T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ ve İSTATİSTİKSEL UYGULAMALARI

ABDULLAH YILMAZ

OCAK 2008

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

Doç.Dr. Burak BİRGÖREN

…. /…. /……

Müdür V.

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Yrd.Doç.Dr. Sevgi Y. ÖNCEL

Ortak Danışman

Prof.Dr. Kerim KOCA

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Kerim KOCA

Yrd.Doç.Dr. Sevgi Y. ÖNCEL

Yrd.Doç.Dr. Ali ARAL

Yrd.Doç.Dr. Ali OLGUN

Yrd.Doç.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ ve İSTATİSTİKSEL UYGULAMALARI

YILMAZ, Abdullah

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Kerim Koca

Ocak 2008, 77 sayfa

Bu tez üç temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynaklar hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde bazı istatistiksel kavramlar ele alınmıştır. Tezin esas kısmını oluşturan üçüncü bölümde Laplace, Fourier, Mellin, Hankel ve Z dönüşümlerinin temel özellikleri ve istatistiksel uygulamaları incelenmiştir. Ayrıca tezin sonunda ortaya konulan sonuçların bir özeti ve daha ileri düzeyde neler yapılabileceği hakkında açıklamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler : İntegral Dönüşümleri, Laplace, Fourier, Mellin, Hankel, Z Dönüşümü, Beklenen Değer, Karakteristik Fonksiyon, Moment Çıkaran Fonksiyon.

ABSTRACT

INTEGRAL TRANSFORMATIONS and APPLICATIONS TO STATISTICS

YILMAZ, Abdullah

Kırıkkale University

Graduate School Of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M.Sc. Thesis

Supervisor : Prof. Dr. Kerim Koca

January 2008, 77 pages

This thesis consists three basic chapters. Aims of thesis and general informations about references are given in first chapter. Some statistical notations are introduced in second chapter. Laplace, Fourier, Mellin, Hankel and Z transformations and their statistical applications are investigated in in chapter three which is the main section. Furthermore, some statements about summary of results and advanced future studies are put forward at the conclusion section.

Key Words : Integral Transformations, Laplace, Fourier, Mellin, Hankel, Z Transformation, Expected Value, Characteristic Functions ,Moment Generating Function.

TEŞEKKÜR

Başta bu tezin hazırlanması esnasında benimle yakından ve sabırla ilgilenen, yönlendiren, çalışmamın her safhasında yakın ilgisini gördüğüm danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya ,

Çalışmalarım süresince bana göstermiş oldukları anlayış ve destekten dolayı Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölüm Başkanı Sayın Yard. Doç. Dr. Sevgi Yurt ÖNCEL'e ve Bölüm Başkan Yardımcısı Sayın Yard. Doç. Dr. Fatih TANK'a,

Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'ndeki çalışma arkadaşlarım Öğr.Gör. Emel KIZILOK, Ar.Gör. Kübra ABA ve Ar.Gör. Altan TUNCEL'e,

Son olarak beni yetiştiren aileme ve bir çok konuda olduğu gibi tez çalışmamam esnasında da sabır ve anlayışını esirgemeyen sevgili eşim Ayça YILMAZ'a,

Teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Genel olarak integral dönüşümlerinin temel bilimler ve mühendislikte oldukça çok uygulamaları vardır. Bu uygulamalarda temel düşünce, problemi çözülebilecek bir uzaya taşıyıp orada problemi çözdükten sonra ters dönüşümle ilk uzaya geri dönmektir.

İntegral dönüşümlerinin en yaygın kullanıldıkları alan Başlangıç ve Sınır değer problemlerinin çözümü ile istatistikteki dağılım teorisidir. Bunların yanında mühendislik ve fizikte bir çok problemlerin çözümleri integral dönüşümleri yardımıyla ortaya konulabilmektedir.

Bir boyutlu uzayda bir integral dönüşümünün en genel şekli

$$\mathrm{I}\{f(x)\} = F(y) = \int_a^b K(x,y)f(x)dx \qquad (1.1.1)$$

formundadır. Burada $K(x,y)$ *integral dönüşümünün çekirdeği* adını alır. (1.1.1) deki $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlanmış ve sağdaki integral mevcut olacak şekilde belirli özelliklere sahip bir fonksiyon sınıfına aittir. $K(x,y)$ genelde özel olarak belirtilmediği sürece uygun bir $[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ şeklinde bir küme üzerinde tanımlıdır.

$K(x,y)$ çekirdek fonksiyonunun ve *a*,*b* nin özel seçimlerine göre (1.1.1) integral denklemi çeşitli isimler alır. Örneğin

$a=0$, $b=+\infty$, $K(x,y)=e^{-xy}$ olarak alınırsa

$$\mathcal{L}\{y\} = \int_0^\infty e^{-xy} f(x)dx$$

Laplace dönüşümü; $a = -\infty$, $b = +\infty$, $K(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy}$ olarak alınırsa

$$\mathcal{F}\{y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x)dx$$

Fourier dönüşümü; $a = 0$, $b = +\infty$, $K(x,y) = x^{y-1}$ olursa

$$\mathcal{M}\{y\} = \int_0^\infty x^{y-1} f(x)dx$$

Mellin dönüşümü vs. gibi isimler alır. Eğer çekirdek fonksiyonu $K(x,y) = k(x-y)$ formunda alınırsa uygulamalarda büyük kolaylıklar ortaya çıkar. Örneğin konvolusyon tipindeki integral denklemlerinin çözülmesi oldukça basitleşir. Ayrıca bu tipteki integral dönüşümlerinin her biri için ayrı ayrı konvolusyon teoremleri verilebilmektedir ve bu özellik ters integral dönüşümlerin hesaplanmasında büyük kolaylık sağlamaktadır.

İntegral dönüşümlerinin İstatistiksel uygulamaları da ilginç özelliklere sahiptir. Örneğin bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun Fourier dönüşümü karakteristik fonksiyonu vermektedir. Özellikle Mellin dönüşümünün ileri düzeyde istatistiksel kullanım alanları vardır.

İntegral dönüşümlerinin tümü

$$\mathrm{I}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathrm{I}[f(x)] + \beta \mathrm{I}[g(x)]$$

lineerlik özelliğini sağlar. Lineer integral dönüşüm kavramı, modern analizde çok önemli düşüncelerin temel kaynağı, hareket noktası olmuştur.

Eğer $K(x,y)$ çekirdek fonksiyonunun tanım kümesinde singülerliği varsa integral dönüşüm de singüler tiptendir denir ve bunların ayrı bir inceleme tekniği vardır.

Bu tezde bazı özel tipten integral dönüşümler ele alınıp özellikleri ortaya konulmaktadır.

1.1. Tezin Amacı

Giriş kısmında da belirtildiği gibi bu tezin esas amacı integral dönüşümler hakkında temel bilgileri ortaya koymak ve bazı integral dönüşümlerinin istatistiksel uygulamalarını vermektir. Bu amaçla Laplace integral dönüşümün moment çıkaran fonksiyonlar ile Fourier integral dönüşümün karakteristik fonksiyonlar ile Mellin integral dönüşümün beklenen değer,basıklık ve çarpıklık katsayıları ile olan ilişkileri ortaya konulmuştur.

1.2. Kaynak Özetleri

Tezin hazırlanmasında [1] kaynağı temel olarak alınmış, [13] ve [4] kaynakları yardımıyla kavramlar genişletilmiştir.

İstatistik uygulamalarında kullanılacak temel kavramlar ve tanımlamalarda [2], [7] ve [3] kaynakları esas alınmıştır. İntegral dönüşümlerinin istatistiksel uygulamalarında ise Laplace dönüşümü için [11], Fourier dönüşümü için [5] ve [14], Mellin dönüşümü içinse [6] kaynaklarından faydalanılmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kesimde, integral dönüşümlerin istatistiksel uygulamalarını vermek için ihtiyaç duyacağımız bazı istatistiksel kavramlar verilecektir.

2.1. Olasılık Teorisi Temel Kavramları

Küme kavramı matematiğin temel kavramlarından birisidir. Aşağıda olasılık teorisinin temel kavramlarının tanımlarını verirken üzerinde çalıştığımız kümeyi Ω ile göstereceğiz. Ω kümesi çoğu zaman *evrensel küme* ya da *örnek uzay* olarak adlandırılmaktadır.

Tanım 2.1.1 : ($\sigma - cebir$**)** $\Omega \neq \varnothing$ olmak üzere, Ω'nın alt kümelerinden oluşan U sınıfı

i. $\Omega \in U$

ii. $\forall A \in U$ için $\overline{A} \in U$

iii. $A_n \in U,\ n = 1,2,3,\ldots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

özelliklerini taşıyorsa, U sınıfına Ω'da bir $\sigma - cebir$'dir denir. Ayrıca (Ω, U) ikilisine *ölçülebilir uzay* ve U'nun her bir elemanına da *olay* denir.

Tanım 2.1.2: (Olasılık Ölçüsü) Ω boş olmayan bir küme ve U, Ω'da bir $\sigma - cebir$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P : U &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A) \end{aligned}$$

ile verilen *P* küme fonksiyonu

i. $\forall A \in U$ için $P(A) \geq 0$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. U 'da ayrık kümelerin her $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

özelliklerine sahipse P 'ye U üzerinde bir *olasılık ölçüsü* denir. $P(A)$ değerine ise A olayının *olasılığı* denir.

Tanım 2.1.3 : (Olasılık Uzayı) U, boş olmayan Ω kümesi üzerinde bir $\sigma - cebir$ ve P, U üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsü olmak üzere, (Ω, U, P) üçlüsüne *olasılık uzayı* ya da *olasılık modeli* denir.

Tanım 2.1.4 : (Rasgele Değişken) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} X &: \Omega \to \mathbb{R} \\ w &\to X(w) \end{aligned}$$

fonksiyonu

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ için } \{w \in \Omega : X(w) \leq a\} \in U$$

koşulunu sağlıyor ise X fonksiyonuna bir *rasgele değişken* (r.d.) denir.

Bir fonksiyonun ters görüntüsü kavramı kullanılarak yukarıda tanımlanan X fonksiyonunun bir rasgele değişken olabilmesi için gerekli koşulun

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ için } X^{-1}(-\infty, a] \in U$$

olduğu söylenebilir.

Rasgele değişkenler X,Y,Z,… gibi büyük harflerle gösterilirler. Yukarıda tanımı verilen rasgele değişkenin aynı zamanda bir ölçülebilir fonksiyon olduğu açıktır. Bilindiği gibi yukarıdaki tanımda (Ω, U, P) yerine (Ω, U) alınırsa X'e

$U-$ölçülebilir fonksiyon denir. Bu bakımdan X $U-$ölçülebilir fonksiyonunun bir rasgele değişken olabilmesi için, U $\sigma-$cebiri üzerinde bir P ölçüsünün var olması gereklidir.

Tanım 2.1.5 : Ω'nın boş olmayan bir A sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerden en küçüğüne A nın doğurduğu $\sigma-$cebir denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 : (Borel $\sigma-$cebir) $\Omega=\mathbb{R}$ ve $A=\{(a,b): a<b\ ,\ a,b\in\mathbb{R}\}$ sınıfını kapsayan en küçük $\sigma-$cebire *Borel $\sigma-$cebir* ya da kısaca *Borel cebiri* denir ve $\mathcal{B}$ veya $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Borel cebirinin her elemanına *Borel kümesi* denir.

Yukarıdaki tanıma göre Borel cebiri $\mathbb{R}$'deki açık aralıklar tarafından üretilen $\sigma-$cebirdir. Bundan dolayı açık aralıklar $\mathcal{B}$'nin elemanıdır. Bunun yanında $\mathbb{R}$'deki kapalı aralıklar, yarı açık aralıklar, $\{a\}$ gibi tek nokta kümeleri ve dolayısıyla $\{a,b,c\}$ gibi kümeler de Borel cebirinin elemanlarıdır. (bkz. [2])

(Ω,U,P) bir olasılık uzayı ve X bir rasgele değişken olmak üzere

$$P_X:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$$
$$B\to P_X(B)=P\left(\{w: X(w)\in B\}\right)$$

fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür (bkz. [2]). Özel olarak P_X olasılık ölçüsüne *X rasgele değişkeninin doğurduğu olasılık ölçüsü* (*dağılımı*) denir. Bir X rasgele değişkeni ile ilgili olasılık hesaplarında P_X olasılık dağılımının bilinmesi yeterlidir. Ayrıca $\forall B\in\mathcal{B}$ için $P_X(B)=P_Y(B)$ ise X ve Y aynı dağılımlı olur. Yukarıdaki tanımlamadan hareketle her rasgele değişkenin bir olasılık dağılımı belirlediği söylenebilir.

Tanım 2.1.6 : (Dağılım Fonksiyonu) (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve X bir rasgele değişken olmak üzere

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \to F_X(x) = P(\{w : X(w) \le x\})$$

ile tanımlanan F_X fonksiyonuna X *rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu* denir.

Teorem 2.1.1 : (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, X bir rasgele değişken ve F_X X'in dağılım fonksiyonu olmak üzere

i. F_X azalmayan bir fonksiyondur

ii. F_X sağdan süreklidir

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(F_X(x)) = 1$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}(F_X(x)) = 0$

dir.

İspat : i. $x_1 \le x_2$ olsun. Bu durumda

$$\{w : X(w) \le x_1\} \subset \{w : X(w) \le x_2\}$$

dir. Buradan

$$P(\{w : X(w) \le x_1\}) \le P(\{w : X(w) \le x_2\})$$

$$F_X(x_1) \le F_X(x_2)$$

elde edilir. $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$ olduğundan F_X azalmayan bir fonksiyondur.

ii. F_X 'in sağdan sürekli olduğunu göstermek için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right) = F_X(x)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F_X\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\left\{w : X(w) \le x+\frac{1}{n}\right\}\right)\\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{w : X(w) \le x+\frac{1}{n}\right\}\right)\\ &= P\left(\left\{w : X(w) \le x\right\}\right)\\ &= F_X(x)\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla F_X sağdan süreklidir.

iii. $A_n = \{w : X(w) \le n\}$ olarak seçilsin.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F_X(n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\Omega) = 1$$

dir. Benzer şekilde $B_n = \{w : X(w) \le -n\}$ seçelim

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F_X(-n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\varnothing) = 0$$

elde edilir.

Teorem 2.1.2 : X bir rasgele değişken ve F_X , X'in dağılım fonksiyonu olmak üzere

i. $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

ii. $P(X = c) = F_X(c) - F_X(c^-)$

dir.

İspat : i. $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$ yazılabileceği açıktır. Buradan

$$P_X\left(-\infty,b\right]=P_X\left(-\infty,a\right]+P_X\left(a,b\right]$$

$$P(X\le b)=P(X\le a)+P(a<X\le b)$$

$$P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)$$

$$P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$$

elde edilir.

ii. $\{c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(c-\frac{1}{n},c\right]=\lim_{n\to\infty}\left(c-\frac{1}{n},c\right]$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}P(X=c)=P_X\{c\}=P_X\left(\lim_{n\to\infty}\left(c-\frac{1}{n},c\right]\right)&\\ &=\lim_{n\to\infty}P_X\left(c-\frac{1}{n},c\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}P\left(c-\frac{1}{n}<X\le c\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}\left[F_X(c)-F_X\left(c-\frac{1}{n}\right)\right]\\ &=F_X(c)-F_X(c^-)\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.6 : Bir X rasgele değişkeninin aldığı değerlerin kümesi D_X sayılabilir sonlu veya sayılabilir sonsuz çoklukta elemana sahipse X'e *kesikli rasgele değişken* denir. Bu durumda X'in dağılımına da *kesikli dağılım* adı verilir.

