T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRAL DENKLEMLER

OKAN DUMAN

HAZİRAN 2008

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

…./…./……

Doç.Dr. Burak BİRGÖREN
Müdür V.

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.Kerim KOCA
AnabilimDalıBaşkanı

Bu tezi okuduğumu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Prof.Dr.Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof.Dr.Kerim KOCA ________________

Yrd.Doç.Dr. Hüseyin MERDAN ________________

Yrd.Doç.Dr. Ali OLGUN ________________

ÖZET

İNTEGRAL DENKLEMLER

DUMAN, Okan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kerim Koca

Haziran 2008, 80 sayfa

Bu tez üç temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı, kaynak özetleri ve integral denklemin ortaya çıkışı hakkında kısa bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde integral denklemlerde temel kavramlar ve integral denklemlerin sınıflandırılması ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde Fredholm ve Volterra integral denklemleri için çözüm metodları incelenmiştir. Üçüncü bölümün sonunda Gamma ve Beta fonksiyonları yardımıyla Euler integral denklemleri tanıtılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ardışık Yaklaşıklar Yöntemi, Çekirdek Fonksiyonu, Resolvant, Fredholm İntegral Denklemleri, Volterra İntegral denklemleri

ABSTRACT

INTEGRAL EQUATIONS

DUMAN, Okan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Appplied Sciences

Department of Mathematics,M.Sc.Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kerim Koca

June 2008, 80 pages

This thesis consists of three basic chapters. In the first chapter, the purpose of the thesis, the summary of the literature and some information about the appearance of the integral equation are given. In the second chapter, the basic concepts and the classification of integral equations are considered.

In the third chapter, the solution method for Fredholm and Volterra integral equations are investigated. At the and of the third chapter, Euler integral equations are introduced with helps of Gamma and Beta functions. .

Key Words: Approximation Methods, Kernel, Resolvant, Fredholm Integral Equations, Volterra Integral Equations

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım esnasında destek ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA’ ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

İntegral denklemler çeşitli fiziksel problemlerde ve diferensiyel denklemler teorisinde çok sık karşılaşılan bir konudur. Bilindiği gibi içinde bilinmeyen fonksiyonlar ve bunların çeşitli basamaktan türev ya da diferensiyellerini bulunduran denklemlere ***diferensiyel denklem*** denir. İntegral denklem ise integral işareti altında bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu denklemlerdir. Belli tipten diferensiyel denklemler integral denkleme dönüştürülebilir. Örneğin en basitinden y bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)dt$$

şeklinde bir integral denklem gösterilimine sahiptir. Reel ve kompleks kısmi türevli denklemler için verilen çeşitli başlangıç ve sınır değer problemleri de integral denkleme dönüştürülebilir. Yine bir örnek olarak

$$W_{\bar{z}} = F(z, w) \quad , \quad z \in D \subset \mathbb{C}$$

$$w\big|_{\partial D} = \varphi(z) \quad , \varphi \in C(D, \mathbb{C})$$

şeklinde tanımlanan kompleks sınır değer probleminin çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{F(\zeta, w(\zeta))}{\zeta - z}d\xi d\eta \quad , \zeta = \xi + i\eta \qquad (1.1)$$

olarak verilir. Bu da çözümün bir integral gösterilimidir. Çünkü iki katlı integral altında w bilinmeyen fonksiyonu vardır. Burada D basit irtibatlı,sınırı düzgün bir bölgedir ve (1.1) deki ilk integral bir D bölgesinde holomorf bir fonksiyon tanımlar.Benzer şekilde örnekleri çoğaltmak mümkündür.Konuların daha iyi anlaşılması için basit elemanter örnekler tezde çok miktarda verilmiştir.

İntegral denklemlerin çözümünde kullanılan en yaygın yöntem ardışık yaklaşıklar yöntemidir. Bu yöntemde genellikle çözüm sınıfının içinde bulunduğu bir uzaydan sabit bir fonksiyon seçilir. Bu bilinen fonksiyon integral denklemde yerine yazılarak bilinen ikinci bir fonksiyon bulunur. İşlemlere böyle devam edilirse sonuçta bir seri veya diziye ulaşılır. Bu seri veya dizinin uygun bir yerde ve koşullarda yakınsak olması halinde limiti alınarak elemanter çözüme ulaşılır. Yakınsak olmayan bir dizi veya seri ortaya çıkarsa buradan integral denklemin çözümüne ulaşılamaz.Bu tezde bazı özel tipten integral denklemlerin çözüm teknikleri üzerinde durulacaktır.

İntegral denklem teorisinde "çekirdek fonksiyonu" kavramı önemli bir rol oynar. Çekirdek fonksiyonun özelliklerine göre integral denklem regüler veya singüler integral denklem şeklinde çeşitli isimler alır. Bunların her birinin ayrı ayrı çözüm yöntemleri vardır.

İntegral denklemler teorisinin bir önemli konusu da integral denklemi çözmeden çözümün varlığı ve tekliğini incelemektir. Bunun için bir fonksiyon uzayı belirlenir. Bu fonksiyon uzayı sürekli fonksiyon uzayı veya Hölder sürekli fonksiyonların uzayı olabilir. Bu uzayda bir norm tanımlanarak fonksiyon uzayı Banach Uzayı yapısına getirilir. Bu uzayda integral denklemler yardımıyla operatörler tanımlanır. Bu operatörlerin uzayı kendi içine dönüştürmesi ve daralma olması durumunda Banach Sabit Nokta Teoremi veya Schauder Sabit Nokta Teoremi kullanılarak çözümlerin varlığı ve tekliği hakkında karar verilebilir. Ancak bu tezde varlık ve teklik teoremleri üzerinde durulmayacaktır.

1.1.Kaynak Özetleri

İntegral denklemler ile ilgili temel kavramlar [1] nolu kaynaktan öğrenilmiştir. İtere ve çözücü çekirdek, resolvant kavramları [2] ve [5] nolu kaynaklardan incelenmiştir. n-yinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlerin integral denkleme, tersine integral denklemin bir diferensiyel denkleme dönüştürülmesi konusu [2] nolu kaynaktan alınmıştır.Dejenere çekirdek kavramı ve integral denklem teorisindeki önemi [3] ve [4] nolu kaynaklar kullanılarak incelenmiştir.

1.2.Tezin Amacı

Bu tezin esas amacı İntegral denklem teorisindeki temel kavramları ortaya koymaktır. İleri bir aşama olarak tezin giriş kısmında da belirtildiği gibi varlık ve teklik teoremleri üzerinde çalışma yapılabilir. Tezde sadece tek değişkenli integral denklemler üzerinde durulmuştur. Benzer yöntemler, kısmi türevli denklemler teorisi yardımıyla çok değişkenli integral denklemlere genişletilebilir. Bu tez bunun için iyi bir temel oluşturmaktadır. İntegral denklem teorisi diferensiyel denklem teorisi kadar yaygın değildir.Bu nedenle integral denklemler konusu geliştirilmeye ve orijinal sonuçlar ortaya koymaya uygundur.Singüler integral denklemler regüler integral denklemlere dönüştürülerek incelenir.Bu tez singüler integral denklemleri incelemede de iyi bir temel oluşturmaktadır.

2.MATERYAL VE YÖNTEMLER

2.1.İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun denklemdeki bulunuş şekli, çekirdek fonksiyonun özellikleri ve integral sınırlarına göre çeşitli şekillerde sınıflandırılabilirler.

Şimdi bu sınıflandırmalar ile ilgili olarak birkaç temel tanım verelim:

Tanım 2.1: $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.1}$$

şeklinde ki bir integral denklemde, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olması halinde integral denkleme ***lineer integral denklem*** denir.

Örnek 2.1: $u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t)u^n(t)dt$ (2.2)

denklemi $u(x)$ fonksiyonunun n-yinci kuvvetini bulundurduğundan lineer olmayan bir integral denklemdir. Daha genel olarak

$$u(x)=f(x)+\int_a^x \phi[x,t,u(t)]dt \tag{2.3}$$

integral denklemi de lineer olmayan integral denklemdir. Bu tezde genellikle lineer integral denklemleri inceleyeceğiz.

Tanım 2.2: (2.1) deki $K(x,t)$ fonksiyonuna ***çekirdek fonksiyonu*** denir.

İntegral denklemlerin bir başka sınıflandırılması da $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekliliği ile ilgilidir. $K(x,t)$ fonksiyonu $a \le x \le b; a \le t \le b$ karesinde sürekli ise integral denkleme ***tekil (singüler) olmayan integral***

denklem denir. Eğer $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse ***denkleme tekil(singüler) integral denklem*** denir.

Örneğin $0<\alpha<1$ olmak üzere

$$f(x)=\int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^a}$$

şeklinde ki integral denklem bu sınıfa girmektedir. Ayrıca integral sınırlarından en az birinin sonsuz olması halinde denklem tekil integral denklem sınıfına girer. Örneğin

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}u(t)dt \tag{2.4}$$

integral denklemi singüler formda bir integral denklemdir. İntegral denklemler yapılarına göre üç gruba ayrılırlar.

Tanım 2.3: $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ; $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$\phi(x)=\int_a^b K(x,t)u(t)dt\,;a,b\in\mathbb{R} \tag{2.5}$$

şeklindeki denkleme ***1.tip integral denklem*** denir.

Bu tip integral denklemlerde bilinmeyen sadece integral altında mevcuttur. Burada $\phi(x)$ verilmiş bir fonksiyondur. Benzer şekilde

$$\phi(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki integral denklem de 1. tip integral denklemdir. Burada $\phi(x)$ ve $f(x)$ verilmiş fonksiyonlardır. Bu denklem $\phi(x)-f(x)=\psi(x)$ olmak üzere

$$\psi(x)=\int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde ifade edilerek (2.5) denklemi yapısında yazılabilir. Örneğin

$e^{-x} = 2x^3 - 1 + \int_0^1 x^2 t u(t)dt$ denklemi bu tip integral denklemdir.

Tanım 2.4: Eğer bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunuyorsa bu tip integral denklemlere ***2.tip integral denklem*** denir. Bu tip denklemler

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \; ; a,b \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

veya

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.7}$$

şeklindedir. Örneğin $u(x) = \int_0^x e^{3x} u(t)dt$ veya $u(x) = 2 - x - \int_0^\infty \cos xt u(t)dt$ denklemleri 2.tip integral denklemlerdir.

Tanım 2.5: $\phi(x), f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar olmak üzere

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \; ; a,b \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

şeklindeki integral denklemlere de ***3.tip integral denklemler*** denir.

Örneğin

$$(3x-1)u(x) = e^{-x} - 2 + \int_0^1 x^2 t^2 u(t)dt \tag{2.9}$$

denklemi 3.tip bir integral denklemdir.

Eğer özel olarak $\phi(x) \equiv 0$ ise (2.8) denklemi 1.tip integral denkleme; $\phi(x) \equiv 1$ ise 2.tip denkleme dönüşür. Yani 1. ve 2. tip integral denklemler 3.tip integral denklemin bir özel hali olarak düşünülebilir.

İntegral denklemler $u(x)$ bilinmeyen, $K(x,t)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere $u(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmamasına göre de sınıflandırılabilir.

Tanım2.6: $u(x)=\int_a^b K(x,t)u(t)dt \ ; a,b\in \mathbb{R}$ (2.10)

formunda ki integral denklemlere ***homojen tipten integral denklem***;

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.11}$$

formundaki integral denklemlere ise ***homojen olmayan tipten integral denklem*** denir.

(2.10) integral denkleminin $u(x)\equiv 0$ olan bir çözümü vardır ve bu çözüme aşikar (trivial) çözüm denir.

İntegral denklemlerin farklı bir sınıflandırması da integralin sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre yapılmaktadır.

Tanım 2. 7: İntegralin sınırlarından biri değişken ise bu denklemlere ***Volterra İntegral Denklemleri*** denir.

Örneğin $\phi(x), f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere

$$\phi(x)=\int_a^x K(x,t)u(t)dt\,, \tag{2.12}$$

$$u(x)=\int_a^x K(x,t)u(t)dt\,, \tag{2.13}$$

$$\phi(x)u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t)u(t)\,dt \tag{2.14}$$

formunda ki denklemler Volterra integral denklemleridir. Yani Volterra denklemleri, integral sınırlarından biri değişken diğeri sabit olan denklemlerdir.

Tanım 2.8:Eğer alt ve üst sınırların ikisi de sabit ise bu denklemlere de ***Fredholm integral denklemleri*** denir.

Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin çözüm yöntemlerinde farklılıklar olduğu gibi, denklem yapıları aynı olduğu zaman benzerlikler de vardır.

2.2.İntegro Diferensiyel Denklemler

Şimdiye kadar $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunu olduğu gibi kullandık. Ancak bir integral denklemde bilinmeyen fonksiyonun türevi de bulunabilir.

Tanım 2.9: .Bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin de içinde bulunduğu integral denkleme integro diferensiyel denklem denir.

Örneğin

$$u'(x) = F\ \{x, u(x), \int_0^x K(x,t,u(t),u'(t))dt\} \tag{2.15}$$

şeklindeki bir denklem integro diferensiyel denklemdir. Belli tipten diferensiyel denklemler integro diferensiyel denklemlere dönüştürülebilir. Bu nedenle integro diferensiyel denklemler,diferensiyel denklem teorisinde de önemli bir yer tutmaktadır.

2.3.Parametreli İntegral Denklemler

Şimdiye kadar gördüğümüz integral denklemleri parametreli olarak daha genel bir biçimde yazabiliriz. Örneğin $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (2.16)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.17)$$

(λ parametresi reel veya kompleks olabilir) denklemlerini göz önüne alalım. λ parametresinin kuvvet serilerinin yakınsaklığının belirtilmesinde oynadığı rol ve λ nın çözümlerin bulunmasında ki önemi daha sonra görülecektir.

Burada ki λ parametresi, özellikle çözüm serilerinin yakınsaklığının belirlenmesi ve çözümlerin bulunmasında önemli rol oynamaktadır.

2.4.İntegral Denklemin Çözümü

Bu kesimde belli tipten integral denklemlerin çözümlerinin nasıl elde edilebileceğini inceleyeceğiz. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.18)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu integral denklemi çözmek için uygun bir $u_0(x)$ başlangıç değerinden başlayarak ardışık yaklaşıklıklarla bir dizi elde edilir. Bu dizinin yakınsadığı fonksiyon genellikle $u(x)$ çözümüdür.

Şimdi tersten bir örnekle incelemeye başlıyalım.

Örnek 2.2: $u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ fonksiyonunun

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2} u(t)dt \qquad (2.19)$$

integral denkleminin çözümü olduğunu gösterelim.

