T.C

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNSTEİN POLİNOMLARININ Q-ANALOĞU

AKİF BARBAROS DİKMEN

OCAK – 2009

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

…./…./……

____

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Doç. Dr. Ali ARAL
Danışman

Jüri Üyeleri

…………………………. _____________________________

…………………………. _____________________________

…………………………. _____________________________

…………………………. _____________________________

…………………………. _____________________________

ÖZET

BERNSTEİN POLİNOMLARININ Q-ANALOĞU

DİKMEN, AKİF BARBAROS

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ali ARAL

Ocak 2009, 52 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde limit, süreklilik modülü, lineer operatörler, ileri fark operatörü gibi temel kavramlar hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Bernstein polinomları, q-tamsayıları, q-Bernstein operatörleri hakkında bilgi verilmiştir.

Son bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Bernstein Polinomları, Lineer Operatörler, Korovkin Teoremi, Süreklilik Modülü, Rolle Teoremi, Dini Teorem

ABSTRACT

Q-ANALOGUE OF THE BERNSTEIN OPERATOR

DIKMEN, AKIF BARBAROS

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Advisor:Assoc. Prof. Dr. Ali ARAL

January 2009, 52 pages

This thesis consist of four chapters. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter The basic informations about limit modulus of continiuty, lineer operators, forward difference are given

In the third chapter, some informations and teorems about Bernstein operators, q-integers and q-Bernstein operators are given

The final chapter is reserved for discussion and conclusion.

Key words: Bernstein Polynomials, Lineer Operators, Korovkin Teorem, Modulus of Continuity, Rolle Teorem, Dini Teorem

TEŞEKKÜR

Bu çalışma ile ilgili her çeşit bilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Doç. Dr. Ali ARAL'a ve Yüksek Lisans arkadaşlarıma samimi yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Prof.Dr Mustafa Balcı nın Analize Giriş1[1] ve Analize Giriş 2[1] adlı kitaplarından faydalanılmıştır. q-tamsayıları ve Bernstein operatörleri ile ilgili tanım ve teoremler için George M.Philips'in 'Interpolation and Aproximation by Polynomials[2] 'isimli kitabından faydalanılmıştır.

q-Bernstein polinomları ve bunların yaklaşım ve simetri özellikleri hakkındaki bilgi ve teoremler için Sofiya Ostrovska'nın 'On the Lupaş q-analoque of the Bernstein operators[3]' adlı makalesinden yararlanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Özeti ve Amacı

Yaklaşımlar teorisi, matematiğin son yıllarda üzerinde daha fazla araştırmaların yapıldığı alanlardan birisi olmuştur. Bu alanda amaç, bir fonksiyon uzayının elamanlarını belirli bir noktada yada normda, bir uzayın bir alt uzayının veya daha iyi özelliklere sahip bir uzayın elamanlarından oluşmuş dizilerin limiti şeklinde gösterimini bulmaktır. Bu gösterimlere örnek olarak çok iyi bilinen Bernstein operatörlerinin q genellemesini gösterebiliriz. Bu genelleştirilmiş operatörler çok iyi bilinen Korovkin teoremini sağladığı aynı zamanda da klasik yaklaşım hızından daha hızlı yaklaşım hızına sahip oluduğu bilinmektedir.Bu önemli özelliklere sahip olan operatör için son yıllarda yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

$R_n(f,q;x):C[0,1]\to C[0,1]$,ile 1987 de Lupaş'ın tanımladığı Bernstein operatörünün bir q analoğu olduğunu gösterelim. Eğer $q=1$ olursa $R_n(f,1;x)$ klasik Bernsten operatörüdür. $q\neq 1$ için $R_n(f,q;x)$ operatörü, polinomdan daha çok rasyonel bir fonksiyonu ifade eder. Bu çalışma, $R_n(f,q;x)$ dizisinin yaklaşım özelliklerini vereceğiz. Herhangi $f(x)\in C[0,1]$ olması için gerek ve yeter şart $q_n\to 1$, $R_n(f,q_n;x)$ in, $f(x)$ e düzgün yakınsadığı ispatlanacaktır.