Tanım 2.1.7 : X kesikli bir rasgele değişken olsun.

$$\begin{aligned}f_X:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}^+\\ x&\to f_X(x)=P(X=x)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f_X fonksiyonuna X'in *olasılık fonksiyonu* denir. Burada

$$f_X(x)=\begin{cases}P(X=x) & ,x\in D_X\\ 0 & ,x\notin D_X\end{cases}$$

olmak üzere

i. $f_X(x) \geq 0 \ , \forall x \in D_X$

ii. $\sum_{x \in D_X} f_X(x) = 1$

özelliklerini sağlar. Ayrıca kesikli bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{a \leq x \\ a \in D_X}} P(X = a) \quad , x \in (-\infty, \infty) \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.8 : (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, X Ω üzerinde tanımlı bir rasgele değişken olsun. X'in dağılım fonksiyonu F_X, bir

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonu yardımıyla $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \tag{2.1.2}$$

biçiminde yazılabiliyorsa X'e *sürekli rasgele değişken* ve X'in dağılımına *sürekli dağılım* denir. f_X fonksiyonu ise *olasılık yoğunluk fonksiyonu* olarak adlandırılır. Bu durumda

i. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f_X(x) \geq 0$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1$

dir. Ayrıca

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{dx} F_X(x) & , F_X\text{'in süreklilik noktalarında} \\ 0 & , \text{d.y.} \end{cases} \tag{2.1.3}$$

olduğu açıktır.

Görüldüğü gibi olasılık fonksiyonu (o.f.) kavramı kesikli rasgele değişkenler için kullanılırken, olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f) kavramı sürekli rasgele değişkenler için kullanılmaktadır.

Tanım 2.1.9 : (Beklenen Değer) X bir rasgele değişken ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall B\in\mathcal{B}$ için $g^{-1}(B)\in\mathcal{B}$ özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere

$$E\left(g(X)\right)=\begin{cases}\sum\limits_{x\in D_X} g(x)f_X(x) & ,X \text{ kesikli r.d. ve } \sum\limits_{x\in D_X}\left|g(x)\right|f_X(x)<\infty \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx & ,X \text{ sürekli r.d. ve } \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|g(x)\right|f_X(x)dx<\infty\end{cases} \tag{2.1.4}$$

ifadesine $g(X)$ rasgele değişkeninin *beklenen değeri* denir.

Tanım 2.1.10 : (Rasgele Değişkenin Momenti) X bir rasgele değişken olmak üzere

$$\mu_n = E(X^n) \quad ,n=1,2,\dots \tag{2.1.5}$$

ifadesine *X'in n .momenti*, $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$E\left[(X-c)^n\right] \quad ,n=1,2,\dots \tag{2.1.6}$$

ifadesine ise *X'in c'ye göre n .momenti* denir.

Tanım 2.1.11 : (Varyans) X bir rasgele değişken olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[X-E(X)]^2 \\ &= E(X^2)-[E(X)]^2\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

ile verilen $\mathrm{Var}(X)$ değerine X'in ya da X'in dağılımının *varyansı* denir.

$$\sqrt{\mathrm{Var}(X)} \tag{2.1.8}$$

değerine ise X'in ya da X'in dağılımının *standart sapması* adı verilir.

Bir rasgele değişkenin varyansı, kendi dağılımının beklenen değeri (ortalaması) etrafındaki yayılımının ya da saçılımının bir ölçüsüdür. Rasgele değişkenin ölçüm birimi ne ise varyansın ölçüm birimi onun karesi olacaktır. Standart sapmanın ölçüm birimi rasgele değişkenin ölçüm birimi ile aynı olduğundan, kullanımı uygulamada daha yaygındır.

Tanım 2.1.12 : (Moment Çıkaran Fonksiyon) X rasgele değişkeninin $E\left(e^{tX}\right)$ beklenen değeri var olmak üzere

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) \qquad ,t \in \mathbb{R} \tag{2.1.9}$$

ifadesine X'in *Moment Çıkaran Fonksiyonu* denir.(2.1.4) ile verilen beklenen değer ifadesi kullanılırsa moment çıkaran fonksiyon

$$M_X(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in D_X} e^{tX} f_X(x) & ,X \text{ kesikli r.d.} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f_X(x)\,dx & ,X \text{ sürekli r.d.} \end{cases} \tag{2.1.10}$$

biçiminde yazılır.

X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu var olsun. Eğer $M_X(t)$, *t*'ye göre türevlenebilir ise X'in (2.1.5) ile verilen momentleri $M_X(t)$ yardımıyla

$$\mu_n = E\left(X^n\right) = M_X^{(n)}(0) = \left.\frac{d^n M_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0} \qquad ,n = 1,2,\ldots \tag{2.1.11}$$

ile bulunabilir. Kolayca görülebileceği üzere

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\right|_{t=0} &= \left.\frac{d^n}{dt^n} E\left(e^{tX}\right)\right|_{t=0} = E\left(\left.\frac{d^n}{dt^n} e^{tX}\right|_{t=0}\right) \\ &= E\left(X^n e^{tX}\right)\Big|_{t=0} = E\left(X^n\right) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.1.3 : $X_1, X_2, \ldots, X_n$ birbirinden bağımsız n tane rasgele değişken olmak üzere $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_Y(t)=\prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \qquad (2.1.12)$$

dir.

İspat: (2.1.9) dan hareketle

$$\begin{aligned}
M_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) &= E\left(e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}\right) \\
&= E\left(e^{tX_1+tX_2+\ldots+tX_n}\right) \\
&= E\left(e^{tX_1}e^{tX_2}\ldots e^{tX_n}\right) \quad \left(X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ birbirinden bağımsız olduğundan}\right) \\
&= E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)\ldots E\left(e^{tX_n}\right) \\
&= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\ldots M_{X_n}(t)=\prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.12 : (Karakteristik Fonksiyon) X rasgele değişkeninin

$$\varphi_X(t)=E\left(e^{itX}\right) \qquad ,t\in\mathbb{R} \qquad (2.1.13)$$

ile verilen $\varphi_X(t)$ ifadesine X'in *Karakteristik Fonksiyonu* denir. (2.1.4) ile verilen beklenen değer ifadesi dikkate alınırsa, X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu

$$\varphi_X(t)=\begin{cases} \sum\limits_{x\in D_X} e^{itX} f_X(x) & ,X \text{ kesikli r.d.} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itX} f_X(x)\,dx & ,X \text{ sürekli r.d.} \end{cases} \qquad (2.1.14)$$

biçiminde yazılır. (2.1.13) eşitliği Euler formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E\left(e^{itX}\right)=E\left(\cos(tX)+i\sin(tX)\right) \\
&= E\left(\cos(tX)\right)+iE\left(\sin(tX)\right) \qquad ,t\in\mathbb{R}
\end{aligned} \qquad (2.1.15)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca

$$\left|e^{itX}\right|=\left|\cos(tX)+i\sin(tX)\right|=1$$

olduğundan $E\left(e^{itX}\right)$ beklenen değeri her X için mevcuttur. Yani bir rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu her zaman vardır.

Teorem 2.1.4 : X bir rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(t)$ olmak üzere

i. $\varphi_X(0)=1,$

ii. $|\varphi_X(t)|\leq 1 \quad ,t\in\mathbb{R},$

iii. $\varphi_X(-t)=\overline{\varphi_X(t)} \quad ,t\in\mathbb{R},$

iv. $\varphi_{aX+b}(t)=e^{itb}\varphi_X(at) \quad ; t,a,b\in\mathbb{R}\ a,b$sabit

dir.

İspat : i. $\varphi_X(0)=E(1)=1$ dir.

ii. $|\varphi_X(t)|=\left|E\left(e^{itX}\right)\right|\leq E\left(\left|e^{itX}\right|\right)=E(1)=1$ dir.

iii.
$$\begin{aligned}\varphi_X(-t)&=E\left(e^{-itX}\right)=E\left(\cos(tX)-i\sin(tX)\right)\\&=E\left(\cos(tX)\right)-iE\left(\sin(tX)\right)\\&=\overline{\varphi_X(t)}.\end{aligned}$$

iv.
$$\begin{aligned}\varphi_{aX+b}(t)&=E\left(e^{it(aX+b)}\right)=E\left(e^{itb}e^{itaX}\right)\\&=e^{itb}E\left(e^{itaX}\right)=e^{itb}\varphi(at)\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Bir rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu ile dağılım fonksiyonu arasında önemli bir bağıntı söz konusudur. Karakteristik fonksiyonlar dağılım fonksiyonlarını tek olarak belirleyebilmektedir. Dolayısıyla bunlardan birisi bilindiğinde diğeri bulunabilmektedir.

Teorem 2.1.5 : Bir X rasgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f_X(x)$, dağılım fonksiyonu $F_X(x)$ ve karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(t)$ olmak üzere

i. $F_X(x)$ fonksiyonu $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (x_1 < x_2)$ noktalarında sürekli ise

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi_X(t)\, dt \qquad (2.1.16)$$

dir.

ii. Eğer X sürekli rasgele değişken ise

$$f_X(x) = \lim_{h\to 0} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt \qquad (2.1.17)$$

ve $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|\, dt < \infty$ ise

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt \qquad (2.1.18)$$

dir.

iii. Eğer X kesikli rasgele değişken ise

$$f_X(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt \qquad (2.1.19)$$

dir.

İspat : Teoremin ispatı için [13] nolu kaynağa bakılabilir.

Not : X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu varsa

$$M_X(it) = \varphi_X(t) \qquad (2.1.20)$$

dır. Dolayısıyla, mevcut olması halinde, moment çıkaran fonksiyonlar da olasılık dağılımlarını tek biçimde belirleyebilmektedir.

Teorem 2.1.6 : $X_1, X_2, \ldots, X_n$ karakteristik fonksiyonları sırasıyla $\varphi_{X_1}(t), \varphi_{X_2}(t), \ldots, \varphi_{X_n}(t)$ olan birbirinden bağımsız n tane rasgele değişken olmak üzere $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu

$$\varphi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t) \tag{2.1.21}$$

dir.

İspat : (2.1.13) dan hareketle

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= E\left(e^{itZ}\right) = E\left(e^{it(X+Y)}\right) \\
&= E\left(e^{itX_1} e^{itX_2} \ldots e^{itX_n}\right) \\
&\left[X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ birbirinden bağımsız olduğu için}\right] \\
&= \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\ldots\varphi_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.7 : X rasgele değişkeninin *k*. momenti m_k olmak üzere;

$$i^k m_k = i^k E\left(X^k\right) = \left.\frac{d^k\left(\varphi_X(t)\right)}{dt^k}\right|_{t=0} \tag{2.1.22}$$

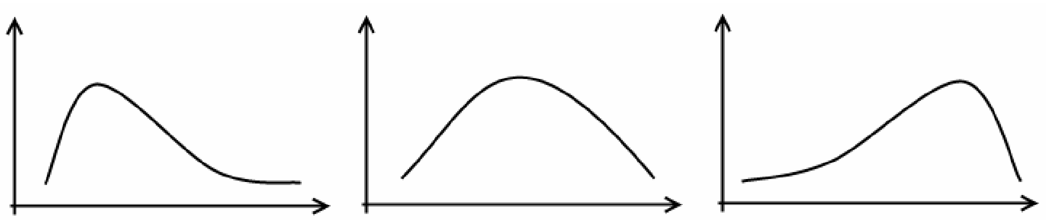
bağıntısı geçerlidir.

İspat : Beklenen değer ve moment kavramlarının tanımlarından kolayca teoremin doğruluğu görülebilir.

Rasgele değişkenlerin olasılık (yoğunluk) fonksiyonlarının grafiksel biçimleri, modellemede kullanıldıkları olgular hakkında fikirler verebilmektedir. Basıklık ve çarpıklık katsayıları rasgele değişkenlerin momentleri cinsinden ifade edilebilen ve dağılımın biçimi hakkında bilgiler veren ölçülerdir. Bir X rasgele değişkenin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f_X(x)$ olsun. $\mu_k = E\left(X^k\right)$,k=1,2,.. olmak üzere

$$\gamma = \frac{E\left[\left(X-\mu_1\right)^3\right]}{\left[\mu_2-\mu_1^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{2.1.23}$$

ifadesine $f_X(x)$ in *Fisher çarpıklık katsayısı* denir. Çarpıklık katsayısı dağılımın simetriden ayrılışının bir ölçüsüdür. Simetrik dağılımlar için $\gamma = 0$, sağa (pozitif) çarpık dağılımlar için $\gamma > 0$, sola (negatif) çarpık dağılımlar için $\gamma < 0$ elde edilmektedir.



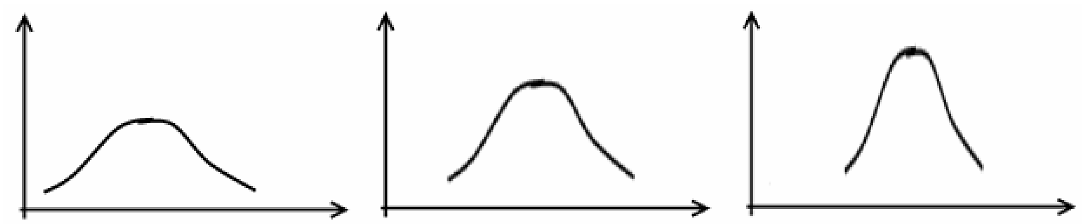
Sağa(+) Çarpık $\gamma > 0$ Simetrik $\gamma = 0$ Sola(-) Çarpık $\gamma < 0$

Şekil 2.1.1 Çarpıklık katsayısı

Momentlere dayalı olasılık (yoğunluk) fonksiyonlarının grafiksel biçimleri hakkında bilgi veren bir diğer ölçüt ise basıklık katsayısıdır. Bir X rasgele değişkenin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f_X(x)$ olsun. $\mu_k = E\left(X^k\right)$,k=1,2,.. olmak üzere

$$\alpha = \frac{E\left[\left(X-\mu_1\right)^4\right]}{\left[\mu_2-\mu_1^2\right]^{2}} - 3 \tag{2.1.24}$$

ifadesine $f_X(x)$' in *basıklık katsayısı* denir. $\alpha < 0$ için merkeze yakın yerlerde $f_X(x)$ standart normal dağılımından daha basık, $\alpha > 0$ için ise daha sivri olmaktadır. $\alpha = 0$ olması durumunda $f_X(x)$ standart normal dağılımla aynı basıklığa sahiptir. Buradan anlaşılabileceği üzere standart normal dağılım için basıklık katsayısı 3 tür.



$\alpha < 0$ $\quad\quad$ $\alpha = 0$ $\quad\quad$ $\alpha > 0$

Şekil 2.1.2 Basıklık katsayısı

Aşağıdaki tabloda, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı olasılık yoğunluk fonksiyonları ve bunlara ilişkin dağılım, moment çıkaran ve karakteristik fonksiyonları verilmiştir.