(2.19) un sağ tarafını düzenlersek

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}dt=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\int_0^x \frac{t}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}dt \tag{2.20}$$

olup buradan

$$\int_0^x \frac{t}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}dt=1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir.Bunu (2.20) de yerine yazarsak

$$u(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=u(x)$$

olduğundan $u(x)$ fonksiyonu verilen integral denklemin bir çözümü olur.

2.5.Çözüm Çeşitleri

2.tip bir lineer integral denklemin çözüm yöntemlerinden birincisi C.Neumann,J.Liouville ve Volterra'nın ortaya koydukları metotdur. Bu metodun temeli

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.21}$$

integral denklemi ile verilen $u(x)$ fonksiyonunun, λ nın bir integral serisi şeklinde ifade edilebileceğine dayanır. Bu seride λ nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları, x in fonksiyonlarıdır. Bu seri λ nın her değeri için yakınsaktır. Çözümün elde edilmesi için ardışık yaklaşıklıklar metodu kullanılır. Volterra bu yöntemi şöyle ifade etmiştir:

$f(x)$, $[a,b]$ aralığında ve $K(x,t)$ fonksiyonu $[a,b]\times[a,b]$ karesinde sürekli ise (2.21) denklemi $[a,b]$ aralığında her λ değeri için tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ardışık yaklaşıklıklar metoduyla bulunur. Ardışık yaklaşıklıklar metodunu daha sonra ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

2. metot Fredholm'ün geliştirdiği metotdur. Bu metot ile bulunan $u(x)$ fonksiyonu, λ nın iki integral serisinin oranı şeklinde ifade edilebilmektedir. Buradaki serilerin yakınsaklık yarıçapları sonlu değildir. Fredholm daha çok 2. tip

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.22}$$

şeklinde ki denklemler üzerinde çalışmış süreklilik koşulları üzerinde durmuştur. Fredholm, (2.22) denkleminin bir tam çözümü için

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} K(x,t_i)u(t_i)\Delta t_i$$

gösteriliminin yazılabileceğini göstermiştir. Burada x e ardışık olarak $t_1, t_2, ..., t_n$ değerleri verilirse $u(t_i)$ için bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem λ nın bir polinomu olur. D(λ) bu sistemin katsayılar determinantını göstermek üzere $u(x)$ fonksiyonunun bir yaklaşımı da

$$u(x) \cong f(x) + \lambda \frac{D(t_1, t_2, ..., t_n; \lambda)}{D(\lambda)}$$

şeklindedir.Burada D$(\lambda) \neq 0$ dır. Üstteki ifadede D$(t_1, t_2, ..., t_n; \lambda)$ve D$(\lambda)$, λ nın birer polinomudur. λ, paydayı 0 yaparsa genel çözüm yoktur. Fakat belli tipten çözüm vardır.Bu çözüm integral denklem için, n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sisteminin n in sonsuza yaklaşması halindeki limit durumudur.

Fredholm, ayrıca çekirdekleri singüler olmayan, ya da zayıf singüler olan denklemler üzerinde de çalışmıştır. Lineer cebir kurallarının geçerli olduğu bir integral denklemde çekirdeğin sürekli olması koşulunun gerekli olmadığı, fakat

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt$$

iki katlı integralinin mevcut olması koşulunun yeterli olacağı gösterilmiştir. Örneğin

$u(x) = f(x) + \int_0^1 \ln|x-t| u(t)dt$ integral denklemi $x = t$ için sürekli değildir. Fakat

$\int_0^1 \int_0^1 \ln^2 |x-t| dxdt$ iki katlı integrali sonlu olduğu için denklem zayıf singülerliğe sahiptir.

3.metot $K(x,t) = K(t,x)$ özelliğini taşıyan çekirdeğin (simetrik çekirdek) bulunduğu integral denklemler üzerine yapılan çalışmaları içerir.

Simetrik integral denklemler Fredholm integral denkleminin özel bir sınıfıdır. Bu tür denklemlerin öz değerleri reeldir ve bunlara ait öz fonksiyonlar $[a,b]$ aralığında ortogonaldir.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt$$

şeklindeki her fonksiyonda $u(x)$ ile çekirdeğin öz fonksiyonları özel fonksiyonlar meydana getirirler.

Burada denklemin $u(x) \equiv 0$ gibi bir çözümü vardır. Fakat öz değerler dediğimiz

$$\lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_n$$

sayılarının mevcut olması halinde bu denklem bunların her biri için

$$u_1(x), u_2(x),...,u_n(x)$$

gibi sonlu sayıda çözümler verir. Bu fonksiyonlara öz çözümler denir. c_n keyfi sabitler olmak üzere çözüm

$$u(x) = \sum c_n u_n(x)$$

şeklinde elde edilir. Eğer denklemle birlikte n tane başlangıç koşulu verilmişse c_n keyfi sabitleri tek anlamlı olarak bulunabilir.

2.6.İntegral Denklemlerle Diferensiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Başlangıç koşulları verilen değişken veya sabit katsayılı bir diferensiyel denklem Volterra tipindeki bir integral denkleme dönüştürülebilir. Tersine bir integral denklem de diferensiyel denkleme dönüştürülebilir. Dolayısıyla bir integral denklem, başlangıç koşullu bir diferensiyel denklem için ortaya konulan bir çözüm gösterilimi yardımıyla bir sınır değer problemi olarak görülebilir.

2.7. Diferensiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.23)$$

lineer diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $i = 1,2,...,n$ olmak üzere $a_i(x)$ fonksiyonları için başlangıç noktası bir düzgün noktadır. Ayrıca n tane,

$$y(0)=c_0\,,\; y'(0)=c_1\,,\ldots,\; y^{(n-1)}(0)=c_{n-1} \tag{2.24}$$

başlangıç koşulları da verilmiş olsun.

$$\frac{d^n y}{dx^n}=u(x) \tag{2.25}$$

dönüşümü yapılırsa buradan

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=u(x)$$

yazılabilir. Her iki tarafın 0 dan x e kadar integrali alınırsa

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\int_0^x u(x)dx$$

olur. Buradan

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int_0^x u(x)dx+c_{n-1}$$

elde edilir. Benzer şekilde aynı düşünceyle işlemlere bir adım daha devam edersek

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)=\int_0^x\left[\int_0^x u(x)dx+c_{n-1}\right]dx$$

$$=\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx+\int_0^x c_{n-1}dx+c_{n-2}$$

$$=\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx+c_{n-1}x+c_{n-2}$$

bulunur.Böylece

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}=\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(x)dxdxdx+\frac{1}{2!}c_{n-1}x^2+c_{n-2}x+c_{n-3}\,,$$

……………………

$$\frac{dy}{dx}=\underbrace{\int_0^x\int_0^x...\int_0^x u(x)dxdx...dx}_{(n-1)\text{ tane}}+\frac{1}{(n-2)!}c_{n-1}x^{n-2}+\frac{1}{(n-3)!}c_{n-2}x^{n-3}\quad\ldots+c_1$$

olduğu görülür. Tekrar integral alınmasıyla

$$y=\underbrace{\int_0^x\int_0^x...\int_0^x u(x)dxdx...dx}_{n\text{ tane}}+\frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1}+\frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_1\,x+c_0$$

bulunur. Bulduğumuz ifadeleri (2.23) te yerine yazarsak

$$u(x)+a_1(x)\int_0^x u(x)dx+c_{n-1}a_1(x)+a_2(x)\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx+c_{n-1}xa_2(x)+c_{n-2}a_2(x)+$$

$$a_3(x)\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(x)dxdxdx+\frac{1}{2!}c_{n-1}x^2\;a_3(x)+c_{n-2}xa_3(x)+c_{n-3}a_3(x)+\ldots$$

$$+a_{n-1}(x)\underbrace{\int_0^x\int_0^x...\int_0^x u(x)dxdx...dx}_{(n-1)\text{ tane}}+\frac{1}{(n-2)!}c_{n-1}x^{n-2}\;a_{n-1}(x)$$

$$+\frac{1}{(n-3)!}c_{n-2}x^{n-3}\;a_{n-1}(x)+\ldots+c_1a_{n-1}(x)+a_n(x)\underbrace{\int_0^x\int_0^x...\int_0^x u(x)dxdx...dx}_{n\text{ tane}}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1}\;a_n(x)+\frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2}\;a_n(x)+\ldots+c_1xa_n(x)+c_0a_n(x)=f(x)$$

bulunur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$u(x)+a_1(x)\int_0^x u(x)dx+a_2(x)\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx+a_3(x)\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(x)dxdxdx+\ldots+a_n(x)$$

$$\underbrace{\int_0^x\int_0^x...\int_0^x u(x)dxdx...dx}_{n\text{ tane}}=f(x)-c_{n-1}a_1(x)-c_{n-1}xa_2(x)-\ldots-\frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1}\;a_n(x)$$

$$-\ldots-c_{n-2}a_2(x)-c_{n-2}xa_3(x)-\ldots-\frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2}\;a_n(x)$$

$$-\ldots-c_1a_{n-1}(x)-c_1xa_n(x)-c_0a_n(x) \tag{2.26}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ yanı x in bir fonksiyonu olup bunu $F(x)$ ile gösterelim. Ayrıca

$$a_1(x)+xa_2(x)+\frac{x^2}{2!}a_3(x)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}a_n(x)=f_{n-1}(x)$$

$$a_2(x)+xa_3(x)+\ldots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}a_n(x)=f_{n-2}(x)$$

……………………..

$$a_{n-1}(x)+xa_n(x)=f_1(x)$$

$$a_n(x)=f_0(x)$$

denilirse (2.26) eşitliği

$$F(x)=f(x)-\left[c_{n-1}f_{n-1}(x)+c_{n-2}f_{n-2}(x)+\ldots+c_1f_1(x)+c_0f_0(x)\right]$$

olarak yazılır. Eşitliğin sol yanı da

$$\underbrace{\int_0^x\int_0^x\ldots\int_0^x u(t)dtdt\ldots dt}_{n\ \text{tane}}=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt \tag{2.27}$$

bağıntısı yardımıyla tek katlı integral olarak ifade edilebilir.(2.27) eşitliğinin doğru olduğunu bir sonraki adımda ispatlayacağız. Bu durumda

$$u(x)+a_1(x)\int_0^x u(x)dx+a_2(x)\int_0^x\int_0^x u(x)dxdx+a_3(x)\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(x)dxdxdx+\ldots+$$

$$a_n(x)\underbrace{\int_0^x\int_0^x\ldots\int_0^x u(x)dxdx\ldots dx}_{n\ \text{tane}}=F(x) \tag{2.28}$$

olup (2.27) kullanılarak

$$u(x)+a_1(x)\int_0^x u(t)dt+a_2(x)\int_0^x(x-t)u(t)dt+\ldots+a_n(x)\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt=F(x)$$

elde edilir..Bu ifadeyi

$$u(x)+\int_0^x \left[a_1(x)+a_2(x)(x-t)+a_3(x)\frac{(x-t)^2}{2!}+...+a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] u(t)dt = F(x)$$

olarak yazabiliriz. Köşeli parantezin içindeki ifadeyi $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olarak alırsak yani

$$K(x,t)=a_1(x)+a_2(x)\,(x-t)+\ldots+a_n(x)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

dersek

$$u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt = F(x)$$

şeklinde 2.tip Volterra integral denklemi elde edilir. Böylece (2.23) diferensiyel denklemi bir integral denkleme dönüşmüş olur.

Şimdi çok katlı integrali tek katlı integrale dönüştüren (2.27) eşitliğinin doğru olduğunu ispatlayalım:

Teorem 2.1: u sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\underbrace{\int_0^x\int_0^x ...\int_0^x u(t)dtdt...dt}_{n \text{ tane}} = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt \quad \text{dır.} \tag{2.29}$$

İspat: Önce $a \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere

$$\mathrm{I}_n = \int_a^x (x-t)^{n-1}u(t)dt \tag{2.30}$$

ifadesini göz önüne alalım. Burada n pozitif bir tamsayıdır.Eğer

$$F(x,t)=(x-t)^{n-1}\,u(t) \tag{2.31}$$

alınırsa, integral işareti altında türev alma kuralı kullanılarak

$$\frac{d\mathrm{I}_n}{dx}=(n-1)\int_a^x (x-t)^{n-2} u(t)dt+\left\{(x-t)^{n-1}u(t)\right\}_{t=x}$$

bulunur. Böylece $n>1$ için

$$\frac{d\mathrm{I}_n}{dx}=(n-1)\mathrm{I}_{n-1} \tag{2.32}$$

olur. Özel olarak $n=1$ ise (2.32) eşitliğinden

$$\frac{d\mathrm{I}_1}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x u(t)dt=u(x) \tag{2.33}$$

bulunur.(2.33) eşitliğinden türev almaya devam edilirse

$$\frac{d^2\mathrm{I}_n}{dx^2}=(n-1)(n-2)\mathrm{I}_{n-2}$$

$$\frac{d^3\mathrm{I}_n}{dx^3}=(n-1)(n-2)(n-3)\mathrm{I}_{n-3}$$

....

$$\frac{d^{n-1}\mathrm{I}_n}{dx^{n-1}}=(n-1)\,(n-2)\ldots 2.1\,.\,\mathrm{I}_1 \tag{2.34}$$

ve n. mertebeden türev için

$$\frac{d^n\mathrm{I}_n}{dx^n}=(n-1)!\frac{d\mathrm{I}_n}{dx}=(n-1)!\,u(x) \tag{2.35}$$

bulunur. $n\geq 1$ için $\mathrm{I}_n(a)=0$ olduğuna dikkat edersek (2.34) bağıntısından, $\mathrm{I}_n(x)$ ve bunun $(n-1)$. türevinin $x=a$ için sıfır olduğu görülür. Buradan geriye doğru integral alarak (2.33) ten

$$\mathrm{I}_1(x)=\int_a^x u(x)dx\,,$$

$$\mathrm{I}_2(x)=\int_a^x \mathrm{I}_1(x_2)dx_2=\int_a^x\int_a^{x_2} u(x_1)dx_1dx_2\,,$$

....

$$\mathrm{I}_n(x)=(n-1)!\int_a^x\int_a^{x_n}\int_a^{x_{n-1}}...\int_a^3\int_a^2 u(x_1)dx_1dx_2dx_3...dx_{n-1}dx_n$$

yazılabilir. Burada $x_1,...,x_n$ birer parametredir.Her iki yan $(n-1)!$ ile bölünür ve I_n yerine (2.30)da ki eşiti yazılırsa

$$\int_a^x\int_a^{x_n}\int_a^{x_{n-1}}...\int_a^3\int_a^2 u(x_1)dx_1dx_2dx_3...dx_{n-1}dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}u(t)dt$$

elde edilir. Burada $x=x_1=x_2=...=x_n$ alınırsa

$$\underbrace{\int_a^x\int_a^x...\int_a^x u(x)dxdx...dx}_{n\text{ tane}}=\int_a^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt$$

bulunur. Böylece $a=0$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

2.8.İntegral Denklemin Diferensiyel Denkleme Dönüştürülmesi

İntegral denklemin diferensiyel denkleme dönüştürülmesi için Leibnitz Formülünün uygulanması yeterlidir. Bu formül integral işareti altındaki türev alma ile ilgilidir. Leibnitz Formülü A, B türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)}F(x,t)dt=\int_{A(x)}^{B(x)}\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt+F[x,B(x)]\frac{dB}{dx}-F\,[x,A(x)]\frac{dA}{dx} \qquad (2.36)$$

olup $A(x)$ ve $B(x)$ in sabit olması halinde $\frac{dA}{dx}=0$ ve $\frac{dB}{dx}=0$ olur ve formül

$$\frac{d}{dx}\int_A^B F(x,t)dt=\int_A^B\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt$$

şekline gelir.