$q\neq 1$ olsun. $f(x)$ lineer olması için gerek ve yeter şart $R_n(f,q;x)$, $f(x)\in C[0,1]$ e düzgün yakınsamasıdır.

1912 de Bernstein ünlü Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatını vermiştir. Olasılık teorisini kullanarak günümüzde Bernstein polinomları olarak isimlendirilen polinomlar tanımlamıştır.

$\mathrm{f}(x):[0,1]\to R$ için f fonksiyonun Bernstein polinomu

$$(B_n)\, f(x):=\mathrm{B_n}(f;x):=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad \text{n=1,2,3,...}$$

dır.

Bernstein, eğer $f\in C[0,1]$ ise, $\{B_n(f;x)\}$ in $[0,1]$ aralığında $f(x)$ e düzgün yakınsadığını ispatlamıştır.

Bernstein polinomlarının teorileri hakkında sistematik yaklaşımlar 90'lı yıllardan sonra yayınlanmaya başlanmıştır[4,5]. Bu konuyla ilgili düzenli olarak makaleler yayınlanmakta ve her geçen gün yeni uygulamalar ve genellemeler keşfedilmektedir[6]. Bu konudaki ilk ilerlemeyi Lupaş yapmıştır. 1987 de Bernstein polinomlarının q-anoloğunu geliştirmiştir ve polinomlarının yaklaşım özelliklerini araştırmıştır. Bu çalışmada Lupaş operatörünün yaklaşımını içeren teoremler sunacağız.

1997 de Phillips'in[7], Bernstein polinomlarının q-tamsayılarına dayalı q-Bernstein polinomları olarak adlandırılan diğer bir genellemesini tanımlamıştır. q-Bernstein polinomları çok fazla ilgi toplamış ve çok geniş bir araştırmacı grubu tarafından üzerinde çalışılmıştır. Lupaş operatörleri tüm $q>0$ için pozitif lineer operatorler üretebilirken q-Bernstein operatörleri sadece $q\in(0,1)$ da lineer pozitif operator üretir, bu avantaja rağmen Lupaş operatörleri, q-Bernstein operatörlerinden daha az bilinir.

Lupaş $C[0,1]$ üzerindeki düzgün normuna göre $\{R_n(f,q;x)\}$ operatörünün yaklaşım özelliklerini araştırdı[8]. Özel olarak $f\in C[0,1]$ aralığında herhangi bir fonksiyona yakınsayan $R_n(f,q;x)$ dizisinin bazı özelliklerini ve yaklaşım modülü yardımı ile yaklaşım hızını elde etti.

Üçüncü bölümde ilk teoremimizde Bernstein operatörlerinin ileri fark operatörü yardımı ile gösterilmiştir. İkicisi; herhangi bir $f\in C[0,1]$için $R_n(f,q;x)$ bir yaklaşım dizisi olduğunu gösterilmiştir. Diğer bir ifadeyle $[0,1]$ üzerinde $R_n(f,q;x)$ in, $f(x)$'e düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şart $q_n\to1$ olmasıdır. Üçüncü teoremde $q\in(0,1)$ ve $q\in(1,\infty)$ durumlarında bir simetri kurulacak ve sonunda da $q\neq1$ olacak şekilde seçildiğinde $R_n(f,q;x)$ yakınsaklığını tartışılacaktır. Bu sonuçlar gösteriyor ki q sabit olduğunda $q=1$ klasik hali Lupaş operatörlerinin yaklaşımını sağlayan en iyi durumdur.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Dizilerde Limit ve Özellikleri

Tanım 2.1.1: $a \in R$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $K = \{x : |x - a| < \varepsilon,\ x \in \mathrm{R}\}$ kümesine a nın ε -komşuluğu denir(1).