Dağılımın Adı	Olasılık (Yoğunluk) Fonksiyonu	Dağılım Fonksiyonu	Moment Çıkaran Fonksiyonu	Karakteristik Fonksiyonu
Normal Dağılım $X \sim N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$	$e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$	$e^{\left(\mu i t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$
Std.Normal Dağılım $X \sim N(0,1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$	$e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$	$e^{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$
Üstel Dağılım $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$	$\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ $x \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}$	$1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$	$(1-\theta t)^{-1}$	$(1-i\theta t)^{-1}$
Gamma Dağılımı $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$ $x \geq 0,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \int_{-\infty}^{x} u^{\alpha-1} e^{-\frac{u}{\beta}} du$	$(1-\beta t)^{-\alpha}$ $t < \frac{1}{\beta}$	$(1-i\beta t)^{-\alpha}$
Std.Cauchy Dağılımı	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$	-	$e^{-\lvert t \rvert}$
Düzgün Dağılım $X \sim \mathrm{U}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$	$\frac{x-a}{b-a}$ $a \leq x < b$	$\frac{e^{tb}+e^{ta}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{itb}+e^{ita}}{it(b-a)}$

Tablo 2.1.1 Bazı olasılık yoğunluk fonksiyonları

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Laplace dönüşümü belirli tipten genelleştirilmiş integrallerin hesabında, konvolusyon tipi integral denklemlerinin çözümünde, çeşitli başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde sıkça kullanılan dönüşümlerden birisidir.

3.1.1. Laplace Dönüşümü ve Bazı Özellikleri

Bir $f(x)$ fonksiyonu için (1.1.1) ile verilen eşitlikte integral dönüşümünün çekirdeği $K(s,x) = e^{-sx}$ olarak alındığında ortaya çıkan

$$\mathfrak{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = F(s) \tag{3.1.1}$$

ifadesine $f(x)$ in *Laplace Dönüşümü* denildiğini daha önce belirtmiştik.

Açıkça görüldüğü gibi (3.1.1) de verilen integral bir genelleştirilmiş integraldir ve

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-sx} f(x)dx \tag{3.1.2}$$

şeklinde hesaplanır. Eğer eşitliğin sağ tarafındaki limit mevcut ise integral yakınsaktır. Bu durumda (3.1.2) de sol tarafta verilen integralin belirli bir değeri vardır. Aksi takdirde $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcut değildir.

Örnek 3.1.1 : $f(x) = e^{-nx}$ $,n > 0$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

(3.1.1) den

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = F(s) = \mathscr{L}\{e^{-nx}\}$$
$$= \int_0^\infty e^{-sx} e^{-nx} dx = \int_0^\infty e^{-x(s+n)} dx$$
$$= -\frac{1}{s+n} \lim_{b\to\infty} e^{-x(s+n)} \Big|_{x=0}^{b} = -\frac{1}{s+n}(0-1)$$
$$= \frac{1}{s+n}$$

elde edilir.

3.1.2. Laplace Dönüşümünün Varlığı

Hangi koşullar altında (3.1.2) eşitliğindeki limitin var olduğunu, yani $f(x)$ fonksiyonunun hangi şartlarda Laplace dönüşümünün bulunabileceğini gösteren teoremi vermeden önce "α -üstel basamaktan fonksiyon" tanımını verelim:

Tanım 3.1.1 : Her $x > x_0$ için $e^{-\alpha x} |f(x)| \le M$ olacak şekilde α, M ve x_0 sabitleri varsa, $f(x)$ fonksiyonuna α *-üstel basamaktan fonksiyon* denir ve $f \in E_\alpha$ ile gösterilir.

Örneğin ; $f(x) = e^{4x}$ olsun. Buna göre

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} \left|e^{4x}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x}}{e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-4)x}} = 0 \qquad ,\alpha > 4$$

dir. Görüldüğü gibi $\alpha > 4$ için limit belirli bir değere sahip olduğundan $f(x) = e^{4x}$ fonksiyonu $\alpha > 4$ için α -üstel basamaktandır.

Örneğin ; $f(x) = e^{x^3}$ olsun. Buna göre

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} \left|e^{x^3}\right| = \lim_{x\to\infty} e^{\left(x^3-\alpha x\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)} = \infty$$

olup limit mevcut olmadığından $f(x)=e^{x^3}$ α -üstel basamaktan değildir.

Teorem 3.1.1 : $f(x)$ fonksiyonu her kapalı ve sonlu $a \le x \le b \ \ , b>0$ aralığı üzerinde parçalı sürekli ve α -üstel basamaktan bir fonksiyon ise, $s>\alpha$ için $f(x)$ 'in Laplace dönüşümü vardır.

İspat : Herhangi bir pozitif n sayısı için

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dt = \int_0^n e^{-sx} f(x)dt + \int_n^\infty e^{-sx} f(x)dt$$

yazılabilir. Her sonlu $0 \le x \le n$ aralığında $f(x)$ parçalı sürekli olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral mevcuttur. $x>n$ için, $f(x)$ α -üstel basamaktan olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \left| \int_N^\infty e^{-sx} f(x)dx \right| \le \int_0^n \left| e^{-sx} f(x)dt \right| &\le \int_n^\infty e^{-sx} \left| f(x) \right| dx \\ &\le \int_0^\infty e^{-sx} M\alpha^{\alpha x} dx \\ &= \frac{M}{s-\alpha} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $s>\alpha$ için ikinci integral de mevcuttur. Sonuç olarak $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dt$ integralinin var olması için yeter şart $f(x)$ parçalı sürekli fonksiyonunun α -üstel basamaktan olmasıdır.

Not : Teorem 3.1.1 de verilen koşul $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün var olması için yeterli koşuldur fakat gerekli koşul değildir.

Not : $\mathscr{L}\{f(x)\}$ Laplace dönüşümü, $x \to 0$ için $f(x)$ 'in sınırlı olmadığı durumlarda aşağıdaki koşulların sağlanması halinde de vardır:

i. $N_1 > 0$ olmak üzere herhangi bir $N_1 \leq x \leq N$ aralığında $f(x)$ parçalı sürekli ise,

ii. $0 < n < 1$ aralığındaki herhangi bir n değeri için $\lim\limits_{x\to\infty} x^n f(x) = 0$ ise,

iii. $t > N$ için $f(x)$ α -üstel basamaktan ise. (bkz. [4])

3.1.3. Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.1.2 : $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i. (Lineerlik Özelliği) α_1 ve α_2 iki sabit, $F_1(s)$ ve $F_2(s)$ sırasıyla $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri olmak üzere

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\} = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s) \tag{3.1.3}$$

dır.

ii. (Birinci Öteleme Özelliği) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olmak üzere;

$$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha x} f(x)\right\} = F(s-\alpha) \tag{3.1.4}$$

dır.

iii. (İkinci Öteleme Özelliği) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ve $g(x)$ fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} f(x-\alpha) & ,t \geq \alpha \\ 0 & ,t < \alpha \end{cases}$$

şekinde tanımlanmak üzere

$$\mathcal{L}\{g(x)\} = e^{-\alpha s} F(s) \tag{3.1.5}$$

dır.

iv. (Skala Değiştirme Özelliği) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olmak üzere;

$$\mathcal{L}\{f(\alpha x)\} = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \tag{3.1.6}$$

dır.

İspat : Tanımdan hareket edilerek bu özellikler kolayca ispatlanabilir.

Teorem 3.1.3 : (Türevin Laplace Dönüşümü) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olmak üzere, $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ fonksiyonları $0 \le x \le N$ aralığında sürekli ve $x > N$ için α -üstel basamaktan, $f^{(n)}(x)$ $0 \le x \le N$ aralığında parçalı sürekli ise

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots \\ - s\, f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

dir. Özel olarak $n = 1$ ve $n = 2$ ise sırasıyla

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = sF(s) - f(0) \tag{3.1.8}$$

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s^2 F(s) - s\, f(0) - f'(0) \tag{3.1.9}$$

olur.

İspat : Teoremin hipotezleri altında kısmi integrasyon ve tümevarım metodları kullanılarak ispat kolayca yapılabilir.

Teorem 3.1.4 : (İntegralin Laplace Dönüşümü) $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olmak üzere;

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{3.1.10}$$

dir.

İspat : $g(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)dt$ olsun. Bu durumda

$$g'(x) = f(x)$$

olacağı açıktır. Bu eşitliğin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathfrak{L}\{g'(x)\} = \mathfrak{L}\{f(x)\}$$

olur. (3.1.8) den

$$s\mathfrak{L}\{g(x)\} - g(0) = F(s) \qquad ,[\, g(0) = 0 \text{ olduğundan}]$$

$$\Rightarrow s\mathfrak{L}\{g(x)\} = F(s)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{L}\{g(x)\} = \frac{1}{s}F(s)$$

dolayısıyla

$$\mathfrak{L}\left\{\int_{t=0}^{x} f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5 : $\mathfrak{L}\{f(x)\} = F(s)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

i. $\mathfrak{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$

ii. $f(x) \in E_\alpha$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ limiti mevcut ise $\mathfrak{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int\limits_{x=s}^{\infty} F(s)ds$

iii. $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$

İspat : İspat için [8] nolu kaynağa bakılabilir.

3.1.4. Laplace Dönüşümü İçin Konvolusyon Teoremleri

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[0,\infty]$ aralığında tanımlı integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere Laplace dönüşümü için konvolusyon integrali

$$f(x) * g(x) = \int_{\tau=0}^{t} f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau \qquad (3.1.11)$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.1.6 : $\mathcal{L}\{f(x)\}=F(s)$ ve $\mathcal{L}\{g(x)\}=G(s)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\{f(x)*g(x)\}=\mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{g(x)\}=F(s)G(s) \tag{3.1.12}$$

dir.

İspat : (3.1.1) ve (3.1.11)'den

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(x)*g(x)\}&=\int_{t=0}^{\infty}e^{-st}\left\{\int_{\tau=0}^{t}f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}dt\\&=\int_{t=0}^{\infty}e^{-st}dt\int_{\tau=0}^{t}f(t-\tau)g(\tau)d\tau\\&=\int_{0}^{\infty}g(\tau)d\tau\int_{t=\tau}^{\infty}f(t-\tau)e^{-st}dt\end{aligned}$$

yazılabilir. $t-\tau=x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(x)*g(x)\}&=\int_{0}^{\infty}g(\tau)d\tau\int_{x=0}^{\infty}f(x)e^{-s(x+\tau)}dx\\&=\int_{0}^{\infty}e^{-s\tau}g(\tau)d\tau\int_{0}^{\infty}e^{-sx}f(x)dx\\&=G(s)F(s)\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.1.7 : (3.1.11) de verilen konvolusyon işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. (Birleşme) $f(x)*[g(x)*h(x)]=[f(x)*g(x)]*h(x)$

ii. (Yer Değiştirme) $f(x)*g(x)=g(x)*f(x)$

iii. (Dağılma) $f(x)*[g(x)+h(x)]=f(x)*g(x)+f(x)*h(x)$

iv. $f(x)*[a\,g(x)]=[a\,f(x)]*g(x)=a[f(x)*g(x)]$,[a sabit]

v. (n.konvolusyon) $\mathcal{L}\{f_1(x)*f_2(x)*\ldots f_n(x)\}=F_1(s)F_2(s)\ldots F_n(s)$

Burada $\mathcal{L}\{f_i(x)\}=F_i(s)$,$i=1,2,\ldots,n$ dir.

İspat : Tanımdan hareketle ve integral özelliklerinin de kullanılmasıyla ispat kolayca yapılabilir.

3.1.5. Ters Laplace Dönüşümü

Tanım 3.1.2 : Bir f fonksiyonunun Laplace dönüşümü (3.1.1)'de

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = F(s)$$

şeklinde verilmişti. Diğer taraftan

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s=c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx} F(s)ds \qquad ,c > 0 \qquad (3.1.13)$$

ifadesine $F(s)$ nin *Ters Laplace Dönüşümü* denir.

Sıfır fonksiyonlarının söz konusu olmadığı durumlarda Ters Laplace dönüşümünün var olduğunu aşağıdaki teorem yardımıyla görülebilir.

Teorem 3.1.8 : (Learch Teoremi)

Her sonlu $0 \le x \le N$ aralığında parçalı sürekli ve $t > N$ için α-üstel basamaktan olan $f(x)$ fonksiyonları için $F(s)$ tek türlü olarak belirlenebilir. Yani $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ tekdir.

İspat : İspat için [8] nolu kaynağa bakılabilir.

Ters Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri

$\mathcal{L}\{.\}$ ve $\mathcal{L}^{-1}\{.\}$ operatörleri sırasıyla (3.1.1) ve (3.1.13) deki gibi tanımlanmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

i. $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha_1F_1(s)+\alpha_2F_2(s)\}=\alpha_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+\alpha_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$, ($\alpha_1,\alpha_2$ sabit)

ii. $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{-ax}f(x)$,

iii. $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=\begin{cases} f(x-a) & ,t>a \\ 0 & ,t\le a \end{cases}$,

iv. $\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\}=\dfrac{1}{k}f\left(\dfrac{x}{k}\right)$,

v. $\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{d^n}{ds}F(s)\right\}=(-1)^n x^n f(x)$,

vi. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\}=\dfrac{f(x)}{x}$,

vii. $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\}=f'(x)$,

viii. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^x f(u)du$.

3.1.6. Laplace Dönüşümünün İstatistikte Uygulamaları

Pozitif tanımlı bir X rasgele değişkeninin (2.1.9) ile verilen moment çıkaran fonksiyonu varsa, $f_X(x)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun Laplace dönüşümüyle elde edilir. Buna göre

$$M_X(-t)=\mathcal{L}\{f(x)\}=\int_0^\infty e^{-tx}f_X(x)dx \qquad (3.1.14)$$

dir.

Örnek 3.1.2 : X rasgele değişkeni α ve β parametreli Gamma dağılımına sahip olsun. X in beklenen değer ve varyansını, moment çıkaran fonksiyon yardımıyla bulalım.

$X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ olmak üzere X in olasılık yoğunluk fonksiyonu Tablo 2.1.1'den

$$f_X(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & ,x\geq 0\\ 0 & ,d.y.\end{cases}$$

dır. X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu, (3.1.14) den

$$M_X(-t)=\mathfrak{L}\{f(x)\}=\int_0^{\infty}e^{-tx}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-tx}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{\frac{-x(\beta t+1)}{\beta}}dx$$

dır. Burada $x(1+\beta t)=y$ değişken değiştirmesi yapılırsa, $x=\dfrac{y}{1+\beta t}$, $dx=\dfrac{dy}{(1+\beta t)}$

ve $y\in[0,\infty)$ olacağından, $y<\beta^{-1}$ olmak üzere

$$M_X(-t)=\frac{1}{(1+\beta t)^{\alpha}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\infty}y^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\beta}y}dy=(1+\beta t)^{-\alpha}$$

elde edilir. Buradan

$$M_X(t)=(1-\beta t)^{-\alpha}$$

olur.