Örnek 2.3: $u(x)=x+\lambda\int_0^x xu(t)dt$ (2.37)

integral denklemini diferensiyel denkleme dönüştürelim.

Her iki yanın x e göre türevi alınırsa

$$\frac{du(x)}{dx}=\frac{d}{dx}x+\lambda\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt$$

$$=1+\lambda\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt$$

olur. Leibnitz formülünden

$$\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt=\int_0^x u(t)dt+xu(x)\frac{d}{dx}x-0$$

olup böylece

$$u'(x)=1+\lambda\left[\int_0^x u(t)dt+xu(x)\right]$$

bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$\frac{du'(x)}{dx}=0+\lambda\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt+\lambda\frac{d}{dx}[xu(x)]$$

ve buradan

$$u''(x)=\lambda u(x)+\lambda[u(x)+xu'(x)]$$

veya

$$u''(x)-\lambda xu'(x)-2\lambda u(x)=0$$

elde edilir. Bu da (2.34) integral denklemine karşılık gelen diferensiyel denklemdir.

2.9.İntegral Denklem Sistemleri

Uygulamalarda $i = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$u_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b K_{ik}(x,t) u_k(t) dt\,, \quad i = 1,\ldots,n \tag{2.38}$$

formundaki integral sistemi ile çok sık karşılaşılır.

Tanım 2.10:İntegral denklemin $K(x,t)$ çekirdeği yalnızca x in ve yalnızca t nin fonksiyonu olan büyüklüklerin çarpımından oluşan terimlerin toplamından ibaretse yani

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)$$

biçiminde ise $K(x,t)$ çekirdeğine ***dejenere çekirdek*** denir.

Yalnız bir integral denklemin çözümü için kullanılan metotlar integral denklem sistemleri için de geçerlidir. Eğer

$$\int_a^b \left|K_{ik}(x,t)\right|^2 dt$$

integrali mevcut ve λ parametresi

$$|\lambda| < \left[\underset{1 \le i \le n}{Max} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\int_a^b \int_a^b \left|K_{ik}(x,t)\right|^2 dx dt} \right]^{-1}$$

olacak şekilde yeterince küçük seçilebiliyorsa ardışık yaklaştırma yakınsak olur. Eğer $K_{ik}(x,t)$ çekirdeği dejenere tipten ise (2.38) sistemi bir lineer cebirsel denklem sistemine indirgenebilir. Bu durumda dejenere çekirdekli integral denklemler için uygulanan yöntemler burada da kullanılabilir.

Böylece bir integral denklem sistemi tek bir integral denkleme dönüştürülebilir.

x ve t değişkenleri, başlangıç aralığı $[a,b]$ olan ve $(b-a)$ uzunluğunun n katı olan $[a, nb-(n-1)a]$ şeklinde ki aralıklar sisteminde bulunsun. Burada

$$nb-(n-1)a-a=n(b-a)$$

olduğu açıktır. Bu aralığa göre,

$$a+(i-1)\,(b-a)\leq x<a+i\,(b-a)$$

$$a+(k-1)\,(b-a)\leq t<a+k\,(b-a)$$

olmak üzere $u_i(x)$, $f_i(x)$ ve $K_{ik}(x,t)$ fonksiyonları

$$\phi(x)=u_i[x-(i-1)(b-a)]$$

$$F(x)=f_i[x-(i-1)(b-a)]$$

$$K(x,t)=K_{ik}[x-(i-1)(b-a),t-(k-1)(b-a)]$$

şeklinde tek türlü ifade edilebilir. Bu durumda (2.38) sistemi

$$\phi(x)=F(x)+\lambda\int_a^{nb-(n-1)a}K(x,t)\phi(t)dt$$

şeklindeki integral denklemi yardımıyla tek bir denklem olarak gösterilebilir.

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1.Fredholm İntegral Denklemleri

2.tip bir lineer Fredholm İntegral Denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (3.1)$$

formundadır. Burada $u(x)$ bilinmeyen $K(x,t)$ ve $f(x)$ ise bilinen fonksiyonlardır. Tersine bir durum belirtilmedikçe $K(x,t)$ fonksiyonunun $a \le x \le b$; $a \le t \le b$ karesel bölgede tanımlı ve sürekli olduğu kabul edilecektir. $K(x,t)$ nin sürekli olmadığı bazı hallerde de

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt$$

integralinin sonlu bir değeri olabilir. $f(x) \equiv 0$ ise (3.1) denklemi

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (3.2)$$

şekline gelir ve bu denkleme homojen tipten integral denklemi denir.

3.2.Sabit Çekirdekli İntegral Denklemler

(3.1) denkleminin çekirdeğini $K(x,t) = c$ alırsak denklem

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b cu(t)dt \qquad (3.3)$$

olur..Bu denklemde $\lambda c = \mu$ dersek

$$u(x) = f(x) + \mu \int_a^b u(t)dt \qquad (3.4)$$

bulunur. (3.4) ifadesindeki belirli integralin sınırları sabit olduğu için integral değeri mevcuttur. Bu değeri A ile gösterip (3.4) fonksiyonunda yerine yazarsak ifade

$$u(x) = f(x) + \mu A \qquad (3.5)$$

şeklini alır.(3.4) fonksiyonu çözüm olduğundan $u(x)$ integral denklemini sağlar. Bunu tekrar (3.4) fonksiyonunda yerine yazarsak

$$f(x) + \mu A = f(x) + \mu\int_a^b (f(t) + uA)dt,$$

olur.Buradan

$$A\left(1-\mu\int_a^b dt\right) = \int_a^b f(t)dt$$

ve buradan da

$$A = \frac{1}{1-\mu(b-a)}\int_a^b f(t)dt$$

bulunur. Burada $1-\mu(b-a) \neq 0$ olmalıdır.Diğer taraftan $f(x)$ bilindiği için A değeri hesaplanabilir.Bulunan A yı (3.5) denkleminde yerine yazarsak çözüm olan $u(x)$ fonksiyonu

$$u(x) = f(x) + \mu\left[\frac{1}{1-\mu(b-a)}\int_a^b f(t)dt\right]$$

şeklinde bulunur. $\mu = \lambda c$ yerine yazılır ve düzenlenirse

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda c}{1-\lambda c(b-a)}\int_a^b f(t)dt \qquad (3.6)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı bilinen değerler olduğu için (3.6) ifadesi sabit çekirdekli Fredholm denklemlerinin çözümüdür. Volterra integral denklemlerinde integralin sınırlarından birisi değişken olduğu için A bir sabit değer değildir ve üstteki gibi bir çözüm bulamayız.

Örnek 3.1: $u(x) = \sin x + 2\int_0^1 u(t)dt$ integral denklemini çözelim.

$$A = \int_0^1 u(t)dt\,, \quad u(x) = \sin x + 2A$$

olur. Buradan

$$\sin x + 2A = \sin x + 2\int_0^1 (\sin t + 2A)dt$$

$$= \sin x - 2\cos 1 + 2 + 4A$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse $A = \cos 1 - 1$ bulunur.Bu durumda çözüm de

$$u(x) = \sin x + 2\,(\cos 1 - 1)$$

olur.

3.3.Çekirdeğin Değişkenlerine Ayrılabilir Olması (Dejenere Çekirdekler)

Fredholm İntegral denkleminde çekirdeğin

$$K(x,t) = r(x)s(t) \tag{3.7}$$

şeklinde dejenere çekirdek olduğunu kabul edelim. Bu durumda integral denklem

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b r(x)s(t)u(t)dt \tag{3.8}$$

$$= f(x) + \lambda r(x)\int_a^b s(t)u(t)dt$$

şeklinde yazılabilir.

$$A = \int_a^b s(t)u(t)dt$$

denirse (3.8) denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda A r(x) \tag{3.9}$$

şeklini alır. Bu da integral denklemin çözümüdür. O halde denklemi sağlar.(3.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$f(x) + \lambda A r(x) = f(x) + \lambda r(x) \int_a^b [f(t) + \lambda A r(t)] s(t) dt$$

olur. Buradan

$$A \left[1 - \lambda \int_a^b r(t) s(t) dt \right] = \int_a^b f(t) s(t) dt$$

elde edilir. Böylece

$1 - \lambda \int_a^b r(t) s(t) dt \neq 0$ olmak üzere

$$A = \frac{\int_a^b f(t) s(t) dt}{1 - \lambda \int_a^b r(t) s(t) dt}$$

bulunur. Bu ifadedeki integraller hesaplanarak (3.9) da yerine yazılırsa

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda \int_a^b f(t) s(t) dt}{1 - \lambda \int_a^b r(t) s(t) dt} \tag{3.10}$$

elde edilir. Bu da (3.8) denkleminin çözümüdür.

Örnek 3.2: $u(x) = \sin x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \; u(t) dt$ (3.11)

dejenere çekirdekli integral denklemini çözelim.

$r(x) = \sin x$ ve $s(t) = \cos t$ olmak üzere verilen integral denklemi

$$u(x)=\sin x+\lambda \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t u(t) dt$$

şeklinde yazabiliriz.

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t u(t) dt$$

olduğundan çözüm

$$u(x)=\sin x+\lambda A \sin x \qquad (3.12)$$

olur. Bunu (3.11) de yerine yazarsak

$$\sin x+\lambda A \sin x=\sin x+\lambda \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(\sin t+\lambda A \sin t) dt$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt+\lambda A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$$

elde edilir. İntegraller hesaplandığında

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt=\frac{1}{2} \text{ ve } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt=1$$

olur. Böylece $A=\frac{1}{2}+\lambda A=\frac{1}{2-2\lambda}$ bulunur. Bunu (3.12) denkleminde yerine yazarsak integral denklemin çözümü

$$u(x)=\sin x+\sin x \frac{\lambda}{2-2\lambda}$$

şeklinde ortaya çıkar.

3.4.Dejenere Çekirdeğin Genel Hali1

Dejenere çekirdeğin genel hali

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n} r_i(x)s_i(t) \tag{3.13}$$

şeklindedir. Bu çekirdeği

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

Fredholm integral denkleminde yerine yazarsak denklem

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \sum_{i=1}^{n} r_i(x)s_i(t)u(t)dt$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b [r_1(x)s_1(t)+r_2(x)s_2(t)+...+r_n(x)s_n(t)]u(t)dt \tag{3.14}$$

şekline gelir. $r_i(x)$leri integralin dışına alır ve

$$A_1=\int_a^b s_1(t)u(t)dt\ ;\ A_2=\int_a^b s_2(t)u(t)dt\ ;\ldots;\ A_n=\int_a^b s_n(t)u(t)dt$$

dersek (3.14) denklemi

$$u(x)=f(x)+\lambda[A_1r_1(x)+A_2r_2(x)+...+A_nr_n(x)] \tag{3.15}$$

şeklini alır. Bu da çözümdür.Yani (3.14) denklemini sağlar. Bunu (3.14) te yerine yazarsak

$$f(x)+\lambda[A_1r_1(x)+A_2r_2(x)+...+A_nr_n(x)]$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b [r_1(x)s_1(t)+r_2(x)s_2(t)+...+r_n(x)s_n(t)]\,[f(t)+\lambda(A_1r_1(t)+...+A_nr_n(t))]dt$$

olur. Bu ifade de yine $r_i(x)$ler integral dışına alınır, sadeleştirmeler yapılır ve $r_i(x)$ fonksiyonlarının katsayıları birbirine eşitlenirse

$$A_1=\int_a^b s_1(t)[f(t)+\lambda A_1r_1(t)+...+\lambda A_nr_n(t)]dt$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3.16}$$

$$A_n = \int_a^b s_n(t)[f(t) + \lambda A_1 r_1(t) + \ldots + \lambda A_n r_n(t)]dt$$

bulunur. Bu ifadedeki integraller ayrılıp

$$B_1 = \int_a^b s_1(t) f(t) dt \,, \quad , B_n = \int_a^b s_n(t) f(t) dt$$

$$c_{11} = \int_a^b s_1(t) r_1(t) dt \,, \quad , c_{1n} = \int_a^b s_1(t) r_n(t) dt$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_{n1} = \int_a^b s_n(t) r_1(t) dt \,, \quad c_{nn} = \int_a^b s_n(t) r_n(t) dt$$

şeklinde düzenlenirse (3.16) bağıntısı

$$A_1 = B_1 + \lambda \, A_1 c_{11} + \lambda A_2 c_{12} + \ldots + \lambda A_n c_{1n}$$

$$A_2 = B_2 + \lambda \, A_1 c_{21} + \lambda A_2 c_{22} + \ldots + \lambda A_n c_{2n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = B_n + \lambda \, A_1 c_{n1} + \lambda A_2 c_{n2} + \ldots + \lambda A_n c_{nn}$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned}
&(1 - \lambda c_{11})A_1 - \lambda c_{12} A_2 - \lambda c_{13} A_3 - \ldots - \lambda c_{1n} A_n = B_1 \\
&- \lambda c_{21} A_1 + (1 - \lambda c_{22}) A_2 - \lambda c_{23} A_3 - \ldots - \lambda c_{2n} A_n = B_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \lambda c_{n1} A_1 - \lambda c_{n2} A_2 - \lambda c_{n3} A_3 - \ldots + (1 - \lambda c_{nn}) A_n = B_n
\end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklinde bir lineer sisteme ulaşılır. Bu sistemin katsayılar matrisini $D(\lambda)$ ile gösterirsek sistemin çözümünün olması için $D(\lambda) \neq 0$ olmalıdır. Yani

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda c_{11} & -\lambda c_{12} & -\lambda c_{13} & \dots & -\lambda c_{1n} \\ -\lambda c_{21} & 1-\lambda c_{22} & -\lambda c_{23} & \dots & -\lambda c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda c_{n1} & -\lambda c_{n2} & -\lambda c_{n3} & \dots & 1-\lambda c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. $D(\lambda)$ determinantına karakteristik determinant denir. $D(\lambda)\neq 0$ ise integral denklemin bir çözümü vardır. Cramer yöntemi gereğince A_i çözümleri

$$A_i=\frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} \qquad i=1,\dots,n \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki $D_i(\lambda)$ lar $D(\lambda)$ determinantının i-yinci sütunun kaldırılarak yerlerine $B_1, B_2, \dots B_n$ sabitlerinin konulması ile oluşan matrisin determinantıdır.(3.18) değerleri (3.15) te yerine yazılırsa $u(x)$ çözümü bulunur.

