümleri ve bu fonksiyonun istatistiksel problemlerin çözümüne uygulanabilirliği G fonksiyonu kullanılarak incelenmektedir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde G fonksiyonunun tanımlanmasında kullanılan bazı temel kavramlar ve gösterimler ifade edilecektir.

2.1 Temel Tanımlar

Kompleks sayı kavramının ortaya çıkışı ve benimsenmesi, diğer Matematik kavramlarında olduğu gibi kolay olmamıştır. Reel sayıların yetersizliği 16. yüzyılın başlarında duyulmaya başlanmıştı. İkinci ve üçüncü dereceden denklemlerin çözümlerini veren açık formüller ve bu çözümlerle katsayılar arasındaki ilişkiler o dönemde oldukça iyi biliniyor ve kullanılıyordu. Örneğin, $x^2 - 2bx + c = 0$ denkleminin kökleri

$$x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - c} \tag{2.1.1}$$

formülü ile hesaplanıyor ve

$$x_1 + x_2 = 2b, \quad x_1 x_2 = c \tag{2.1.2}$$

olduğu da biliniyordu. Ancak, bütün bu söylenenler $b^2 > c$ için anlamlıydı. $b^2 < c$ olduğunda (2.1.1) eşitliği anlamını yitiriyordu. (2.1.1) eşitliği ile verilen fakat $b^2 < c$ durumunda reel eksende gösterilemeyen x_1 ve x_2 bu hale ait çözümler olarak kabul edilecek olursa (2.1.2) eşitliğindeki teoremler yine geçerli kalmaktadırlar. Böyle bir kabul gerçekte bir sayı olmayan $\sqrt{-1}$ değerini de bir sayı gibi düşünmek ve bunun üzerinde cebirin bütün kurallarını uygulamak fikrini de beraberinde getirdi. 17. ve 18. yüzyıl Matematikçileri $a + \sqrt{-1}b$ şeklindeki ifadelere toplama, çarpma, bölme, kuvvet alma gibi işlemleri uygulayarak vardıkları sonuçlarda hiçbir çelişkiye düşmediklerini görmüşlerdir. 1707-1783 yılları arasında yaşayan Euler, artık çok kullanılmakta bulunan $\sqrt{-1}$'in gerçek bir sayı olmadığını vurgulamak için buna imaginaire sayı adını vermiş ve i ile göstermiştir. Bundan sonra $a+ib$ şeklinde yazılan ifadeler de kompleks sayı olarak adlandırılmaya başlanmıştır. 19. yüzyılda ise kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi hızla gelişmiş ve reel fonksiyonlar teorisinin cevap veremediği sorulara cevap vermiştir. Örneğin, reel düşünülen x sayısının her değeri için

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

formülü ile tanımlanan fonksiyon her yerde süreklidir ve her mertebeden sürekli türevlere sahiptir. Bu nedenle, bu fonksiyonun her noktada Taylor serisine açılımını düşünmek ve bu seriler bakımından noktaların birbirinin aynı davranışlar göstermesini beklemek çok doğaldır. Ancak $x=0$ noktasında fonksiyon ve bütün türevleri sıfırdır. Bu ise $x=0$ noktası civarında $f'(x)\equiv 0$ olduğu izlenimini verir ve gerçekle çelişir. Reel fonksiyonlar teorisi ile kolayca açıklanması mümkün olmayan bu durum kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde çok basit bir açıklamaya sahiptir: $x=0$ noktası fonksiyonun bir esas tekil noktasıdır ve dolayısıyla bunun civarında ancak bir Laurent açılımı söz konusudur [22].

x ve y reel sayılar olmak üzere, $x+iy$ şeklinde yazılan her (x,y) reel sayı çiftine bir kompleks sayı adı verilir. x söz konusu kompleks sayısının reel kısmı, y de sanal kısmıdır. $z=(x,y)$ kompleks sayıları ile xy düzleminin (x,y) noktaları bire-bir olarak eşleşir. Farklı noktalara, farklı sayıların geldiği açıktır. Böylece düzlemin noktaları ile kompleks sayıların kümesi arasında bire bir eşleme kurulmuş olur. Noktaları kompleks sayılara karşı getirilen düzleme kompleks düzlem adı verilir.

Tanım 2.1.1: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma &: [a,b] \to \mathbb{C} \\ t &\to \gamma(t) = f_1(t) + i f_2(t) \end{aligned}$$

şeklindeki sürekli bir fonksiyona kompleks düzlemde bir eğri denir. $\gamma(a) \in \mathbb{C}$ noktasına γ eğrisinin başlangıç, $\gamma(b) \in \mathbb{C}$ noktasına da bitiş noktası denir. Eğer her $t \in (a,b)$ için $f_1^{'}(t), f_2^{'}(t)$ türevleri var ve $\gamma^{'}(t) = f_1^{'}(t) + i f_2^{'}(t) \neq 0$ ise γ eğrisine düzgündür (regülerdir) denir. Düzgün eğrinin her noktasından yalnızca bir tek teğet geçer. Eğer $\gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisi için $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise eğriye kapalı eğri ve her $t_1, t_2 \in (a,b)$ için $t_1 \neq t_2$ olduğunda $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ oluyorsa eğriye basit eğri denir. Bir eğri düzgün olmadığı halde düzgün eğrilerin bir toplamı şeklinde de ifade edilebilir. Uç noktaları A ve B olan γ eğrisini n parçaya bölen $z_0, z_1, \cdots, z_n$ noktaları ele alınsın ($z_0 \equiv A$ ve $z_n \equiv B$). Verilen bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$s_n = f(z_1)\Delta z_1 + f(z_2)\Delta z_2 + \cdots + f(z_n)\Delta z_n, \quad (\Delta z_k = z_k - z_{k-1})$$

toplamını oluşturalım. n sayısı arttıkça Δz_k ifadesi mutlak değerce küçülür. Sonunda $n \to \infty$ limiti alındığında, bu limit değere $f(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemde bir düzgün γ eğrisi boyunca kompleks integrali denir ve

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k \equiv \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

şeklinde ifade edilir. Bu integral $\int_{AB} f(z)\,dz$ veya $\int_{A}^{B} f(z)\,dz$ olarak da gösterilir.

Kompleks düzlemde basit olmayan bir γ eğrisi üzerinden alınan integraller büyük önem taşırlar.

Tanım 2.1.2:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $t \to \gamma(\mathrm{t}) = f_1(t) + i f_2(t)$ eğrisi verilsin. Bu durumda $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$, $a \le t \le b$ eğrisine $\gamma(t)$'nin ters yönde yönlendirilmişi denir.

γ ile $\tilde{\gamma}$'nın başlangıç ve bitiş noktaları yer değiştirmiştir. Kapalı eğrilerin yönlendirilmesinde saat yönü negatif; saatin tersi yönündeki yön de pozitif yön olarak kabul edilir. Pozitif yönde kapalı bir eğri boyunca bir eğrisel integral $\oint_{\gamma} f(z)dz$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.1.3: $z_0 \in \mathbb{C}$ herhangi bir sabit nokta olmak üzere $D(z_0,\varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$ açık diskine z_0 noktasının ε komşuluğu denir. Ayrıca $D(z_0,\varepsilon) - \{z_0\} = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$ kümesine de z_0 noktasının ε delinmiş komşuluğu adı verilir.

Tanım 2.1.4: Kompleks düzlemde z değişkeni, herhangi bir yol ile z_0 noktasına yaklaştığı zaman $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ oranının $z \to z_0$ için bir limiti varsa bu limite f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki türevi denir ve $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.5: $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(z)$, $z_0 \in D$ noktasının bir $D(z_0,\varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon \}$ komşuluğundaki her noktada türeve sahip ise $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir (holomorftur) denir

Teorem 2.1.1: Bir $f(z)$ fonksiyonu kapalı bir γ eğrisi üzerinde ve bunun çevrelediği D bölgesinde analitik ise,

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

dır.

Bu teorem Cauchy teoremi olarak adlandırılır. Ancak bir f analitik fonksiyonunun kapalı eğri içerisinde aykırı noktaları bulunuyorsa, bu eğri üzerinden alınan integralin değeri sıfır olmayabilir. Gerçekte bu integralin değeri, fonksiyonun ayrık aykırı noktalardaki rezidüleri toplamının $2\pi i$ katıdır. Cauchy teoreminin bir sonucu olarak eğer $f(z)$ fonksiyonu, basit bağlantılı bir D bölgesinde ve D'nin γ sınırında analitikse bu takdirde $z_0, z_1 \in D$ noktalarını birleştiren ve tamamen D'nin içinde kalan eğriler boyunca $f(z)$'nin $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ integrali yoldan bağımsızdır.

Tanım 2.1.6: $f(z)$ fonksiyonu bir $z_0 \in \mathbb{C}$ sabit noktasının en az bir delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse z_0'a $f(z)$'nin ayrık aykırı noktası denir.

Eğer z_0, $f(z)$'nin bir ayrık aykırı noktası ise $f(z)$ fonksiyonu $0 < |z - z_0| < R$ eşitsizliğini sağlayan bir halkasal bölgedeki her z için

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde bir Laurent serisine açılabilir.

Tanım 2.1.7: Eğer (2.1.1) açılımındaki negatif indisli terimlerin tümü sıfırsa z_0 noktasına $f(z)$'nin kaldırılabilir ayrık aykırı noktası; negatif indisli katsayılardan sonlu tanesi sıfırdan farklı diğerleri sıfır ise z_0'a $f(z)$'nin bir kutup noktası; negatif indisli terimlerden sonsuz çokluktaki sıfırdan farklı ise z_0'a $f(z)$'nin bir esas aykırı noktasıdır denir.

Tanım 2.1.8: (2.1.1) açılımındaki a_{-1} katsayısına $f(z)$'nin z_0 noktasındaki rezidüsü denir ve $Rez(f, z_0)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.2: Bir $f(z)$ fonksiyonu γ eğrisi içinde bir a noktası hariç, her yerde analitik ise, fonksiyonun bu a noktasındaki rezidüsü $Rezf(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z)dz$ dır.

Buradan,

- Rezidü değeri g eğrisinin seçimine bağlı değildir. Fonksiyon a noktası hariç her yerde analitik olduğundan eğrinin şekli değiştirilse de integralin değeri aynı kalır.
- Fonksiyonun analitik olduğu bir noktada rezidüsü sıfırdır. Bu, Cauchy teoreminin bir sonucudur.

Rezidü kavramı, hesaplanması çok zor olan belli tipten kompleks eğrisel integraller ve bazı genelleştirilmiş reel integrallerin hesaplanmasında büyük kolaylıklar sağlar.

Teorem 2.1.3: Bir $f(z)$ fonksiyonu kapalı bir γ eğrisi içindeki $a_1, a_2, \cdots, a_n$ noktalarında ayrık singülerliğe sahip diğer yerlerde analitik ise, $\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Rezf(a_j)$ dır.

Tanım 2.1.9: $(.)$ ifadesinin reel kısmı $R(.)$ olmak üzere, $R(z) > 0$ için $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir[2].

$\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ gamma fonksiyonunun temel özelliklerinden bazılarıdır. Ayrıca $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^t t^{-z} dt$, $c > 0$, $R(z) > 0$ dır. $\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}$ Stirling formülünden $\Gamma(z)$'nın yaklaşık değeri bulunabilir. Yeterince büyük n ve kesirli α değeri için ise $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{i=1}^{n}(z+i-1)}$ formülü kullanılır.

2.1.1. Rezidü Hesaplama Teknikleri:

Bir analitik $f(z)$ fonksiyonunun singüler noktalarındaki rezidüleri çeşitli yollardan hesaplanabilir. Şimdi bu hesaplama tekniklerini verelim:

1) Eğer a, $f(z)$'nin 1. inci mertebeden kutup noktası ise,

$$Rezf(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

dır.

2) $z = a$ noktası m. inci dereceden kutup noktası ise,

$$Rezf(a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z-a)^m f(z) \right\}$$

dır.

3) $f(z)$ fonksiyonunun $z = a$ noktasındaki Laurent Açılımı

$$f(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i (z-a)^i$$

$$=\cdots+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$

olsun. Bu durumda Laurent serisi açılımındaki, $1/(z-a)$ teriminin katsayısı yani c_{-1} $f(z)$'nin a noktasındaki rezidüsü olur.

Şimdi bazı örnekler verelim:

Örnek 2.1.1.1: $f(z)=\dfrac{z}{(z-3)^2(z+1)}$ fonksiyonu $z=3$ noktasında ikinci mertebeden ve $z=-1$ noktasında birinci mertebeden bir kutup noktasına sahiptir.

Örnek 2.1.1.2:

a. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2-4}$ fonksiyonunun birinci mertebeden kutup noktalarındaki rezidüleri,

$$Rezf(2)=\lim_{z\to 2}(z-2)\left\{\frac{2z+3}{(z-2)(z+2)}\right\}=\frac{7}{4}$$
$$Rezf(-2)=\lim_{z\to -2}(z+2)\left\{\frac{2z+3}{(z-2)(z+2)}\right\}=\frac{1}{4}$$

dır.

b. $f(z)=\dfrac{z-3}{z^3+5z^2}$ fonksiyonu $z=-5$ noktasında birinci mertebeden ve $z=0$ noktasında ikinci mertebeden kutba sahiptir. Böylece

$$\lim_{z\to -5}(z+5)\left\{\frac{z-3}{z^2(z+5)}\right\}=\lim_{z\to -5}\frac{z-3}{z^2}=\frac{-8}{25} \quad , \quad z_0=-5$$
$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{z^2\frac{z-3}{z^2(z+5)}\right\}=\lim_{z\to 0}\frac{z+5-(z-3)}{(z+5)^2}=\frac{8}{25} \quad , \quad z_0=0$$

dır.

c. $f(z)=\dfrac{e^{zt}}{(z-2)^3}$ fonksiyonu $z=2$ noktasında üçüncü mertebeden kutup'a sahip

olup bu noktadaki rezidü,

$$\lim_{z\to 2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z-2)^3\frac{e^{zt}}{(z-2)^3}\right\}=\frac{1}{2}e^{2t}t^2 \quad , \quad z_0=2$$

dır.

d. $f(z)=\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)^2}$ fonksiyonunun $z=-i$ ve $z=i$ kutup noktalarındaki rezidüleri

ise

$$\lim_{z\to -i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+i)^2\frac{z}{\left(z^2+1\right)^2}\right\}=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{(z-i)^2}\right\}=0 \quad , \quad z_0=-i$$

$$\lim_{z\to i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\frac{z}{\left(z^2+1\right)^2}\right\}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{(z+i)^2}\right\}=0 \quad , \quad z_0=i$$

dır.

e. $f(z)=\dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$ fonksiyonu $z_0=3$ noktasında ikinci mertebeden kutba sahiptir ve

bu noktadaki rezidüsü

$$\lim_{z\to 3}\frac{d}{dz}\left\{(z-3)^2\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}\right\}=\lim_{z\to 3}\left(e^{zt}+zte^{zt}\right)=e^{3t}+3te^{3t} \quad , \quad z_0=3$$

dır.

2.2 Bazı Gamma Çarpımlarının Ters Mellin Dönüşümleri

$\tilde{f}(z)=\int\limits_{x=0}^{\infty} x^{z-1} f(x)\,dx$ ifadesi $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü ve $f(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{z=c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z}\tilde{f}(z)\,dz$ ifadesi ise $\tilde{f}(p)$ fonksiyonunun ters Mellin dönüşümüdür. $\int\limits_{0}^{\infty}\left|f(x)\right|x^{z-1}dx$ integrali $z>0$ için sınırlı ise $\tilde{f}(z)$ dönüşümü vardır. $c>z$ için ise $f(x)$ fonksiyonunun tersi alınabilir. Burada z Mellin dönüşümünün kompleks değişkenidir.

G fonksiyonunun tanımlanmasında kullanılan bazı Gamma fonksiyonlarının çarpımlarının ters Mellin dönüşümleri

$$G_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+s\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-s\right)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-s\right)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+s\right)}z^{-s}ds\,; \tag{2.2.1}$$

$$G_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j-s\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j+s\right)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j+s\right)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j-s\right)}z^{s}ds\,; \tag{2.2.2}$$

$$G_3(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_3}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+s\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-s\right)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-s\right)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+s\right)}z^{s}ds\,; \tag{2.2.3}$$

$$G_4(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_4}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j-s\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j+s\right)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j+s\right)\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j-s\right)}z^{-s}ds \tag{2.2.4}$$

biçimindedir.

Burada $i=\sqrt{-1}$ olmak üzere L_1, L_2, L_3, L_4; $G_1(z), G_2(z), G_3(z)$ ve $G_4(z)$ için tanımlanmış uygun kapalı eğrilerdir. Genel tanım ve koşulları vermeden önce $G_j(z),\ j=1,2,3,4$'nin özellikleri: s yerine $-s$ yazılırsa (2.2.2) eşitliğinden (2.2.1) eşitliği ve tersi de elde edilebilir. Böylece tüm $z \neq 0$ için $G_1(z)=G_2(z)$ olur. $z^s = \left(\frac{1}{z}\right)^{-s},\ z \neq 0$ olduğu için $G_1(z)$'de $G_3\left(\frac{1}{z}\right)$'ye eşittir ve aynı şekilde $G_2(z)$'de $G_4\left(\frac{1}{z}\right)$'ye eşittir. Dolayısıyla yukarıdaki tüm bağıntılar göz önüne alındığında $z \neq 0$ için

$$G_1(z)=G_2(z)=G_3\left(\frac{1}{z}\right)=G_4\left(\frac{1}{z}\right)$$

eşitlikleri yazılabilir. Hangi Gamma fonksiyonundan yola çıkılarak rezidü toplamları hesaplanırsa hesaplansın $G_1(z), G_2(z), G_3(z)$ ve $G_4(z)$ fonksiyonlarından yalnızca birisinin ele alınması yeterlidir.