X rasgele değişkeninin beklenen değeri birinci momenti olduğundan (2.1.11) gereğince

$$\mu_1=E(X)=M_X(0)=\frac{d}{dt}M_X(t)\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}(1-\beta t)^{-\alpha}\bigg|_{t=0}=\alpha\beta(1-\beta t)^{-\alpha-1}\bigg|_{t=0}=\alpha\beta$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde ikinci moment

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\Big|_{t=0}$$

$$= \alpha\beta \frac{d}{dt}(1-\beta t)^{-\alpha-1}\Big|_{t=0} = \alpha(\alpha+1)\beta^2(1-\beta t)^{-\alpha-2}\Big|_{t=0}$$

$$= \alpha(\alpha+1)\beta^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2$$

bulunur. Burada (2.1.7) den faydalanarak

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \mu_2 - (\mu_2)^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \beta^2$$

elde edilir.

X rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$ var olmak üzere, X in olasılık (yoğunluk) fonksiyonu, (3.1.13)'den ve Teorem 3.1.8'den hareketle

$$f_X(x) = \mathfrak{L}^{-1}\{M_X(-t)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tx} M_X(-t)\,dt \qquad ,c>0 \qquad (3.1.15)$$

ile tek biçimde belirlenir.

Örnek 3.1.3 : $M_X(t) = (1-t)^{-2}$ moment çıkaran fonksiyonu ile belirlenen olasılık yoğunluk fonksiyonunu ters Laplace dönüşümü ile bulalım. (3.1.15) gereğince

$$f_X(x) = \mathfrak{L}^{-1}\{M_X(-t)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tx} M_X(-t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{tx}(1+t)^{-2}\,dt$$

$$= x\,e^{-x}$$

dir.

Örnek 3.1.4 : $M_X(t) = (1-\theta t)^{-1}$ moment çıkaran fonksiyonuna karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonunu ters Laplace dönüşümü ile bulalım.

$$M_X(-t) = (1+\theta t)^{-1}$$

dir. (3.1.15) gereğince

$$f_X(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{M_X(-t)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{t=c-i\infty}^{t+i\infty} \frac{e^{tx}}{(1+\theta t)}dt$$

$$= \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$$

elde edilir.Tablo 2.1.1'den X'in θ parametreli üstel dağılıma sahip olduğu söylenir.

3.2. FOURİER İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

Fourier integral dönüşümleri matematiğin ve fiziğin klasik denklemleri için verilen başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde ve istatistikte dağılım fonksiyonlarının karakterizasyonunda sıklıkla kullanılmaktadır.

3.2.1. Fourier Dönüşümü ve Bazı Özellikleri

Bir $f(x)$ fonksiyonu için (1.1.1) denkleminde integral dönüşümünün çekirdeği $K(\alpha, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}}e^{-i\alpha x}$ ve sınırlar $a = -\infty, b = \infty$ olarak alınırsa Fourier integral dönüşümü aşağıdaki tanımla verilir:

Tanım 3.2.1 : f **,** $\mathbb{R}$ de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathfrak{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x)dx \tag{3.2.1}$$

ifadesine $f(x)$ 'in *Fourier Dönüşüm* denir ve $\mathfrak{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ ile gösterilir.

3.2.2. Fourier Dönüşümünün Varlığı

Laplace ve diğer integral dönüşümlerinde olduğu gibi her fonksiyonun Fourier dönüşümü bulunamayabilir. Şimdi (3.2.1) ifadesindeki integralin yakınsak olması için yeterli koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonunun özelliklerini inceleyelim:

Tanım 3.2.2 : (*Fourier İntegral Gösterimi İçin Dirichlet Koşulları*) $f(x)$ fonksiyonu $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $f(x)$ fonksiyonu için Dirichlet koşulları sağlanır denir:

i. $f(x)$'in $-\infty < x < \infty$ aralığında sonlu sayıda süreksizlik noktaları bulunabilir.

ii. $f(x)$'in herhangi bir x_0 süreksizlik noktasındaki değeri

$f(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+0) + f(x_0-0)\right]$ dır.

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < M$ olacak şekilde bir *M* sayısı vardır.

Tanım 3.2.3 : (*Fourier İntegral Gösterimi*) $f(x)$ Dirichlet koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi\right]e^{i\alpha x}d\alpha \tag{3.2.2}$$

ifadesine $f(x)$ *in Fourier İntegral Gösterimi* denir.

3.2.3. Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.2.1 : $\mathfrak{F}\{f(x)\} = F(\alpha)$ olmak üzere aşağıda verilen özellikler geçerlidir:

i. (Lineerlik Özelliği) k_1 ve k_2 iki sabit olmak üzere;

$\mathfrak{F}\{k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\} = k_1 \mathfrak{F}\{f_1(x)\} + k_2 \mathfrak{F}\{f_2(x)\}$ dir.

ii. (Öteleme Özelliği) k bir sabit olmak üzere;

$\mathfrak{F}\{f(x-k)\} = e^{-ik\alpha}\mathfrak{F}\{f(x)\}$ dir.

iii. (Skala Değiştirme Özelliği) k bir sabit olmak üzere;

$\mathfrak{F}\{f(kx)\} = \dfrac{1}{|k|}\mathfrak{F}\{f(x)\}$ dir.

iv. (Eşlenik Alma) $\mathfrak{F}\left\{\overline{f(x)}\right\} = \overline{\mathfrak{F}\{f(x)\}}$ dir.

v. (Öteleme Özelliği) k bir sabit olmak üzere;

$\mathfrak{F}\left\{e^{ikx} f(x)\right\} = F\left(k-\alpha\right)$ dır.

vi. (Dualite) $\mathfrak{F}\left\{F\left(x\right)\right\} = -f(\alpha)$ dır.

Teorem 3.2.3 : $f(x)$ n.dereceden türeve sahip bir fonksiyon ve $|x| \to \infty$ için $f(x) \to 0$ oluyorsa bu takdirde

$$\mathfrak{F}\left\{f^{(n)}(x)\right\} = (i\alpha)^n F\left(\alpha\right) \tag{3.2.3}$$

dir. Özel olarak n=1 alınırsa

$$\mathfrak{F}\{f'(x)\} = i\alpha F\left(\alpha\right) \tag{3.2.4}$$

yazılabilir.

İspat: n=1 için Fourier dönüşümü tanımından

$$\mathfrak{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f'(x)dx \qquad \text{(kısmi integrasyon uygulanarak)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to\infty}\left[f(x)e^{-i\alpha x}\right]_{x=-b}^{b} + \frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x)dx$$

$$= \left(i\alpha\right)F\left(\alpha\right)$$

elde edilir. $n \geq 2$ için ispat tümevarım metodu ile yapılabilir.

3.2.4. Fourier Dönüşümü İçin Konvolusyon Çarpım

Tanım 3.2.5 : (Konvolusyon) $f(x)$ ve $g(x)$ integrallenebilen iki fonksiyon olmak üzere

$$f(x)*g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi \tag{3.2.5}$$

ifadesine f ile g'nin (Fourier dönüşümü için) konvolusyon çarpımı denir ve $h(x)=f(x)*g(x)$ biçiminde gösterilir.

Teorem 3.2.4 : (Konvolusyon Teoremi)

$f(x)$ ve $g(x)$, Fourier dönüşümleri sırasıyla $F(\alpha)$ ve $G(\alpha)$ olan iki fonksiyon olmak üzere

$$\mathfrak{F}\{f(x)*g(x)\}=F(\alpha)G(\alpha) \tag{3.2.6}$$

dır.

İspat : Tanım 3.2.1'den

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}\{f(x)*g(x)\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\{f(x)*g(x)\}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi\right\}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\xi}g(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-\xi)}f(x-\xi)dx \\
&= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\xi}g(\xi)d\xi\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\eta}f(\eta)d\eta\right\} \\
&= G(\alpha)F(\alpha)
\end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5 : Fourier Dönüşümü için $f * g$ konvolusyon çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır:

i. $f * g = g * f$,

ii. $f * (g * h) = (f * g) * h$,

iii. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

İspat : İspat için [1] nolu kaynağa bakılabilir.

3.2.5. Ters Fourier Dönüşümü

Tanım 3.2.6 : Bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\mathfrak{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x) dx$$

olmak üzere

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha) d\alpha \qquad (3.2.7)$$

ifadesine $F(\alpha)$ nın *Ters Fourier Dönüşümü* denir ve $\mathfrak{F}^{-1}\{F(\alpha)\}$ ile gösterilir.

3.2.6. Fourier Dönüşümünün İstatistikte Uygulamaları

Bir X rasgele değişkeninin (2.1.13) ile verilen karakteristik fonksiyonu, $f_X(x)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun Fourier dönüşümüyle elde edilebilir. Buna göre X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$ olmak üzere, X'in karakteristik fonksiyonu, $f_X(x)$'in Fourier dönüşümünün kompleks eşleniğine eşittir. Yani

$$\varphi_X(t) = \overline{\mathfrak{F}\{f_X(x)\}} = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx$$

ya da

$$\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \mathfrak{F}\{f_X(x)\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_X(x)dx \qquad (3.2.8)$$

dir.

Örnek 3.2.1 : X rasgele değişkeni standart Cauchy dağılımına sahip olsun. X'in karakteristik fonksiyonunu bulalım. Tablo 2.1.1'den

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad , x \in \mathbb{R}$$

olur. (3.2.8)'den hareketle

$$\begin{aligned}\varphi_X(-t) &= \mathfrak{F}\{f_X(x)\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(tx) - i\sin(tx)}{(1+x^2)}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(tx)}{(1+x^2)}dx - \frac{i}{\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(tx)}{(1+x^2)}dx\end{aligned}$$

dir. $\dfrac{\sin(tx)}{(1+x^2)}$ tek fonksiyon olduğundan $\displaystyle\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(tx)}{(1+x^2)}dx = 0$ dır. $\dfrac{\cos(tx)}{(1+x^2)}$ ise çift fonksiyon olduğundan

$$\varphi_X(-t) = \frac{1}{\pi}\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(tx)}{(1+x^2)}dx = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\infty}\frac{\cos(tx)}{(1+x^2)}dx = e^{-|t|} = \varphi_X(t)$$

olarak bulunur (bkz [14]).

Örnek 3.2.2 : X rasgele değişkeni $\left[-1,1\right]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olsun. X'in karakteristik fonksiyonunu bulalım.

$X \sim U\left(-1,1\right)$ olduğundan Tablo 2.1.1'den

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,x \in \left[-1,1\right] \\ 0 & ,d.y. \end{cases}$$

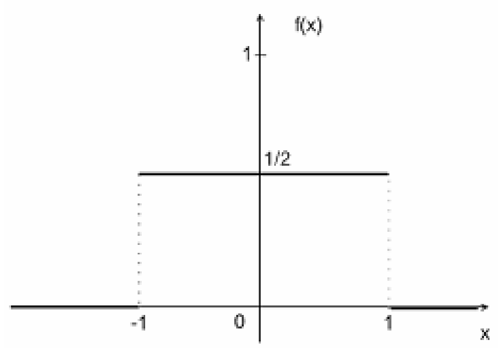
dır. Buradan

$$\begin{aligned} \varphi_X(-t) = \mathfrak{F}\{f_X(x)\} &= \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{1} e^{-itx}dx \\ &= \frac{i}{2t}e^{-itx}\Big|_{x=-1}^{1} = \frac{i}{2t}\left(e^{-it} - e^{it}\right) \\ &= \frac{i}{2t}\left(\cos(-t) + i\sin(-t) - \cos t - i\sin t\right) \\ &= \frac{i}{2t}(\cos t - i\sin t - \cos t - i\sin t) \\ &= \frac{i}{2t}(-2i\sin t) = \frac{\sin t}{t} \qquad ,\varphi_X(0) = 1 \end{aligned}$$

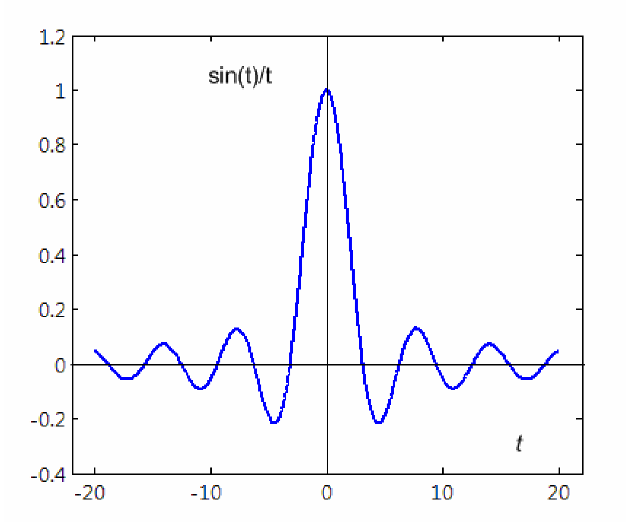
elde edilir. Buradan

$$\varphi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$$

olarak bulunur. Aşağıda $f_X(x)$ ve $\varphi_X(t) = \frac{\sin t}{t}$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Şekil 3.2.1 : $f_X(x) = \frac{1}{2}$'nin grafiği $x \in \left[-1,1\right]$



Şekil 3.2.2 : $\varphi_X(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ grafiği

Örnek 3.2.3 : X rasgele değişkeni $\dfrac{1}{\lambda}$ parametreli üstel dağılıma sahip olsun. Tablo 2.1.1'den

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ,x > 0 \\ 0 & ,\text{d.y.} \end{cases}$$

dir. X'in karakteristik fonksiyonu (3.2.8) kullanılarak

$$\varphi_X(-t) = \mathfrak{F}\{f_X(x)\} = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_X(x)dx = \lambda \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x(it+\lambda)} dx = -\frac{\lambda}{it+\lambda}\left[e^{-x(it+\lambda)}\right]_{x=0}^{\infty}$$

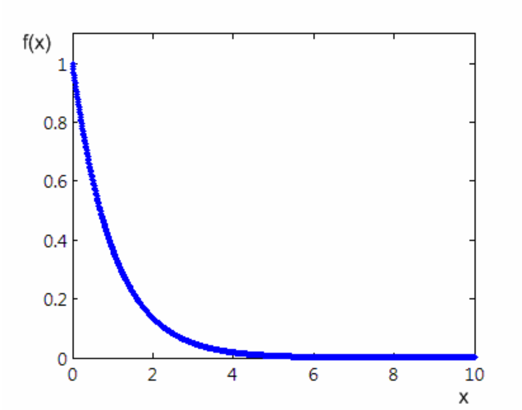
$$= -\frac{\lambda}{it+\lambda}\left[\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x(it+\lambda)}\right) - 1\right] = \frac{\lambda}{it+\lambda} = \frac{i\lambda}{-t+i\lambda}$$

elde edilir. Buradan

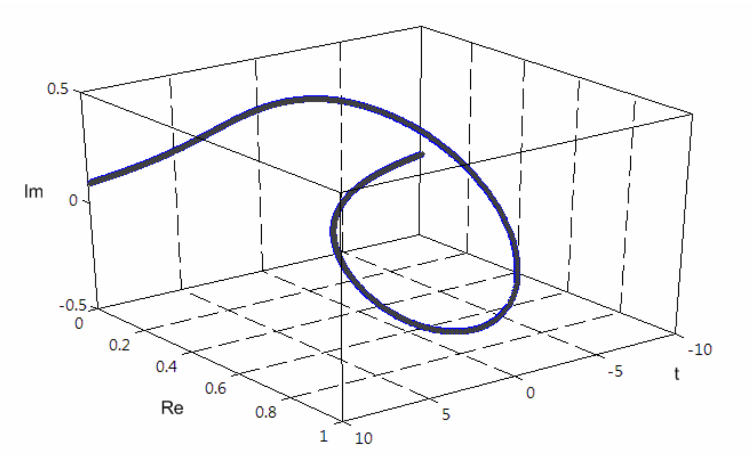
$$\varphi_X(t) = \frac{i\lambda}{t+i\lambda}$$

olarak bulunur.