Örnek3.3: $u(x)=1+\lambda\int_0^{2\pi}\sin(x+t)u(t)dt$ (3.19)

integral denkleminin çözümünü bulalım.

$$K(x,t)=\sin(x+t)=\sin x\,\cos t+\sin t\,\cos x$$

olup burada

$$r_1(x)=\sin(x);\, r_2(x)=\cos(x);\;\; s_1(t)=\cos(t) \qquad s_2(t)=\sin(t)$$

dir. $K(x,t)$ çekirdeğini (3.19)da yerine yazar ve düzenlersek

$$u(x)=1+\lambda\left[\sin x\int_0^{2\pi}\cos t u(t)dt+\cos x\int_0^{2\pi}\sin t u(t)dt\right]$$

olur. Böylece

$$A_1=\int_0^{2\pi}\cos t u(t)dt\,; \qquad A_2=\int_0^{2\pi}\sin t u(t)dt$$

olmak üzere buradan

$$u(x)=1+\lambda\ (A_1 \sin x + A_2 \cos x) \tag{3.20}$$

elde edilir.(3.20) yi (3.19) da yazar ve düzenlersek

$$1+\lambda\ (A_1 \sin x + A_2 \cos x) = 1+\lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\ [1+\lambda(A_1 \sin t + A_2 \cos t)]\ dt$$

olur. Buradan

$$A_1 \sin x + A_2 \cos x = \sin x \int_0^{2\pi} \cos t dt + \lambda A_1 \sin x \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt + \lambda A_2 \sin x \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$$

$$+\cos x \int_0^{2\pi} \sin t dt + \lambda A_1 \cos x \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \lambda A_2 \cos x \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt \tag{3.21}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = 0\ ; \qquad \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt = 0\ ; \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi\ ; \qquad \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0\ ;$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi$$

olup bu değerler (3.21) de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$A_1 \sin x + A_2 \cos x = \lambda\pi A_2 \sin x + \lambda\pi A_1 \cos x$$

bulunur. Böylece

$$A_1 = \lambda\pi A_2$$

$$A_2 = \lambda\pi A_1$$

veya

$$A_1 - \lambda\pi A_2 = 0$$

$$A_2 - \lambda\pi A_1 = 0$$

olur. Uygun bir aralıktaki her λ için bu sistem sağlanıyorsa $A_1 = A_2 = 0$ olmak zorundadır. A_1 ve A_2 (3.20) de yazılırsa $u(x)=1$ çözümü elde edilir.

3.5.Çözücü Çekirdek(Resolvent)

Bir önceki kesimde bulduğumuz $D(\lambda)$ determinantında $i.$sütun kaldırılarak yerlerine $B_1, B_2,...B_n$ sabitlerini koymuş ve elde edilen determinantı $D_i(\lambda)$ ile göstermiştik. $D_i(\lambda)$ determinantının $i.$ sütun elemanlarına göre açılım yapılır ve bu elemanlara ait eşçarpanlar Δ ile gösterilirse

$$D_i(\lambda) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} B_i \Delta_{ji}$$

yazılabilir. Bu durumda (3.18) ile verilen A_i sabitleri,

$$A_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} B_i \Delta_{ji} \qquad (3.22)$$

şeklinde olur. B_i sabitlerini

$$B_i = \int_a^b s_i(t) f(t) dt$$

şeklinde tanımlamıştık. B_i ler (3.22) de yerine yazılırsa

$$A_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \Delta_{ji} \int_a^b s_i(t) f(t) dt$$

bulunur. A_i ler

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} r_i(x) \int_a^b s_i(t) u(t) dt$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} r_i(x)\, A_i$$

$$= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} r_i(x) \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \Delta_{ji} \int_a^b s_i(t) f(t) dt \right]$$

$$= f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} r_i(x) \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \Delta_{ji} \right] s_i(t) \right\} f(t) dt \tag{3.23}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$D(x,t;\lambda) = \left\{ \left[\sum_{i=1}^{n} r_i(s) \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \Delta_{ji} \right] s_i(t) \right\}$$

dersek (3.23) eşitliği

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b D(x,t;\lambda) f(t) dt \tag{3.24}$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} f(t) dt \tag{3.25}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.1: $R(x,t;\lambda) = \dfrac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$ ifadesine çözücü çekirdek denir.

Bu ifade (3.25) te yerine yazılırsa integral denklemin çözümü

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t) dt \tag{3.26}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1: Bir integral denklemin $R(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeği tektir.

İspat: İspat için R_1 ve R_2 gibi iki farklı çözücü çekirdek olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.26) dan

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_1(x,t;\lambda) f(t) dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_2(x,t;\lambda) f(t) dt$$

yazılabilir. İki bağıntı taraf tarafa çıkarılırsa

$$\lambda \left[\int_a^b (R_1(x,t;\lambda) - R_2(x,t;\lambda)) f(t) dt \right] = 0$$

olur. $\lambda \neq 0$ ve $f(x) \neq 0$ olduğundan bu integralin 0 olması ancak

$$R_1(x,t;\lambda) \text{ - } R_2(x,t;\lambda) = 0$$

olması ile mümkündür. Yani

$$R_1(x,t;\lambda) = R_2(x,t;\lambda)$$

dir. O halde $R(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdği tektir.

3.6.İtere Çekirdek

Bir integral denklemde $K(x,t)$ çekirdeğinin $K_2(x,t); K_3(x,t)$;…;$K_n(x,t)$ile gösterilen ve sırasıyla 2. mertebeden; 3.mertebeden;…;n. mertebeden itere çekirdek olarak adlandırılan başka şekilleri de verilebilir. Örneğin 2.mertebeden bir itere çekirdek y değişken olmak üzere

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,y) K(y,t) dy \tag{3.27}$$

şeklindedir.3. mertebeden bir itere çekirdek ise benzer olarak

$$K_3(x,t) = \int_a^b K(x,y) K_2(y,t) dy$$

$$= \int_a^b K(y,y_1) \left[\int_a^b K(y_1,y_2) K(y_2,t) dy_2 \right] dy_1$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(y,y_1) K(y_1,y_2) K(y_2,t) dy_2 dy_1$$

şeklinde yazılabilir. İşlemlere devam edilirse n. mertebeden bir itere çekirdek

$$K_n(x,t)=\underbrace{\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K(x,y_1)\,K(y_1,y_2)..K(y_{n-1},t)\,dy_1dy_2...dy_{n-1}}_{n-1 \text{ tane}}$$

olur.

m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere bir itere çekirdeği

$$K_{m+n}(x,t)=\int_a^b K_m(x,y)\,K_n(y,t)\,dy$$

şeklinde de gösterebiliriz. Bu bağıntılarda görüldüğü gibi itere çekirdekteki integral sayısı değişkenlerin sayısına eşittir.

Örnek3.4: $a=-1$ ve $b=1$ olmak üzere $K(x,t)=x-t$ fonksiyonu için itere çekirdekleri bulalım.

$$K_1(x,t)=K(x,t)=x-t\ ,$$

$$K_2(x,t)=\int_{-1}^{1}K(x,s)K_{(1)}(s,t)ds\ \int_{-1}^{1}(x-s)(s-t)ds=\int_{-1}^{1}\left(xs-xt-s^2+st\right)ds$$

$$=-2xt-\frac{2}{3},$$

$$K_3(x,t)=\int_{-1}^{1}K(x,s)K_2(s,t)ds=\int_{-1}^{1}(x-s)\left(-2st-\frac{2}{3}\right)ds=\ \frac{-4(x-t)}{3},$$

$$K_4(x,t)=\int_{-1}^{1}K(x,s)K_3(s,t)ds=\int_{-1}^{1}(x-s)\left(\frac{-4(x-t)}{3}\right)ds=\frac{8}{3}\left(xt+\frac{1}{3}\right)$$

$$K_5(x,t)=\int_{-1}^{1}K(x,s)K_{(4)}(s,t)ds=\int_{-1}^{1}(x-s)\frac{8}{3}\left(xt+\frac{1}{3}\right)ds=\frac{16}{9}(x-t)$$

$$K_6(x,t)=\int_{-1}^{1}K(x,s)K_{(5)}(s,t)ds=\int_{-1}^{1}(x-s)\frac{16}{9}(x-t)ds=-\frac{32}{9}\left(xt+\frac{1}{3}\right)$$

işlemlere bu şekilde devam edilirse $k=1,...,n$ olmak üzere

$n = 2k-1$ için $K_{2k-1}(x,t) = \left(-\frac{4}{3}\right)^{k-1}(x-t)$

$n = 2k$ için $K_{2k}(x,t) = \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{3^{k-1}}\left(xt + \frac{1}{3}\right)$

bulunur.

Örnek3.5: $a = 0$ ve $b = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $K(x,t) = \sin(x-t)$ için $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ itere çekirdeklerini bulalım

$$K_1(x,t) = K(x,t) = \sin(x-t)$$

$$K_2(x,t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,s)K_1(s,t)ds$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-s)\sin(s-t)ds$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[\cos(x-s-s+t) - \cos(x-s+s-t)]ds$$

$$= \frac{1}{4}[2\sin(x+t) - \pi\cos(x-t)]$$

bulunur.

Örnek 3.6: $a = 0$ ve $b = 1$ için

$$K(x,t) = \begin{cases} x+t & ;0 \le x < t \\ x-t & ;t < x \le 1 \end{cases}$$

olmak üzere. $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ itere çekirdeklerini bulalım.

$$K_1(x,t) = K(x,t),$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K(s,t)ds$$

olup $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu simetrik olmadığı için $x<t$ ve $t<x$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

$x<t$ hali: $x<t$ iken üç farklı durum söz konusudur. Yani

$0<s<x<t<1$ için çekirdek I_1,

$0<x<s<t<1$ için çekirdek I_2,

$0<x<t<s<1$ için çekirdek I_3

olsun. O halde $x<t$ halinde üstteki ifadeden $K_2(x,t)=I_1+I_2+I_3$ olarak alınabilir. Buradan

$$I_1=\int_0^x (x-s)(s+t)ds=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2t}{2},$$

$$I_2=\int_x^t (x+s)(s+t)ds=\int_x^t \left(xs+xt+st+s^2\right)ds=\frac{3xt^2}{2}+\frac{5t^3}{6}-\frac{3x^2t}{2}-\frac{5x^3}{6},$$

$$I_3=\int_t^1 (x+s)(s-t)ds=\int_t^1 \left(xs-xt+s^2-st\right)ds=-\frac{xt^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{x}{2}-xt-\frac{t}{2}+\frac{1}{3},$$

bulunur. Böylece $K_2(x,t)$ çekirdeği

$$K_2(x,t)=t^3-\frac{4x^3}{6}-x^2t+xt^2-xt+\frac{x}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}$$

olarak elde edilir.

$t<x$ hali: Yine üç farklı durum söz konusudur. Tamamen benzer şekilde

$0<s<t<x<1$ için çekirdek I_1,

$0<t<s<x<1$ için çekirdek I_2,

$0<s<t<x<1$ için çekirdek I_3

olmak üzere $K_2(x,t)=I_1+I_2+I_3$ yazılabilir.Böylece

$$I_1 = \int_0^t (x-s)(s+t)ds = \int_0^t (xs + xt - s^2 - st)ds = \frac{3xt^2}{2} - \frac{5t^3}{6},$$

$$I_2 = \int_t^x (x-s)(s-t)ds = \int_t^x (xs - xt - s^2 + st)ds = \frac{x^3}{6} - \frac{t^3}{6} - \frac{x^2 t}{2} + \frac{xt^2}{2},$$

$$I_3 = \int_x^1 (x+s)(s-t)ds = \int_x^1 (xs - xt + s^2 - st)ds = -\frac{5}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 t + \frac{x-t}{2} - xt + \frac{1}{3},$$

olup $t < x$ için $K_2(x,t) = I_1 + I_2 + I_3 = -t^3 - \frac{2}{3}x^3 + 4xt^2 + x^2 t - xt + \frac{x-t}{2} + \frac{1}{3}$

elde edilir.

3.7.Ardışık Yaklaşıklıklar Metodu

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (3.28)$$

integral denkleminin ilk yaklaşımı olarak $\lambda = 0$ durumunu alalım.

$\lambda = 0$ için $u(x) = f(x) = \phi_0(x)$

tir. Bunu $u_0(x)$ ile göstererek (3.28) in sağ tarafında yerine yazalım. Elde edilen yeni fonksiyon $u_1(x)$ olsun.Yani

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u_0(t)dt \qquad (3.29)$$

dır. Diğer taraftan

$$\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt = \phi_1(x) \qquad (3.30)$$

denilirse (3.29) ifadesi

$$u_1(x) = f(x) + \lambda\phi_1(x)$$

ve $f(x) = \phi_0(x)$ olduğu için

$$u_1(x) = \phi_0(x) + \lambda\phi_1(x) \tag{3.31}$$

yazılabilir. $u_1(x)$ i çözüm olarak (3.28) de tekrar kullanırsak

$$u_2(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.31) ifadesi (3.32) de yerine yazılırsa

$$u_2(x) = \phi_0(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)(\phi_0(t) + \lambda\phi_1(t))dt$$

$$= \phi_0(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt + \lambda^2\int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt \tag{3.33}$$

olur. Diğer taraftan

$$\phi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt \tag{3.34}$$

diyelim.(3.34) ve (3.31) eşitlikliklerini (3.33) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$u_2(x) = u_0(x) + \lambda\ \phi_1(x) + \lambda^2\ \phi_2(x)$$

elde edilir. İşlemlere benzer şekilde devam edilirse

$$u_n(x) = u_0(x) + \lambda\ \phi_1(x) + \lambda^2\ \phi_2(x) + \ldots + \lambda^n\ \phi_n(x) \tag{3.35}$$

serisi bulunur. Burada

$$\phi_n(x) = \int_a^b K(x,t)\phi_{n-1}(t)dt \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{3.36}$$

dır.Böylece (3.28) den

$$u(x) = u_0(x) + \lambda\ \phi_1(x) + \lambda^2\ \phi_2(x) + \ldots + \lambda^n\ \phi_n(x) + \ldots \tag{3.37}$$

serisi elde edilir. O halde

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

tir. λ nın mutlak değeri yeterince küçük olursa (3.37) serisi düzgün yakınsak olur. Bu serinin limiti de integral denklemin çözümü olur.Şimdi (3.37) serisinin hangi koşullar altında yakınsak olduğunu inceleyelim.