Uygulamaların çoğunda G fonksiyonunun gösterimi ters Mellin dönüşümü gibi verilmektedir.

2.3 G Fonksiyonu

Tanım 2.3.1: $i=\sqrt{-1}$**,** $z\neq 0$ ve L, £ 'de kapalı uygun bir eğri olmak üzere

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j+s\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j-s\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j-s\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j+s\right)}z^{-s}ds \tag{2.3.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Meijer'in G fonksiyonu denir ve

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)\equiv G_{p,q}^{m,n}\left(z\left|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right.\right)\equiv G_{p,q}^{m,n}\left(z\right)\equiv G\left(z\right)$$

ifadelerinden birisi ile gösterilir.

Burada $0\leq m\leq q$, $0\leq n\leq p$ dır ve $-b_j-v\neq 1-a_k+\lambda$, $j=1,2,\cdots,m$; $k=1,2,\cdots,n$; $v,\ \lambda=0,1,\cdots$ olmak üzere $a_1,\cdots,a_p$ ve $b_1,\cdots,b_q$ parametreleri $\Gamma\left(b_j+s\right)$'nin kutup noktaları olmayan ancak $\Gamma\left(1-a_k-s\right)$'nın kutup noktaları olabilen kompleks sayılardır.

2.3.1 G Fonksiyonu İçin Varlık Koşulları

G fonksiyonu, ya $j=1,2,\cdots,m$ için $\Gamma\left(b_j+s\right)$'in kutup noktaları ya da $k=1,2,\cdots,n$ için $\Gamma\left(1-a_k-s\right)$'in kutup noktaları yardımıyla hesaplanmaktadır. Bu nedenle, Yol 2 ve Yol 3'ün tanımı ile birlikte G fonksiyonu için varlık koşulları aşağıdaki gibidir.

i) $q\geq 1$**,** $q>p$ **:** $z\neq 0$ olan tüm z'ler için $G\left(z\right)$ mevcuttur,

ii) $q\geq 1$**,** $q=p$ **:** $\left|z\right|<1$ için $G\left(z\right)$ mevcuttur,

iii) $p\geq 1$**,** $p>q$ **:** $z\neq 0$ olan tüm z'ler için $G\left(z\right)$ mevcuttur,

iv) $p \geq 1$**,** $q = p$ **:** $|z|>1$ için $G(z)$ mevcuttur.

(i) ve (ii) durumlarında $G(z)$**,** $j = 1,2,\cdots,m$ için $\Gamma(b_j + s)$'in kutup noktalarındaki rezidüleri toplamından ve (iii) ile (iv) durumlarında ise $G(z)$, $\Gamma(1-a_k-s)$, $k = 1,2,\cdots,n$'in kutup noktalarındaki rezidüleri toplamından elde edilir. Yol 1 durumunda $\Gamma(b_j + s)$ veya $\Gamma(1-a_k-s)$'in kutup noktalarındaki rezidü toplamlarından G fonksiyonu elde edilmektedir.

2.3.2 Kapalı Eğrinin Çeşitleri

(2.3.1) eşitliğinde yer alan L eğrisinin farklı seçenekleri mevcuttur. Bu kesimde L'nin seçiminin, ilgilenilen G fonksiyonunun hesaplanması için önemli olmadığı, L'nin üç temel yol seçimi ile gösterilecektir.

Yol 1:

L'nin yönü $c-i\infty$'dan $c+i\infty$'a doğru ise $\Gamma(1-a_k-s), (k = 1,2,\cdots,n)$'in kutup noktaları $s = 1-a_k+\lambda,\ \ k = 1,2,\cdots,n;\ \lambda = 0,1,\cdots$ ve $\Gamma(b_j+s), (j = 1,2,\cdots,m)$'in kutup noktaları ise $s = -b_j - v,\ \ j = 1,2,\cdots,m;\ v = 0,1,\cdots$ dır.

Yol 2:

L kapalı eğrisi üzerinde pozitif yönde ilerlenerek $-\infty$'dan başlayıp yine $-\infty$'a gelindiğinde sadece $\Gamma(b_j+s)$, $j = 1,2,\cdots,m$'in kutup noktaları mevcuttur. Eğer $q \geq 1$ ise , $q > p$ olduğunda tüm z'ler için veya $p = q$ olduğunda $|z| < 1$ için (2.3.1) eşitliği ile verilen integral yakınsaktır.

Yol 3:

L kapalı eğrisi üzerinde negatif yönde ilerlenerek ∞'dan başlayıp yine ∞'a gelindiğinde sadece $k=1,2,\cdots,n$ için $\Gamma(1-a_k-s)$'in kutup noktaları mevcuttur. Eğer $p\geq 1$ ise, $p>q$ olduğunda tüm z'ler için veya $p=q$ olduğunda $|z|>1$ için (2.3.1) eşitliği ile verilen integral yakınsaktır.

Şimdiye kadar ortaya konulan bilgileri bir örnek üzerinde gösterelim:

Örnek 2.3.1:

$G_{0,1}^{1,0}\left(z\middle|_{0}\right)$ fonksiyonu için (2.3.1) eşitliğinden

$$G_{0,1}^{1,0}\left(z\middle|_{0}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(s)\, z^{-s}ds \qquad m=1,\ n=0,\ p=0,\ q=1$$

ve $q=1>p=0$ dır.

Her z için Yol 1 ve Yol 2'nin her ikisi de anlamlıdır ve $G_{0,1}^{1,0}\left(z\middle|_{0}\right)$ fonksiyonu $\Gamma(s)\,z^{-s}$'in kutup noktalarındaki rezidülerin toplamından elde edilebilir. $\Gamma(s)$'in $v=0,1,2,\cdots$ için $s=-v$ kutup noktalarındaki rezidüsü R_v olmak üzere

$$\begin{aligned}
R_v &= \lim_{s\to -v}(s+v)\Gamma(s)\,z^{-s}\\
&= \lim_{s\to -v}\left[\frac{(s+v)(s+v-1)\ldots(s)}{(s+v-1)\ldots(s)}\right]\Gamma(s)\,z^{-s}\\
&= \lim_{s\to -v}\frac{\Gamma(s+v+1)}{(s+v-1)\ldots(s)}z^{-s}\\
&= \frac{(-1)^v}{v!}z^v
\end{aligned}$$

ve

$$G_{0,1}^{1,0}\left(z \middle| 0 \right) = \sum_{v=0}^{\infty} R_v = e^{-z}$$

dır. Yani e^{-z} ifadesi G fonksiyona bağlı olarak $G_{0,1}^{1,0}\left(z \middle| 0 \right)$ şeklinde yazılabilir.

2.4 G Fonksiyonunun Bazı Temel Özellikleri

Bu kesimde G fonksiyonuna ait temel özellikler aşağıda maddeler halinde verilecektir.

Özellik 1:

(2.3.1) eşitliğinin sağ tarafı z^{α} ile çarpılıp $s+\alpha = s'$ dönüşümü yapılırsa sonuç yine bir G fonksiyonu olarak

$$z^{\alpha} G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) = G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1+\alpha, \ldots, a_p+\alpha \\ b_1+\alpha, \ldots, b_q+\alpha \end{matrix} \right)$$

şeklinde yazılabilir.

Özellik 2:

Eğer $j = 1, 2, \cdots, n$ için a_j'lerin birincisi, $j = m+1, \cdots, q$ için b_j'lerden sonuncusuna eşit ise veya $j = 1, \cdots, m$ için b_j'lerin birincisi $j = n+1, \cdots, p$ için a_j'lerin sonuncusuna eşit ise o zaman (2.3.1) eşitliğindeki gamma çarpımlarının yapısından da açıkça görülebileceği gibi gamma çifti

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_{q-1}, a_1 \end{matrix} \right) = G_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left(z \middle| \begin{matrix} a_2, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_{q-1} \end{matrix} \right) \quad p, q, n \geq 1 \text{ için}$$

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1 \\ b_1, \ldots, bq \end{matrix} \right) = G_{p-1,q-1}^{m-1,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_{p-1} \\ b_2, \ldots, b_q \end{matrix} \right) \quad p, q, m \geq 1 \text{ için}$$

biçiminde sadeleşir ve G fonksiyonu daha düşük sıralı G fonksiyonu cinsinden ifade edilebilmektedir.

Özellik 3:

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)=G_{q,p}^{n,m}\left(\frac{1}{z}\middle|\begin{matrix}1-b_1,\ldots,1-b_q\\ 1-a_1,\ldots,1-a_p\end{matrix}\right),\quad \arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$$

dır. Bu özellik $|z|<1$ için tanımlanan G fonksiyonunun $|z|>1$ için de incelenmesinde oldukça önemlidir. Ayrıca $p\le q$ durumundan $p\ge q$ durumuna geçerken de bu özellik karşımıza çıkar. Dolayısıyla G fonksiyonu ile ilgili tartışmalarda $p\le q$ ifadesi kabul edilebilir.

Özellik 4:

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=(z-1)(z-2)\ldots(z-r)\Gamma(z-r)\\ &=(-1)^r(-z+1)(-z+2)\ldots(-z+r)\Gamma(z-r),\quad r=0,1,\cdots\end{aligned}$$

eşitliği (2.3.1) de kullanıldığında

$$G_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left(z\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p,1-r\\ 1,b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)=(-1)^r G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(z\middle|\begin{matrix}1-r,a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q,1\end{matrix}\right),\quad r=0,1,2,\cdots$$

elde edilir.

Özellik 5:

(2.3.1) eşitliğinde s yerine rs' dönüşümü uygulanır ve daha sonra her bir gamma fonksiyonu yerine

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{(1-m)/2}m^{mz-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right),\quad m=1,2,\cdots$$

biçimindeki açılım uygulanırsa

$$\delta=m+n-\frac{(p+q)}{2},\quad v=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\frac{p}{2}-\frac{q}{2}+1 \text{ için}$$

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)=(2\pi)^{(1-r)\delta}r^vG_{rp,rq}^{rm,rn}\left(z^r r^{r(p-q)}\middle|\begin{matrix}\Delta(r,a_1),\ldots,\Delta(r,a_p)\\ \Delta(r,b_1),\ldots,\Delta(r,b_q)\end{matrix}\right)$$

elde edilir. Burada $\Delta(r,a)$ sembolü, $\Delta(r,a) \equiv \left\{ \frac{a}{r}, \frac{a+1}{r}, \cdots, \frac{a+r-1}{r} \right\}$ parametre kümesini göstermektedir.

Özellik 6:

$1 \le n \le p-1$ için

$$\left(a_p - a_1\right) G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) = G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1 - 1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) + G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p - 1 \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right)$$

dir.

Özellik 7:

$$\left(b_1 - b_q\right) G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) = G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1 + 1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix} \right) + G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_{q-1}, b_q + 1 \end{matrix} \right), \quad 1 \le m \le q-1$$

dır.

Özellik 8:

$$\left(1 - a_1 + b_1\right) G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) = G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1 - 1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) + G_{p,q}^{m,n}\left(z \middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1 + 1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix} \right), \quad m,n \ge 1$$

dır.

Verilen özelliklerin bazılarının uygulanabilirliği aşağıdaki örnekle açıklanmaya çalışılmıştır.

Örnek 2.4.1:

$z^{\alpha} G_{0,1}^{1,0}\left(z \middle| \begin{matrix} \\ 0 \end{matrix} \right) = z^{\alpha} e^{-z}$ olduğu Özellik 1 yardımıyla gösterilebilir. Özellik 1’den

$$z^{\alpha} G_{0,1}^{1,0}\left(z \middle| \begin{matrix} \\ 0 \end{matrix} \right) = G_{0,1}^{1,0}\left(z \middle| \begin{matrix} \\ \alpha \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma(\alpha + s) z^{-s} ds$$

Örnek 2.3.1’deki gibi $s = -\alpha - v, \quad v = 0,1,\cdots$ kutup noktalarındaki $\Gamma(\alpha + s) z^{-s}$’in rezidüsü toplamı yardımıyla

$$G_{0,1}^{1,0}\left(z\middle|\alpha\right)=\sum_{v=0}^{\infty}R_v^{'}$$

$$R_v^{'}=\lim_{s\to-\alpha-v}\left[(\alpha+s+v)\Gamma(\alpha+s)z^{-s}\right]$$

$$=\lim_{s\to-\alpha-v}\frac{(\alpha+s+v)(\alpha+s+v-1)\ldots(\alpha+s)}{(\alpha+s+v-1)\ldots(\alpha+s)}\Gamma(\alpha+s)z^{-s}$$

$$=\lim_{s\to-\alpha-v}\frac{\Gamma(\alpha+s+v+1)}{(\alpha+s+v-1)\ldots(\alpha+s)}z^{-s}$$

$$=\frac{(-1)^v}{v!}z^{\alpha+v}$$

ve

$$\sum_{v=0}^{\infty}R_v^{'}=\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v!}z^{\alpha+v}=z^{\alpha}e^{-z}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.2:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(-\frac{3}{2}-s\right)\Gamma(2-s)}{\Gamma\left(-\frac{3}{2}-s\right)}z^{-s}ds=G_{2,2}^{1,2}\left(z\middle|\begin{matrix}5/2,-1\\0,5/2\end{matrix}\right)$$

fonksiyonunda Özellik 2'nin kullanılmasıyla

$$G_{2,2}^{1,2}\left(z\middle|\begin{matrix}5/2,-1\\0,5/2\end{matrix}\right)=G_{1,1}^{1,1}\left(z\middle|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\Gamma(s)\Gamma(2-s)z^{-s}ds$$

elde edilir. $\Gamma(s)$'in kutup noktaları $v=0,1,\cdots$ için $s=-v$ ve $\Gamma(2-s)$'in kutup noktaları $\lambda=0,1,\cdots$ için $s=2+\lambda$ dır.

$G_{1,1}^{1,1}\left(z\middle|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right)$ fonksiyonu, L kapalı eğrisi $s=-v,\quad v=0,1,\cdots$ noktalarını içerdiğinde ve Yol 2 seçildiğinde $p=q=1$ olduğundan $|z|<1$ için

$s=-v, \quad v=0,1,\cdots$'de $\Gamma(s)\Gamma(2-s)z^{-s}$ ifadesinin rezidüsü toplamından elde edilir. Yani,

$$G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right)=\sum_{v=0}^{\infty}R_v, \quad |z|<1 \text{ için} \tag{2.4.1}$$

$(a)_m=a(a+1)\ldots(a+m-1)$ gösterimi de kullanıldığında,

$$\begin{aligned}R_v &= \lim_{s\to -v}\left[(s+v)\Gamma(s)\Gamma(2-s)z^{-s}\right]\\ &=\frac{(-1)^v}{v!}\Gamma(2+v)z^v\\ &=(2)_v\frac{(-1)^v}{v!}z^v\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{v=0}^{\infty}R_v &= (1+z)^{-2}\\ &=G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right) \quad |\mathrm{z}|<1 \text{ için}\\ &=G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}5/2,-1\\0,5/2\end{matrix}\right.\right)\\ &=G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}b,-1\\0,b\end{matrix}\right.\right), \quad b \text{ keyfi}\end{aligned}$$

bulunur.

Bu örnekte tüm yollar bir anlam ifade etmektedir. $G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right)$ fonksiyonu, seçilen L kapalı eğrisi, $\Gamma(2-s)$'in kutup noktalarını içerdiğinde ve Yol 3 uygulandığında $p=q=1$ olduğundan $|z|>1$ için $s=2+\lambda, \quad \lambda=0,1,\cdots$'de rezidü toplamından elde edilir. Böylece

$$G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}R_{\lambda}^{'} \quad |z|>1$$

için negatif yönde yol izlenerek

$$
\begin{aligned}
R_\lambda^{'} &= -\lim_{s\to 2+\lambda}\left[(s-2-\lambda)\Gamma(2-s)\Gamma(s)\,z^{-s}\right]\\
&= \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\Gamma(2+\lambda)\,z^{-2-\lambda}\\
&= \left(\frac{1}{\mathrm{z}}\right)^2\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}(2)_\lambda\,z^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece

$$
\sum_{\lambda=0}^{\infty} R_\lambda^{'} = \left(\frac{1}{z}\right)^2\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-2} \quad |z|>1 \text{ için} \tag{2.4.2}
$$

bulunur. Burada ayrıca

$$
\left(\frac{1}{z}\right)^2\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-2} = (1+z)^{-2}
$$

dir.

Buradan tüm z'ler için $G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right) = (1+z)^{-2}$ olduğu görülmektedir. $G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right)$ için seri şeklinde gösterime ihtiyaç duyulduğunda $|z|<1$ için (2.4.1) eşitliği ve $|z|>1$ için (2.4.2) eşitliği kullanılabilir.