$\lambda = 1$ durumu için $f_X(x)$ ve $\varphi_X(t) = \dfrac{i}{t+i}$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdadır:



Şekil 3.2.3 : $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$'ın grafiği.



Şekil 3.2.4 : $\varphi_X(t) = \dfrac{i}{t+i}$ grafiği.

(3.2.8)'de verilen $\varphi_X(-t) = \mathfrak{F}\{f_X(x)\}$ ifadesinde, eşitliğin her iki tarafının ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$f_X(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\varphi_X(-t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(-t)\,dt \qquad (3.2.9)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\overline{\{\varphi_X(t)\}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(t)\,dt}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$$

olup, elde edilen sonuç Teorem 2.1.5'te verilen (2.1.18) eşitliği ile uyuşmaktadır.

Örnek 3.2.4 : X rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$ olsun. X'in dağılımını belirleyelim.

$$f_X(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{\varphi_X(-t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi_X(-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2xit-t^2}{2}}dt$$

[integral içindeki üstel ifadenin payına x^2 eklenip çıkarılırsa]

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-2xit-t^2+x^2-x^2}{2}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(t^2+2xit-x^2)-x^2}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+xi)^2}{2}-\frac{x^2}{2}}dt = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+xi)^2}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

elde edilir. Tablo 2.1.1'den $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty < x < \infty)$ için $X \sim N(0,1)$ olur.

Örnek 3.2.5 : $X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ve $Y \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ olsun. Z=X+Y rasgele değişkeninin dağılımını karakteristik fonksiyon yardımıyla bulalım.

Tablo 2.1.1'den $\varphi_X(t) = \left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$ ve benzer şekilde $\varphi_Y(t) = \left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$ dır. Buradan (2.1.21) gereğince

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

$$= \left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1} = \left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-2} \quad ,\beta = \frac{1}{\lambda}$$

$$= (1-it\beta)^{-2}$$

olur. Böylece Tablo 2.1.1 kullanılarak $Z \sim \Gamma\left(\alpha = 2, \beta = \dfrac{1}{\lambda}\right)$ olduğu anlaşılır.

Örnek 3.2.6 : X rasgele değişkeni $\dfrac{1}{\lambda}$ parametreli üstel dağılıma sahip olsun. Tablo 2.1.1'den $\varphi_X(t) = (1 - it/\lambda)^{-1}$ dir. Buna göre X in birinci momentini

$$
\begin{aligned}
im_1 &= \left.\frac{d\left(\varphi_X(t)\right)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\left((1 - it/\lambda)^{-1}\right)}{dt}\right|_{t=0} \\
&= \left[\frac{i}{(1 - it/\lambda)^2 \lambda}\right]_{t=0} = \frac{i}{\lambda}
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla

$$m_1 = E(X) = \lambda^{-1}$$

dır. Benzer şekilde ikinci moment

$$
\begin{aligned}
i^2 m_2 &= \left.\frac{d^2\left(\varphi_X(t)\right)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^2\left((1 - it/\lambda)^{-1}\right)}{dt^2}\right|_{t=0} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{(1 - it/\lambda)^2 \lambda}\right)\right]_{t=0} = \left[\frac{i^2}{(1 - it/\lambda)^3 \lambda^2}\right]_{t=0} = \frac{i^2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Buradan

$$m_2 = E(X^2) = \lambda^{-2}$$

olduğu görülür.

3.3. MELLİN İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

İlk olarak Riemann tarafından 1876 yılında tanımlanan Mellin dönüşümü, Cahen tarafından 1894 yılında formülüze edilmiştir. Mellin ise 1896 yılında bu dönüşüm ve ters dönüşümü hakkındaki geniş içerikli çalışmalar yapmıştır.

Fourier ve Laplace dönüşümleri ile yakından ilişkili olan Mellin dönüşümü, bazı sınır değer problemlerinin çözümünde ve sonsuz serilerin yakınsadığı sayıların bulunmasında güçlü bir metottur. Dönüşümün istatistiksel uygulamalarına ilişkin bilgiler ise bölümün sonunda ele alınmıştır.

3.3.1. Mellin Dönüşümünün Tanımlanması ve Bazı Özellikleri

Mellin dönüşümünün tanımlanmasına *Fourier* dönüşümünü kullanarak başlayalım. Bir $g(\xi)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü (3.2.1) den

$$\mathcal{F}\{g(\xi)\} = G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\xi} g(\xi) d\xi$$

olarak verilmişti. Burada $e^{\xi} = x$ ve $i\alpha = c - p$ değişken değiştirmeleri yapılırsa (c sbt.)

$$G(ip - ic) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x^{p-c-1} g(\ln x)\, dx$$

elde edilir. $f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-c} g(\ln x)$ ve $F(p) \equiv G(ic - ip)$ alınırsa ;

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} x^{p-1} f(x) dx$$

yazılabilir.

Tanım 3.3.1 : (Mellin Dönüşümü) $(0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin.

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^\infty x^{p-1} f(x)dx \tag{3.3.1}$$

ifadesine $f(x)$ in *Mellin Dönüşümü* denir ve $\mathcal{M}\{f(x)\}$ ile gösterilir.

Bazı durumlarda $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü $F(p) = \mathcal{M}\{f(x), p\}$ şeklinde de gösterilebilmektedir.

Örnek 3.3.1 : $f(x) = e^{-nx}$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım ($n > 0$).

(3.3.1) den

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = \mathcal{M}\left\{e^{-nx}\right\} = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-nx} dx$$

yazılabilir. Buradan $nx = t$ alınırsa ($x = t/n$, $dx = dt/n$)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{e^{-nx}\right\} &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^{p-1} e^{-t} \frac{dt}{n} = \frac{1}{n^p} \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{\Gamma(p)}{n^p}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.3.2 : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım. Yine (3.3.1) den hareketle

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = \mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} = \int_0^\infty x^{p-1} \frac{1}{1+x} dx$$

$$\left[x = \frac{t}{1-t} \text{ alınırsa } \left\{dx = \frac{1}{(1-t)^2} dt\right\}\right]$$

$$= \int_{t=0}^{1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1} (1-t) \frac{dt}{(1-t)^2}$$

$$= \int_{0}^{1} t^{p-1} (1-t)^{(1-p)-1}\, dt$$

$$= B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

elde edilir.

3.3.2. Mellin Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.3.1 : $\mathcal{M}\{f(x)\} = F(p)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i. (Lineerlik Özelliği) k_1 ve k_2 iki sabit olmak üzere

$$\mathcal{M}\{k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\} = k_1 F_1(p) + k_2 F_2(p). \tag{3.3.2}$$

ii. k bir sabit olmak üzere

$$\mathcal{M}\{f(kx)\} = k^{-p} F(p). \tag{3.3.3}$$

iii. (Öteleme Özelliği) k bir sabit olmak üzere

$$\mathcal{M}\{x^k f(x)\} = F(p+k). \tag{3.3.4}$$

iv. k bir sabit olmak üzere

$$\mathcal{M}\{f(x^k)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \tag{3.3.5}$$

İspat : Tanım kullanılarak ispatlar kolayca yapılabilir.

Teorem 3.3.2 : (Türevin Mellin Dönüşümü) $\mathcal{M}\{f(x)\} = F(p)$ olmak üzere;

$$\mathcal{M}\{f^{(n)}(x)\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)} F(p-n) \tag{3.3.6}$$

dir. Özel olarak $n = 1$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f'(x)\} &= -(p-1)\mathcal{M}\{f(x), p-1\} \\ &= (1-p)F(p-1)\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

ve $n = 2$ için

$$\mathcal{M}\{f''(x)\} = (p-1)(p-2)F(p-2) \tag{3.3.8}$$

olur.

İspat : Tanım ve tümevarım metodu ile ispat kolayca yapılabilir.

Teorem 3.3.3 : (İntegralin Mellin Dönüşümü) $\mathcal{M}\{f(x)\} = F(p)$ olmak üzere

$$\mathcal{M}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = -\frac{1}{p}F(p+1) \tag{3.3.9}$$

dir.

İspat : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ fonksiyonunu ele alalım. $F'(x) = f(x)$ ve $F(0) = 0$ olduğu açıktır. (3.3.7) den hareketle

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f(x), p\} &= \mathcal{M}\{F'(x), p\} \\ &= (1-p)\mathcal{M}\{F(x), p-1\} \\ &= (1-p)\mathcal{M}\left\{\int_0^x f(t)\,dt, p-1\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada p yerine $p+1$ alınırsa

$$\mathcal{M}\{f(x), p+1\} = (-p)\mathcal{M}\left\{\int_0^x f(t)\,dt, p\right\}$$

olup buradan

$$-\frac{1}{p}F(p+1) = \mathcal{M}\left\{\int_0^x f(t)\,dt, p\right\}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.4 : $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Mellin dönüşümleri sırasıyla $F(p)$ ve $G(p)$ olmak üzere

$$\mathcal{M}\{f(x)g(x)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(p-s)ds \qquad (3.3.10)$$

dir.

İspat : (3.3.1) den hareketle

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{f(x)g(x)\} &= \int_0^\infty x^{p-1} f(x)g(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty x^{p-1}g(x)dx \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}F(s)ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)ds \int_0^\infty x^{p-s-1}g(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(p-s)ds\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 3.3.2 : (Mellin Dönüşümü İçin Parseval Özdeşliği) $\mathcal{M}\{f(x)\} = F(p)$ ve $\mathcal{M}\{g(x)\} = G(p)$ olmak üzere (3.3.10) eşitliğinde p=1 alınmasıyla elde edilen;

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(1-s)ds \qquad (3.3.11)$$

ifadesine, *Mellin Dönüşümü İçin Parseval Özdeşliği* denir.

3.3.3. Mellin Dönüşümü İçin Konvolusyon Teoremleri

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $(0,\infty)$ aralığında tanımlı, reel değerli iki fonksiyon ve $\mathcal{M}\{f(x)\} = F(p), \mathcal{M}\{g(x)\} = G(p)$ olmak üzere, Mellin dönüşümü için konvolusyon çarpımları

$$f(x)*g(x)=\int\limits_{t=0}^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}, \tag{3.3.12}$$

$$f(x)\circ g(x)=\int\limits_{t=0}^{\infty} f(xt)g(t)\,dt \tag{3.3.13}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.5 : $\mathcal{M}\{f(x)\}=F(p)$ ve $\mathcal{M}\{g(x)\}=G(p)$ olmak üzere

$$\mathcal{M}\{f(x)*g(x)\}=\mathcal{M}\left\{\int\limits_{t=0}^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\}=F(p)G(p) \tag{3.3.14}$$

$$\mathcal{M}\{f(x)\circ g(x)\}=\mathcal{M}\left\{\int\limits_{t=0}^{\infty} f(xt)g(t)\,dt\right\}=F(p)G(1-p) \tag{3.3.15}$$

dir.

İspat : Tanım 3.3.1'den hareketle

$$\mathcal{M}\{f(x)*g(x)\}=\mathcal{M}\left\{\int\limits_{0}^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\}$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty} x^{p-1}\left\{\int\limits_{0}^{\infty} f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\}dx=\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\frac{dt}{t}\int\limits_{0}^{\infty} x^{p-1}g\left(\frac{x}{t}\right)dx$$

$\left[\text{burada } \frac{x}{t}=\delta \text{ dersek } \left(t \text{ sabit tutularak, } dx=td\delta\right)\right]$

$$=\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\frac{dt}{t}\int\limits_{0}^{\infty}(\delta t)^{p-1}g(\delta)\,t\,d\delta$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty} t^{p-1}f(t)\,dt\int\limits_{0}^{\infty}\delta^{p-1}g(\delta)\,d\delta$$

$$=F(p)G(p)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\mathcal{M}\{f(x)\circ g(x)\}=\mathcal{M}\left\{\int\limits_{0}^{\infty} f(xt)g(t)\,dt\right\}$$

$$= \int_0^\infty x^{p-1} \left\{ \int_0^\infty f(xt) g(t)\, dt \right\} dx = \int_0^\infty x^{p-1} dx \int_0^\infty f(xt) g(t)\, dt$$

$$\left[\text{burada } xt = \delta \text{ dersek } \left(t \text{ sabit tutularak, } dx = \frac{d\delta}{t} \right) \right]$$

$$= \int_0^\infty g(t)\, dt \int_0^\infty \delta^{p-1} t^{1-p} f(\delta) \frac{d\delta}{t}$$

$$= \int_0^\infty t^{1-p-1} g(t)\, dt \int_0^\infty \delta^{p-1} f(\delta)\, d\delta$$

$$= G(1-p) F(p)$$

elde edilir.

3.3.4. Ters Mellin Dönüşümü

Ters Mellin dönüşümü, Mellin dönüşümünün tanımlanmasında olduğu gibi, Fourier dönüşümü yardımıyla verilir. Bir $g(\xi)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\mathfrak{F}\{g(\xi)\} = G(\alpha)$ olmak üzere, (3.2.7) den

$$\mathfrak{F}^{-1}\{G(\alpha)\} = g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\xi} G(\alpha)\, d\alpha$$

şeklinde yazılabilir. Burada $e^{\xi} = x$ ve $i\alpha = c - p$ değişken değiştirmeleri yapılırsa (c sbt.)

$$g(\ln x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{c-p} G(ip - ic)\, i dp$$

elde edilir. $f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-c} g(\ln x)$ ve $F(p) \equiv G(ip - ic)$ alınırsa

$$\sqrt{2\pi} f(x) x^{c} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} x^{c} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} F(p)\, dp$$

olup buradan

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}x^{-p}F(p)\,dp$$

bulunur.

Tanım 3.3.3 : (Ters Mellin Dönüşümü)

$(0,\infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü $\mathcal{M}\{f(x)\}=F(p)$ olmak üzere

$$\mathcal{M}^{-1}\{F(p)\}=f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}x^{-p}F(p)\,dp \tag{3.3.16}$$

ifadesine $F(p)$ nin *Ters Mellin Dönüşümü* denir. Burada $\mathcal{M}^{-1}\{.\}$ operatörü *Ters Mellin Dönüşüm Operatörü* ya da kısaca *Ters Mellin Dönüşümü* olarak adlandırılır.

3.3.5. Mellin Dönüşümünün İstatistiksel Uygulamaları

Pozitif tanımlı ve sürekli bir X rasgele değişkeninin, (2.1.5) ile verilen *k*.momenti, $f_X(x)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun Mellin dönüşümü yardımı ile elde edilebilmektedir. Buna göre pozitif tanımlı ve sürekli bir X rasgele değişkeni için

$$\mu_k=E(X^k)=\int_0^\infty x^k f_X(x)\,dx$$

şeklindedir. Mellin dönüşümü yardımıyla

$$\mu_k=\mathcal{M}\{f_X(x),k+1\} \tag{3.3.17}$$

ya da

$$\mu_{k-1}=\mathcal{M}\{f_X(x)\}$$

olur. Yani bir X rasgele değişkeninin $f_X(x)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun k bağımsız değişkenine göre Mellin dönüşümü $E\left(X^{k-1}\right)$'i vermektedir.