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan sınırlı bir fonksiyondur. Yani

$$|f(x)| < A$$

olacak şekilde bir A reel sayısı vardır. $K(x,t)$ fonksiyonu da $a \le x,t \le b$ aralığında sürekli bir fonksiyondur. Aynı şekilde

$$|K(x,t)| < M$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır. Diğer taraftan (3.36) bağıntısını göz önüne alırsak

$$|\phi_0(x)| < A \text{ ve } |\phi_1(x)| < MA(b-a)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\phi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt$$

olduğundan

$$|\phi_2(x)| < M^2 A(b-a)^2$$

yazılabilir. İşlemlere devam edilirse

$$|\phi_n(x)| = \left|\int_a^b K(x,t)\phi_{n-1}(t)dt\right| < MAM^{n-1}(b-a)^{n-1}(b-a) = M^n A(b-a)^n$$

yazılabilir. Böylece

$$A + |\lambda|\, AM(b-a) + |\lambda^2|\, AM^2(b-a)^2 + \ldots + |\lambda^n|\, AM^n(b-a)^n + \ldots \qquad (3.38)$$

serisi elde eilir. Bu seri (3.37) serisinin majorantıdır. Bu seride $|\lambda|\, M\,(b-a)$

ifadesi her terimde ortaktır. Bunu q ile gösterip ifadeyi A parantezine alırsak

$$A\left(1+q+q^2+...+q^n+...\right)$$

şeklinde bir geometrik seri elde ederiz. Bu serinin yakınsak olması için $|q|<1$ olmalıdır. Yani

$$|q|=|\lambda|\,M(b-a)<1$$

veya buradan

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)} \tag{3.39}$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Eğer λ sayıları (3.39) eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilirse (3.38) serisi yakınsak olur.Böylece karşılaştırma kriterinden dolayı (3.37) serisi yakınsak olur.Sonuç olarak (3.37) serisinin toplamı da integral denklemin çözümünü verir.(3.39) şartı yakınsaklık için yeterli, fakat gerekli değildir.

Örnek 3.7: $u(x)=1+\int_0^1 xt^2u(t)dt$ (3.40)

integral denklemini ardışık yaklaşıklıklar yöntemi ile çözelim. (3.29) , (3.33), (3.35) ve (3.36) dan

$$u_0(x)=\phi(x)=1,$$

$$u_1(x)=1+x\int_0^1 t^2 1dt=1+\frac{x}{3},$$

$$u_2(x)=1+x\int_0^1 t^2\left(1+\frac{t}{3}\right)dt=1+x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}\right),$$

$$u_3(x)=1+x\int_0^1 t^2\left[1+t\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}\right)\right]dt=1+x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\frac{1}{4^2}\right),$$

……………………

$$u_n(x)=1+x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots\right),$$

$$=1+\frac{x}{3}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots\right)$$

bulunur. $r=\frac{1}{4}<1$ için parantez içinde ki geometrik seri yakınsak olup buradan

$$u(x)=1+\frac{4x}{9}$$

çözümü elde edilir.

3.8.Ardışık Yaklaşıklıklar Yöntemindeki Çözümün Tekliği

Teorem 3.2: $u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt$ (3.41)

integral denklemi verilsin ve

a) λ sabit ve $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$

b) $f(x)\neq 0$ ve $[a,b]$ aralığında sürekli

c) $|K(x,t)|<M$ ve $K(x,t)\neq 0$

koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu takdirde (3.41) integral denkleminin tek bir $u(x)$ çözümü vardır.

İspat: (3.41) denkleminin $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ gibi farklı iki çözümünün olduğunu kabul edelim. Yani

$$u_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt \tag{3.42}$$

$$u_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_2(t)dt \tag{3.43}$$

olsun. Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$u_1(x)\text{-}u_2(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)(u_1(t)-u_2(t))dt$$

bulunur. $u_1(x)\text{-}u_2(x)=v(x)$ diyelim. O halde

$$v(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)v(t)dt$$

dır. $u_1(x)\neq u_2(x)$ olduğundan $v(x)\neq 0$ dır. $v(x)$ in mutlak değerinin karesi alınıp Schwartz Eşitsizliği uygulanırsa

$$|v(x)|^2<|\lambda|^2\int_a^b |K(x,t)|^2 dt\int_a^b |v(t)|^2 dt$$

olur. Buradan x e göre integral alınırsa

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx<|\lambda|^2 M^2(b-a)^2\int_a^b |v(t)|^2 dt$$

yazılabilir. Buradan

$$\left[1-|\lambda|^2 M^2(b-a)^2\right]\int_a^b |v(x)|^2 dx<0 \qquad (3.44)$$

elde edilir. a) şartından dolayı $|\lambda|\, M\,(b-a)<1$dir,yani

$$1-|\lambda|^2 M^2(b-a)^2>0$$

dır.(3.44)ün sağlanması için

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx<0$$

olmalıdır. Fakat pozitif bir fonksiyonun integrali negatif olamıyacağı için bu bir çelişkidir, dolayısıyla $v(x)\equiv 0$ olmalıdır.Yani her x için

$$u_1(x)=u_2(x)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.9.Neumann Serisi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t)dt \tag{3.45}$$

integral denklemine ardışık yaklaşıklıklar yöntemini uygulayalım.

$$u_0(x) = f(x)$$

alınıp (3.45) denkleminde yazılırsa

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)dt$$

bulunur. Öte yandan $t = t_1$ için

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t_1) f(t_1)dt_1$$

elde edilir. Tekrar bunu (3.45) denkleminde kullanırsak

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,t_1) f(t_1)dt_1 \right] dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(x,t) K(t,t_1) f(t_1)dt_1 dt \tag{3.46}$$

olur. Diğer taraftan

$$K_2(x,t_1) = \int_a^b K(x,t) K(t,t_1)dt$$

olduğundan (3.46) ifadesi

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x,t_1) f(t_1)dt_1 \tag{3.47}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde $u_3(x)$ hesaplanırsa

$$u_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b K_{(2)}(x,t_1) f(t_1)dt_1 + \lambda^3 \int_a^b K_{(3)}(x,t_1) f(t_1)dt_1 \tag{3.48}$$

bulunur. Böylece t_1 yerine t yazıp işlemlere devam edilirse

$$u_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2\int_a^b K_{(2)}(x,t)f(t)dt + \ldots + \lambda^n\int_a^b K_{(n)}(x,t)f(t)dt \quad (3.49)$$

elde edilir. Ayrıca

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt + \ldots + \lambda^n\int_a^b K_n(x,t)f(t)dt \right]$$

$$= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^b K_{(n)}(x,t)f(t)dt \quad (3.50)$$

bulunur.

Tanım 3.2:(3.50) serisine Neumann ya da Liouville serisi denir.

$|f(x)| < A$ ve $|K(x,t)| < M$ olacak şekilde A ve M

pozitif reel sayıları varsa (3.50) serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz. Şimdi hangi koşullar altında (3.50) serisinin yakınsak olduğunu araştıralım.

$$\left|\lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt\right| \leq |\lambda|\, MA|b-a|$$

eşitsizliğinden hareketle 2.mertebeden itere çekirdek için

$$|K_{(2)}(x,t)| < M^2|b-a|,$$

olmak üzere

$$\left|\lambda^2\int_a^b K_{(2)}(x,t)f(t)dt\right| \leq |\lambda^2|M^2A|b-a|^2$$

eşitsizliği yazılabilir. Böyle devam edilirse

$$\left|\lambda^n \int_a^b K_{(n)}(x,t) f(t) dt\right| \le |\lambda^n| M^n A |b-a|^n$$

bulunur. Böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_{(n)}(x,t) f(t) dt \le N\left[\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda M(b-a)|^n\right] \qquad (3.51)$$

yazılabilir. $q = \lambda M(b-a)$ denirse

$$q = |\lambda M(b-a)| < 1$$

olması halinde (3.51) in sağında ki geometrik seri yakınsak olur. Bu koşulu daha önce

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \qquad (3.52)$$

olarak belirtmiştik. Bu durumda (3.50) Neumann serisi de yakınsak olur. (3.52) ile verilen yakınsaklık aralığı daha da genişletilebilir.

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt} \qquad (3.53)$$

olmak üzere integral hesabın ortalama değer teoremine göre

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dx dt} \le M(b-a)$$

yazılabileceğinden

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \qquad (3.54)$$

için (3.50) serisi yine yakınsak olur. Çünkü $|K(x,t)| < M$ değeri karesel bölgenin bir noktasında büyük bir değer alarak M yi büyütebilir ve

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

ifadesinde λ yı küçültebilir. Fakat (3.53) integrali hacmi verdiğinden genellikle

$$B < M(b-a)$$

olur. O halde

$$|\lambda| < \frac{1}{B}$$

den λ için daha büyük bir değer elde edilir.

Örnek 3.8: $u(x) = 2x + \lambda \int_0^1 x^2 t u(t) dt$

integral denkleminin yakınsaklık aralığını genişletelim.

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{1.1} \Rightarrow |\lambda| < 1 \text{ olup}$$

$$B = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 (x^2 t)^2 dxdt} = \left[\int_0^1 \int_0^1 x^4 t^2 dxdt\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

elde edilir. $\quad |\lambda| < \frac{1}{B} \Rightarrow |\lambda| < \sqrt{15}$

olur ve böylece yakınsaklık aralığı daha da genişlemiş olur.

3.10.Çözücü Çekirdeğin Ardışık Çekirdekler Yardımıyla Oluşturulması

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u(t) dt$$

integral denklemini ardışık yaklaşıklıklar yöntemi ile çözerken

$$u(x) = f(x) + \lambda^n \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \qquad (3.55)$$

serisini elde etmiştik. Burada

$$\phi_1(x)=\int_a^b K(x,t)\phi_0(t)dt\ ,$$

$$\phi_2(x)=\int_a^b K(x,t)\phi_1(t)dt=\int_a^b K_{(2)}(x,t)f(t)dt$$

$$\phi_3(x)=\int_a^b K(x,t)\phi_2(t)dt=\int_a^b K_{(3)}(x,t)f(t)dt$$

olmak üzere $\phi_n(x)$fonksiyonları itere çekirdekler yardımıyla belirtilebilir.

$$K_{(n)}(x,t)=\int_a^b K(x,t_1)K_{(n-1)}(t_1,t)dt_1$$

olmak üzere (3.55)serisini

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\lambda^{n-1} \tag{3.56}$$

olarak alabiliriz. Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\lambda^{n-1}=\phi_1(x)+\lambda\ \phi_2(x)+\ldots+\lambda^{n-1}\ \phi_n(x)+\ldots$$

$$=\int_a^b K_1(x,t)f(t)dt+\lambda\int_a^b K_2(x,t)f(t)dt+\ldots+\lambda^{n-1}\int_a^b K_n(x,t)f(t)dt+\ldots$$

$$=\int_a^b\left[K_1(x,t)+\lambda K_2(x,t)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,t)+\ldots\right]f(t)dt$$

dır.

Tanım 3.3: $R(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}K_{(n)}(x,t)\lambda^{n-1}$ (3.57)

ifadesine $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun Neumann Serisi denir. Bu seri

$$B=\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt}$$

olmak üzere

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \tag{3.58}$$

için yakınsaktır. $R(x,t;\lambda)$ resolvantını (3.56) da yerine yazarsak

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t) dt$$

ifadesi çözüm olarak bulunur. Resolvant (3.58) şartı için yakınsak olmakla beraber

$$|\lambda| > \frac{1}{B}$$

için de integral denklemin çözümü var olabilir.

Örnek 3.9: $u(x) = 1 + \lambda \int_0^1 u(t) dt$

integral denkleminde $K(x,t) \equiv 1$ ve dolayısıyla

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 K^2 dxdt = \int_0^1 \int_0^1 dxdt = 1$$

ve $|\lambda| < \frac{1}{B}$ den $|\lambda| < 1$ için (3.56) serisi yakınsaktır. Diğer yandan bu denklem

$|\lambda| > 1$ için de çözülebilir.

$\lambda \neq 1$ ise $u(x) = \frac{1}{1-\lambda}$ fonksiyonu verilen integral denklemin çözümüdür.

Bazı Fredholm denklemleri için Neumann Serisi λ nın her değeri için çözücü çekirdeğe yakınsar.

3.11.Ortogonal Çekirdekler

Tanım 3.4: $K(x,t)$ ve $L(x,t)$ gibi iki çekirdek alalım. $a \leq x,t \leq b$ olmak üzere x ve t nin belli değerleri için

$$\int_a^b K(x,z)L(z,t)dz = 0\,,\ \int_a^b L(x,z)K(z,t)dz = 0$$

şartları sağlanıyorsa $[a,b]\times[a,b]$ karesel bölgesinde $K(x,t)$ ve $L(x,t)$ çekirdeklerine ortogonal (dik) tir denir.

Sonuç: $K(x,t)$ ve $L(x,t)$ iki çekirdek olmak üzere bu çekirdeklerden biri iki değişkene göre tek, diğeri iki değişkene göre çift ise simetrik aralık üzerinde ortogonaldirler. Yani

$$L(-x,t) = -L(x,t)$$

$$L(x,-t) = -L(x,t)$$

$$K(-x,t) = K(x,t)$$

$$K(x,-t) = K(x,t)$$

şartları sağlanıyorsa $K(x,t)$ ve $L(x,t)$ çekirdekleri ortogonaldir. Yani

$$\int_{-b}^{b} K(x,z)L(z,t)dz = 0\,,\ \int_{-b}^{b} L(x,z)K(z,t)dz = 0$$

dır.

Örnek 3.10: $K(x,t) = xt$ ve $L(x,t) = x^4t^4$ çekirdekleri $[-1,1]\times[-1,1]$ karesel bölgesinde ortogonaldir. Gerçekten

$$\int_{-1}^{1} K(x,z)L(z,t)dz = \int_{-1}^{1} xzz^4t^4dz = 0$$

$$\int_{-1}^{1} L(x,z)K(z,t)dz = \int_{-1}^{1} x^4z^4ztdz = 0$$

olduklarından verilen karesel bölgede $K(x,t)$ ve $L(x,t)$ ortogonaldir.