Örnek 2.4.3

$$
G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(s)\Gamma(2-s)\,z^{-s}ds \tag{2.4.3}
$$

(2.4.3) eşitliğinin sağ tarafı sırasıyla Yol 2 ve Yol 3 kullanılarak

$$
G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right) = \begin{cases} (1+z)^{-2} & , \quad |z|<1 \text{ için} \\ \left(\frac{1}{z}\right)^2\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-2} & , \quad |z|>1 \text{ için} \end{cases}
$$

şeklinde elde edilmişti. Özellik 3'ün kullanılmasıyla

$$G_{1,1}^{1,1}\left(z \middle| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right) = G_{1,1}^{1,1}\left(\frac{1}{z} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(2+s)\Gamma(-s)\left(\frac{1}{z}\right)^{-s} ds \qquad (2.4.4)$$

elde edilir.

Şimdi ise, (2.4.4) eşitliği, Yol 2 kullanılarak $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ için $\Gamma(2+s)$ 'in kutup noktalarındaki rezidülerin toplamı olarak ve Yol 3 kullanılarak $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$ için $\Gamma(-s)$ 'in kutup noktalarındaki rezidü toplamı olarak elde edilip aynı sonuca ulaşılabildiği gösterilecektir.

$\Gamma(2+s)$ 'in kutup noktaları $v = 0,1,\cdots$ için $s = -2-v$ ve $\Gamma(-s)$ 'in kutup noktaları $\lambda = 0,1,\cdots$ için $s = \lambda$ dır. Bu durumda $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ veya $|z| > 1$ için

$$\begin{aligned} R_v &= \lim_{s \to -2-v}\left[(s+2+v)\Gamma(2+s)\Gamma(-s)\left(\frac{1}{z}\right)^{-s} \right] \\ &= \frac{(-1)^v}{v!}(2)_v\left(\frac{1}{z}\right)^{2+v} \end{aligned}$$

ve $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$ veya $|z| < 1$ için

$$\begin{aligned} R_\lambda' &= -\lim_{s \to \lambda}\left[(s-\lambda)\Gamma(2+s)\Gamma(-s)\left(\frac{1}{z}\right)^{-s} \right] \\ &= \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}(2)_\lambda\left(\frac{1}{z}\right)^{-\lambda} \\ &= \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}(2)_\lambda z^\lambda \end{aligned}$$

olur. Böylece rezidü toplamları $|z| > 1$ için

$$\sum_{v=0}^{\infty} R_v = \left(\frac{1}{z}\right)^2\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-2}$$

ve $|z|<1$ için

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} R_{\lambda}^{'} = (1+z)^{-2}$$

şeklindedir. Böylece tüm z ’ler için

$$G_{1,1}^{1,1}\left(z \middle| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right) = G_{1,1}^{1,1}\left(\frac{1}{z} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right)$$

elde edilir.

Örnek 2.4.4

$$G_{3,3}^{2,2}\left(z \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2},-1,\frac{2}{5} \\ 0,\frac{2}{5},\frac{3}{2} \end{matrix} \right) + G_{3,3}^{2,2}\left(z \middle| \begin{matrix} \frac{3}{2},-1,-\frac{3}{5} \\ 0,\frac{2}{5},\frac{3}{2} \end{matrix} \right)$$

G fonksiyonları toplamını göz önüne alalım. Bu durumda

$$G_{3,3}^{2,2}\left(z \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2},-1,\frac{2}{5} \\ 0,\frac{2}{5},\frac{3}{2} \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{2}{5}+s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\Gamma(2-s)\,z^{-s}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{2}{5}+s\right)}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(s)\Gamma(2-s)\left(-\frac{1}{2}-s\right)z^{-s}ds$$

$$G_{3,3}^{2,2}\left(z \middle| \begin{matrix} \frac{3}{2},-1,-\frac{3}{5} \\ 0,\frac{2}{5},\frac{3}{2} \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{2}{5}+s\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}-s\right)\Gamma(2-s)\,z^{-s}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-s\right)\Gamma\left(-\frac{3}{5}+s\right)}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(s)\Gamma(2-s)\left(-\frac{3}{5}+s\right)z^{-s}ds$$

olması nedeniyle $|z|<1$ için

$$G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{1}{2},-1,\frac{2}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)+G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{3}{2},-1,-\frac{3}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)$$
$$=-\frac{11}{10}\frac{1}{2\pi i}\int_L \Gamma(s)\Gamma(2-s)z^{-s}ds$$
$$=\left(-\frac{11}{10}\right)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v!}(2)_v z^v$$
$$=\left(-\frac{11}{10}\right)(1+z)^{-2}$$

elde edilir. Bu sonuç Özellik 6 kullanılarak

$$G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{1}{2},-1,\frac{2}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)+G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{3}{2},-1,-\frac{3}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)$$

$$=(a_3-a_1)G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{3}{2},-1,\frac{2}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)\quad a_3=-\frac{3}{5}+1=\frac{2}{5},\ a_1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{1}{2},-1,\frac{2}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)+G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{3}{2},-1,-\frac{3}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)=\left(-\frac{11}{10}\right)G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right)\quad \text{(Özellik 2'den)}$$

$$G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{1}{2},-1,\frac{2}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)+G_{3,3}^{2,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{3}{2},-1,-\frac{3}{5}\\0,\frac{2}{5},\frac{3}{2}\end{matrix}\right.\right)=\left(-\frac{11}{10}\right)(1+z)^{-2}\quad |z|<1 \text{ (Örnek 2.4.3'den)}$$

şeklinde de elde edilebilir.

Örnek 2.4.5

Özellik 8'i kullanarak $|z|<1$ için

$$G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}-\frac{2}{3},-1\\0,\frac{1}{3}\end{matrix}\right.\right)+G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{1}{3},-1\\1,\frac{1}{3}\end{matrix}\right.\right)=\frac{2}{3}(1+z)^{-2}$$

olduğunu gösterelim. Gerçekten

$$\begin{aligned}G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}-\frac{2}{3},-1\\0,\frac{1}{3}\end{matrix}\right.\right)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Gamma(s)\Gamma(2-s)\Gamma\left(\frac{5}{3}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}-s\right)}z^{-s}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\Gamma(s)\Gamma(2-s)\left(\frac{2}{3}-s\right)z^{-s}ds\\&=\sum_{v=0}^{\infty}R_v\end{aligned}$$

olmak üzere Yol 2'nin kullanılmasıyla $|z|<1$ için

$$\begin{aligned}R_v&=\lim_{s\to-v}\left[(s+v)\Gamma(s)\Gamma(2-s)\left(\frac{2}{3}-s\right)z^{-s}\right]\\&=\frac{(-1)^v}{v!}(2)_v\,z^v\left(\frac{2}{3}+v\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{1}{3},-1\\1,\frac{1}{3}\end{matrix}\right.\right)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Gamma(1+s)\Gamma(2-s)\Gamma\left(\frac{2}{3}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}-s\right)}z^{-s}ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\Gamma(1+s)\Gamma(2-s)\,z^{-s}ds\\&=\sum_{v=0}^{\infty}R_v^{'}\end{aligned}$$

olduğundan yine Yol 2'nin kullanılmasıyla $|z|<1$ için

$$\begin{aligned}R_v^{'}&=\lim_{s\to-v-1}\left[(1+s+v)\Gamma(1+s)\Gamma(2-s)\,z^{-s}\right]\\&=2\frac{(-1)^v}{v!}(3)_v\,z^{v+1}\end{aligned}$$

$$=-\frac{(-1)^{v+1}}{(v+1)!}(2)_{v+1}\,z^{v+1}\left[v+1\right]$$

bulunur ve $\sum_{v=0}^{\infty}R_{v}^{'}=-\sum_{r=1}^{\infty}r\frac{(-1)^{r}}{r!}(2)_{r}\,z^{r}$ eşitliğinden dolayı $|z|<1$ için

$$G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}-\frac{2}{3},-1\\0,\frac{1}{3}\end{matrix}\right.\right)+G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{1}{3},-1\\1,\frac{1}{3}\end{matrix}\right.\right)=\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^{v}}{v!}(2)_{v}\,z^{v}\left(\frac{2}{3}+v\right)-\sum_{v=1}^{\infty}\frac{v(-1)^{v}}{v!}(2)_{v}\,z^{v}$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^{v}}{v!}(2)_{v}\,z^{v}$$

$$=\frac{2}{3}(1+z)^{-2}$$

olduğu görülebilir. Özellik 8'deki notasyona göre $a_1=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3};\quad b_1=1-1=0$ ve dolayısıyla $1-a_1+b_1=1-\frac{1}{3}+0=\frac{2}{3}$ elde edilir. Böylece G fonksiyonu toplamları Özellik 8'in göz önüne alınmasıyla $|z|<1$ için

$$\frac{2}{3}G_{2,2}^{1,2}\left(z\left|\begin{matrix}\frac{1}{3},-1\\0,\frac{1}{3}\end{matrix}\right.\right)=\frac{2}{3}G_{1,1}^{1,1}\left(z\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\right),\ \text{(Özellik 2'den)}$$

$$=\frac{2}{3}(1+z)^{-2},\quad \text{(Örnek 2.4.3'den)}$$

yazılabilir.

2.5 G Fonksiyonunun Mellin Dönüşümü

(2.3.1) ile tanımlanan G fonksiyonuna ters Mellin dönüşümü uygulanırsa

$$\int_{0}^{\infty}x^{s-1}G_{p,q}^{m,n}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)dx=g(s)\tag{2.5.1}$$

elde edilir. (2.3.1) denkleminin sol tarafında yer alan G fonksiyonunda ki z değişkenine βz dönüşümü uygulandığında

$$\beta^{-s} g(s) = \int_0^\infty x^{s-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\beta x \left| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right. \right) dx \tag{2.5.2}$$

elde edilir ve Özellik 3'den

$$\beta^{-s} g(s) = \int_0^\infty x^{s-1} G_{q,p}^{n,m}\left(\frac{1}{\beta x} \left| \begin{matrix} 1-b_1, \ldots, 1-b_q \\ 1-a_1, \ldots, 1-a_p \end{matrix} \right. \right) dx \tag{2.5.3}$$

bulunur. (2.5.3) eşitliğinde $\frac{1}{x} = y$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\beta^{-s} g(s) = \int_0^\infty y^{-s-1} G_{q,p}^{n,m}\left(\frac{y}{\beta} \left| \begin{matrix} 1-b_1, \ldots, 1-b_q \\ 1-a_1, \ldots, 1-a_p \end{matrix} \right. \right) dy \tag{2.5.4}$$

elde edilir. (2.5.2), (2.5.3) ve (2.5.4) denklemlerinde genel olarak $p \le q$ eşitsizliğini göz önüne alabiliriz. Eğer $p \ge q$ olursa (2.5.4) denkleminin yerine (2.5.2) denklemi kullanılabilir.

2.6 G Fonksiyonunun Türevleri ile İlgili Özellikler

Bu kesimde G fonksiyonunun türevleri ile ilgili bazı özellikler,

$$z \frac{d}{dz}\left(z^s\right) = s z^s, \tag{2.6.1}$$

$$z^k \frac{d^k}{dz^k}\left(z^s\right) = s(s-1)\ldots(s-k+1) z^s = \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1-k+s)} z^s, \tag{2.6.2}$$

$$z^k \frac{d^k}{dz^k}\left(z^{-s}\right) = (-1)^k \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} z^s, \tag{2.6.3}$$

$$z \frac{d}{dz}\left(a^s z^s\right) = s a^s z^s = \left[(1-a_1+s)+(a_1-1)\right] a^s z^s, \tag{2.6.4}$$

$$\Gamma(1-a_1+s)\, z \frac{d}{dz}\left(a^s z^s\right) = \Gamma\left[1-(a_1-1)+s\right] a^s z^s + (a_1-1)\Gamma(1-a_1+s) a^s z^s, \tag{2.6.5}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-b_1}z^s\right)=\frac{d}{dz}\left(z^{s-b_1}\right)=\left(s-b_1\right)z^{s-b_1-1}=\left[-\left(b_1-s\right)z^{-b_1-1}\right]z^s, \tag{2.6.6}$$

$$\left(b_1-s\right)\Gamma\left(b_1-s\right)=\Gamma\left(1+b_1-s\right) \tag{2.6.7}$$

özdeşliklerinden yararlanılarak ispatsız olarak verilecektir.

Özellik 1:

Bu kısımda αz^r argümanı ile bir G fonksiyonunun z'ye göre k.ıncı türevi elde edilmeye çalışılacaktır. α kompleks bir sabit ve r pozitif bir tamsayı olmak üzere (2.3.1) eşitliği kullanılarak, türev ve integral yer değiştirdiğinde

$$z^k\frac{d^k}{dz^k}G_{p,q}^{m,n}\left(\alpha z^r\left|\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L g\left(s\right)\alpha^s z^k\frac{d^k}{dz^k}z^{rs}\,ds$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$z^k\frac{d^k}{dz^k}z^{rs}=\frac{\Gamma\left(1+rs\right)}{\Gamma\left(1-k+rs\right)}z^{rs}\text{ ve }\Gamma\left(rz\right)=\left(2\pi\right)^{\frac{1-r}{2}}r^{rz-1/2}\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma\left(z+\frac{j}{r}\right),\ r=1,2,\cdots$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned}z^k\frac{d^k}{dz^k}G_{p,q}^{m,n}\left(\alpha z^r\left|\begin{matrix}a_1,\dots,a_p\\ b_1,\dots,b_q\end{matrix}\right.\right)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L g\left(s\right)\alpha^s\frac{\Gamma\left(1+rs\right)}{\Gamma\left(1-k+rs\right)}z^{rs}\,ds\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_L g\left(s\right)\alpha^s\frac{\left(2\pi\right)^{\frac{1-r}{2}}r^{1+rs-\frac{1}{2}}\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma\left(s+\left(1+j\right)/r\right)}{\left(2\pi\right)^{\frac{1-r}{2}}r^{1-k+rs-\frac{1}{2}}\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma\left(s+\left(1+j-k\right)/r\right)}z^{rs}\,ds\\ &=\frac{r^k}{2\pi i}\int_L g\left(s\right)\alpha^s\frac{\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma\left(s+\left(1+j\right)/r\right)}{\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma\left(s+\left(1+j-k\right)/r\right)}z^{rs}\,ds\end{aligned} \tag{2.6.8}$$

olur. İntegral altında yer alan gamma fonksiyonunun çarpımları için

$$\prod_{j=0}^{r-1}\frac{\Gamma\left(s+(1+j)/r\right)}{\Gamma\left(s+(1+j-k)/r\right)}=\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(s+\frac{2}{r}\right)\ldots\Gamma\left(s+\frac{r}{r}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{1-k}{r}\right)\Gamma\left(s+\frac{2-k}{r}\right)\ldots\Gamma\left(s+\frac{r-k}{r}\right)},$$

$$\prod_{j=1}^{r}\frac{\Gamma\left(1+s-(j-1)/r\right)}{\Gamma\left(1+s-(k+j-1)/r\right)}=\frac{\Gamma(1+s)\Gamma\left(1+s-\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(1+s-\frac{2}{r}\right)\ldots\Gamma\left(1+s-\frac{r-1}{r}\right)}{\Gamma\left(1+s-\frac{k}{r}\right)\Gamma\left(1+s-\frac{k+1}{r}\right)\ldots\Gamma\left(1+s-\frac{k+r-1}{r}\right)}$$

olduğundan

$$\prod_{j=1}^{r}\frac{\Gamma\left(1+s-(j-1)/r\right)}{\Gamma\left(1+s-(k+j-1)/r\right)}=\prod_{j=0}^{r-1}\frac{\Gamma\left(s+(1+j)/r\right)}{\Gamma\left(s+(1+j-k)/r\right)}$$

yazılabilir. (2.6.8) eşitliğinin tekrar göz önüne alınmasıyla

$$\frac{r^k}{2\pi i}\int_L g(s)\alpha^s\,\frac{\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma\left(s+(1+j)/r\right)}{\prod_{j=0}^{r-1}\Gamma\left(s+(1+j-k)/r\right)}\,z^{rs}\;ds=$$

$$\frac{r^k}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j-s\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(1-a_j+s\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(1+s-(j-1)/r\right)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\left(1-b_j+s\right)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\left(a_j-s\right)\prod_{j=1}^{r}\Gamma\left(1+s-(k+j-1)/r\right)}\alpha^s z^{rs}\;ds$$

elde edilir ve buradan

$$z^k\frac{d^k}{dz^k}G_{p,q}^{m,n}\left(\alpha z^r\;\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)=r^kG_{p+r,q+r}^{m,n+r}\left(\alpha z^r\;\middle|\begin{matrix}\Delta(r,s),a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q,\Delta(r,k)\end{matrix}\right)$$

olduğu görülür[13]. Burada $\Delta(r,c)$ sembolü $\Delta(r,c)\equiv\left\{\frac{c}{r},\frac{(c+1)}{r},\cdots,\frac{(c+r-1)}{r}\right\}$

olup bu r parametrelerinin bir kümesidir. $\Delta(r,0)$ boş küme olarak değerlendirilir.

$c=0$ ve $r=1$ alındığında bu genel ifade $z\neq 0$ için

$$z^k\frac{d^k}{dz^k}\left[G_{p,q}^{m,n}\left(z\;\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)\right]=G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(z\;\middle|\begin{matrix}0,a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q,k\end{matrix}\right)$$

olur.