Örnek 3.3.2 : Bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi\left(1+x^2\right)} & ,0<x<1\\ 0 & ,d.y.\end{cases}$$

şeklinde olsun. X rasgele değişkeninin beklenen değeri yani birinci momenti

$$\begin{aligned}\mu=E(X)=\mathcal{M}\left\{f_X(x),k=2\right\}&=\int_0^\infty x^{k-1}f_X(x)\,dx\\ &=\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}\right]_{x=0}^{1}\\ &=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\ln(2)}{2}-\frac{\ln(1)}{2}\right]=\frac{2\ln(2)}{\pi}\simeq 0.4413\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde X'in ikinci momenti

$$\begin{aligned}\mu_2=E\left(X^2\right)=\mathcal{M}\left\{f_X(x),k=3\right\}&=\int_0^\infty x^{k-1}f_X(x)\,dx\\ &=\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\\ &=\frac{4}{\pi}\left[x-\arctan x\right]_{x=0}^{1}=\frac{4}{\pi}\left[1-\arctan 1-0+\arctan 0\right]\\ &=\frac{4}{\pi}\left[1-\frac{\pi}{4}\right]\simeq 0.2732\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan X'in varyansı

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2\\ &=\mu_2-\mu^2\simeq 0.2732-0.4413^2=0.0785\end{aligned}$$

dır.

Teorem 3.3.6 : X pozitif tanımlı ve sürekli bir rasgele değişken, $f_X(x)$ X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $Y = aX$ biçiminde tanımlanan Y rasgele değişkeninin k nıncı momenti

$$E\left(Y^k\right) = a^k \mathcal{M}\left\{f_X(x), k+1\right\}$$

dir.

İspat : Beklenen değer ve Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} E\left(Y^k\right) &= E\left[(aX)^k\right] = \int_0^\infty (ax)^k f_X(x)\,dx \\ &= a^k \int_0^\infty x^k f_X(x)\,dx = a^k \mathcal{M}\left\{f_X(x), k+1\right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.7 : Birbirinden bağımsız ve pozitif tanımlı $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla $f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), \ldots, f_{X_n}(x)$ olsun. $Y = X_1 X_2 \ldots X_n$ biçiminde tanımlanan Y rasgele değişkenin k nıncı momenti

$$E\left(Y^k\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}\left\{f_{X_i}(x), k+1\right\}$$

dir.

İspat : Y rasgele değişkenin k nıncı momenti

$$\begin{aligned} E\left(Y^k\right) &= E\left[\left(X_1 X_2 \ldots X_n\right)^k\right] \\ &= E\left[X_1^k X_2^k \ldots X_n^k\right] \end{aligned}$$

yazılabilir. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ birbirinden bağımsız olduğundan

$$E\left(Y^k\right) = E\left(X_1^k\right) E\left(X_2^k\right) \ldots E\left(X_n^k\right)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.17) den

$$E\left(Y^k\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}\left\{f_{X_i}(x), k+1\right\}$$

elde edilir.

Örnek 3.3.3 : X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x) & , x \in (0,\pi) \\ 0 & , d.y. \end{cases}$$

olsun. X'in çarpıklık katsayısını Mellin dönüşümü yardımıyla hesaplayalım.

(3.3.17)'den hareketle birinci moment

$$\mu_1 = \mathcal{M}\{f_X(x),2\} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin(x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[[-x\cos x]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(x)dx\right] = \frac{\pi}{2}$$

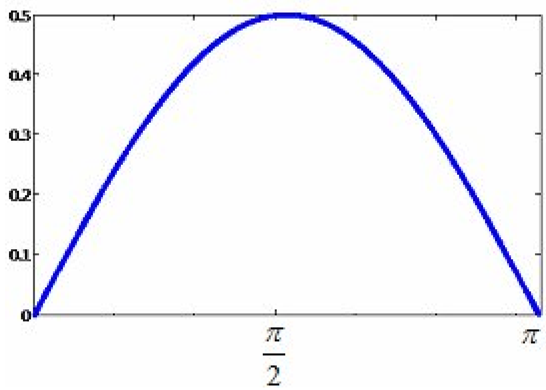
olarak hesaplanır.

$$E\left[(X-\mu_1)^3\right] = E\left[\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 \sin x dx = 0$$

bulunur. Dolayısıyla (2.1.23)'den çarpıklık katsayısı

$$\gamma = \frac{0}{\left[\mu_2 - \mu_1^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

olarak hesaplanır. Çarpıklık katsayısı sıfır olarak hesaplandığından $f_X(x)$ in dağılımının simetrik olduğu söylenebilir. Bu durum şekil 3.3.2 de görülebilir.



Şekil 3.3.1 : $f_X(x) = \frac{1}{2}\sin x \ x \in (0,\pi)$'in grafiği.

Örnek 3.3.4 : X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\left(1+x^2\right) & ,x\in(0,1)\\ 0 & ,d.y.\end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$\mu_1=\mathcal{M}\{f_X(x),2\}=\frac{3}{4}\int_0^1 x\left(1+x^2\right)dx=\frac{9}{16}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde

$$\mu_2=\mathcal{M}\{f_X(x),3\}=\frac{3}{4}\int_0^1 x^2\left(1+x^2\right)dx=\frac{2}{5}$$

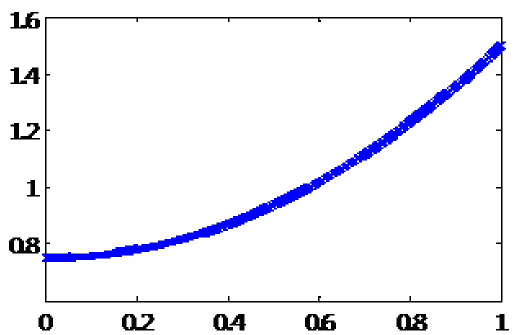
ve

$$E\left[\left(X-\mu_1\right)^3\right]=E\left[\left(X-\frac{9}{16}\right)^3\right]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{9}{16}\right)^3\left(1+x^2\right)dx=-\frac{67}{10240}$$

elde edilir. Buradan çarpıklık katsayısı

$$\gamma=\frac{-\dfrac{67}{10240}}{\left[\dfrac{2}{5}-\left(\dfrac{9}{16}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}<0$$

olarak bulunur. Böylece $f_X(x)$ in dağılımının sola çarpık olduğu söylenebilir. Bu durum şekli 3.3.3 de görülebilir.



Şekil 3.3.2 : $f_X(x)=\frac{3}{4}\left(1+x^2\right)$ $x\in(0,1)$'in grafiği.

Örnek 3.3.5 : Örnek 3.3.3'te verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu için

$$\mu_1 = \mathcal{M}\{f_X(x),2\} = \frac{\pi}{2} \simeq 1.5708$$

elde edilmişti. Benzer olarak

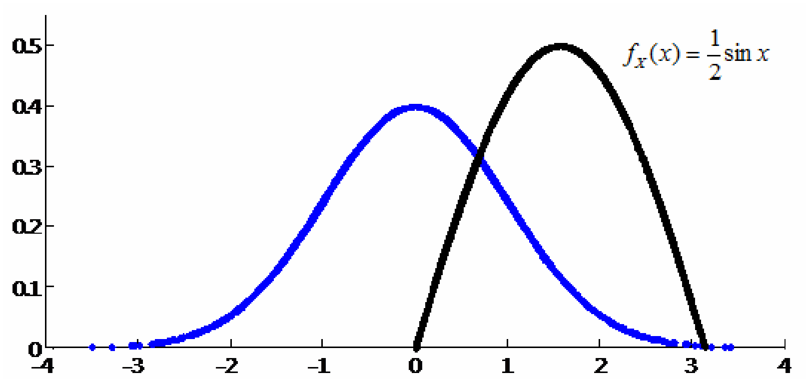
$$\mu_2 = \mathcal{M}\{f_X(x),3\} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \frac{1}{2}\pi^2 - 2 \simeq 2.9348$$

$$E\left[(X-\mu_1)^4\right] = E\left[\left(X-\frac{\pi}{2}\right)^4\right] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 \sin x dx \simeq 0.4793$$

elde edilir. (2.1.24)'den basıklık katsayısı

$$\alpha = \frac{E\left[(X-\mu_1)^4\right]}{\left[\mu_2-\mu_1^2\right]^2} - 3 \simeq \frac{0.4793}{\left(2.9348-1.5708^2\right)^2} = 2.1938$$

olarak bulunur. Buna göre $f_X(x)$ in dağılımının standart normal dağılımdan daha sivri olduğu söylenebilir. Bu durum şekli 3.3.5 de görülebilir.



Şekil 3.3.3 $f_X(x) = \frac{1}{2}\sin x$, $x \in (0,\pi)$ ile $N(0,1)$ dağılımlarının basıklıklarının karşılaştırılması

3.4. HANKEL İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

3.4.1 Hankel Dönüşümünün Tanımlanması ve Bazı Özellikleri

Hankel dönüşümünün tanımlanmasına Mellin dönüşümünde olduğu gibi yine Fourier dönüşümünden başlayalım. İki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\mathfrak{F}\{f(x,y)\} = F(k,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(\mathbf{Kr})\} f(x,y)\,dxdy \qquad (3.4.1)$$

şeklinde tanımlanır (bkz. [1]). Diğer taraftan $\mathbf{K}=(k,l)$ ve $\mathbf{r}=(x,y)$ olmak üzere, kutupsal koordinatlarda $\mathbf{K}$ ve $\mathbf{r}$ vektörleri

$$\mathbf{r}=(x,y)=|\mathbf{r}|(\cos\theta,\sin\theta)$$

$$\mathbf{K}=(k,l)=|\mathbf{K}|(\cos\phi,\sin\phi)$$

olarak yazılabilir. $|\mathbf{r}|=r$ ve $|\mathbf{K}|=K$ olmak üzere

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}=Kr\cos(\theta-\phi) \qquad (3.4.2)$$

dir. Böylece (3.4.1) eşitliği

$$F(k,l)=F(K\cos\phi,K\sin\phi)=F(K,\phi)$$

$$f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=f(r,\theta)$$

ve

$$|J|=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r \qquad (3.4.3)$$

olduğu göz önüne alınırsa daha basit olarak

$$F(K,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}\exp\{-iKr\cos(\theta-\phi)\} f(r,\theta)\,rdrd\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \exp\{-iKr\cos(\theta-\phi)\} f(r,\theta) d\theta \tag{3.4.4}$$

şeklinde yazılabilir. $f(r,\theta) = e^{in\theta} f(r)$ ve $\theta - \phi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ alınırsa (3.4.4) eşitliği

$$F(K,\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r dr \int_{\alpha=\Phi}^{2\pi+\Phi} \exp\left\{-iKr\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \exp\{in\theta\} f(r) d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} rf(r) dr \int_{\alpha=\Phi}^{2\pi+\Phi} \exp\{-iKr\sin\alpha\} \exp\left\{in\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \phi\right)\right\} d\alpha$$

şekline gelir. ($\Phi = \pi/2 - \phi$). Son eşitlik düzenlenirse

$$F(K,\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r f(r) dr \int_{\alpha=\Phi}^{2\pi+\Phi} \exp\left\{in\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + i(n\alpha - Kr\sin\alpha)\right\} d\alpha \tag{3.4.5}$$

elde edilir. n.dereceden Bessel fonksiyonunun integral gösterimi olan

$$J_n(Kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=\Phi}^{2\pi+\Phi} \exp\{i(n\alpha - Kr\sin\alpha)\} d\alpha \tag{3.4.6}$$

kullanılırsa, (3.4.5) integrali daha kısa olarak

$$F(K,\phi) = \exp\left\{in\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \int_0^{\infty} r \mathrm{J}_n(Kr) f(r) dr$$

$$= \exp\left\{in\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right\} F_n(K) \tag{3.4.7}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$F_n(K) = \int_0^{\infty} r \mathrm{J}_n(Kr) f(r) dr$$

dir.

Tanım 3.4.1 : (Hankel Dönüşümü) $f(r)$ $(0,+\infty)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{H}_n\{f(r)\} = F_n(K) = \int_0^{\infty} r \mathrm{J}_n(Kr) f(r) dr \tag{3.4.8}$$

ifadesine $f(r)$ *nin n. Dereceden Hankel Dönüşümü* denir. Burada $\mathcal{H}_n\{.\}$ operatörü *Hankel Dönüşüm Operatörü* ya da *n'inci Dereceden Hankel Dönüşümü* olarak adlandırılır.

Örnek 3.4.1 : $f(r)=e^{-ar}$ fonksiyonunun sıfır dereceden Hankel dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0\{f(r)\}=F_0(K)&=\int_0^\infty r\,\mathrm{J}_0(Kr)f(r)\,dr\\&=\int_0^\infty r\,\mathrm{J}_0(Kr)e^{-ar}dr\\&=\mathcal{L}\{r\,\mathrm{J}_0(Kr),a\}=\frac{1}{\sqrt{a^2+K^2}}\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.4.2 : $f(r)=e^{-ar}$ fonksiyonunun birinci dereceden Hankel dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1\{f(r)\}=F_1(K)&=\int_0^\infty r\,\mathrm{J}_1(Kr)f(r)\,dr\\&=\int_0^\infty r\,\mathrm{J}_1(Kr)e^{-ar}dr\\&=\mathcal{L}\{r\,\mathrm{J}_1(Kr),a\}=\frac{K}{a^2+K^2}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Buradaki Laplace dönüşümleri için Laplace Dönüşüm Tablolarına bakılabilir.

3.4.2 Hankel Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.4.1 : $\mathcal{H}_n\{f(r)\}=F_n(K)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i. (Lineerlik Özelliği) k_1, k_2 iki sabit, $\mathcal{H}_n\{f_1(r)\}=F_{1n}(K)$ ve $\mathcal{H}_n\{f_2(r)\}=F_{2n}(K)$ olmak üzere

$$\mathcal{H}_n\left\{k_1 f_1(r)+k_2 f_2(r)\right\}=k_1 F_{1n}(K)+k_2 F_{2n}(K) \qquad (3.4.9)$$

dir.

ii. $a>0$ bir sabit olmak üzere;

$$\mathcal{H}_n\left\{f(ar)\right\}=\frac{1}{a^2}F_n\left(\frac{K}{a}\right) \qquad (3.4.10)$$

dir.

İspat : i. (3.4.8) den hareketle

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_n\left\{k_1 f_1(r)+k_2 f_2(r)\right\} &= \int_0^\infty r\mathrm{J}_n(Kr)\big(k_1 f_1(r)+k_2 f_2(r)\big)dr \\
&= k_1\int_0^\infty r\mathrm{J}_n(Kr)f_1(r)dr+k_2\int_0^\infty r\mathrm{J}_n(Kr)f_2(r)dr \\
&= k_1 F_{1n}(K)+k_2 F_{2n}(K).
\end{aligned}$$

ii. Yine Hankel dönüşümünün tanımından hareketle

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_n\left\{f(ar)\right\} &= \int_0^\infty r\mathrm{J}_n(Kr)f(ar)dr \qquad ,[ar=s] \\
&= \int_0^\infty \frac{s}{a}\mathrm{J}_n\left(K\frac{s}{a}\right)f(s)\frac{ds}{a} = \frac{1}{a^2}F_n\left(\frac{K}{a}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.4.2 : (Türevin Hankel Dönüşümü) $\mathcal{H}_n\left\{f(r)\right\}=F_n(K)$ olmak üzere;

$$\mathcal{H}_n\left\{f'(r)\right\}=\frac{K}{2n}\left[(n-1)F_{n+1}(K)-(n+1)F_{n-1}(K)\right] \quad ,n\geq 1 \qquad (3.4.11)$$

dir.