Kendi kendine dik olan çekirdekler de vardır. Bu durumda $n \geq 2$ olmak üzere $K_{(n)}(x,t) \equiv 0$ olur ve çözücü çekirdek $K(x,t)$ ye eşittir. O halde Neumann Serisi yalnız bir terimden ibarettir ve λ nın her değeri için yakınsaktır.

Örnek 3.11: $K(x,t) = \sin(x-2t)\,; 0 \leq x \leq 2\pi\,,\quad 0 \leq t \leq 2\pi$ olsun.

$$\int_0^{2\pi} K(x,z)K(z,t)dz = \int_0^{2\pi} \sin(x-2z)\sin(z-2t)dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(x-3z+2t) - \cos(x-2t-z)]dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\sin(x-3z+2t) + \sin(x-2t-z)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 0$$

Yani $R(x,t;\lambda) \equiv \sin(x-2t)$ dir ve Neumann serisi λ nın her değeri için yakınsaktır.

Teorem 3.3:Eğer $M(x,t)$ ve $N(x,t)$ çekirdekleri ortogonal ise $K(x,t) = M + N$ çekirdeğine karşılık gelen $R(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeği;$M(x,t)$ çözücü çekirdeğine karşılık gelen $R_1(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeği ile $N(x,t)$ çözücü çekirdeğine karşılık gelen $R_2(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeğinin toplamına eşittir.

Örnek 3.12: $K(x,t) = xt + x^4t^4\,,\qquad a = -1\,, b = 1$

çekirdeği için çözücü çekirdeği bulalım.

$M(x,t) = xt$ ve $N(x,t) = x^4t^4$ çekirdeklerinin $[-1,1]\times[-1,1]$ karesinde ortogonal olduklarını daha önce göstermiştik. $K(x,t)$ çekirdeğinin çözücü çekirdeği $M(x,t)$ ve $N(x,t)$ çekirdeklerinin çözücü çekirdeklerinin toplamına eşittir. Gerçekten

$$R_M(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}M_{(n)}(x,t)\lambda^{n-1}=M_1(x,t)+\lambda\, M_2(x,t)+\ldots+\lambda^{n-1}\, M_n(x,t)+\ldots$$

$$M_1(x,t)=M(x,t)=xt$$

$$M_2(x,t)=\int_{-1}^{1}xt_1t_1tdt_1=\frac{2}{3}xt$$

$$M_3(x,t)=\int_{-1}^{1}xt_1\frac{2}{3}t_1tdt_1=\frac{4}{9}xt=\left(\frac{2}{3}\right)^2 xt$$

....

$$M_n(x,t)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} xt$$

ve

$$R_M(x,t;\lambda)=\left[1+\lambda\frac{2}{3}+\lambda^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\lambda^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\ldots\right]xt$$

olup parantezin içi $r=\frac{2}{3}\lambda$ olan bir geometrik seridir. $r<1$ için seri yakınsaktır ve yakınsadığı değer $S_M=\frac{3}{3-2\lambda}$ dır.O halde $R_M(x,t;\lambda)=\frac{3xt}{3-2\lambda}$ dır.

Diğer taraftan

$$R_N(x,t;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}N_{(n)}(x,t)\lambda^{n-1}=N_1(x,t)+\lambda\, N_2(x,t)+\ldots+\lambda^{n-1}\, N_n(x,t)+\ldots$$

$$N_1(x,t)=x^4t^4,$$

$$N_2(x,t)=\frac{2}{9}x^4t^4,$$

$$N_3(x,t)=\left(\frac{2}{9}\right)^2 x^4t^4,$$

…………………..

$$N_n(x,t)=\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} x^4t^4$$

bulunur.O halde

$$R_N(x,t;\lambda)=\left[1+\frac{2}{9}\lambda+\left(\frac{2}{9}\right)^2\lambda^2+\ldots+\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots\right]x^4t^4$$

olup köşeli parantezin içi ortak çarpanı $r=\frac{2\lambda}{9}$ olan geometrik seridir. $r<1$

olduğundan bu seri de yakınsaktır.Serinin toplamı $S_n=\frac{9}{9-2\lambda}$ dır.

Yani $R_N(x,t;\lambda)=\frac{9x^4t^4}{9-2\lambda}$ dır.Teoremde 3.3 ten dolayı

$$R(x,t;\lambda)=R_M(x,t;\lambda)+R_N(x,t;\lambda)$$

$$R(x,t;\lambda)=\frac{3xt}{3-2\lambda}+\frac{9x^4t^4}{9-2\lambda}$$

bulunur. Şimdi çözümün yakınsaklık aralığını inceleyelim.

$$B^2=\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt=\int_a^b\int_a^b M^2(x,t)dxdt+\int_a^b\int_a^b N^2(x,t)dxdt$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\int_a^b\int_a^b M^2(x,t)dxdt=\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (xt)^2dxdt=\frac{4}{9} \text{ ve}$$

$$\int_a^b\int_a^b N^2(x,t)dxdt=\int_{-1}^1\int_{-1}^1 \left(x^4t^4\right)^2dxdt=\frac{4}{81}$$

elde edilir. Böylece

$$B^2=\frac{4}{9}+\frac{4}{81}=\frac{40}{81}=\frac{\sqrt{40}}{9}$$

bulunur. $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$ için çözüm yakınsak olacağından

$|\lambda| < \dfrac{9}{\sqrt{40}}$ için çözüm yakınsaktır.

3.12.Fredholm Metodu

Bu kesimde homojen olmayan Fredholm integral denklemleri için bir çözüm metodu inceleyeceğiz.

Riemann anlamında ki integral kavramından da bilindiği gibi bir toplamın limiti

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \,,\, \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

şeklindedir. Şimdi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (3.59)$$

integral denklemini inceliyelim. $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları sıfırdan farklı olsunlar. (a,b) aralığını t değişkenine göre

$$t_1 = a \,, t_2 = a + \Delta t \,, t_3 = a + 2\Delta t \,, \ldots , t_n = a + (n-1)\Delta t = b \,, \Delta t = \frac{b-a}{n}$$

şeklinde n parçaya bölelim. $K(x,t)\, u(t)$çarpımının bir yaklaşık değeri

$$K(x,t)\, u(t) \cong K(x,t_1)\, u(t_1) + K(x,t_2)\, u(t_2) + \ldots + K(x,t_n)\, u(t_n)$$

şeklinde yazılabilir. $\Delta t = dt$ yazılabileceğinden sol yanı dt ile çarpıp integrale geçelim. Bu durumda sağ yanın Δt ile çarpımının bir yaklaşık değerini buluruz. Buna göre

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = [K(x,t_1)u(t_1) + K(x,t_2)u(t_2) + \ldots + K(x,t_n)u(t_n)]\Delta t$$

olur. Bunu (3.59) de yazarsak

$$u(x) = f(x) + \lambda \Delta t \left[K(x,t_1)u(t_1) + K(x,t_2)u(t_2) + ... + K(x,t_n)u(t_n)\right] \tag{3.60}$$

bulunur. Aynı işlemleri x için de yaparsak

$$x_1 = a\,,\, x_2 = a + \Delta x\,,\, x_3 = a + 2\Delta x\,, \ldots,\, x_n = a + (n-1)\Delta x = b\,,\;\; \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

ve $\Delta t = \Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \Delta$ olmak üzere (3.60) dan

$$u(x_1) \cong f(x_1) + \lambda \Delta \left[K(x_1,t_1)u(t_1) + K(x_1,t_2)u(t_2) + ... + K(x_1,t_n)u(t_n)\right]$$

$$u(x_2) \cong f(x_2) + \lambda \Delta \left[K(x_2,t_1)u(t_1) + K(x_2,t_2)u(t_2) + ... + K(x_2,t_n)u(t_n)\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u(x_n) \cong f(x_n) + \lambda \Delta \left[K(x_n,t_1)u(t_1) + K(x_n,t_2)u(t_2) + ... + K(x_n,t_n)u(t_n)\right]$$

elde edilir. $i = 1,2,...,n$; $j = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$u(x_i) = u_i\,; u(t_i) = u_i\,; f(x_i) = f_i\,; K(x_i,t_j) = K_{ij}$$

dönüşümlerini yaparsak üstteki sistem

$$u_1 = f_1 + \lambda \Delta [K_{11}u_1 + K_{12}u_2 + ... + K_{1n}u_n]$$

$$u_2 = f_2 + \lambda \Delta [K_{21}u_1 + K_{22}u_2 + ... + K_{2n}u_n]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = f_n + \lambda \Delta [K_{n1}u_1 + K_{n2}u_2 + ... + K_{nn}u_n]$$

olarak yazılabilir. Bu sistem yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&(1 - \lambda\Delta K_{11})u_1 - \lambda\Delta K_{12}u_2 - \lambda\Delta K_{13}u_3 - \ldots - \lambda\Delta K_{1n}u_n = f_1 \\
&- \lambda\Delta K_{21}u_1 + (1 - \lambda\Delta K_{22})u_2 - \lambda\Delta K_{23}u_3 - \ldots - \lambda\Delta K_{2n}u_n = f_2 \\
&- \lambda\Delta K_{31}u_1 - \lambda\Delta K_{32}u_2 + (1 - \lambda\Delta K_{33})u_3 - \ldots - \lambda\Delta K_{3n}u_n = f_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&- \lambda\Delta K_{n1}u_1 - \lambda\Delta K_{n2}u_2 - \lambda\Delta K_{n3}u_3 - \ldots + (1 - \lambda\Delta K_{nn})u_n = f_n
\end{aligned} \tag{3.61}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin Cramer yöntemi ile çözülebilmesi için katsayılar determinantının sıfırdan farklı olması gerekir.Katsayılar determinantını $\Delta(\lambda)$ ile gösterelim.Yani

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\Delta K_{11} & -\lambda\Delta K_{12} & -\lambda\Delta K_{13} \ldots -\lambda\Delta K_{1n} \\ -\lambda\Delta K_{21} & 1-\lambda\Delta K_{22} & -\lambda\Delta K_{23} \ldots -\lambda\Delta K_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda\Delta K_{n1} & -\lambda\Delta K_{n2} & -\lambda\Delta K_{n3} \ldots 1-\lambda\Delta K_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.62}$$

olur. n parametresine bağlı $\Delta(\lambda)$ determinantı $n \to \infty$ için sonsuz satırlı ve sonsuz sütunlu bir determinant olarak düşünülebilir. Bu tür determinantlara Fredholm determinantları denir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \Delta(\lambda)=D(\lambda) \tag{3.63}$$

diyelim. $\Delta(\lambda)$ determinantı λ nın n-yinci dereceden bir polinomu olarak açılırsa

$$\Delta(\lambda)\,1-\frac{\lambda\Delta}{1!}\sum_{i=1}^{n}K_{ii}+\frac{\lambda^2\Delta^2}{2!}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{vmatrix}-\frac{\lambda^3\Delta^3}{3!}\sum_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{n}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij} & K_{ik}\\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jk}\\ K_{ki} & K_{kj} & K_{kk}\end{vmatrix}+\ldots$$

elde edilir. $n \to \infty$ için hesaplamada bu açılım λ ya göre bir üstel seriye dönüşür. $\Delta(\lambda)$ determinantında i-yinci sütun elemanlarının kaldırılarak yerlerine f_i fonksiyonlarının konmasıyla bulunan determinantları $\Delta_i(\lambda)$ ile gösterirsek

$$\Delta_i(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11} \ldots & f_1 & \ldots -\lambda\Delta K_{1n} \\ -\lambda\Delta K_{21} \ldots & f_2 & \ldots -\lambda\Delta K_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda\Delta K_{n1} \ldots & f_n & \ldots 1-\lambda\Delta K_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.64}$$

yazılabilir. $n \to \infty$ için limit alındığında (3.64) de sonsuz satırlı ve sonsuz sütunlu bir determinant olarak Fredholm determinantı olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_i(\lambda) = D(x,t;\lambda)$$

denilirse

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

yazılabilir. Bu değer (3.26) de yerine yazılırsa

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} f(t)dt$$

veya

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b D(x,t;\lambda) f(t)dt$$

olur. Şimdi $D(\lambda)$ ve $D(x,t;\lambda)$ ifadelerinin nasıl hesaplanacağını inceleyelim.(3.63) gereğince $\Delta(\lambda)$ açılımında $\sum$ işaretleri yerine integraller yazılırsa

$$D(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \Delta(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!}\int_a^b K(t_1,t_1)dt_1 + \frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 - \ldots +$$

$$\frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n \pm \ldots \tag{3.65}$$

olur. n-yinci terimdeki n katlı integral A_n ile gösterilirse (3.65) ifadesi kısaca

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n A_n \tag{3.66}$$

olarak ifade edilebilir. Benzer düşünceyle $\Delta_i(\lambda)$ açılımında toplam yerine alınıp yine n. terimindeki n katlı integral B_n ile gösterilirse

$$B_n(x,t)=\int_a^b\ldots\int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & K(x,t_2) & \ldots & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1\ldots dt_n \tag{3.67}$$

olacağından

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\lambda^n B_n(x,t) \tag{3.68}$$

elde edilir. $D(\lambda)$ ifadesine Fredholm Determinantı ; $D(x,t;\lambda)$ ifadesine ise Fredholmun 1.Minörü denir. Eğer $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu sınırlı ve

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt$$

integrali sonlu ise $D(\lambda)$ ve $D(x,t;\lambda)$ serileri λ nın her değeri için yakınsaktırlar. Ayrıca λ nın tam değerleri için birer analitik fonksiyon temsil ederler. Buna göre .

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

resolvantı da $D(\lambda)\neq 0$ için λ nın bir analitik fonksiyonudur. Eğer $\lambda=\lambda_0$ için $D(\lambda_0)=0$ oluyorsa $R(x,t;\lambda)$ nın bir kutbu var demektir. Resolvant hesaplandıktan sonra

$$u(x)=f(x)+\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b D(x,t;\lambda)f(t)dt$$

bağıntısı ile integral denklem çözülür.

3.13.Özdeğerler ve Özfonksiyonlar

$u(x)\equiv 0$ fonksiyonu

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt \tag{3.69}$$

formundaki 2 tipten homojen Fredholm integral denkleminin daima bir aşikar çözümüdür.