Özellik 2:

$$z \neq 0 \text{ için } z^k \frac{d^k}{dz^k}\left[G_{p,q}^{m,n}\left(z^{-1} \left| \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix} \right. \right)\right] = (-1)^k G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(z^{-1} \left| \begin{matrix} 1-k, a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q,1 \end{matrix} \right. \right)$$

dır.

Özellik 3:

$$z\frac{d}{dz}G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix} \right. \right) = G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_1-1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix} \right. \right) + (a_1-1)\, G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right), \quad n \geq 1$$

dır.

Özellik 4:

$$z\frac{d}{dz}G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right) = (a_p-1)\, G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right) - G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_1,\ldots,a_{p-1},a_p-1 \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix} \right. \right), \quad p-n \geq 1$$

dır.

Özellik 5:

$$z\frac{d}{dz}G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right) = b_1 G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right) - G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1+1, b_2,\ldots,b_q \end{matrix} \right. \right), \quad m \geq 1$$

dır.

Özellik 6:

$$z\frac{d}{dz}G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right) = b_q G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right) + G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_{q-1},b_q+1 \end{matrix} \right. \right), \quad q-m \geq 1$$

dır. Özellik 3-6'da, her $a_j, (j=1,\cdots,n)$ ile a_1; $b_j, (j=1,\cdots,m)$ ile b_1; $a_j, (j=n+1,\cdots,p)$ ile a_p ve $b_j, (j=m+1,\cdots,q)$ ile b_q yer değiştirilebilir.

Özellik 7:

$$\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{-b_1} G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right. \right)\right] = (-1)^k z^{-k-b_1} G_{p,q}^{m,n}\left(az \left| \begin{matrix} a_p \\ b_1+k, b_2,\ldots,b_q \end{matrix} \right. \right), \quad m \geq 1, k = 1,2,\cdots$$

dır.

Özellik 8:

$$\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{-b_q} G_{p,q}^{m,n}\left(az\,\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)\right]=z^{-k-b_q} G_{p,q}^{m,n}\left(az\,\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_{q-1},b_{q+k}\end{matrix}\right)\quad q-m\geq 1,\ k=1,2,\cdots$$

dır.

Özellik 9:

$$\frac{d}{dz}\left[z^{1-a_1} G_{p,q}^{m,n}\left(az\,\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)\right]=z^{-a_1} G_{p,q}^{m,n}\left(az\,\middle|\begin{matrix}a_1-1,a_2,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)\quad n\geq 1,\ k=1,2,\cdots$$

dır.

Özellik 10:

$$\frac{d}{dz}\left[z^{1-a_p} G_{p,q}^{m,n}\left(az\,\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)\right]=-z^{-a_p} G_{p,q}^{m,n}\left(az\,\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{p-1},a_p-1\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)\quad p-n\geq 1,\ k=1,2,\cdots$$

dır.

Özellik 11:

$$\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{a_1-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\frac{a}{z}\,\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)\right]=(-1)^k\, z^{a_1-k-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\frac{a}{z}\,\middle|\begin{matrix}a_1-k,a_2,\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)\quad n\geq 1,\ k=1,2,\cdots$$

dır.

Özellik 12:

$$\frac{d^k}{dz^k}\left[z^{a_p-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\frac{a}{z}\,\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)\right]=z^{a_p-k-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\frac{a}{z}\,\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{p-1},a_p-k\\ b_1,\ldots,b_q\end{matrix}\right)\quad p-n\geq 1,\ k=1,2,\cdots$$

dır.

2.7 Bazı Temel Fonksiyonların G Fonksiyonu ile Gösterimi

Bu kesimde öncelikle Matematikte çok kullanılan bazı fonksiyonların G fonksiyonu türünden eşitliği verilmiştir. Daha sonra da parametreleri belirlenmiş G fonksiyonlarının değerleri Mathematica 5.0 paket programı kullanılarak hesaplanmıştır.

2.7.1 Bazı Özel Fonksiyonların G Fonksiyonu Cinsinden İfadesi

- $z^{a} e^{-z} = G_{0,1}^{1,0}\left(z \middle| a\right), \quad z \neq 0$

- $(1-z)^{-\alpha} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} G_{1,1}^{1,1}\left(-z \middle| \begin{matrix} 1-\alpha \\ 0 \end{matrix}\right), \quad |z| < 1$

- $(1-z)^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha) G_{1,1}^{1,0}\left(z \middle| \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix}\right), \quad |z| < 1$

- $z^{\alpha}(1-z)^{\beta} = \Gamma(\beta+1) G_{1,1}^{1,0}\left(z \middle| \begin{matrix} \alpha+\beta+1 \\ \alpha \end{matrix}\right), \quad |z| < 1$

- $\dfrac{z^{\beta}}{1+az^{\alpha}} = a^{-\beta/\alpha} G_{1,1}^{1,1}\left(az^{\alpha} \middle| \begin{matrix} \beta/\alpha \\ \beta/\alpha \end{matrix}\right), \quad |az^{\alpha}| < 1$

- $\dfrac{z^{\beta}}{(1+az^{\alpha})^{\gamma}} = \dfrac{a^{-\beta/\alpha}}{\Gamma(\gamma)} G_{1,1}^{1,1}\left(az^{\alpha} \middle| \begin{matrix} 1-\gamma+\beta/\alpha \\ \beta/\alpha \end{matrix}\right), \quad |az^{\alpha}| < 1$

- $(1+z)^{-2\alpha} + (1-z)^{-2\alpha} = \dfrac{2^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha)} G_{2,2}^{1,2}\left(-z^{2} \middle| \begin{matrix} 1-\alpha, \frac{1}{2}-\alpha \\ 0, \frac{1}{2} \end{matrix}\right), \quad |z| < 1$

- $(1+z)^{1-2\alpha} - (1-z)^{1-2\alpha} = \dfrac{2^{2\alpha-1} z (1-2\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} G_{2,2}^{1,2}\left(-z^{2} \middle| \begin{matrix} 1-\alpha, \frac{1}{2}-\alpha \\ 0, -\frac{1}{2} \end{matrix}\right), \quad |z| < 1$

- $\left(1+(1+z)^{\frac{1}{2}}\right)^{2\alpha} = \dfrac{\alpha}{\pi^{1/2}} G_{2,2}^{1,2}\left(z \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}-\alpha, 1-\alpha \\ 0, -2\alpha \end{matrix}\right), \quad |z| < 1$

- $\sin z = \pi^{1/2} G_{0,2}^{1,0}\left(\dfrac{z^{2}}{4} \middle| \dfrac{1}{2}, 0\right) = \left(\dfrac{\pi z}{2}\right)^{1/2} G_{0,2}^{1,0}\left(\dfrac{z^{2}}{4} \middle| \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$

- $\cos z = \pi^{1/2} G_{0,2}^{1,0}\left(\dfrac{z^{2}}{4} \middle| 0, \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{\pi z}{2}\right)^{1/2} G_{0,2}^{1,0}\left(\dfrac{z^{2}}{4} \middle| -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

- $\sinh z = \dfrac{z\pi^{1/2}}{2} G_{0,2}^{1,0}\left(-\dfrac{z^2}{4} \middle| 0, -\dfrac{1}{2} \right)$

- $\cosh z = \pi^{1/2} G_{0,2}^{1,0}\left(-\dfrac{z^2}{4} \middle| 0, \dfrac{1}{2} \right)$

- $\ln(1 \pm z) = G_{2,2}^{1,2}\left(\pm z \middle| \begin{matrix} 1,1 \\ 1,0 \end{matrix} \right), \quad |z| < 1$

- $\ln\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) = z G_{2,2}^{1,2}\left(-z^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2},0 \\ 0,-\frac{1}{2} \end{matrix} \right), \quad |z| < 1$

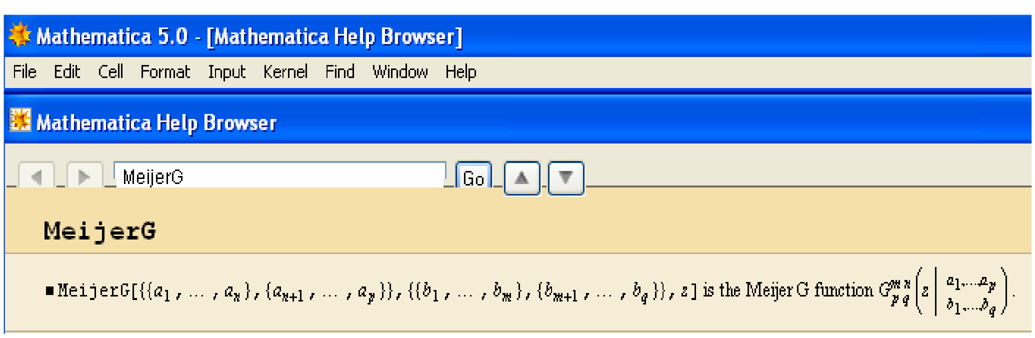
- $\arcsin z = \dfrac{z}{2\pi^{1/2}} G_{2,2}^{1,2}\left(-z^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ 0,-\frac{1}{2} \end{matrix} \right), \quad |z| < 1$

- $\arctan z = \dfrac{z}{2} G_{2,2}^{1,2}\left(z^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2},0 \\ 0,-\frac{1}{2} \end{matrix} \right), \quad |z| < 1$

dır.

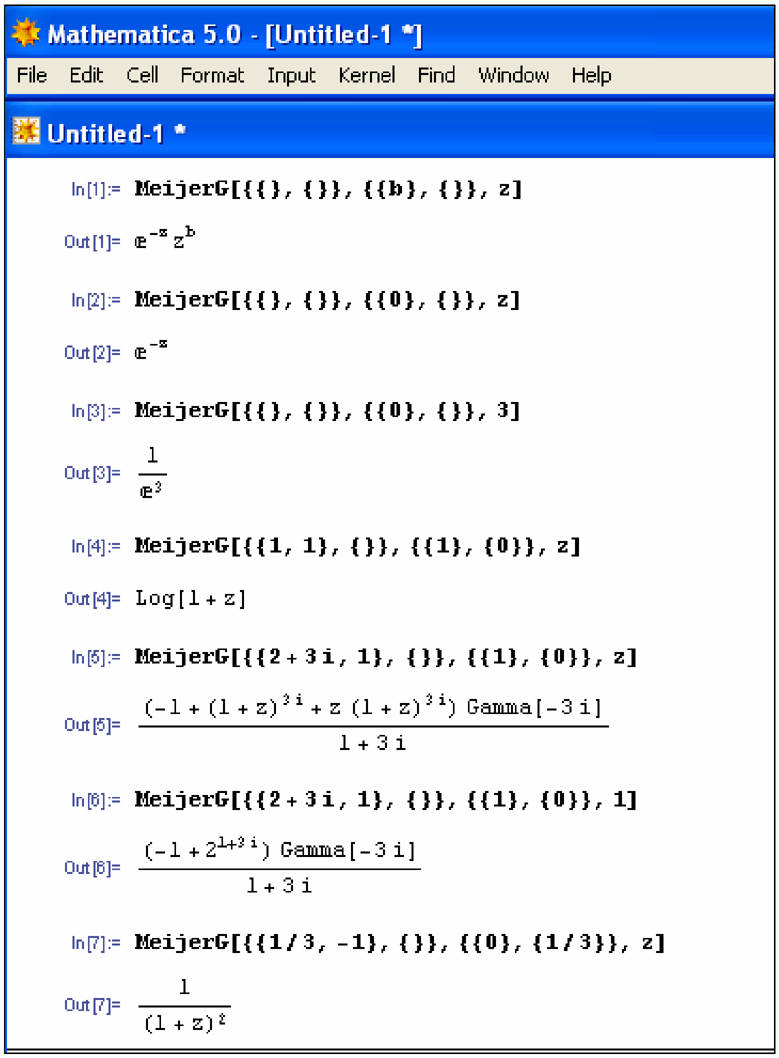
2.7.2 Mathematica 5.0 Paket Programında Meijer'in G Fonksiyonu

Mathematica 5.0 programında G Fonksiyonu,



şeklinde ifade edilmektedir, sırasıyla $G_{0,1}^{1,0}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\\ b\end{matrix}\right)$, $G_{0,1}^{1,0}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\\ 0\end{matrix}\right)$, $G_{0,1}^{1,0}\left(3\,\middle|\,\begin{matrix}\\ b\end{matrix}\right)$, $G_{2,2}^{1,2}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}1,1\\ 1,0\end{matrix}\right)$,

$G_{2,2}^{1,2}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}2+3i,1\\ 1,0\end{matrix}\right)$, $G_{2,2}^{1,2}\left(1\,\middle|\,\begin{matrix}2+3i,1\\ 1,0\end{matrix}\right)$, $G_{2,2}^{1,2}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}1/3,-1\\ 0,1/3\end{matrix}\right)$ fonksiyonları



şeklinde hesaplanmaktadır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ise G fonksiyonunun İstatistik ve Fizik alanlarındaki bazı uygulamaları hakkında bilgi verilecektir. Bazı sürekli dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonu, karakteristik fonksiyonu, beklenen değeri ve sürekli rasgele değişkenlerin dönüşümlerinin dağılımları G fonksiyonu ile de ifade edilebilmektedir. Aynı zamanda öngörü problemlerinin çözümü için sıralı değişkenler (sıra istatistikleri, rekor değerler ve genelleştirilmiş sıra istatistikleri) yardımıyla kolaylıkla pek çok karakterizasyon verilebilmektedir. Karakterizasyon vermenin önemi ise örneklemin özelliklerini kullanarak dağılım hakkında bilgi edinmek ve tersine, dağılımı bildiğimizde örneklemin bazı özelliklerini söyleyebilmektir. Kısacası belli şartlar altında sadece incelenen dağılıma ait olan özellik veya özellikler elde edilebilmektedir. Literatüre bakıldığında karakterizasyonla ilgili yapılan çalışmaların çoğunun sürekli bir dağılım olan üstel dağılım için olduğu görülür. Üstel dağılım ile ilgili bu karakterizasyon çalışmaları, rasgele değişkenlerin bağımsızlığı, örneklemin aynı dağılıma sahip olduğu veya momentlerin sonlu olmadığı varsayımlarına dayalı olarak verilmektedir. Ayrıca literatürde koşullu beklenen değer ile de verilen pek çok karakterizasyon da bulunmaktadır. Koşullu beklenen değerle karakterizasyon ise regresyon kuramından gelmektedir. $X = x$ biliniyorken $E\left(Y \middle| X = x\right) = ax + b$ lineer regresyon denklemi, Y'ye en iyi yaklaşımda bulunulabilecek bir informasyondur [15,18,27].

G Fonksiyonunun uygulamaları verilmeden önce bazı İstatistik temel kavramları açıklanacaktır.

3.1 İstatistik Teorisinde Geçen Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: Ω boş olmayan herhangi bir küme ve U 'da Ω'nın alt kümelerinden oluşan bir kümeler ailesi olsun. Eğer U sınıfı

1) $\Omega \in U$
2) $\forall A \in U$ için $A^c \in U$
3) $A, B \in U \Rightarrow A \cup B \in U$

koşullarını sağlıyor ise U sınıfına bir cebir denir. Eğer U sınıfı yukarıdaki ilk iki koşul ile beraber üçüncü koşul yerine

3*) $A_n \in U$, $n = 1, 2, 3, \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

koşulunu sağlanıyor ise U sınıfına bir sigma cebir denir ve σ-cebir olarak gösterilir. Sigma cebirin her bir elemanına da bir olay denir.

Tanım 3.1.2: Ω boş olmayan bir küme ve U da Ω üzerinde tanımlı bir σ-cebir olsun. U üzerinde

$$P : U \rightarrow [0,1]$$
$$A \rightarrow P(A)$$

olarak tanımlanan P fonksiyonu,

1) $\forall A \in U$ için $P(A) \geq 0$
2) $P(\Omega) = 1$
3) A_n 'ler U 'daki ayrık olayların bir dizisi olmak üzere
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa, P' ye bir olasılık ölçüsü denir. $P(A)$ sayısına ise A olayının olasılığı denir.

Tanım 3.1.3: Ω boş olmayan bir küme, U , Ω da tanımlı bir σ-cebir ve P**,** U üzerinde bir olasılık ölçüsü olmak üzere (Ω, U, P) üçlüsüne olasılık uzayı denir.

Tanım 3.1.4: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere

$$
\begin{aligned}
X : \Omega &\to \mathbb{R} \\
w &\to X(w)
\end{aligned}
$$

fonksiyonu $\forall a \in \mathbb{R}$ için, $\{w \in \Omega : X(w) \leq a\} \in U$ koşulunu sağlıyor ise X fonksiyonuna bir rasgele değişken denir. U üzerinde değişik olasılık ölçüleri tanımlayarak değişik rasgele değişkenler elde edilebilir. Uygulamalarda Ω kümesi farklı ölçümler yardımıyla gözlemlenebilen bir deneyin mümkün olan tüm sonuçlarını göstermektedir.

Tanım 3.1.5: (W, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere reel sayılar üzerinde P olasılık ölçüsü yardımıyla

$$
\begin{aligned}
F_X : \mathbb{R} &\to [0,1] \\
x &\to F_X(x) = P\{w : X(w) \leq x\} = P(X \leq x)
\end{aligned}
$$

tanımlanan fonksiyona, X rasgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu veya kısaca dağılım fonksiyonu denir.