İspat : (3.4.8) den hareketle

$$\mathcal{H}_n\left\{f'(r)\right\}=\int_0^\infty r\mathrm{J}_n(Kr)f'(r)dr \text{ [kısmi integrasyon uygulanarak]}$$

$$=\left[rf(r)\,\mathrm{J}_n(Kr)\right]_{r=0}^{\infty}-\int_0^{\infty} f(r)\frac{d}{dr}\left[r\mathrm{J}_n(Kr)\right]dr$$

[Bessel fonksiyonunun türev özelliklerinden faydalanarak]

$$=-\int_0^{\infty} f(r)\left[\mathrm{J}_n(Kr)+rK\,\mathrm{J}'_n(Kr)\right]dr$$

$$=-\int_0^{\infty} f(r)\left[\mathrm{J}_n(Kr)+rK\,\mathrm{J}_{n-1}(Kr)-n\mathrm{J}_n(Kr)\right]dr$$

$$=-\int_0^{\infty} f(r)\left[(1-n)\,\mathrm{J}_n(Kr)+rK\,\mathrm{J}_{n-1}(Kr)\right]dr$$

$$=(n-1)\int_0^{\infty} f(r)\,\mathrm{J}_n(Kr)\,dr-K\int_0^{\infty} r\,\mathrm{J}_{n-1}(Kr)\,f(r)\,dr$$

$$=(n-1)\int_0^{\infty} f(r)\,\mathrm{J}_n(Kr)\,dr-K\,F_{n-1}(K)$$

$\left[\mathrm{J}_n(Kr)=\dfrac{Kr}{2n}\left[\mathrm{J}_{n-1}(Kr)+\mathrm{J}_{n+1}(Kr)\right]\text{özelliğini kullanırsak}\right]$

$$=(n-1)\int_0^{\infty} f(r)\left\{\frac{Kr}{2n}\left[\mathrm{J}_{n-1}(Kr)+\mathrm{J}_{n+1}(Kr)\right]\right\}dr-K\,F_{n-1}(K)$$

$$=\frac{K(n-1)}{2n}\left(\int_0^{\infty} f(r)\,\mathrm{J}_{n-1}(Kr)\,rdr+\int_0^{\infty} f(r)\,\mathrm{J}_{n+1}(Kr)\,rdr\right)-K\,F_{n-1}(K)$$

$$=\frac{K(n-1)}{2n}F_{n-1}(K)+\frac{K(n-1)}{2n}F_{n+1}(K)-K\,F_{n-1}(K)$$

$$=\frac{K}{2n}\left[(n-1)F_{n+1}(K)-(n+1)F_{n-1}(K)\right]$$

elde edilir.

Teorem 3.4.3 : (Hankel Dönüşümü İçin Parseval Özdeşliği) $\mathcal{H}_n\left\{f(r)\right\}=F_n(K)$ ve $\mathcal{H}_n\left\{g(r)\right\}=G_n(K)$ olmak üzere;

$$\int_0^{\infty} r\,f(r)\,g(r)\,dr=\int_0^{\infty} K\,F_n(K)\,G_n(K)\,dK \qquad (3.4.12)$$

dır.

İspat : Tanımdan hareketle

$$\int_0^\infty K\,F_n(K)G_n(K)\,dK = \int_0^\infty K\,F_n(K)\,dK\int_0^\infty r\,\mathrm{J}_n(Kr)\,g(r)\,dr$$
$$= \int_0^\infty rg(r)\,dr\,\int_0^\infty K\,\mathrm{J}_n(Kr)F_n(K)\,dK$$
$$= \int_0^\infty rg(r)\,f(r)\,dr$$

elde edilir.

3.4.3 Ters Hankel Dönüşümü

Hankel dönüşümünün tersinin tanımlanmasına, ilk bölümdekine benzer olarak Fourier dönüşümünden başlanır. İki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $F(k,l)$ olmak üzere, $F(k,l)$ fonksiyonunun Ters Fourier Dönüşümü

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(k,l)\} = f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{i(\mathbf{Kr})\}F(k,l)\,dk\,dl \qquad (3.4.13)$$

dır (bkz. [1]). (3.4.3) dikkate alındığında

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}\exp\{iKr\cos(\theta-\phi)\}F(K,\phi)\,rdrd\theta \qquad (3.4.14)$$

yazılabilir. (3.4.14) düzenlenir ve $f(r,\theta) = e^{in\theta}f(r)$ ve $\theta-\phi = \alpha-\dfrac{\pi}{2}$ alınırsa

$$e^{in\theta}f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{K=0}^{\infty}K\,dK\int_{\theta=0}^{2\pi}\exp\{iKr\cos(\theta-\phi)\}F(K,\phi)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty K\,F_n(K)\,dK\int_0^{2\pi}\exp\left\{in\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)+iKr\cos(\theta-\phi)\right\}d\phi$$

bulunur. Böylece $\theta-\phi=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$e^{in\theta}f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty K\,F_n(K)\,dK\int_{\theta_0}^{2\pi+\theta_0}\exp\{in(\theta+\alpha)-iKr\sin\alpha\}\,d\alpha \qquad (3.4.15)$$

elde edilir. Burada $\theta_0=-(\theta+\pi/2)$ dir. (3.4.6) da verilen n.dereceden Bessel integral gösterimi kullanılarak

$$e^{in\theta}f(r)=e^{in\theta}\int_0^\infty K\,\mathrm{J}_n(Kr)F_n(K)\,dK$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$f(r)=\int_0^\infty K\,\mathrm{J}_n(Kr)F_n(K)\,dK \qquad (3.4.16)$$

ortaya çıkar.

Tanım 3.4.2 : (Ters Hankel Dönüşümü)

Bir $f(r)$ fonksiyonunun Hankel dönüşümü $\mathcal{H}_n\{f(r)\}=F_n(K)$ olmak üzere

$$\mathcal{H}_n^{-1}\{F_n(K)\}=f(r)=\int_0^\infty K\,\mathrm{J}_n(Kr)F_n(K)\,dK \qquad (3.4.17)$$

ifadesine $F_n(K)$ nın *Ters Hankel Dönüşümü* denir. Burada $\mathcal{H}_n^{-1}\{\cdot\}$ operatörü *Ters Hankel Dönüşüm Operatörü* ya da kısaca *Ters Hankel Dönüşümü* olarak adlandırılır.

3.5. Z DÖNÜŞÜMÜ

Fizik ve mühendislik alanlarındaki bir *sistem*, matematiksel olarak giriş sinyali $f(t)$ den çıkış sinyali $g(t)$ ye bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Burada t bağımsız, sürekli zaman değişkenidir. Bir sistemin en önemli özelliği çıkış sinyali $g(t)$ nin tamamıyla $f(t)$ ve sistem karakteristikleri ile belirlenebilmesidir. Genel olarak sistem matematiksel sembollerle

$$g(t) = L\{\varphi(t)\} \tag{3.5.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada L operatörü $\varphi(t)$ fonksiyonunu $g(t)$ fonksiyonuna dönüştüren bir dönüşümdür. Eğer L lineer ise sistem de lineerdir denir. Açıkça görülebileceği üzere lineer operatörlere örnek olarak integral dönüşümleri verilebilir.

3.5.1. Z Dönüşümünün Tanımlanması

Z dönüşümü kavramını vermeden önce gerekli bazı tanımlamaları verelim:

Tanım 3.5.1 : (Delta Fonksiyonu) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ olmak üzere

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & ,x = 0 \\ 0 & ,x \neq 0 \end{cases} \tag{3.5.2}$$

fonksiyonuna *Delta Fonksiyonu* denir.

Bu özellikler tam anlamıyla alışılmış fonksiyon özelliklerini sağlamamaktadır. Yani Delta fonksiyonu klasik anlamda bir fonksiyon değildir, çoğu zaman genelleştirilmiş fonksiyon olarak adlandırılır.

Delta fonksiyonu için bir diğer tanım

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{3.5.3}$$

şeklinde verilir. Burada $f(x)$, $x=a$ noktasını içeren her aralıkta sürekli bir fonksiyondur (bkz. [1])

Teorem 3.5.1 : $f(x)$ $x=a$ noktasını içeren her aralıkta sürekli bir fonksiyon olmak üzere; $\delta(x)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $$\int_{a}^{b} f(a)\delta(x-a)da = \begin{cases} f(a) & ,x \in (a,b) \\ 0 & ,x \notin (a,b), \end{cases} \tag{3.5.4}$$

ii. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(x-a)dx = f(a)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = f(a), \tag{3.5.5}$$

iii. $$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \tag{3.5.6}$$

iv. $$x\delta(x) = 0, \tag{3.5.7}$$

v. $$\delta(x-a) = \delta(a-x), \tag{3.5.8}$$

vi. $$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx = \begin{cases} 1 & ,x > 0 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x), \tag{3.5.9}$$

vii. $\delta(x)$ in Fourier dönüşümü ve Ters Fourier Dönüşümü

$$\mathfrak{F}\{\delta(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\delta(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.5.10}$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}^{-1} = \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dx \tag{3.5.11}$$

dir.

İspat : (3.5.2) ve (3.5.3) deki fonksiyonlar kullanılarak ispat kolayca yapılabilir.

$f(t)$ $t = t_n$ noktasını içeren her noktada sürekli bir fonksiyon olsun. (3.5.6) kullanılarak

$$f(t)\delta(t - t_n) = f(t_n)\delta(t - t_n) \tag{3.5.12}$$

yazılabilir. (3.5.12) eşitliğinin her iki tarafında *n* üzerinden toplam alınırsa

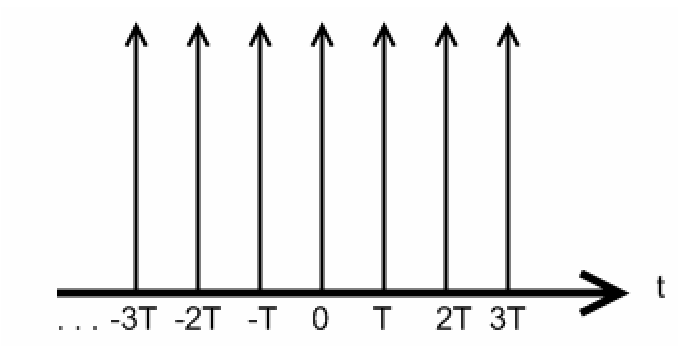
$$f^*(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n)\delta(t - t_n) \tag{3.5.13}$$

olur. Burada $f^*(t)$ fonksiyonuna *Örneklenmiş Fonksiyon* adı verilir. (3.5.13) de $t_n = nT$ alınırsa

$$f^*(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT) \tag{3.5.14}$$

elde edilir. (3.5.14) deki $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ serisine *İmpuls Katarı* (impulse train) adı verilir. Burada T ye örnekleme periyodu denir.

İmpuls katarı aşağıdaki gibi şekillendirilebilir:



Şekil 3.5.1 İmpuls katarı

(3.5.14) denkleminden $f(t)$ çekilirse

$$f\left(t\right)=\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)} \tag{3.5.15}$$

elde edilir. T örnekleme periyodunun $d\xi$ gibi küçük bir değer olduğunu varsayarsak (3.5.15) denklemi

$$f\left(t\right)=\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nd\xi)\delta(t-nd\xi)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nd\xi)} \tag{3.5.16}$$

şeklinde yazılabilir. $d\tau = nd\xi$ olmak üzere son eşitliğin pay ve paydasını $d\tau$ ile çarparsak

$$f\left(t\right)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau\right)\delta(t-\tau)d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau}=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau\right)\delta(t-\tau)d\tau \tag{3.5.17}$$

elde edilir. Son elde edilen eşitlikte $\delta(t)$ yi $h(t)$ ile göstererek

$$g\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau\right)h\left(t-\tau\right)d\tau = f\left(t\right)*h\left(t\right) \tag{3.5.18}$$

yazılabilir. $g(t)=L\left\{\varphi\left(t\right)\right\}$ sistem gösterimi göz önünde bulundurulursa, (3.5.18) de verilen eşitlik $g(t)$ çıktısının, (3.2.5) ile tanımlanan Fourier konvolusyonu biçimindeki gösterimidir.

Giriş fonksiyonu $f\left(t\right)$ ve impuls katarının Fourier konvolusyonu

$$g(t) = f\left(t\right)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) \tag{3.5.19}$$

olur. Buna göre (3.5.5) bağıntısının kullanılmasıyla

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\delta(\tau-\tau_n)d\tau = h(t-\tau_n) \qquad (3.5.20)$$

yazılabilir. Eğer impuls $\tau_0 = 0$ a yerleştirilmişse $g(t) = h(t)$ olacaktır. Buradan elde edilen bu sonuca göre $f(t)$ giriş sinyali ile sistemin cevap impulsları $h(t)$ nin Fourier konvolusyonu, $g(t)$ çıkış sinyalini vermektedir.

Genel olarak giriş sinyali $t \geq 0$ ve $\{h(t) = 0 \quad , t < 0\}$ için ele alınır. Buna göre çıktı denklemi olan (3.5.18)'i

$$g(t) = \int_{0}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = f(t) * h(t) \qquad (3.5.21)$$

şeklinde değiştirebiliriz. Benzer şekilde $f^*(t)$ örneklenmiş fonksiyonun (3.5.13)'de verilen gösterimini değiştirirsek

$$f^*(t) = f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \qquad (3.5.22)$$

olacaktır. (3.5.22) de her iki tarafının Fourier dönüşümü alınırsa

$$\mathfrak{L}\{f^*(t)\} = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nsT} \qquad (3.5.23)$$

elde edilir. Burada $z = e^{-nsT}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\mathfrak{L}\{f^*(t)\} = F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} \qquad (3.5.24)$$

elde edilir.

Tanım 3.5.2 : (Z Dönüşümü) Bir $f(n)$ fonksiyonu için

$$\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} \qquad (3.5.25)$$

ifadesine $f(n)$ fonksiyonunun *Z Dönüşümü* denir. Burada $\mathcal{Z}\{.\}$ operatörü *Z Dönüşüm Operatörü* ya da kısaca *Z Dönüşümü (Tek Taraflı Z Dönüşümü)* olarak adlandırılır.