Ancak λ parametresinin bazı değerleri için özdeş olarak sıfır olmayan bazı çözümleri olabilir. λ parametresinin bu değerlerine (3.69) denkleminin veya $K(x,t)$ çekirdeğinin karakteristik sayıları denir. Bu karakteristik sayılara karşılık gelen sıfırdan farklı çözümlere de özfonksiyon denir.

$K(x,t)$ çekirdeği $[a,b]\times[a,b]$ karesinde sürekli veya bu karede kuadratik olarak toplanabilir ise her λ karakteristik sayısına sonlu sayıda lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelir. Bu fonksiyonların sayısına karakteristik denklemin indeksi denir.

$$u(x) = \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} r_i(x) s_i(t) \right] u(t) dt \tag{3.70}$$

integral denkleminin p $(p \leq n)$ karakteristikleri

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda c_{11} & -\lambda c_{12} & -\lambda c_{13} \ldots -\lambda c_{1n} \\ -\lambda c_{21} & 1-\lambda c_{22} & -\lambda c_{23} \ldots -\lambda c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda c_{n1} & -\lambda c_{n2} & -\lambda c_{n3} \ldots 1-\lambda c_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.71}$$

cebirsel denkeminin kökleridir. $D(\lambda)$ determinantı

$$\begin{aligned} &(1-\lambda c_{11})A_1 - \lambda c_{12}A_2 - \lambda c_{13}A_3 - \ldots - \lambda c_{1n}A_n = 0 \\ &-\lambda c_{21}A_1 + (1-\lambda c_{22})A_2 - \lambda c_{23}A_3 - \ldots - \lambda c_{2n}A_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-\lambda c_{n1}A_1 - \lambda c_{n2}A_2 - \lambda c_{n3}A_3 - \ldots + (1-\lambda c_{nn})A_n = 0 \end{aligned} \tag{3.72}$$

lineer, homojen cebirsel denklem sisteminin katsayılar determinantıdır. Eğer (3.71) denkleminin p $(1 \le p \le n)$ adet kökü varsa (3.70) denkleminin p tane karakteristik sayısı vardır. Her λ_m $(m = 1,2,...p)$ karakteristik sayısı (3.72) sisteminin sıfırdan farklı

$$\lambda_1 \to A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, ,..., A_n^{(1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_p \to A_1^{(p)}, A_2^{(p)}, ,..., A_n^{(p)}$$

çözümlerine karşılık gelir.(3.70) integral denkleminin bu çözümlere karşılık gelen sıfırdan farklı çözümleri yani özfonksiyonları

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} a_k(x) \quad , \; u_2(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} a_k(x), \ldots, u_p(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(p)} a_k(x)$$

şeklinde olur. Dejenere çekirdekli integral denkleminin en fazla n tane karakteristik sayısı ve bunlara karşılık gelen n tane özfonksiyonu vardır.

Her bir λ ya karşılık gelen $u(x)$ karakteristik fonksiyonunun bir c sabit katı da karakteristik fonksiyondur.

Örnek 3.13: $u(x) = \lambda \int_0^{\pi} \left(\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t\right) u(t) dt$ (3.73)

homojen integral denkleminin karakteristik sayılarını ve özfonksiyonlarını bulalım.

$$u(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^{\pi} (\cos 2t) u(t) dt + \lambda \cos 3x \int_0^{\pi} \left(\cos^3 t\right) u(t) dt$$

olmak üzere

$$A_1 = \int_0^{\pi} (\cos 2t) u(t) dt \quad \text{ve} \quad A_2 = \int_0^{\pi} \left(\cos^3 t\right) u(t) dt$$

dönüşümlerini yaparsak

$$u(x)=\lambda\cos^2 xA_1+A_2\lambda\cos 3x$$

bulunur. Bunu (3.73) te yerine yazarsak

$$\lambda\cos^2 xA_1+A_2\lambda\cos 3x=\lambda\cos^2 x\int_0^{\pi}(\cos 2t)(\lambda A_1\cos^2 t+\lambda A_2\cos 3t)dt+$$

$$\lambda\cos 3x\int_0^{\pi}(\cos^3 t)(\lambda A_1\cos^2 t+\lambda A_2\cos 3t)dt$$

olur. Diğer taraftan

$$A_1=\lambda A_1\int_0^{\pi}\cos 2t\cos^2 tdt+\lambda A_2\int_0^{\pi}\cos 2t\cos 3tdt=\lambda A_1\frac{\pi}{4}+\lambda A_2.0\,,$$

$$A_2=\lambda A_1\int_0^{\pi}\cos^3 t\cos^2 tdt+\lambda A_2\int_0^{\pi}\cos^3 t\cos 3tdt=\lambda A_1\,0+\lambda A_2\frac{\pi}{8}$$

bulunur. Böylece

$$A_1\left(1-\frac{\lambda\pi}{4}\right)=0\,,\ A_2\left(1-\frac{\lambda\pi}{8}\right)=0 \qquad (3.74)$$

elde edilir. Bu denklem sistemine karşılık gelen $D(\lambda)$ determinantını hesaplayıp sıfıra eşitlersek

$$\begin{vmatrix}1-\dfrac{\lambda\pi}{4} & 0\\ 0 & 1-\dfrac{\lambda\pi}{8}\end{vmatrix}=0$$

olup ve buradan da karakteristik değerler

$$\lambda_1=\frac{4}{\pi}\ \text{ve}\ \lambda_2=\frac{8}{\pi}$$

olarak bulunur. Bu λ değerlerini (3.74) de yerine yazarsak bunlara karşılık gelen özfonksiyon $A_2=0$ olduğu için sadece

$$u(x)=A_1\lambda\cos^2 x$$

şeklinde elde edilir.

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homojen Fredholm denklemi herhangi bir özdeğere ve özfonksiyona sahip olmayabilir. Sadece $u(x)\equiv 0$ çözümüne yani aşikar çözüme sahip olabilir. Aşikar çözüm olması A_i nin hesabındaki integrallerin hepsinin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür.

Örnek3.14: $u(x)=\lambda\int_0^1\left(\sqrt{x}t-\sqrt{t}x\right)u(t)dt$ denkleminin karakteristik sayısı ve öz fonksiyonu yoktur. Gerçekten

$$A_1=\int_0^1 tu(t)dt\,,\qquad A_2=\int_0^1\sqrt{t}u(t)dt \tag{3.75}$$

$$u(x)=A_1\lambda\sqrt{x}\text{ - }A_2\lambda x \tag{3.76}$$

olup (3.76) ; (3.75) te yerine yazılır ve işlemler yapılırsa

$$\left(1-\frac{2\lambda}{5}\right)A_1+\frac{\lambda}{3}A_2=0$$

$$-\frac{\lambda}{2}A_1+\left(1+\frac{2\lambda}{5}\right)A_2=0 \tag{3.77}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin determinantı

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3}\\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\frac{2\lambda}{5}\end{vmatrix}=1+\frac{\lambda^2}{150}$$

bulunur.Bu da sıfıra eşit olamayacağı için $A_1=A_2=0$ elde ederiz.Yani bu integral denklemin λ nın her değeri için $u(x)\equiv 0$ dan başka çözümü yoktur.

Tanım 3.5:_Bir integral denkleminin $K(x,t)$ çekirdeği $K(x,t)=K(t,x)$) eşitliğini sağlıyorsa $K(x,t)$ çekirdeğine simetrik çekirdek denir. Çekirdeği simetrik olan integral denklemlere de simetrik denklem denir.

3.14.Volterra İntegral Denklemleri

Tanım 3.6:$u(x)$ bilinmeyen, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{3.78}$$

şeklindeki integral denkleme ***2.tip homojen olmayan lineer Volterra integral denklemi*** denir. Eğer (3.78) de

$f(x) \equiv 0$ ise

$$u(x) = \lambda\int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{3.79}$$

denklemine ***2.tip lineer homojen Volterra integral denklemi*** denir.(3.79) tipindeki denklemler genellikle diferensiyel denkleme dönüştürülerek çözülürler.

3.15.Volterra İntegral Denkleminde Resolvant

Bu kesimde $0 \le x \le a$,$0 \le t \le x$ için $K(x,t)$ ve $0 \le x \le a$ için $f(x)$ fonksiyonu sürekli olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{3.80}$$

2.tip Volterra integral denkleminin

$$u(x)=u_0(x)+\lambda\, u_1(x)+\lambda^2 u_2(x)+\ldots+\lambda^n u_n(x)+\ldots \tag{3.81}$$

formunda bir kuvvet serisi şeklinde çözümünü araştıracağız. Bu seriyi (3.80) denkleminde yerine yazarsak

$$u_0(x) + \lambda\, u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \ldots + \lambda^n u_n(x) + \ldots$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\left[u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \ldots + \lambda^n u_n(x) + \ldots\right] dt \qquad (3.82)$$

elde edilir.(3.82) nin sağ yanını düzenleyip λ nın kuvvetlerine göre her iki yanı eşitlersek

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \int_0^x K(x,t) u_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \int_0^x K(x,t) u_1(t) dt,$$

....

$$u_n(x) = \int_0^x K(x,t) u_{n-1}(t) dt$$

elde edilir. $u_0(x)$ ifadesini $u_1(x)$ te yerine yazar ve bu işlemleri ardı ardına yaparsak

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \int_0^x K(x,t) f(t) dt,$$

$$u_2(x) = \int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1) f(t_1) dt_1\right] dt$$

$$= \int_0^x f(t_1) dt_1 \int_{t_1}^x K(x,t) K(t,t_1) dt$$

$$= \int_0^x K_{(2)}(x,t_1) f(t_1) dt_1$$

....

$$u_n(x) = \int_0^x K_{(n)}(x,t) f(t) dt \qquad n = 1,2,...$$

elde edilir. Bulunan $K_{(n)}(x,t)$ fonksiyonlarına itere çekirdekler veya ardışık çekirdekler denir. Ayrıca bu çekirdekler

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_{(n+1)}(x,t) = \int_t^x K(x,z) K_{(n)}(z,t) dz \qquad n = 1,2,... \qquad (3.83)$$

biçiminde de yazılabilir. Bu durumda (3.81) serisi (3.83) bağıntısının yardımıyla

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \int_0^x K_{(i)}(x,t) f(t) dt$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t)$ serisi $K(x,t)$ sürekli olduğundan mutlak ve düzgün yakınsak olup buna resolvant denir ve $R(x,t;\lambda)$ ile gösterilir. Yani

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i K_{(i+1)}(x,t) \qquad (3.84)$$

olup itere çekirdekler ve çözücü çekirdek integralin alt sınır değerinden bağımsızdır. $R(x,t;\lambda)$ çözücü çekirdeği hesaplandığı takdirde Volterra integral denkleminin çözümü

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda) f(t) dt \qquad (3.85)$$

olarak bulunur. Buda Fredholm denklemleri için bulunan bağıntı ile benzerdir.

Örnek3.15:Çekirdek fonksiyonu $K(x,t) = e^{x-t}$ olan Volterra denkleminin çözücü çekirdeğini bulalım.

$$K_1(x,t) = K(x,t) = e^{x-t},$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z) K_1(z,t) dz$$

$$= \int_t^x e^{x-z} e^{z-t} dz$$

$$= e^{x-t}(x-t)$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x K(x,z) K_2(z,t) dz$$

$$= e^{x-t} \frac{(x-t)^2}{2},$$

....

$$K_n(x,t) = e^{x-t} \frac{(x-t)^{n-1}}{n!}$$

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{(n+1)}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e^{x-t} \frac{(x-t)^n}{(n+1)!} = e^{x-t} e^{\lambda x - \lambda t} = e^{(1+\lambda)(x-t)}$$

bulunur.

Örnek3.16: $u(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} u(t) dt$ denkleminin çözümünü bulalım.

$K(x,t) = \frac{1+x^2}{1+t^2}$ olmak üzere önce çözücü çekirdeği bulalım.

$$K_1(x,t)=K(x,t)=\frac{1+x^2}{1+t^2},$$

$$K_2(x,t)=\int_0^x K(x,z)K_{(1)}(z,t)dz=x\left(\frac{1+x^2}{1+t^2}\right),$$

$$K_3(x,t)=\int_0^x K(x,z)K_{(2)}(z,t)dz=x^2\,\frac{1+x^2}{2(1+t^2)},$$

....

$$K_n(x,t)=\left(\frac{1+x^2}{1+t^2}\right)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

elde edilir.(3.84) eşitliğinden $\lambda=1$ olduğu da göz önüne alınarak

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^2}{1+t^2}\right)\frac{x^n}{n!}$$

elde edilir.(3.85) eşitliğinden

$$u(x)=1+x^2+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^2}{1+t^2}\right)\frac{x^n}{n!}(1+t^2)dt$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler yapılırsa çözüm

$$u(x)=(1+x^2)(1+e^x)$$

olarak elde edilir. Şimdi

$$u(x)=f(x)+\int_0^x K(x-t)u(t)dt \quad (\lambda=1) \tag{3.86}$$

tipinde ki Volterra tipi integral denklemi inceleyelim. Bu tip denklemlere konvolüsyon tipinden integral denklem denir.(3.86) nın her iki yanının Laplace dönüşümü alınırsa

$L(u(x))=\Phi(s),\ L(f(x))=F(s),\ L(K(x))=k(s)$ olmak üzere

$$L(u(x))=L(f(x))+L\left(\int_0^x K(x-t)u(t)dt\right)$$

$$\Phi(s)=F(s)+k(s)\,\Phi(s) \tag{3.87}$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-k(s)} \qquad k(s)\neq 1 \tag{3.88}$$

olur. Diğer taraftan (3.86) nın çözümünü

$$u(x)=f(x)+\int_0^x R(x-t)f(t)dt \tag{3.89}$$

biçiminde yazabiliriz.(3.89) un her iki yanının Laplace Dönüşümünü alırsak

$$\Phi(s)=F(s)+r(s)\,F(s)\Rightarrow r(s)=\frac{\Phi(s)-F(s)}{F(s)} \tag{3.90}$$

bulunur.(3.88) de bulduğumuz $\Phi(s)$ değerini (3.90) da yazarsak

$$r(s)=\frac{k(s)}{1-k(s)} \tag{3.91}$$

bulunur. $r(s)$ in ters Laplace dönüşümü, yani $R(x,t)$ fonksiyonu (3.86) integral denkleminin çözücü çekirdeğidir.

Örnek 3.17:Çekirdeği $K(x-t)=\sin(x-t)$ olan Volterra integral denkleminin çözücü çekirdeğini bulalım.($\lambda=1$)

$$k(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

(3.91) eşitliğini kullanırsak

$$r(s)=\frac{\frac{1}{s^2+1}}{1-\frac{1}{s^2+1}}=\frac{1}{s^2}=L(x)$$

elde edilir.O halde çözücü çekirdek

$$R(x,t;1)=x-t$$

olarak bulunur.