Tanım 3.1.6: Verilen

$$
\begin{aligned}
f_X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\to f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} P(X = x), & x \in D_x \\ 0 \qquad\qquad , & x \notin D \end{cases}
\end{aligned}
$$

fonksiyonu için, X rasgele değişkeni kesikli ise

$$
\begin{aligned}
&i) f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&ii) \sum_{x \in D_x} f_X(x) = 1
\end{aligned}
$$

veya sürekli ise

$$
\begin{aligned}
&i) f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&ii) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1
\end{aligned}
$$

koşullarından birini sağlıyor ise f fonksiyonuna olasılık fonksiyonu (o.f.) veya olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.) denir.

Bir rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonundan o.(y.)f. veya tersine o.(y.)f.'dan dağılım fonksiyonu kolayca bulunabilir. Eğer, X r.d.'ni sürekli ise, bu durumda X rasgele değişkeninin o.y.f.'nu

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{dx} F_X(x), & F_X\text{'in türevlenebildiği yerlerde} \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. *G* fonksiyonu ise sürekli rasgele değişkenler için kullanışlıdır.

Tanım 3.1.7: $f_{X,Y}(x,y)$, X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak o.y.f.'nu olmak üzere $Y = y$ verildiğinde

$$f_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_Y(y) > 0$$

fonksiyonuna X'in koşullu o.y.f.'nu denir.

X bir rasgele değişken olduğunda $g(X)$ de bir rasgele değişkendir.

Tanım 3.1.8: X rasgele değişkeninin o.y.f.'nu $f(x)$ olsun. X sürekli olduğunda $\int_{D_x} |g(x)| f(x)\,dx < \infty$ olmak üzere

$$E(g(x)) = \int_{D_x} g(x) f(x)\,dx$$

fonksiyonuna $g(x)$ rasgele değişkenin beklenen değeri (merkezi momenti) denir.

$0 < s < k$ olmak üzere $|X|^k$'nin beklenen değeri varsa $|X|^s$'nin de beklenen değeri vardır.

Tanım 3.1.9: X bir rasgele değişken olsun. $h > 0$ olmak üzere $|t| < h$ için e^{tX} fonksiyonunun beklenen değerine X'in moment çıkaran fonksiyonu denir. Sürekli bir rasgele değişken için $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx$ dir.

Tanım 3.1.10: $-\infty < t < \infty$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = E\left[\cos(tX)\right] + iE\left[\sin(tX)\right]$$

fonksiyonuna X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu denir.

NOT: X sürekli rasgele değişken ve $f(x)$'de X'in o.y.f. olmak üzere X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} f(s)\,ds$$

olarak verilir. Her rasgele değişkenin bir karakteristik fonksiyonu vardır.

Bir rasgele değişkenin dağılımının ve momentlerinin belirlenebilmesinde karakteristik fonksiyonlarının önemli bir yeri vardır. Karakteristik fonksiyonu elde etmek için X rasgele değişkeninin o.(y).f.'nun Fourier dönüşümü güçlü bir araç olarak kullanılmasına rağmen, Mellin dönüşümünün kullanımına pek rastlanmamaktadır. Mellin dönüşümü ile de rasgele değişkenlerin momentleri ve dönüşümlerinin dağılımları bulunabilir. Bu dönüşümün Matematikte geniş uygulama alanı vardır. İstatistikte ise 1940'lı yıllarda kullanılmaya başlanmıştır(8,14).

Tanım 3.1.11: Sürekli X ve Y rasgele değişkenleri için, $Y = y$ verildiğinde $g(x)$'in koşullu beklenen değeri

$$E\left(g(x) \middle| Y = y\right) = \int_{(-\infty,\infty)} g(x) f_{X|Y=y}(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_{X|Y=y}(x)\,dx < \infty$$

dır.

3.2 Meijer'in G Fonksiyonunu Kullanarak Rasgele Değişkenlerin Dönüşümlerinin Elde Edilmesi

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun tanımından hareket ederek

$$Y_1 = h_1(X_1,\ldots,X_n),$$
$$Y_2 = h_2(X_1,\ldots,X_n),$$
$$\vdots$$
$$Y_n = h_n(X_1,\ldots,X_n),$$

şeklindeki dönüşümler için $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ yeni rasgele değişkenlerinin o.y.f.'nu

$$f_{Y_1,Y_2,\ldots,Y_n}(y_1,y_2,\ldots,y_n) = f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)\left| J\left(\frac{x_1,\ldots,x_n}{y_1,\ldots,y_n}\right)\right|$$

olur.

Örnek 3.2.1: (Gamma dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenlerin çarpımlarının dağılımı)

$X_1, X_2,\ldots, X_k$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip (b.b.a.d.) gamma rasgele değişkenleri olmak üzere X_j'nin o.y.f.'nu,

$$f_j(x_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta_j^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j)} x_j^{\alpha_j-1} e^{-x_j/\beta_j}, & x_j > 0,\quad \alpha_j > 0,\quad \beta_j > 0,\quad j = 1,\cdots,k \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

şeklindedir. $Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_k$ ise Y rasgele değişkeninin o.y.f.'nu bulunmak istensin. X_j'nin $(s-1)$ inci momenti

$$E\left(X_j^{s-1}\right) = \int_0^\infty x_j^{s-1} f_j(x_j)\, dx_j$$

$$= \int_0^\infty x_j^{s-1} \frac{1}{\beta_j^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j)} x_j^{\alpha_j-1} e^{-x_j/\beta_j} dx_j$$

$$= \frac{1}{\beta_j^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j)} \int_0^\infty x_j^{s+\alpha_j-2} e^{-x_j/\beta_j} dx_j$$

$$= \frac{1}{\beta_j^{\alpha_j}\Gamma(\alpha_j)} \beta_j^{s+\alpha_j-1}\Gamma(s+\alpha_j-1)$$

$$= \beta_j^{s-1} \frac{\Gamma(s+\alpha_j-1)}{\Gamma(\alpha_j)}, \ R(s) > 1-\alpha_j \text{ için}$$

olup bu $f_j(x_j)$'nin Mellin dönüşümüdür. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ istatistiksel olarak bağımsız ise $E\left[\prod_{i=1}^{k} U_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{k} E(U_i(X_i))$ olduğundan

$$E(Y^{s-1}) = (EX_1^{s-1}) \cdot (EX_2^{s-1}) \cdots (EX_k^{s-1})$$

$$= \beta_1^{s-1} \frac{\Gamma(\alpha_1+s-1)}{\Gamma(\alpha_1)} \cdot \beta_2^{s-1} \frac{\Gamma(\alpha_2+s-1)}{\Gamma(\alpha_2)} \cdots \beta_k^{s-1} \frac{\Gamma(\alpha_k+s-1)}{\Gamma(\alpha_k)}$$

$$= (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_k)^{s-1} \frac{\prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j+s-1)}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j)} \tag{3.2.1}$$

dir. $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_k = \beta$ ve $C^{-1} = \prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j)$ olmak üzere (3.2.1) eşitliği

$$E(Y^{s-1}) = C\beta^{s-1} \prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j+s-1)$$

biçiminde yazılabilir. Y rasgele değişkeninin o.y.f.'nu $f_Y(y)$ olmak üzere, $E(Y^{s-1})$'nin ters Mellin dönüşümünden

$$f_Y(y) = \frac{C\beta^{-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j-1+s)\beta^s y^{-s} ds$$

$$= \frac{C\beta^{-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \prod_{j=1}^{k} \Gamma\left(\alpha_j - 1 + s\right) \left(\frac{y}{\beta}\right)^{-s} ds$$

bulunur. Elde edilen $f_Y\left(y\right)$ fonksiyonu, G fonksiyonu cinsinden

$$f\left(y\right) = \begin{cases} C\beta^{-1} G_{0,k}^{k,0}\left(\frac{y}{\beta}\Big|_{\alpha_1-1,\alpha_2-1,\ldots\alpha_k-1}\right) & , 0 < y < \infty \\ 0 & , \text{ d.y.} \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 3.2.2: (Beta-1 Tipi dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenlerin çarpımlarının dağılımı)

$X_1, X_2, \ldots, X_k$ b.b.a.d sahip beta-1 tipinde rasgele değişkenler olmak üzere X_j'in o.y.f.'nu,

$$f_j\left(x_j\right) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\alpha_j + \beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} x_j^{\alpha_j - 1}\left(1 - x_j\right)^{\beta_j - 1}, & 0 < x_j < 1, \quad \alpha_j > 0, \quad \beta_j > 0, \quad j = 1, \cdots, k \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklindedir. $Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_k$ olsun. X_j^{s-1}'in beklenen değeri $f_j\left(x_j\right)$'nin Mellin dönüşümü

$$E\left(X_j^{s-1}\right) = \int_0^1 x_j^{s-1} f_j\left(x_j\right) dx_j$$

$$= \int_0^1 x_j^{s-1} \frac{\Gamma\left(\alpha_j + \beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} x_j^{\alpha_j - 1}\left(1 - x_j\right)^{\beta_j - 1} dx_j$$

$$= \frac{\Gamma\left(\alpha_j + \beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} \int_0^1 x_j^{\alpha_j + s - 2}\left(1 - x_j\right)^{\beta_j - 1} dx_j$$

şeklinde bulunur. Buradan $R\left(\alpha_j + s - 1\right) > 0$, $j = 1, \cdots, k$ olmak üzere

$$E\left(X_j^{s-1}\right) = \frac{\Gamma\left(\alpha_j + \beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha_j + s - 1\right)\Gamma\left(\beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j + s + \beta_j - 1\right)}$$

elde edilir. $X_1, X_2, \ldots, X_k$'nin istatistiksel olarak bağımsızlığını kullanarak $C = \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(\alpha_j + \beta_j)}{\Gamma(\alpha_j)}$ olmak üzere

$$E(Y^{s-1}) = E(X_1^{s-1}) \cdot E(X_2^{s-1}) \cdots E(X_k^{s-1}) = C \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(\alpha_j + s - 1)}{\Gamma(\alpha_j + \beta_j + s - 1)}$$

yazılabilir. Yine Y rasgele değişkeninin o.y.f.'nu $f_Y(y)$ olarak gösterirsek, $E(Y^{s-1})$'e ters Mellin dönüşümü yapıldığında $0 < y < 1$ için

$$f_Y(y) = \frac{C}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(\alpha_j + s - 1)}{\Gamma(\alpha_j + \beta_j + s - 1)} y^{-s} ds$$

elde edilir. $f_Y(y)$ fonksiyonu ise Meijer fonksiyonu yardımıyla

$$f_Y(y) = C G_{k,k}^{k,0}\left(y \middle| \begin{matrix} \alpha_j + \beta_j - 1 \,,\; j = 1, \ldots, k \\ \alpha_j - 1 \,,\; j = 1, \ldots, k \end{matrix} \right), \quad 0 < y < 1 \text{ için}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 3.2.3: (Bağımsız Beta-2 Tipi dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenlerin çarpımlarının dağılımı)

$X_1, X_2, \ldots, X_k$ b.b.a.d sahip beta-2 tipinde rasgele değişkenler olmak üzere X_j'in o.y.f.'nu,

$$f_j(x_j) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha_j + \beta_j)}{\Gamma(\alpha_j)\Gamma(\beta_j)} x_j^{\alpha_j - 1} (1 + x_j)^{-(\alpha_j + \beta_j)}, & 0 < x_j < \infty, \quad \alpha_j > 0, \quad \beta_j > 0, \quad j = 1, \ldots, k \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

şeklindedir. $f_j(x_j)$'nin Mellin dönüşümünden

$$
\begin{aligned}
E\left(X_j^{s-1}\right) &= \int_0^\infty x_j^{s-1} f_j\left(x_j\right) dx_j \\
&= \int_0^\infty x_j^{s-1} \frac{\Gamma\left(\alpha_j+\beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} x_j^{\alpha_j-1}\left(1+x_j\right)^{-\left(\alpha_j+\beta_j\right)} dx_j \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha_j+\beta_j\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} \int_0^\infty x_j^{\alpha_j+s-2}\left(1+x_j\right)^{-\left(\alpha_j+\beta_j\right)} dx_j \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha_j+s-1\right)\Gamma\left(\beta_j-s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)}, \quad 1-\alpha_j < R(s) < 1+\beta_j \text{ için}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. $Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_k$ ise $X_1, X_2, \ldots, X_k$'nin istatistiksel olarak bağımsızlığı kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
E\left(Y^{s-1}\right) &= E\left(X_1^{s-1}\right) \cdot E\left(X_2^{s-1}\right) \cdots E\left(X_k^{s-1}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha_1+s-1\right)\Gamma\left(\beta_1-s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\beta_1\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\alpha_k+s-1\right)\Gamma\left(\beta_k-s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_k\right)\Gamma\left(\beta_k\right)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{k} \Gamma\left(\alpha_j+s-1\right)\Gamma\left(\beta_j-s+1\right)}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma\left(\alpha_j\right)\Gamma\left(\beta_j\right)} \\
&= C \prod_{j=1}^{k} \Gamma\left(\alpha_j+s-1\right)\Gamma\left(\beta_j-s+1\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Y'nin o.y.f.'si $f_Y(y)$ ile gösterilirse

$$
f_Y(y) = \frac{C}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \prod_{j=1}^{k} \Gamma\left(\alpha_j+s-1\right)\Gamma\left(\beta_j-s+1\right) y^{-s} ds
$$

olur. $f_Y(y)$ fonksiyonu, G fonksiyonu cinsinden $0 < y < 1$ için

$$
f_Y(y) = C G_{k,k}^{k,k}\left(y \,\middle|\, \begin{matrix} -\beta_j \,,\ j=1,\ldots,k \\ \alpha_j - 1 \,,\ j=1,\ldots,k \end{matrix} \right)
$$

veya yol 2, yol 3 ve kesim 2.3'deki Özellik 3 kullanılarak $1 \le y < \infty$ için

$$
f_Y(y) = C G_{k,k}^{k,k}\left(\frac{1}{y} \,\middle|\, \begin{matrix} 2-\alpha_j \,,\ j=1,\ldots,k \\ 1+\beta_j \,,\ j=1,\ldots,k \end{matrix} \right)
$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.2.4:

X_1 ve X_2, sırasıyla (α,β) ve $\left(\alpha+\frac{1}{2},\beta\right)$ parametrelerine sahip beta-1 tipi bağımsız rasgele değişkenler olsun. $Y = X_1 \cdot X_2$ dönüşümü yapıldığında Y rasgele değişkeninin o.y.f.'nunun

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(2\alpha+2\beta)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)}\dfrac{1}{2}y^{\alpha-1}\left(1-y^{1/2}\right)^{2\beta-1} & , \quad 0<y<1\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olduğu göz önüne alınırsa bu durumda X_1'in o.y.f.'nu

$$f_{X_1}(x_1)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \quad 0<x<1, \quad \alpha>0, \quad \beta>0\\ 0 & , \quad d.y.\end{cases}$$

olur. $R(s)>1-\alpha$ için X_1'in $(s-1)$ inci momenti,

$$\begin{aligned}E\left(X_1^{s-1}\right)&=\int_0^1 x_1^{s-1} f_1(x_1)\,dx_1=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x_1^{s+\alpha-2}(1-x_1)^{\beta-1}\,dx_1\\ &=\frac{\Gamma(\alpha+s-1)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+s-1)}\end{aligned}$$

olarak bulunabilir. Bu durumda $R(s)>\frac{1}{2}-\alpha$ için

$$E\left(X_2^{s-1}\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+s-1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}+s-1\right)}$$

olur. X_1 ve X_2'nin istatistiksel bağımsızlığından yararlanarak

$$E\left(Y^{s-1}\right)=E\left(X_1^{s-1}\right)\cdot E\left(X_2^{s-1}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+s-1)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+s-1\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+\beta+s-1)\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}+s-1\right)}$$

yazılabilir. $C=\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}$ için Y'nin o.y.f.'nu olan $f_Y(y)$, ters Mellin dönüşümünden

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}E\left(Y^{s-1}\right)y^{-s}ds=CG_{2,2}^{2,0}\left(y\left|\begin{matrix}\alpha+\beta-1\,,\,\alpha+\beta-\frac{1}{2}\\ \alpha-1\,,\,\alpha-\frac{1}{2}\end{matrix}\right.\right),\quad 0<y<1 \text{ için}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2.5:

X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız ve gamma dağılımına sahip r.d.'ler ve $Y=\dfrac{X_1}{X_2}$ olsun. Y'nin o.y.f.'nu $f_Y(y)$ olmak üzere X_1 ve X_2'nin istatistiksel bağımsızlığından yararlanarak, X_1 ve X_2'nin momentleri sonlu olmak üzere $f_Y(y)$'nin Mellin dönüşümü

$$\int_0^\infty y^{s-1}f_Y(y)dy=E\left(Y^{s-1}\right)=E\left(X_1X_2^{-1}\right)^{s-1}=E\left(X_1^{s-1}\right)E\left(X_2^{-s+1}\right)$$

dir ve $R\left(\alpha_j+h\right)>0$ için

$$E\left(X_j^h\right)=\int_0^\infty x_j^h f_j\left(x_j\right)dx_j=\beta^h\frac{\Gamma\left(\alpha_j+h\right)}{\Gamma\left(\alpha_j\right)}$$

olduğundan sırasıyla $h=s-1$ ve $h=-s+1$ için

$$E\left(X_1^{s-1}\right)\cdot E\left(X_2^{-s+1}\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha_1+s-1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\alpha_2-s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2\right)}$$

dir. $f_Y\left(y\right)$ fonksiyonu, G fonksiyonu cinsinden

$$\begin{aligned} f_Y\left(y\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma\left(\alpha_1+s-1\right)}{\Gamma\left(\alpha_1\right)}\frac{\Gamma\left(\alpha_2-s+1\right)}{\Gamma\left(\alpha_2\right)}y^{-s}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\Gamma\left(\alpha_2\right)}G_{1,1}^{1,1}\left(y\left|\begin{matrix}-\alpha_2\\ \alpha_1-1\end{matrix}\right.\right) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

Yıldızlar ve kozmoloji nükleer bileşimi alanlarındaki araştırmaların en önemli amaçlarından birisi, termonükleer reaksiyon oranlarını bulmaktır. Füzyon plazmalarının tüm uygulamaları pratik olarak termonükleer reaksiyon oranlarının özel durumlarındaki teorileri ile kontrol edilir. Lang (1999)'ın çalışmasından belirli bir zaman sonra termonükleer reaksiyonların oranları hakkında bir sistematik ve tam bir teori oluşturulmuştur. Yapılan bu çalışmalara göre reaksiyonların etkisi makroskopik olarak parçacıkların homojen olmayan ortamlarda alışkanlığına bağlanmıştır[(3)].