(3.5.25) de verilen toplam $-\infty$ 'dan $+\infty$ a kadar alınırsa, $\mathcal{Z}\{.\}$ *Çift Taraflı Z-Dönüşümü* olarak adlandırılır. Bu durumda

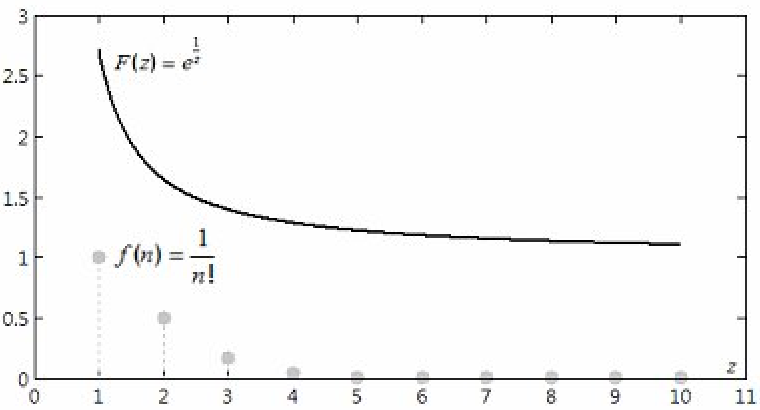
$$\mathcal{Z}\{f(n)\} = F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} \tag{3.5.26}$$

olur.

Örnek 3.5.1 : $f(n) = \dfrac{1}{n!}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(n)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{n!}\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = e^{\frac{1}{z}} = F(z) \end{aligned}$$

elde edilir.



Şekil 3.5.2 $f(n) = \dfrac{1}{n!}$ ve $F(z) = e^{\frac{1}{z}}$ nin grafikleri.

Örnek 3.5.2 : $f(n)=n$ fonksiyonunun Z dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{Z}\{f(n)\}=\mathcal{Z}\{n\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} n\,z^{-n}=z\sum_{n=0}^{\infty} n\,z^{-n-1}=z\sum_{n=0}^{\infty} n\,z^{-(n+1)}$$
$$=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\frac{z}{(z-1)^2}=F(z).$$

elde edilir.

Örnek 3.5.3 : $f(n)=a^n$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{Z}\{f(n)\}=\mathcal{Z}\{a^n\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}$$
$$=\frac{z}{z-a}=F(z)\quad ,|z|>a$$

olur.

3.5.2. Z Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.5.2 : $f(n)$ fonksiyonunun Z dönüşümü $F(z)=Z\{f(n)\}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i. (Lineerlik Özelliği) k_1 ve k_2 iki sabit olmak üzere

$$\mathcal{Z}\{k_1 f_1(n)+k_2 f_2(n)\}=k_1F_1(z)+k_2F_2(z). \tag{3.5.27}$$

ii. (Öteleme Özelliği) $m\geq 0$ olmak üzere

$$\mathcal{Z}\{f(n-m)\}=z^{-m}\left[F(z)+\sum_{r=-m}^{-1} f(r)z^{-r}\right] \tag{3.5.28}$$

$$\mathcal{Z}\{f(n+m)\} = z^m \left[F(z) - \sum_{r=0}^{m-1} f(r) z^{-r} \right]. \qquad (3.5.29)$$

iii. $|z| > |a|$ olmak üzere

$$\mathcal{Z}\left\{a^n f(n)\right\} = F\left(\frac{z}{a}\right). \qquad (3.5.30)$$

iv. Bir $f(n)$ fonksiyonu için

$$\mathcal{Z}\{nf(n)\} = -z\frac{d}{dz}F(z). \qquad (3.5.31)$$

İspat :

i. Tanımdan hareketle

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{k_1 f_1(n) + k_2 f_2(n)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[k_1 f_1(n) + k_2 f_2(n)\right] z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[k_1 f_1(n) z^{-n} + k_2 f_2(n) z^{-n}\right] \\
&= k_1 \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n) z^{-n} + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} f_2(n) z^{-n} \\
&= k_1 F_1(z) + k_2 F_2(z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. Yine tanımdan hareketle

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{f(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n-m) z^{-n} \qquad ,n-m=r \\
&= z^{-m} \sum_{r=-m}^{\infty} f(r) z^{-r} \\
&= z^{-m} \sum_{r=0}^{\infty} f(r) z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} f(r) z^{-r}
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $r < 0$ için $f(r) = 0$ ise buradan

$$\mathcal{Z}\{f(n-m)\} = z^{-m} \sum_{r=0}^{\infty} f(r) z^{-r}$$

olur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{f(n+m)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n+m)z^{-n} \qquad\qquad ,n+m=r \\
&= z^{m}\sum_{r=m}^{\infty} f(r)z^{-r} \\
&= z^{m}\sum_{r=0}^{\infty} f(r)z^{-r} - z^{m}\sum_{r=0}^{m-1} f(r)z^{-r} \\
&= z^{m}\left[\sum_{r=0}^{\infty} f(r)z^{-r} - \sum_{r=0}^{m-1} f(r)z^{-r}\right] \\
&= z^{m}\left[F(z) - \sum_{r=0}^{m-1} f(r)z^{-r}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç :

Özel olarak $m=1$ ve $m=2$ için

$$\mathcal{Z}\{f(n-1)\} = z^{-1}F(z) \tag{3.5.32}$$

$$\mathcal{Z}\{f(n-2)\} = z^{-2}F(z) + f(2)z^{-2} + f(1)z^{-1} \tag{3.5.33}$$

Benzer şekilde $m=-1$ ve $m=-2$ için

$$\mathcal{Z}\{f(n+1)\} = z\left[F(z) - f(0)\right] \tag{3.5.34}$$

$$\mathcal{Z}\{f(n+2)\} = z^{2}\left[F(z) - f(0)\right] - z\,f(1) \tag{3.5.35}$$

ortaya çıkar.

iii. Tanımdan hareketle ve $|z|>|a|$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
Z\left\{a^{n} f(n)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n} f(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{n} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} f(n) = F\left(\frac{z}{a}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç :

Özel olarak $a=e^{b}$ alırsak

$$Z\left\{e^{-nb}f(n)\right\}=F(ze^{b}) \quad ,|z|>\left|e^{-b}\right| \tag{3.5.36}$$

yazılabilir.

iv. Tanımdan hareketle

$$\begin{aligned} Z\{nf(n)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)z^{-n} \\ &= z\sum_{n=0}^{\infty} f(n)nz^{-(n+1)} = z\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\left(-\frac{d}{dz}z^{-n}\right) \\ &= -z\frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}\right\} = -z\frac{d}{dz}F(z) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.5.3. Z Dönüşümü İçin Konvolusyon Çarpım

Teorem 3.5.4 : $f(n)$ ve $g(n)$ fonksiyonlarının Z dönüşümleri sırasıyla $Z\{f(n)\}=F(z)$ ve $Z\{g(n)\}=G(z)$ olsun. Buna göre

$$f(n)*g(n)=\sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m) \tag{3.5.38}$$

olmak üzere

$$\mathcal{Z}\{f(n)*g(n)\}=\mathcal{Z}\{f(n)\}\mathcal{Z}\{g(n)\} \tag{3.5.39}$$

dir.

İspat: Z dönüşümünün tanımından hareketle

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f(n)*g(n)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g(m)\sum_{n=0}^{\infty} f(n-m)z^{-n} \qquad (n-m=r \text{ dersek}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} g(m)\sum_{r=-m}^{\infty} f(r)z^{-m-r} \end{aligned}$$

bulunur. $r<0$ için $f(r)=0$ olmak üzere buradan

$$\mathcal{Z}\{f(n)*g(n)\}=\sum_{m=0}^{\infty} g(m)z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} f(r)z^{-r}$$
$$=\mathcal{Z}\{f(n)\}\mathcal{Z}\{g(n)\}$$

elde edilir.

3.5.4. *Ters Z Dönüşümü*

(3.5.24) de verilen toplam ifadesinde T=1 alınırsa

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$$
$$= f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\ldots+f(n)z^{-n}+f(n+1)z^{-(n+1)}+\ldots$$

elde edilir. Burada denklemin her iki tarafını z^{n-1} ile çarpıp C kapalı eğrisi boyunca integralini alırsak

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)z^{n-1}dz =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_C f(0)z^{n-1}dz+\oint_C f(1)z^{n-2}dz+\ldots+\oint_C f(n)z^{-1}dz+\oint_C f(n+1)z^{-2}dz+\ldots\right]$$

olur. Buradan Cauchy Teoremine göre

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(n)}{z}dz=f(n)$$

elde edilir.

Tanım 3.5.3 : (Ters Z Dönüşümü)

$f(n)$ fonksiyonunun Z dönüşümü $Z\{f(n)\}=F(z)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=f(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)z^{n-1}dz \qquad (3.5.40)$$

ifadesine $F(z)$ nin *Ters Z Dönüşümü* denir. Burada C orijini içeren ve $|z| = R$ çemberinin dışında kalan basit kapalı bir eğridir.

Pratikte, $F(z)$'nin ters Z dönüşümünü bulmak için verilecek yöntemin izlenmesi kolaylık sağlar. (3.5.25) ifadesinde yer alan toplam açılırsa

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} \\ &= f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \ldots + f(n) z^{-n} + \ldots \end{aligned}$$

elde edilir. Burada z^{-n} teriminin katsayısı olan $f(n)$ ifadesi $F(z)$'nin ters Z dönüşümü olur. Şimdi bunu bir örnekle açıklayalım:

Örnek 3.5.4 : $F(z) = \dfrac{z}{z-a}$ olmak üzere $F(z)$'nin ters Z dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{z-a} = \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{-1} \\ &= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \ldots + a^n z^{-n} + \ldots \end{aligned}$$

yazılabilir. z^{-n} teriminin katsayısı a^n olduğundan

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = f(n) = a^n$$

olur.

Örnek 3.5.5 : $F(z) = e^{\frac{1}{z}}$ olmak üzere $F(z)$'nin ters Z dönüşümünü bulalım.

$$F(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \ldots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \ldots$$

yazılabilir. z^{-n} teriminin katsayısı $\dfrac{1}{n!}$ olduğundan

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{e^{\frac{1}{z}}\right\} = f(n) = \frac{1}{n!}$$

olur.

Teorem 3.5.5 : $f(n)$ ve $g(n)$ fonksiyonlarının Z dönüşümleri $Z\{f(n)\}=F(z)$ ve $Z\{g(n)\}=G(z)$ olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)G(z)\}=\sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m) \tag{3.5.41}$$

dir.

İspat : Teorem 3.5.4 göz önüne alınırsa (3.5.41) in doğru olduğu doğrudan görülür.

Örnek 3.5.6 : $F(z)=\dfrac{z^2}{(z-a)(z-b)}$ olmak üzere $F(z)$'nin ters Z dönüşümünü bulalım. Eğer

$$F(z)=\frac{z}{z-a}\ ,\ G(z)=\frac{z}{z-b}$$

olarak alınırsa, Örnek 3.5.4 göz önünde tutularak

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}=f(n)=a^n \quad , \quad \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}=g(n)=b^n$$

yazılabilir. Buna göre (3.5.41) gereğince

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)G(z)\} &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}\right\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m)=\sum_{m=0}^{\infty} a^{n-m}b^m = a^n\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^m \\
&= a^n\left(\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}}\right)=\frac{a^{n+1}}{(a-b)}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.5.7 : $f(0)=0$ olmak üzere

$$f(n+1)-f(n)=1$$

fark denkleminin çözümünü bulalım. Denklemin her iki tarafına Z dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{Z}\{f(n+1)\}-\mathcal{Z}\{f(n)\}=\mathcal{Z}\{1\}$$

olur. (3.5.34) ve Örnek 3.5.3 göz önüne alınırsa

$$z\left[F(z)-f(0)\right]-F(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$z\left[F(z)-0\right]-F(z)=\frac{z}{z-1}$$

olup buradan

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

elde edilir. Son eşitliğin ters Z dönüşümü, Örnek 3.5.2 göz önüne alınarak fark denkleminin çözümü

$$f(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}\right\}=n$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.5.8 : $f(0)=1$ olmak üzere

$$f(n+1)+2f(n)=n$$

fark denkleminin çözümünü bulalım. Denklemin her iki tarafına Z dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{Z}\{f(n+1)\}+2\mathcal{Z}\{f(n)\}=\mathcal{Z}\{n\}$$

olur. (3.5.34) ve Örnek 3.5.2 göz önüne alınırsa

$$z\left[F(z)-f(0)\right]+2F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$z\left[F(z)-1\right]+2F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$zF(z)-z+2F(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

elde edilir. Buradan

$$F(z)[z+2]=\frac{z}{(z-1)^2}+z$$

$$F(z)=\frac{z}{(z+2)(z-1)^2}+\frac{z}{z+2}$$

$$=\frac{z}{z+2}+\frac{1}{9}\left[\frac{z}{z+2}+\frac{3z}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}\right]$$

yazılabilir. Böylece her iki tarafın ters Z dönüşümü alınırsa Örnek 3.5.7 ve Örnek 3.5.4'ün de göz önüne alınmasıyla verilen fark denkleminin çözümü

$$f(n)=(-2)^n+\frac{1}{9}\left[(-2)^n+3n-1\right]$$

olarak bulunur.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezin temel amacı belirli tipten birkaç integral dönüşümü verip bunların bazı özelliklerini incelemektir. Bilindiği gibi bu özellikler çözümü oldukça zor olan belirli türden integral denklemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

Tezde integral dönüşümlerin genellikle ortak özellikleri üzerinde durulmuştur. Bu özelliklerin en önemlileri konvolusyon çarpım ve Parseval özdeşliğidir. Ayrıca Laplace, Fourier ve Mellin dönüşümlerinin bazı istatistiksel uygulamaları verilmiştir.

Z-Dönüşümü ve Ters Z-Dönüşümü kompleks integraller ile yakından ilgili olup bu dönüşümün rezidü yardımıyla bir çok özelliğinin ve uygulamalarının incelenmesi henüz yapılmamıştır. İleri düzeyde bir araştırma konusu olarak buradan dikkate değer orijinal sonuçlar elde edilebilir. Z-dönüşümünün bir uygulama alanı da belirli türden fark denklemlerinin çözümüne yardımcı olmasıdır. Fark denklemleri bir çok alanda ortaya çıkmaktadır. Yine istatistikte karşılaşılan fark denklemlerinin Z-dönüşümü yardımıyla çözülüp çözülemeyeceği bir başka tartışma ve inceleme konusudur.

5. KAYNAKLAR

1. Debnath, L., *Integral Transforms and Their Applications*, CRC Press, 1995.
2. Öztürk, F., *Matematiksel İstatistik*, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:10, Ankara, 1993.
3. Akdi, Y., *Matematiksel İstatistiğe Giriş*, Bıçaklar, Ankara 2005.
4. Spiegel, M.R., *Fourier Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1991.
5. Cramer, H., *Mathematical Methods Of Statistics*, Princeton Universty Press, 1946.
6. Casella, G. and Berger R.L., *Statistical Inference*, Duxbury Press, 1990.
7. Shahbazov, A., *Olasılık Teorisine Giriş*, Birsen Yayınevi, Ankara, 2005.
8. Biçer, C., *İntegral Dönüşümleri ve Bazı Uygulamaları*. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2005.
9. Roussas, G.G., *A Course in Mathematical Statistics*, Academic Press, 1997.
10. Capinski, M. and Kopp, E., *Measure Integral And Probability*, Springer, 1999.
11. Zacks, S., *The Theory Of Statistical Inference*, Wiley, 1970.
12. Capinski, M. and Zastawniak, T., *Probability Through Problems*, Springer, 2000.
13. Sneddon, I.N., *The Use Of Integral Transformations*, Tata McGraw-Hill, 1974.
14. Billingsley, P., *Probability and Measure*, Wiley, 1985.