3.16.Euler İntegralleri

Bu kesimde önce Gamma ve Beta fonksiyonları yardımıyla Euler integral denklemini göreceğiz.

Tanım 3.7: z, $\operatorname{Re}(z) > 0$ olan herhangi bir kompleks sayı olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{3.92}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona ***Gamma fonksiyonu*** denir. Gamma fonksiyonuna 2.tip Euler integrali de denir.

$$z = 1 \text{ için} \quad \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \tag{3.93}$$

elde edilir.(3.92) ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1)$$

yani

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{3.94}$$

olur.(3.93) ve (3.94) eşitliklerinden z pozitif tamsayı olarak alınırsa yani $z = n$ için

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{3.95}$$

elde edilir. Analiz bilgilerinden

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

olduğunu biliyoruz. Burada $x = t^{\frac{1}{2}}$ dönüşümü yaparsak integral

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \sqrt{\pi}$$

elde edilir.(3.93) denklemini göz önüne alırsak üstteki ifadeden

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

olduğunu görürüz. Gamma fonksiyonunun (3.95) ile belirtilen özelliğini kullanarak

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

elde edilir. İşlemlere bu şekilde devam edilirse

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad (3.96)$$

bulunur. Burada n pozitif bir tamsayıdır.

Gamma fonksiyonu $z=0$ ve negatif tüm tamsayılarda tanımsızdır. Negatif ancak tamsayı olmayan reel sayılarda Gamma fonksiyonunun değerleri $m \in N$ olmak üzere $-m < x < -m+1$ için

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+m)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)}$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, 0 < x < 1$$

özelliği vardır. Diğer taraftan

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nx}\Gamma(nx)$$

bağıntısı mevcut olup buna Gauss-Legendre çarpım formülü denir.

Bu bağıntıda $n=2$ alınırsa

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}-2x}\Gamma(2x)$$

$$=\sqrt{\pi}\,2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}-2x}\Gamma(2x)$$

$$=2^{1-2x}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)$$

olduğu görülür.

$\mathrm{Re}\,z>0$ olmak üzere

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

integraline $e^{-t}=x$ dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda

$e^{-t}dt=-dx$, $t=0$ için $x=1$ ve $t\to\infty$ için $x=0$ olur.

$$t^{z-1}=\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}$$

olduğundan $\Gamma(z)$ fonksiyonu

$$\Gamma(z)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx \tag{3.97}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 3.8: $\mathrm{Re}\,m>0$ ve $\mathrm{Re}\,n>0$ olmak üzere

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \tag{3.98}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir. Beta fonksiyonuna 1.tip Euler integrali denir.

Beta ve Gamma fonksiyonları arasında

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{3.99}$$

şeklinde bir bağıntının olduğu gösterilebilir.

3.17.Birinci Tip Volterra İntegral Denkleminin Gamma-Beta Fonksiyonları Yardımıyla Çözümü

Bu kesimde önce $m \geq 0$ bir reel sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere

$$\int_0^x (x-t)^n u(t)dt = x^m \qquad (3.100)$$

biçimindeki 1.tip Volterra integral denklemini inceleyeceğiz. Bu denklem diferensiyel denkleme dönüştürülerek çözülebilir. Gamma-Beta fonksiyonları yardımıyla başka bir çözüm yolu daha vardır.

(3.100) denkleminin her iki yanını r doğal sayı olmak üzere $(z-x)^r$ ile çarpıp x e göre 0 ile z arasında integre edersek

$$\int_0^z (z-x)^r \left[\int_0^x (x-t)^n u(t)dt\right]dx = \int_0^z x^m (z-x)^r dx \qquad (3.101)$$

denklemi elde edilir. Burada tekrar $x = vz$ dönüşümünü yaparsak eşitliğin sağ tarafı

$$\int_0^z x^m (z-x)^r dx = \int_0^z (vz)^m (z-vz)^r zdv$$

$$= \int_0^z v^m z^m z^r (1-v)^r zdv$$

$$= z^{m+r+1} \int_0^z v^m (1-v)^r dv$$

$$= z^{m+r+1} B(m+1, r+1)$$

$$= z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)}; (m+r+1 > m \geq 0) \qquad (3.102)$$

olur. Eşitliğin sol tarafı

$$\int_0^z (z-x)^r \left[\int_0^x (x-t)^n u(t)dt \right] dx$$

$$= \int_0^z \left[\int_0^x (z-x)^r (x-t)^n u(t)dt \right] dx$$

$$= \int_0^z \left[\int_t^z (z-x)^r (x-t)^n dx \right] u(t)dt \qquad (3.103)$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Burada eğer $x = t + v(z-t)$ dönüşümünü yaparsak içteki integral

$$\int_t^z (z-x)^r (x-t)^n dx = (z-t)^{n+r+1} \int_0^1 (1-v)^r v^n dv$$

biçimine dönüşür. Bu ifade

$$(z-t)^{n+r+1} B(n+1, r+1) = (z-t)^{n+r+1} \frac{\Gamma(n+1).\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)} \qquad (3.104)$$

biçiminde yazılabilir.(3.102),(3.103),(3.104) bağıntıları düzenlenirse

$$\int_0^z \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)} (z-t)^{n+r+1} u(t)dt = z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1).\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)}$$

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+2)} \int_0^z (z-t)^{n+r+1} u(t)dt = z^{m+r+1} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(m+r+2)} \qquad (3.105)$$

elde edilir. Sadeleştirmeleri yapıp $n + r + 1 = h$ (h negatif olmayan bir sayı) dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(n+r+2) = \Gamma(h+1)$$

olur. $r = h - n - 1$ ve $m + r + 2 = m + h - n + 1$ alırsak

$$\Gamma(m+r+2) = \Gamma(m+h-n+1)$$

yazılabilir.(3.105) ifadesi yeniden düzenlenirse

$$\int_0^z (z-t)^h u(t)dt = z^{m+h-n}\,\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(h+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)} \qquad (3.106)$$

bulunur.(3.95) eşitliği gereğince

$$\Gamma(h+1) = h!$$

olup (3.106) ifadesi

$$\int_0^z \frac{(z-t)^h}{h!}u(t)dt = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+h-n+1)}\,z^{m+h-n}$$

biçiminde yazılabilir. Her iki tarafın z ye göre $h+1$ defa türevi alınırsa

$$u(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n)}\,z^{m-n-1} \qquad (3.107)$$

elde edilir. Bu ise (3.100) integral denkleminin çözümüdür.

Örnek 3.18: $\int_0^x (x-t)^3 u(t)dt = x^7$ integral denkleminin çözümünü araştıralım.

(3.100) integral denkleminde $n=3$ ve $m=7$ alınırsa verilen denklem ortaya çıkar. Şimdi (3.107) çözümünü bulalım.

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(8) = 7!,\ \Gamma(n+1) = \Gamma(4) = 3!,\ \Gamma(m-n) = \Gamma(4) = 3!$$

$m-n-1=3$ olup böylece (3.107) den

$$u(x) = \frac{\Gamma(8)}{\Gamma(4)\Gamma(4)}x^3 = 140x^3$$

elde edilir.

Örnek 3.19: $\int_0^x (x-t)^{\frac{2}{3}} u(t)dt = x^{\frac{7}{3}} - x^3$ integral denkleminin çözümünü bulalım.

Sağ yan fark şeklinde olduğu için sağ yandaki her terim için ayrı ayrı bulunan çözümler $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ ise denklemin çözümü

$$u(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

şeklinde olur.

$x^{\frac{7}{3}}$ terimi için $u_1(x)$ çözümü $n=\frac{2}{3}$ ve $m=\frac{7}{3}$ olmak üzere (3.107)

den

$$u_1(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right).\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}x^{\frac{2}{3}}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $n=\frac{2}{3}, m=3$ için (3.107) den $u_2(x)$ çözümü

$$u_2(x)=\frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}x^{\frac{4}{3}}=\frac{6x^{\frac{4}{3}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}$$

dır. Böylece verilen integral denklemin çözümü

$$u(x)=u_1(x)-u_2(x)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}x^{\frac{2}{3}}-\frac{6x^{\frac{4}{3}}}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}$$

şeklinde elde edilir.

3.18.Resolvantın Diferensiyel Denklem Yardımıyla Bulunması

Çekirdeği $(x-t)$ nin kuvvetlerinden oluşan

$$K(x,t)=a_0(x)+a_1(x)(x-t)+\ldots+\frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \tag{3.108}$$

biçiminde bir fonksiyon olan Volterra integral denkleminin resolvantını bulmaya çalışalım.

(3.108) denklemindeki $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ fonksiyonları $(0,a)$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlardır.Şimdi

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)g\right] = 0, \tag{3.109}$$

$$g\big|_{x=t} = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=t} = \left.\frac{d^2 g}{dx^2}\right|_{x=t} = \ldots = \left.\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\right|_{x=t} = 0, \left.\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\right|_{x=t} = 1 \tag{3.110}$$

başlangıç-değer problemini göz önüne alalım. Bu denklemin çözümü $g(x,t;\lambda)$ ile gösterilirse (3.108) ile verilen çekirdek fonksiyona ait resolvant

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n} \tag{3.111}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu, $t-x$ in bir fonksiyonu olarak

$$K(x,t) = b_0(t) + b_1(t)(t-x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1} \tag{3.112}$$

şeklinde verilirse buna ait resolvant (3.111) deki gibi

$$R(x,t;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dt^n} \tag{3.113}$$

olarak bulunur. Burada $g(x,t;\lambda)$ fonksiyonu (3.110) başlangıç koşullarını ve

$$\frac{d^n g}{dt^n} + \lambda\left[b_0(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} + b_1(t)\frac{d^{n-2}g}{dt^{n-2}} + \ldots + b_{n-1}(t)g\right] = 0 \tag{3.114}$$

diferensiyel denklemini sağlayan çözümdür.

Görüldüğü gibi $K(x,t)$ çekirdeğine ait resolvantın bulunuşunda diferensiyel denklem ve bunun çözümünden yararlanılmıştır.

Örnek 3.20: $\lambda = 1$ için çekirdek fonksiyonu $K(x,t) = x - t$ olan bir Volterra İntegral denklemine ait resolvantı bulalım.

Çekirdek fonksiyonu (3.108) ile karşılaştırırsak $a_1(x)=1$ olduğunu diğer katsayıların 0 olduğunu görürüz.(3.109) a bakarsak $n=2$ olduğu görülür.(3.109) u uygularsak

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - a_0(x)\frac{dg}{dx} - a_1(x)g = 0$$

elde edilir. $a_0(x)=0$, $a_1(x)=1$ konursa

$$\frac{d^2 g}{dx^2} - g = 0$$

elde edilir. Denklemin çözümü $g(x,t) = g(x,t:1)$ olduğundan

$$\frac{d^2 g(x,t;1)}{dx^2} - g(x,t;1) = 0$$

olarak yazılabilir. Bu denklemin çözümü ikinci dereceden sabit katsayılı bir lineer denklem olarak

$$g(x,t:1) = c_1(t)e^{-x} + c_2(t)e^{x} \tag{3.115}$$

şeklindedir. Şimdi (3.110) koşullarına göre $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ fonksiyonlarını bulacağız.

$$\frac{dg(x,t;1)}{dx} = -c_1(t)e^{-x} + c_2(t)e^{x}$$

olup iki ifade birlikte alınarak (3.110) başlangıç koşulları uygulanırsa,

$$c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{t} = 0$$

$$-c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{t} = 1$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}e^{t} \quad ; c_2(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$$

bulunur. Bunu (3.115) çözümünde yerine yazarsak

$$g(x,t;1) = -\frac{1}{2}e^{t}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-t}e^{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x-t} - e^{-(x-t)}\right]$$

$$= sh(x-t) \qquad (3.116)$$

elde edilir.(3.111) gereğince problemimizde ki koşullara uyan resolvant

$$R(x,t;1) = \frac{d^2 g(x,t;1)}{dx^2}$$

şeklinde olduğundan (3.116) nın ikinci mertebeden türevi resolvantı verecektir. Bu nedenle $g(x,t;1)$ türetilirse

$$R(x,t;1) = sh(x-t)$$

bulunur.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

“İntegral Denklemler“ isimli bu tez integral denklemler teorisinin önemli kavramlarını içermektedir ve tezde, teori örneklerle açıklanmaktadır. Bilindiği gibi belli tipten diferensiyel denklemler integral denkleme ve tersine belli tipten integral denklemler de diferensiyel denkleme dönüştürülebilmektedir.

Bu konu tezde detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca singüler çekirdekli integral denklemleri incelemek için bu tez uygun bir temel oluşturmaktadır. Tezde genel olarak Volterra ve Fredholm integral denklemlerinin çözüm metodları üzerinde durulmuştur. İntegral denklemleri çözmeden, çözümün varlık ve tekliğini araştırma bu teoride önemli bir araştırma konusudur.Varlık ve teklik koşullarının ortaya konulması için bu tez yine önemli bir temel oluşturmakla birlikte çözümün varlığı ve tekliği konusu tezde ele alınmamıştır. Ayrıca 19.yüzyıldan beri araştırma alanı olarak ortaya çıkan integral denklemler 20. yüzyılda sistemleştirilmiş ve gruplandırılarak çözüm metodları geliştirilmiştir. İntegral denklemler mühendislik ve fizikte genel olarak mekanik problemlerin incelenmesinde ortaya çıkmış olup uygulamalı bir konudur. İntegral denklemlerin uygulama alanı çok geniş olmakla birlikte daha çok diferensiyel denklemler teorisinde integral denklemler güçlü bir araç olarak kullanılır. Bu nedenlerden dolayı integral denklemler güncel bir konu olup çözüm metodları ve çözümlerin varlık-tekliği ile ilgili olarak orijinal sonuçlar ortaya konulabilir.

Bu tez integral denklem konusunda araştırma veya doktora öğrenimi yapmak isteyenler için iyi bir kaynak oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

1. Y. Aksoy; “Integral Denklemler”, Cilt 1,Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları No:343, İstanbul, 1998.
2. M. Krasnov, A. Kiselev, G. Makeronko; Integral Denklemler, Çeviri: Cevdet Cerit, İstanbul,1976.
3. I. G. Petrovsky; Lecturers On The Theory Of Integral Equations, Mir Publishers Moscow, translated from Russian by George Yankovsky,1975.
4. D. Porter, S.G. Stirling; Integral Equations, a Practical Treatment, From Spectral Theory To Applications, Cambridge University Pres, New York, 1990.
5. B. L. Moiseiwitsch; Integral Equations, Longman Group Limited, New York,1977.