Aşağıdaki integral, oran teorisi, nükleer enerji üretme, nötron problemi ve astrofiziğin diğer dallarında kullanılan temel integrallerden birisidir. Bu integralin G fonksiyonu ile nasıl ifade edildiğini görelim.

Örnek 3.2.6:

Çeşitli astrofizik problemlerinde karşılaşılan

$$\int_0^\infty t^{-n\rho}e^{-at}e^{-zt^{-\frac{n}{m}}}dt$$

integralini göz önüne alalım. Bu integral istatistiksel teknikler kullanılarak hesaplanacaktır. X_1 ve X_2 rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve o.y.f.'ları sırasıyla c_1 ve c_2 sabit olmak üzere $f_1(t)=c_1 t^{1-n\rho}e^{-t}$ ve $f_2(t)=c_2 e^{-t^{\frac{n}{m}}}$ olsun. $Y=X_1\cdot X_2$ dönüşümü ile verilen Y rasgele değişkeninin o.y.f.'nu $f(y)$ olarak gösterilsin. Y rasgele değişkeninin o.y.f.'nu kesim 3.2'de tanıtılan o.y.f. tekniği ile bulunur. Buna göre $Y=X_1\cdot X_2$ ve $U=X_1$ dönüşümleri düşünüldüğünde

$$f(y)=\int_0^\infty f_1(u)f_2\left(\frac{y}{u}\right)u^{-1}du \tag{3.2.2}$$

olur. $u=at$ ve $y=az^{\frac{m}{n}}$ biçiminde değişken değiştirmesi yapılırsa

$$f(y)=c_1c_2\int_0^\infty (at)^{-1}(at)^{1-n\rho}\,e^{-at}e^{-\left(\frac{z^{\frac{m}{n}}}{t}\right)^{\frac{n}{m}}}\,dt$$

$$=c_1c_2a^{1-n\rho}\int_0^\infty t^{-n\rho}e^{-at}e^{-zt^{-\frac{n}{m}}}dt \tag{3.2.3}$$

elde edilir. $f_1(t)$'nin Mellin dönüşümü, X_1'in $(s-1)$.inci momenti olmak üzere, $R(1-n\rho+s)>0$ için

$$g_1(s)=E\left(X_1^{s-1}\right)=\int_0^\infty t^{s-1}f_1(t)\,dt=c_1\int_0^\infty t^{1-n\rho+s-1}e^{-t}dt=c_1\Gamma(1-n\rho+s)$$

$f_2(t)$'nin Mellin dönüşümü X_2'nin $(s-1)$.inci momenti olmak üzere, $R(s)>0$ için

$$g_2(s)=E\left(X_2^{s-1}\right)=\int_0^\infty t^{s-1}f_2(t)\,dt=c_2\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t^{\frac{n}{m}}}dt=c_2\frac{m}{n}\Gamma\left(\frac{ms}{n}\right)$$

dir. X_1 ve X_2 rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız olduğu için Y'nin $(s-1)$.inci momenti

$$E\left(Y^{s-1}\right)=E\left(X_1^{s-1}\right)\cdot E\left(X_2^{s-1}\right)=c_1\Gamma(1-n\rho+s)\,c_2\frac{m}{n}\Gamma\left(\frac{ms}{n}\right)$$

olduğuna göre $f(y)$ o.y.f.'nu ters Mellin dönüşümünden

$$f(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} c_1 c_2\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{ms}{n}\right)\Gamma(1-n\rho+s)\left(az^{\frac{m}{n}}\right)^{-s} ds \tag{3.2.4}$$

biçimindedir. Y'nin o.y.f.'si $f(y)$, o.y.f. tekniği ile (3.2.3), Mellin dönüşümü tekniği ile (3.2.4) biçiminde elde edilmiştir. (3.2.3) ve (3.2.4) birbirine eşit olduğundan aradığımız integralin eşitini bulmak için gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$a^{-n\rho+1}\int_0^\infty t^{-n\rho}e^{-at}e^{-zt^{-\frac{n}{m}}}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(\frac{ms}{n}\right)\Gamma(1-n\rho+s)\left(az^{\frac{m}{n}}\right)^{-s} ds \tag{3.2.5}$$

elde edilir. (3.2.5) eşitliğinin sağ tarafında $\frac{s}{n}=s$ dönüşümü yapılırsa

$$a^{-n\rho+1}\int_0^\infty t^{-n\rho}e^{-at}e^{-zt^{-\frac{n}{m}}}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{c^{'}-i\infty}^{c^{'}+i\infty} m\Gamma(ms)\Gamma(1-n\rho+ns)\left(a^n z^m\right)^{-s} ds \tag{3.2.6}$$

elde edilir. (3.2.6) eşitliğinin sağ tarafında yer alan gamma fonksiyonlarının çoklu çarpım formülleri

$$\Gamma(mk)=(2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{mk-\frac{1}{2}}\Gamma(k)\Gamma\left(k+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(k+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$=(2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{mk-\frac{1}{2}}\Gamma(k)\prod_{j=1}^{m-1}\Gamma\left(k+\frac{j}{m}\right)$$

ve

$$\Gamma(1-n\rho+nk)=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{1-n\rho+nk-\frac{1}{2}}\Gamma\left(k+\frac{1-n\rho}{n}\right)\Gamma\left(k+\frac{2-n\rho}{n}\right)\cdots\Gamma\left(k+\frac{n-n\rho}{n}\right)$$

$$=(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{1-n\rho+ns-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{j-n\rho}{n}\right)$$

olup bunlar (3.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$a^{-n\rho+1}\int_0^{\infty} t^{-n\rho} e^{-at} e^{-zt^{-\frac{n}{m}}}\,dt =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c^{'}-i\infty}^{c^{'}+i\infty} m\left(2\pi\right)^{\frac{1-m}{2}} m^{ms-\frac{1}{2}}\Gamma\left(s\right)\prod_{j=1}^{m-1}\Gamma\left(s+\frac{j}{m}\right)\left(2\pi\right)^{\frac{1-n}{2}} n^{1-n\rho+ns-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{j-n\rho}{n}\right)\left(a^n z^m\right)^{-s} ds$$

$$=\frac{m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}-n\rho}\left(2\pi\right)^{\frac{2-m-n}{2}}}{2\pi i}\int_{c^{'}-i\infty}^{c^{'}+i\infty}\Gamma\left(s\right)\prod_{j=1}^{m-1}\Gamma\left(s+\frac{j}{m}\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s+\frac{j-n\rho}{n}\right)\left(m^{-m} n^{-n} a^n z^m\right)^{-s} ds$$

$$=m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}-n\rho}\left(2\pi\right)^{\frac{2-m-n}{2}} G_{0,m+n}^{m+n,0}\left(\frac{z^m a^n}{m^m n^n}\middle| 0,\frac{1}{m},\ldots,\frac{m-1}{m},\frac{1-n\rho}{n},\ldots,\frac{n-n\rho}{n}\right)$$

biçiminde aranan integralin değeri G fonksiyonuna bağlı olarak elde edilir.

3.3 Sıralı Değişkenler

İstatistiğin teori ve uygulama alanında sıralı rasgele değişkenler oldukça kullanılmaktadır. Önce sıra istatistikleri hakkında bilgi verelim:

3.3.1 Sıra İstatistikleri

Özellikle yüzdeliklerin hesaplanmasında, örneklem genişliği, maksimum, minimum değerler ile beraber ortanca değerin hesaplanmasında histogramların çizilmesinde ve buna benzer birçok basit istatistiki bilgilerin elde edilmesinde sıra istatistikleri kullanılmaktadır(30).

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ her biri aynı $F\left(x\right)$ dağılıma sahip ve n tane bağımsız rasgele değişken olsun. Eğer bu rasgele değişkenler büyüklük sırasına göre yeniden düzenlenirse $X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}$ veya $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}$ olur. Buradaki sıralama $\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)$ bir olasılık uzayı olmak üzere, her $w \in \Omega$ için $X_{(1)}\left(w\right) \le X_{(2)}\left(w\right)$ anlamındadır. Bu ifade

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$
$$X_{(2)} = X_1, X_2, \ldots, X_n\text{'lerin ikinci en küçüğü}$$
$$\vdots$$
$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

olarak en genel halde yazılabilir. $X_{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ i.inci sıra istatistiği olarak adlandırılır.

3.3.2 Rekor Değerler

Rekor değerlerin teorisi ise sıra istatistikleri teorisi ile yakından ilgilidir. Rekorların matematiksel teorisi Chandler'in (1952) makalesiyle başlamaktadır. Daha sonra ise rekor değerler ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. Çünkü günlük yaşantımızda da sık sık bu kavramlarla karşılaşılmaktadır. Örneğin spor müsabakaları, rüzgâr şiddeti, barajların su seviyeleri, maddelerin dayanıklılığı, deprem gibi doğa olaylarında elde edilen ölçümler, atmosfer basıncı rekor değerler olarak kullanılabilir. Depremle ilgili bir araştırmada belirli bir periyottaki tüm deprem şiddetleri yerine rekor olarak kaydedilen ölçümlerle çalışılabilir[18,27].

$X_1, X_2, \ldots$ birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Eğer $X_k > \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}$ ise X_k'ya $X_1, X_2, \ldots$ dizisinin k ıncı kesin üst rekor değeri ve $X_k \geq \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}$ ise X_k'ya $X_1, X_2, \ldots$ dizisinin k. ıncı zayıf üst rekor değeri denir.

$U(n)$, n.kesin rekor zamanı ve $X_{U(n)}$, n. kesin üst rekor değeri olmak üzere

$$U(1) = 1, \quad U(n) = \min\left\{j : j > U(n-1) : X_j > X_{U(n-1)}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (3.3.2.1)$$

ve $L(n)$, n.zayıf rekor zamanı, ve $X_{L(n)}$, n. zayıf rekor değeri olmak üzere

$$L(1)=1, \quad L(n)=\min\left\{ j : j > L(n-1) : X_j > X_{L(n-1)} \right\}, \quad n=1,2,\ldots \qquad (3.3.2.2)$$

olarak tanımlanır. Bu rasgele değişkenler dizisinin kesin ve zayıf alt rekor zamanlarını tanımlamak için sırasıyla (3.3.2.1) eşitliğindeki $X_j > X_{U(n-1)}$ yerine $X_j < X_{U(n-1)}$ ve (3.3.2.2) eşitliğindeki $X_j > X_{L(n-1)}$ yerine $X_j < X_{L(n-1)}$ alınır. Buna göre $X_1, X_2, \ldots$ dizisinin üst rekor değerleri $-X_1, -X_2, \ldots$ dizisinin alt rekor değerleridir.

$U(1), U(2), U(3), \ldots$ dizisine kesin rekor zamanları dizisi, $X_{U(1)}, X_{U(2)}, X_{U(3)}, \ldots$ dizisine kesin rekor değerleri dizisi, $L(1), L(2), L(3), \ldots$ dizisine zayıf rekor zamanları dizisi ve $X_{L(1)}, X_{L(2)}, X_{L(3)}, \ldots$ dizisine zayıf rekor değerleri dizisi denir.

Sıra istatistikler ve rekor değerler için karakterizasyonla ilgili çeşitli makaleler vardır. Ferguson (1967) ve Nagaraja (1988) sıra istatistikleri için bazı sürekli dağılımlar yoluyla $E\left[X_{k+1:n} \middle| X_{k:n} = x \right]$ ve duali $E\left[X_{k:n} \middle| X_{k+1:n} = x \right]$ ile ilgili karakterizasyon vermişlerdir. Nagaraja (1977)'de benzer sonuçları rekor değerler için ele almıştır. Pudeg (1990) Ferguson'un işaret ettiği ancak çözülemeyen problemi çözmüştür. Ferguson (1967) tarafından ortaya konulan ve sonradan literatürde kendisine geniş bir yer bulan bu problemin genel hali $E\left[h(X_{1:n},\ldots,X_{n:n}) \middle| X_{k:n} = x \right] = g(x)$ şeklindedir. Burada h ve g uygun bilinen fonksiyonlardır ve $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ sabitlenmiş değerlerdir. $F(x)$ dağılım fonksiyonunun şekline göre $g(x)$ sabit, lineer veya başka biçimlerde olabilir. Tersine eğer $g(x)$ sabit, lineer veya başka biçimde ise $F(x)$ dağılım fonksiyonu ne olabilir problemi bir karakterizasyon problemidir. Bu problem rekor değerler için de uygun ifadelerle ele alınır. Bununla beraber bu problemlerin genel çözümü yoktur ve literatürde $h(.)$ ve $g(.)$ seçimine göre özel durumları verilmiştir.

3.3.3 Genelleştirilmiş Sıra İstatistiği:

F dağılım fonksiyonuna dayalı i.inci genelleştirilmiş sıra istatistiği hakkında ise aşağıdaki bilgiler verilebilir. Genelleştirilmiş sıra istatistiği teorisi Kamps[29] tarafından tanıtılmış olup o günden bugüne bu konu üzerine çok sayıda makale yazılmıştır. Özellikle son birkaç yılda ise bu konudaki çalışmalarda G fonksiyonu kullanılmıştır. Genelleştirilmiş sıra istatistiği, G fonksiyonuna dayalı olarak kullanılmadan önce aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.3.1: $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$, $m_1, \ldots, m_{n-1} \in \mathbb{R}$, $M_r = \sum_{j=r}^{n-1} m_j$, $1 \le r \le n-1$ parametreler olmak üzere $\forall r \in \{1, \ldots, n-1\}$ için $\gamma_r = k + n - r + M_r > 0$ dır ve $n \ge 2$ ise $\tilde{m} = (m_1, \ldots, m_{n-1})$, $n = 1$ ise $\tilde{m} \in R$ keyfidir. Eğer $r = 1, \ldots, n$ için $U(r, n, \tilde{m}, k)$ rasgele değişkenleri $(0 \le u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_n < 1)$

$$f^{U(1,n,\tilde{m},k),\ldots,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_1, \ldots, u_n) = k\left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1} (1-u_i)^{m_i}\right)(1-u_n)^{k-1}$$

ortak o.y.f'na sahip ise, bunlar düzgün g.s.i'leri olarak adlandırılır.

F dağılım fonksiyonu keyfi seçilsin. $r = 1, \ldots, n$ için $X(r, n, \tilde{m}, k) = F^{-1}(U(r, n, \tilde{m}, k))$ rasgele değişkenleri genelleştirilmiş sıra istatistikleri (g.s.i.) olarak tanımlanır. $U(r, n, \tilde{m}, k)$ ve $X(r, n, \tilde{m}, k)$ rasgele değişkenleri $m_1 = \cdots = m_{n-1} = m$ durumunda $U(r, n, m, k)$ ve $X(r, n, m, k)$ ile gösterilir.

$c_{r-1}=\prod_{i=1}^{r}\gamma_i$, $r=1,\ldots,n$, $\gamma_n=k$ ve $M_n=0$ olsun. $m\in\mathbb{R}$ için $g_m(x)$ fonksiyonu

$$g_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{m+1}(1-(1-x)^{m+1}) & ,m\neq -1\\ & \qquad \forall x\in[0,1)\\ \log(\dfrac{1}{1-x}) & ,\quad m=-1\end{cases} \qquad (3.3.3.1)$$

şeklindedir. Buna göre F'e dayalı r.inci g.s.i. $X_*^{(r)}=X(r,n,\tilde{m},k)$'nin marjinal o.y.f.'nu

$$f^{(r,n,\tilde{m},k)}(x)=\frac{c_{r-1}}{(r-1)!}(1-F(x))^{k+n-r+M_r-1}g_m^{r-1}(F(x)),\quad x\in\mathbb{R} \qquad (3.3.3.2)$$

biçimindedir.

Tanım 3.3.3.2: Sürekli F dağılım fonksiyonuna sahip $X_d(1,n,\tilde{m},k),X_d(2,n,\tilde{m},k),\ldots,X_d(n,n,\tilde{m},k)$ rasgele değişkenlerine dual g.s.i.'ler denir.

$f_{d,1,2,\ldots,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ortak o.y.f. 'nu $F^{-1}(1)\geq x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n\geq F^{-1}(0)$, $m\geq -1$ için

$$f_{d,1,2,\ldots,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{j=1}^{n}g_j\prod_{i=1}^{n-1}(F(x_i))^m(F(x_n))^{k-1}f(x)$$

şeklindedir. Burada $r=1,\ldots,n$ ve $k\geq 1$ için $\gamma_r=k+(n-r)(m+1)$ ve n pozitif tamsayıdır.

$$c_{r-1}=\prod_{j=1}^{r}g_j \text{ ve } g_m(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{m+1}(1-x^{m+1}) & ,\quad m\neq -1\\ -\ln(x) & ,\quad m=-1\end{cases}$$

olmak üzere $X_d(1,n,\tilde{m},k)$'in marjinal o.y.f.'nu

$$f^*_{d,r,n,m,k}(x)=\frac{c_{r-1}}{\Gamma(r)}(F(x))^{g_r-1}(g_m(F(x)))^{r-1}f(x)$$

dir.

$\tilde{m}$ ve k parametrelerinin özel seçimleri için genelleştirilmiş sıra istatistikleri, sıra istatistikleri, rekor değerler, ardışık sıra istatistikleri, ilerleyen tür II.tip sansürleme modelleri ve Pfeifer'in rekor değerleri olarak ele alınabilir. Eğer $m_1 = m_2 = ... = m_{n-1} = 0$ ve $k = 1$ alınırsa (3.3.3.2) denkleminden F dağılım fonksiyonuna sahip örneklemin $r.$ sıra istatistiğinin o.y.f.'nu alınır. Eğer $m_1 = m_2 = ... = m_{n-1} = -1$ ve $k = 1$ alınırsa $k.$ rekor değerin modeli elde edilir.

Parametrelerin özel seçimleri ile sıralı rasgele değişkenlerin modelleri

	$\gamma_n = k$	$(1 \le r \le n-1)$ için γ_r	$(1 \le r \le n-1)$ için m_r
Ardışık sıra istatistikleri	α_n	$(n-r+1)\alpha_r$	$(n-r+1)\alpha_r - (n-r)\alpha_{r+1} - 1$
Genelleştirilmiş sıra istatistikleri	k	$k + n - r + \sum_{j=r}^{n-1} m_j$	m_r
Sıra istatistikleri	1	$n-r+1$	0
İlerleyen tür II.tip sansürleme modelleri	$R_n + 1$	$N - r + 1 - \sum_{i=1}^{r-1} R_i$ $= n - r + 1 + \sum_{i=r}^{n} R_i$	$R_r \quad (\in \mathbb{N}_0)$
Rekor değerler	1	1	-1
Pfeifer'in rekor değerleri	β_n	β_r	$\beta_r - \beta_{r+1} - 1$

Şekil 3.3.3.1: g.s.i.'nin parametrelerinin seçimine göre özel durumlar

şeklindedir.

g.s.i.'nin dağılım fonksiyonu ve buna bağlı olarak elde edilen o.y.f.'ları Meijer'in G fonksiyonuna bağlı olarak yazılırsa kolaylaşır. $r.$inci g.s.i., $X_*^{(r)}$ ile gösterilmek üzere Cramer ve Kamps[10] $r.$inci g.s.i.'nin o.y.f.'nu,

$$f_{*,r}\left(t\right)=\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)G_{r,r}^{r,0}\left(\overline{F}\left(t\right)\middle|\begin{matrix}\gamma_1,\dots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\dots,\gamma_r-1\end{matrix}\right)f\left(t\right),\quad t\in\mathbb{R}\;;$$

dağılım fonksiyonu

$$F_{*,r}\left(t\right)=1-\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\int_{0}^{\overline{F}(t)}G_{r,r}^{r,0}\left(\overline{F}\left(t\right)\middle|\begin{matrix}\gamma_1,\dots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\dots,\gamma_r-1\end{matrix}\right)f\left(t\right)dt,\quad t\in\mathbb{R}$$

ve a. dereceden momentini

$$E\left(X_*^{(r)}\right)=\left(\prod_{j=1}^{r}\gamma_j\right)\int_0^1\left(F^{-1}(s)\right)^{\alpha}G_{r,r}^{r,0}\left(1-s\middle|\begin{matrix}\gamma_1,\dots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\dots,\gamma_r-1\end{matrix}\right)ds$$

olarak vermiştir. Son yıllarda g.s.i ile ilgili yapılan çalışmalarda bu kullanımla yapılan çalışmalar oldukça artmıştır. Ayrıca kesim 2.6'daki Özellik 4-5 ve kesim 2.4'deki Özellik 2 kullanıldığında

$$(\gamma_r-\gamma_1)G_{r,r}^{r,0}\left(z\middle|\begin{matrix}\gamma_1,\dots,\gamma_r\\ \gamma_1-1,\dots,\gamma_r-1\end{matrix}\right)=G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left(z\middle|\begin{matrix}\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1}\\ \gamma_1-1,\dots,\gamma_{r-1}-1\end{matrix}\right)-G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left(z\middle|\begin{matrix}\gamma_2,\dots,\gamma_{r-1}\\ \gamma_2-1,\dots,\gamma_r-1\end{matrix}\right)$$

eşitliği ile

$$(\gamma_r-\gamma_1)F_{*,r}^{(\gamma_1,\dots,\gamma_r)}(t)=\gamma_r F_{*,r-1}^{(\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1})}(t)-\gamma_1 F_{*,r-1}^{(\gamma_2,\dots,\gamma_r)}(t),\quad t\in\mathbb{R}$$

g.s.i.'nin dağılım fonksiyonları arasındaki ardışık ilişkiyi vermişlerdir.1

Cramer ve arkadaşları[11]'nın çalışmasında verilen $X_*^{(r)}$ üzerine $X_*^{(r+l)}$'nin koşullu o.y.f.'nu

$$f^{X_*^{(r+l)}\left|X_*^{(r)}\right.}(y|x)=\left(\prod_{v=r+1}^{r+l}\gamma_v\right)\frac{1}{1-F(x)}G_{l,l}^{l,0}\left(\overline{F_x}(y)\middle|\gamma_{r+1},\dots,\gamma_{r+l}\right)f(x)$$

olmak üzere ve benzer şekilde Bieniek[19]'in çalışmasında verilen $X_*^{(r+l)}$ üzerine $X_*^{(r)}$'nin koşullu o.y.f.'nu

$$f^{X_*^{(r)}\left|X_*^{(r+l)}\right.}(x|y)=\frac{G_l\left(F_x(y)\middle|\gamma_{r+1},\dots,\gamma_{r+l}\right)G_r\left(F(x)\middle|\gamma_1,\dots,\gamma_r\right)}{(1-F(x))G_{r+l}\left(F(y)\middle|\gamma_1,\dots,\gamma_{r+l}\right)}I_{(x,y)}(x)$$

şeklinde verilmiştir. Burada $F_X(y) = \dfrac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)}, \quad y \geq x$ dır. Literatüre bakıldığında G fonksiyonuna dayalı olarak verilen koşullu o.y.f. formülleri regresyon kuramından gelen ve g.s.i.'lerin koşullu beklenen değerinin lineerliğine dayanan dağılım karakterizasyonu çalışmalarında oldukça sık kullanılmıştır. Şekil 3.3.3.1 yardımıyla seçilen parametrelere göre diğer modeller için de koşullu o.y.f.'ları bulunabilir. Örneğin Bieniek[20] (2007) bu çalışmasında $r \geq 2$ için $E\left[X_*^{(r-1)} \middle| X_*^{(r)}\right] = cX_*^{(r)}) + d$ koşullu beklenen değeriyle verdiği karakterizasyon çalışması sonucunda g.s.i.'nin dayalı olduğu F'in tekliğini ve kapalı formdaki biçimini vermiştir.

Burkschat ve arkadaşları[21] r.inci dual g.s.i.'nin dağılım fonksiyonunu,

$$F_{*,r}^{d}(x) = \left(\prod_{j=1}^{r} \gamma_j\right) \int_0^{F(x)} G_{r,r}^{r,0}\left(y \,\middle|\, \begin{matrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_r \\ \gamma_1 - 1, \ldots, \gamma_r - 1 \end{matrix} \right) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

olarak vermişlerdir. Ayrıca üstel dağılıma dayalı dual g.s.i.'ler için $1 \leq r \leq n$ ise $\gamma_r\left(X_{*,r}^{d} - X_{*,r-1}^{d}\right)$ boşluklarının F'e göre birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip olduğunu belirtmişlerdir.

Bieniek[19] (2007) tarafından

$$(1-x)^{\alpha} G_r(x|\gamma_1, \ldots, \gamma_r) = G_r(x|\gamma_1 + \alpha, \ldots, \gamma_r + \alpha),$$

$$G_{r,r}^{r,0}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}, \gamma_r - 1 \\ \gamma_1 - 1, \ldots, \gamma_{r-1} - 1, \gamma_r - 1 \end{matrix} \right) = G_{r-1,r-1}^{r-1,0}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1} \\ \gamma_1 - 1, \ldots, \gamma_{r-1} - 1 \end{matrix} \right),$$

$$(1-x)\frac{d}{dx} G_r(x|\gamma_1, \ldots, \gamma_r) = G_{r-1}(x|\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}) - (\gamma_r - 1) G_r(x|\gamma_1, \ldots, \gamma_r) \text{ ve}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{1-\gamma_1} G_r(x|\gamma_1, \ldots, \gamma_r)\right] = (1-x)^{-\gamma_1} G_{r-1}(x|\gamma_2, \ldots, \gamma_r) - (\gamma_r - 1) G_r(x|\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$$

eşitlikleri kullanılarak r.inci düzgün g.s.i.'nin o.y.f.'nun ardışık olarak değişik formlarda yazılışı ve özellikleri hakkında çalışmalar yapılmıştır.

$X_*^{(1)},\ldots,X_*^{(n)}$ F sürekli dağılım fonksiyonuna sahip g.s.i.'lerini göstermek üzere, $\forall x$ için $E\left[h(X_*^{(r+l)})\middle|X_*^{(r)}=x\right]=g(x)$ problemi üzerine de çalışmalar vardır. Burada $1\le r\le n-1$ ve $1\le l\le n-r$ sabitlenmiş değerleri ile h ve g sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca bir başka problem olarak da $E\left[H(X_*^{(r)},X_*^{(r+l)})\middle|X_*^{(r)}=x\right]=g(x)$ ele alınabilir. Cramer[12] (2005) çalışmasında, koşullu o.y.f.'da G fonksiyonunu kullanmış ve G fonksiyonunun türevinden de yararlanarak $E\left(X_*^{(r+l+v)}-X_*^{(r+v)}\middle|X_*^{(v)}=.\right)=b$ koşullu beklenen değerle üstel dağılımın bir karakterizasyonunu vermiştir.

$E\left[h(X_*^{(r+l)})\middle|X_*^{(r)}=x\right]=g(x)$ karakterizasyon problemi üzerinde G fonksiyonunun bir uygulanmasından bahsetmeden önce g.s.i'ler için koşullu olasılık tanımını verelim:

Tanım 3.3.3.3: $x<w(F)$ olmak üzere

$$F_x(t)=\begin{cases}\dfrac{F(t)-F(x)}{1-F(x)}, & t\ge x\\ 0 & ,\ \text{t<x}\end{cases}$$

fonksiyonuna F'in x noktasında soldan kesilmiş dağılım fonksiyonu denir. $X_*^{(r)}=x,\ l\ge 1$ verildiğinde $X_*^{(r+l)}$ nin koşullu o.y.f.'nu

$$f^{X_*^{(r+l)}\left|X_*^{(r)}\right.}(t|x)=\left(\prod_{v=r+1}^{r+l}\gamma_v\right)\frac{1}{1-F(x)}\times G_{l,l}^{l,0}\left(1-F_x(t)\middle|\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+l}\right)f(t);x,t\in\mathbb{R} \tag{3.3.3.3}$$

olup burada $w(F)=F^{-1}(1)$ dır.

Teorem 3.3.3.1: (Lau-Rao Teoremi) μ, $\mathbb{R}^{+}$'da $\mu(\{0\})<1$ koşulunu sağlayan aritmetik olmayan σ-sınırlı bir ölçü, a, b reel sabitler ve $[L]$ kümesinde tanımlanan $H:\mathbb{R}^{+}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu sabitten farklı, ya azalmayan ya da artmayan Borel ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{0}^{\infty} H(y+z)d\mu(y)=aH(z)+b, \quad z\in(0,\infty) \tag{3.3.3.4}$$

biçimindeki integral denkleminin çözümü, $\exists\eta\in\mathbb{R}$ için

$$\int_{0}^{\infty} e^{\eta y}d\mu(y)=1 \tag{3.3.3.5}$$

koşulu altında hemen hemen her $x\in[L]$ için

$$H(x)=\begin{cases}\tau+v\left(1-e^{\eta x}\right), & \eta\neq 0\\ \tau+\xi x, & \eta=0\end{cases} \tag{3.3.3.6}$$

dır. Burada v, ξ, τ sabitlerdir.

Eğer $b=0$ ise, (3.3.3.6) eşitliğinde $\tau=-v$ ve $\xi=0$ dır.

Şimdi Cramer(10)'in çalışmasında yer alan

İki Parametreli Üstel Dağılım:	$f(x)=\dfrac{1}{\theta}e^{-(x-\lambda)/\theta}, x\geq\lambda;\ \theta>0; -\infty<\lambda<\infty$
Power Dağılımı:	$f(x)=\theta\dfrac{(\lambda-x)^{\theta-1}}{(\lambda-\mu)^{\theta}}, \mu<x<\lambda;\theta>0;\ -\infty<\mu<\lambda<\infty$
Pareto Dağılımı:	$f(x)=\dfrac{\theta(\mu+\delta)^{\theta}}{(x+\delta)^{\theta+1}},\ x\geq\mu;\ \theta>0;\ \{\mu,\delta\in\mathbb{R}:\mu+\delta>0\}$

Şekil 3.3.3.2: Bazı dağılımların o.y.f.'ları

dağılımlarının karakterizasyonu ile G fonksiyonunun kullanımını inceleyelim:

Teorem 3.3.3.2: $X_*^{(1)},\dots,X_*^{(n)}$ g.s.i.'leri $1\le r\le n-1,\ 1\le l\le n-r$ için, $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ parametrelerine bağlı F sürekli dağılım fonksiyonuna sahip olsun. Eğer

$$E\left(X_*^{(r+l)}\middle|X_*^{(r)}=x\right)=ax+b \qquad (3.3.3.7)$$

olacak şekilde $a>0$ ve $b\in\mathbb{R}$ sabitleri mevcutsa, F dağılım fonksiyonu genelleştirilmiş Pareto dağılımına sahiptir. Böylece, argümanın dönüşümleri ile aşağıdaki dağılım fonksiyonları Tablo 3.3.3.2'e göre adlandırılarak söylenebilir.

i) Eğer $a=1$ ise $F(x)=1-e^{-x},\quad x\ge 0$

ii) Eğer $0<a<1$ ise $F(x)=1-(-x)^{\theta},\quad x\in[-1,0]$

iii) Eğer $1<a$ ise $F(x)=1-x^{\theta},\quad x\in[1,\infty]$

θ parametresi $\theta=-\dfrac{1}{\eta}$ olarak verilmiştir ve η parametresi

$$p_l(\eta)=\frac{1}{a}\prod_{j=r+1}^{r+l}\gamma_j,\quad \eta\in\left(-\infty,\min\{\gamma_{r+1},\dots,\gamma_{r+l}\}\right)$$

polinom denkleminin tek çözümüdür.

İspat:

Z_x rasgele değişkeni $X_*^{(r+l)}\Big|X_*^{(r)}\overset{d}{=}Z_x$ olmak üzere bu rasgele değişken, $\gamma_{r+1},\dots,\gamma_{r+l}$ parametreleriyle soldan kesilmiş dağılım fonksiyonu F_x'e dayalı g.s.i. olarak görülebilir. Buna göre (3.3.3.7) karakterizasyon denklemi $EZ_x=\int_x^{\infty}t_1 f^{X_*^{(r+l)}\big|X_*^{(r)}}\left(t_1\middle|x\right)dt_1$

dır. $\left(X_{(r+l,n,\tilde{m},k)}=t\middle|X_{(r,n,\tilde{m},k)}=x\right)\overset{d}{=}X_{(l,n-r,\tilde{m},k)}$ dağılımda eşitliğini kullanarak (benzer ifade sıra istatistikleri için Arnold (1992) Teorem 2.4.1 sayfa 23'de gösterilmiştir[11])

$$EZ_x=\left(\prod_{j=r+1}^{r+l}\gamma_j\right)\int_x^{\infty}t_1\frac{1}{1-F(x)}G_{l,l}^{l,0}\left(1-F_x(t_1)\middle|\gamma_{r+1},\dots,\gamma_{r+l}\right)f(t_1)\,dt_1$$

şeklinde olup $F_x(t_1)=t$ dönüşümü yapıldığında

$$EZ_x=\left(\prod_{j=r+1}^{r+l}\gamma_j\right)\int_{(0,1)} F_x^{-1}(t)\,G_{l,l}^{l,0}\left(1-t\middle|\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+l}\right)dt \tag{3.3.3.8}$$
$$=ax+b$$

yazılabilir. $1-F_x(t_1)=1-t$ eşitliğinden

$$1-\frac{F(t_1)-F(x)}{1-F(x)}=1-t\ ,$$

$$1-(1-t)=\frac{F(t_1)-F(x)}{1-F(x)},$$

$$t_1=F^{-1}\left[1-(1-t)\left(1-F(x)\right)\right], \tag{3.3.3.9}$$

sonucu elde edilir. $F_x(t_1)=t$ eşitliğinden $t_1=F_x^{-1}(t)$ olup, (3.3.3.9) eşitliği göz önüne alınırsa

$$F_x^{-1}(t)=F^{-1}\left[1-(1-t)\left(1-F(x)\right)\right] \tag{3.3.3.10}$$

olur. (3.3.3.8) eşitliğinde (3.3.3.10) eşitliği yerine yazılırsa

$$EZ_x=\left(\prod_{j=r+1}^{r+l}\gamma_j\right)\int_{(0,1)} F^{-1}\left[1-(1-t)\left(1-F(x)\right)\right]G_{l,l}^{l,0}\left(1-t\middle|\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+l}\right)dt \tag{3.3.3.11}$$

$$=ax+b$$

elde edilir. (3.3.3.11) eşitliğinin sağ tarafında $(1-t)=e^{-y}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$EZ_x=\left(\prod_{j=r+1}^{r+l}\gamma_j\right)\frac{1}{a}\int_{(0,\infty)} F^{-1}\left[1-e^{-y}\left(1-F(x)\right)\right]G_{l,l}^{l,0}\left(e^{-y}\middle|\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+l}\right)e^{-y}dy \tag{3.3.3.12}$$

$$=x+\frac{b}{a}$$

bulunur. (3.3.3.12) eşitliğinin sağ tarafında $1-F(x)=e^{-z}$ dönüşümü kullanılırsa

$$EZ_x = \left(\prod_{j=r+1}^{r+l} \gamma_j \right) \frac{1}{a} \int_{(0,\infty)} F^{-1}\left[1-e^{-(y+z)}\right] G_{l,l}^{l,0}\left(e^{-y} \middle| \gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+l}\right) e^{-y} dy \tag{3.3.3.13}$$

dır. (3.3.3.13) eşitliğinde verilen integral denkleminin çözümü, Lau-Rao Teoremi kullanılarak bulunabilir. (3.3.3.4) eşitliğine göre (3.3.3.13) integral denkleminde $H(y+z) = F^{-1}\left[1-e^{-(y+z)}\right]$ ve $d\mu(y) = \left(\prod_{j=r+1}^{r+l} \gamma_j \right) \frac{1}{a} e^{-y} G_{l,l}^{l,0}\left(e^{-y} \middle| \gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+l}\right) 1_{(0,\infty)}(y)$

dır. Böylece (3.3.3.13) eşitliği ile verilen integral denklemi Lau-Rao Teoreminde verilen $\int_{(0,\infty)} H(y+z)\, d\mu(y) = H(z) + \frac{b}{a}$ integral denklemine benzer olarak

$$\int_{(0,\infty)} F^{-1}\left[1-e^{-(y+z)}\right] d\mu(y) = F^{-1}\left[1-e^{-z}\right] + \frac{b}{a}$$

elde edilir. $H(z)$'nin biçimini belirleyebilmek için öncelikle (3.3.3.5)'den

$$\int_0^\infty e^{\eta y} d\mu(y) = \int_0^\infty e^{\eta y} \left(\prod_{j=r+1}^{r+l} \gamma_j \right) e^{-y} G_{l,l}^{l,0}\left(e^{-y} \middle| \gamma_{r+1},\ldots,\gamma_{r+l}\right) dy = a \tag{3.3.3.14}$$

sağlanmalıdır. C_j, $j = r+1,\ldots,r+l$ için γ_j parametreleriyle üstel dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenlerdir ve (3.3.3.14) eşitliği $Y = \sum_{j=r+1}^{r+l} C_j$'nin moment çıkaran fonksiyonudur ve

$$E \exp\left\{ \eta \sum_{j=r+1}^{r+l} C_j \right\} = a \tag{3.3.3.15}$$

olarak ifade edilir. Buna göre

$$M_Y(t) = M_{C_{r+1}}(t) \cdots M_{C_{r+l}}(t)$$

$$= \prod_{j=r+1}^{r+l} \frac{1}{1-\eta \frac{1}{\gamma_j}} = \prod_{j=r+1}^{r+l} \frac{\gamma_j}{\gamma_j - \eta} = a \tag{3.3.3.16}$$

dır. (3.3.3.15) ve (3.3.3.16) eşitliği göz önüne alındığında

$$E \exp\left\{\eta \sum_{j=r+1}^{r+l} C_j\right\} = \prod_{j=r+1}^{r+l} \frac{\gamma_j}{\gamma_j - \eta} = a$$

elde edilir. $p_l(\eta) = \frac{1}{a}\prod_{j=r+1}^{r+l} \gamma_j$ denkleminin çözümü olan η, $\eta < \min\{\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_{r+l}\}$ koşulunu sağlamalıdır.

$a = 1$ için (3.3.3.16) eşitliğinden $\eta = 0$ tek çözümdür. $b = 0$ durumu göz önüne alınmamıştır. (3.3.3.6) eşitliğinden $H(z)$ fonksiyonu

$$H(x) = F^{-1}\left(1 - e^{-x}\right) = \tau + \xi x$$

olarak bulunur. Buradan $1 - e^{-x} = F(\tau + \xi x)$ dir. $\tau + \xi x = z$ olsun. Bu durumda $F(z) = 1 - e^{-x}$ elde edilir. Diğer taraftan $\frac{z-\tau}{\xi} = x \Rightarrow e^{-\frac{z-\tau}{\xi}} = e^{-x} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{z-\tau}{\xi}} = 1 - e^{-x}$

olup böylece $F(x) = 1 - e^{-\frac{x-\tau}{\xi}}$, x ³ t dağılım fonksiyonunun $\theta = \xi$ ve $\lambda = \tau$ parametreli iki parametreli Üstel dağılım olduğu görülür.

$0 < a < 1$ için ise $\underset{j=r+1}{\overset{r+l}{Õ}} \frac{g_j}{g_j - h} = a$ için $g_j - h > g_j$, dolayısıyla $h < 0$ olmalıdır. Ayrıca $b > 0$ durumu düşünüldüğünde, (3.3.3.6) eşitliğinden $H(z)$ fonksiyonu $H(x) = F^{-1}\left(1 - e^{-x}\right) = \tau + v\left(1 - e^{\eta x}\right)$ biçiminde ortaya çıkar ve $1 - e^{-x} = F\left(\tau + v\left(1 - e^{\eta x}\right)\right)$ olur. $\tau + v\left(1 - e^{\eta x}\right) = z$ olsun. Bu durumda $F(z) = 1 - e^{-x}$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{\tau + v - z}{v} = e^{\eta x} \Rightarrow \left(\frac{\tau + v - z}{v}\right)^{\frac{-1}{\eta}} = e^{-x} \Rightarrow 1 - e^{-x} = 1 - \left(\frac{(\tau + v) - z}{(v + \tau) - \tau}\right)^{\frac{-1}{\eta}}$$

olup böylece $F(x)=1-\left(\frac{(\tau+v)-x}{(v+\tau)-\tau}\right)^{\frac{-1}{\eta}}$, t £ x£ $t + v$ dağılım fonksiyonunun

$\theta=-\frac{1}{\eta};\lambda=\tau+v$ ve $\mu=\tau$ parametreli Power dağılımı olduğu görülür.

$a>1$ için ise $\overset{r\pm l}{\underset{j=r+1}{\text{Õ}}}\frac{g_j}{g_j-\ h}=a$, $g_j-\ h<g_j$ dır ve $h>0$ olduğu görülür. Yani

$\{g_{r+1},\text{K},g_{r+l}\}>h>0$ dır. $b\neq 0$ durumu göz önüne alındığında (3.3.3.6)

eşitliğinden $H(z)$ fonksiyonu,

$$H(x)=F^{-1}\left(1-e^{-x}\right)=\tau+v\left(1-e^{\eta x}\right)$$

biçiminde seçilirse yine aynı şekilde $F(z)=1-e^{-x}$ elde edilir. Öte yandan

$$\frac{z-(\tau+v)}{-v}=e^{\eta x}\Rightarrow\left(\frac{-v}{z-(\tau+v)}\right)^{\frac{1}{\eta}}=e^{-x}\Rightarrow 1-e^{-x}=1-\left(\frac{\tau-(v+\tau)}{z-(\tau+v)}\right)^{\frac{1}{\eta}}$$

olup $F(x)=1-\left(\frac{\tau-(v+\tau)}{z-(\tau+v)}\right)^{\frac{1}{\eta}}$, x³ t dağılım fonksiyonunun

$\theta=\frac{1}{\eta};\delta=-\tau-v$ ve $\mu=\tau$ parametreli Pareto dağılımı olduğu görülür.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmanın temel amacı, Matematik, İstatistik, Fizik ve ilişkili diğer bilim dallarında geniş bir uygulama alanına sahip olan Meijer'in G fonksiyonunu incelemektir. G fonksiyonunun bazı temel özellikleri tanıtılmış, türevleri ile ilgili bazı özellikleri ve temel fonksiyonların G fonksiyonu olarak ifadesi verilmiştir. Sürekli r.d.'lerin bir fonksiyonunun dağılımının elde edilmesi probleminde o.y.f. ve dağılım fonksiyonu tekniklerine alternatif olarak Kesim 3.2'de verildiği gibi Meijer'in G fonksiyonu ve Mellin dönüşümünden de yararlanılabilir. O.y.f tekniğine nazaran bu metotta değişken değiştirmeye, ilave yeni değişkenler tanımlamaya, değişkenler arasında bire-bir dönüşüme ve jakobiyen hesabına gerek yoktur. Öngörü problemlerinin çözümü için sıralı r.d.'ler ile verilen karakterizasyonlar hakkında son yıllarda pek çok çalışmanın yapıldığı ve daha çok sürekli dağılımlar üzerinde durulduğu görülmüştür. Bu çalışmada literatürde sıralı r.d.'lerin değerine dayalı olarak verilen pek çok karakterizasyon teoremleri ele alınmış ve Cramer (2004) [11] tarafından verilen teoremle bu problemlerin genel çözümü tartışılmıştır. $X_*^{(r)}$, F'e dayalı g.s.i. olmak üzere $E\left[h\left(X_*^{(1)}, X_*^{(2)}, \ldots, X_*^{(n)}\right) \middle| X_*^{(k)} = x\right] = g(x)$ koşullu beklenen değeriyle karakterizasyon çalışmalarının sonuçları araştırmacıya iki yönlü bilgi vermektedir. Örneklemin dağılımı biliniyorken regresyon denklemi $g(x)$ ile $h\left(X_*^{(1)}, X_*^{(2)}, \ldots, X_*^{(n)}\right)$ için öngörü yapılabilir. Öte yandan, eğer regresyon denklemi biliniyorsa örneklemin geldiği dağılım hakkında bilgi çıkarılabilir. Bu çalışmanın devamı olarak koşullu beklenen değerin lineer veya lineer olmayan daha genel halleri için model kurularak başka dağılımların karakterizasyonu hakkında yapılacak çalışmaların önemli olduğu düşünülmektedir. Karakterize edilecek dağılım seçilen h ve g fonksiyonlarının biçimine bağlı olarak değişecektir. Ayrıca g.s.i. ile alınan sonuçlar Şekil 3.3.3.1'de verilen g.s.i'nin parametrelerinin seçimine göre alınan özel sıralı r.d.'ler için de verilmiş olacaktır.

Uygulama açısından bakılırsa sıralı r.d.'lerin veya bunların bir fonksiyonunun tahmini gerçek hayattaki pek çok öngörü probleminin bir parçasıdır. Örneğin belli bir bölgedeki çeşitli şiddetlerle gerçekleşen yağış miktarının verilerinden yararlanarak bunda sonra olabilecek daha büyük veya çok daha düşük miktardaki yağış miktarının tahmini, sel baskınları, su seviyeleri veya kuraklık için önemli bir problemdir. O bölgedeki tarım araştırmaları, çevre düzenlemeleri, önlemler ve yatırımlar ona göre yapılacaktır. Sel olduğunda ortaya çıkacak zararın en aza indirgenmesi amacıyla alınacak önlemler için yapılacak harcamaların limiti veya tarım alanında yapılacak yatırımların garantisi hesaplanabilecektir.

KAYNAKLAR

1. A. Dembinska and J. Wesolowski, Linearity of Regression from Non-Adjacent Order Statistics, Metrika, **90**, 215-222(1998).

2. A. M. Mathai, A Handbook of Generalized Special Functions for Statistical and Physical Sciences, Clarendon Press, Oxford, 1993.

3. A. M. Mathai and H. J. Haubold, Review of Mathematical Techniques Applicable in Astrophysical Reaction Rate Theory, Astrophysics and Space Science, **282**, 265-280(2002).

4. A. Şamilov, E. Ağaoğlu, Y. M. Kantar, Dirac ve Heaviside Genelleştirilmiş Fonksiyonlarını Kullanarak Rasgele Değişkenlerin Dağılımlarının Elde Edilmesi, İstatistik Günleri Sempozyumu, Antalya, 123-128(2006).

5. B. Karaoğlu, Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler, Seyir Yayıncılık, İstanbul, 2004.

6. C. Keseling, Conditional Distributions of Generalized Order Statistics and Some Characterizations, Metrika, **49**, 27-40(1999).

7. C. R. Rao and D. N. Shanbhang, Choquet-Deny Type Functional Equations with Applications to Stochastic Models, Wiley, New York, 1994.

8. D. G. Kabe, Some Applications of Meijer-G Functions to Distribution Problems in Statistics, Biometrika, **45**, 578-580(1958).

9. E. Cramer, Contributions to Generalized Order Statistics, Habilitationsschrift Universty of Oldenburg, Oldenburg, Germany, 2002.

10. E. Cramer and U. Kamps, Marginal Distributions of Sequential and Generalized Order Statistics, Metrika, **58**, 293-310(2003).

11. E. Cramer, U. Kamps and C. Keseling, Characterizations via Linear Regression of Ordered Random Variables: A Unifying Approach, Communications in Statistics Theory and Methods, **33**, 12, 2885-2911(2004).

12. E. Cramer and U. Kamps, Characterization of the Exponential Distribution by Conditional Expectations of Generalized Spacings, Advances on Models, Characterizations and Applications, Chapman&Hall, Edit by N. Balakrishnan, I.G. Bairamov and O.L. Gebizlioğlu , 2005.

13. E. E. Fitchard and V. Franco, Differential Properties of Meijer's G-Function, J.Phys. A.Math.Gen., **13**, 2331-2340(1980).

14. F. Öztürk, Matematiksel İstatistik, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 1993.

15. G. Arslan, Olasılık Dağılımlarının Karakterizasyonu, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, 2001.

16. H. N. Nagaraja, Some Characterizations of Continuous Distributions Based on Regressions of Adjacent Order Statistics and Record Values, Sankhya, Ser.A, **50**, 70-73(1988).

17. L. C. Andrews, Special Functions of Mathematics for Engineers, New York McGraw-Hill, c1992.

18. M. Ahsanullah, Record Statistics, Nova Science Publishers Inc, 1995.

19. M. Bieniek, Variation Diminishing Property of Densities of Uniform Generalized Order Statistics, Metrika, **65**, 297-309(2007).

20. M. Bieniek, On characterizations of Distributions by Regression of Adjacent Generalized Order Statistics, Metrika, DOI: 10.1007/s00184-006-0107-2.

21. M. Burkschat, E. Cramer and U. Kamps, Dual Generalized Order Statistics, Metron International Journal of Statistics, vol.LXI, n.**1**, 13-26(2003).

22. M. İdemen, Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Literatür Yayıncılık, İstanbul, 1999.

23. M. R. Spiegel, çev.C. Cerit ve S. Eraslan, Laplace Dönüşümleri, Eğitim Yayınları, İstanbul, 1965.

24. M. R. Spiegel, çev. S. Süray, Teori ve Problemlerle İleri Analiz, Güven Kitabevi Yayınları, Ankara, 1978.

25. N. San, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Ege Ü. Fen Fakültesi Baskı İşleri, İzmir, 1979.

26. P. Deheuvels, The Characterization of Distributions by Order Statistics and Record Values a Unified Approach, J. Appl. Prob., **21**, 326-334(1984).

27. S.Y.Öncel, Rekor Değerlerin Yardımıyla Kesikli Dağılımların Karakterizasyonu Üzerine Bir Çalışma, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 2002.

28. T. Başkan, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Rota Ofset Matbaacılık, Bursa, 2000.

29. U. Kamps, A Concept of Generalized Order Statistics, Teubner, Stuttgart, 1995.

30. Y. Akdi, Matematiksel İstatistiğe Giriş, Bıçaklar Kitabevi, 2005.

31. Y. Luke, The Special Functions and Their Approximations, I, II, Academic Pres, New York, 1969.