Tanım 2.1.2: (s_n) bir reel sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için (s_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri bir s reel sayısının ε -komşuluğunda bulunuyorsa (s_n) dizisinin limiti s dir (veya s ye yakınsaktır) denir ve $s_n \to s$ şeklinde gösterilir(1).

2.2 Fonksiyonlarda Limit ve Özellikleri

Tanım 2.2.1: $A \subset R,\ f : A \to R$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $A - \{a\}$ kümesine ait olan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için elde edilen $(f(x_n))$ görüntü dizisi bir L sayısına yakınsıyorsa bu L sayısına f fonksiyonun a noktasındaki limiti denir ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.2: $A \subset R,\ f : A \to R$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a' ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2.3 (Fonksiyon Dizisi): $A \subset R$ ve $F(A)$ da A üzerine tanımlı reel fonksiyonların kümesi olsun.

$$s : N \to F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi veya değişken terimli dizi adı verilir[1].

Tanım 2.2.4 (Noktasal Yakınsaklık): (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ve herbir $x \in A$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \ge n_0$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Örnek 2.2.1: $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlanan (f_n) dizisi $A = [0,1]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 1 \ \text{ ise} \\ 1, & \text{x=1} \ \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Çünkü $0 \le x < 1$ için

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = 0$$

$x = 1$ ve $f_n(1) = 1^n = 1$ dir. Dolayısıyla

$$\lim f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \quad ise \\ 1, & \text{x=1} \qquad \text{ise} \end{cases}$$

olur.

Tanım 2.2.5 (Düzgün Yakınsaklık): (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyleki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon .$$

Örnek 2.2.2: $f_n(x) = x^n$ ve $r \in [0,1)$ olsun. (f_n) dizisi $[0,r)$ üzerinde f =0 fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Çünkü $0 \leq x \leq r$ olduğundan $x^n \leq r^n$ ve $r^n \leq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan herbir n için $x^n \leq \varepsilon$ kalır. Şimdi $r^n \leq \varepsilon$ eşitsizliğinin hangi n ler için sağlandığını görelim $\ln r < 0$ olduğundan

$$r^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln r < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln r}$$

olur. Buna göre $n_0 = \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln r}$ alınırsa $\forall n > n_0$ için $r^n < \varepsilon$ ve dolayısıyla

$\left| f_n(x) - f(x) \right| = x^n < \varepsilon$ bulunur ki bu da (f_n) dizisinin $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.1 (Rolle Teoremi): $f : [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a,b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

İspat : f nin (a,b) de aldığı en büyük değer M en küçük değer m olsun. Eğer $M = m$ ise fonksiyon sabit fonksiyon olur ki bu taktirde $f'(c) = 0$ olacağından teorem açıktır.

Şimdi $M \neq m$ olsun.Yani $m < M$ olsun. $f(a) = f(b)$ olduğundan fonksiyon hem M hem de m değerlerini aralığın bitim noktalarında alamaz. Kabul edelim ki f fonksiyonu M değerini $c \in (a,b)$ noktasında alsın. Fermat teoreminden dolayı $f'(c) = 0$ olur böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.2 (Weierstrass Teoremi): f , $[a,b]$ de sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda verilen bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir cebirsel polinom vardır ki $[a,b]$ de

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

dir.

İspat : Bernstein polinomu yardımıyla ve Korovkin teoremini kullanarak ispatı yapalım. $f, [0,1]$ de sürekli bir fonksiyon ve $x \in [0,1]$ olmak üzere Bernstein polinomu;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklindedir.

Şimdi fonksiyonların operatör altında görüntülerini hesaplayalım.

İlk önce

$$B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=(1-x+x)^h$$

$$=1,$$

$$B_n(t;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-(k+1))!}x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}x^k(1-x)^{(n-1)-k}$$

$$=x,$$

$$B_n(t^2;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{((k-1)+1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)!}{k!\left((n-1)-k\right)!}x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$=\frac{x^2}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-1)!}{k!\left((n-2)-k\right)!}x^k(1-x)^{(n-2)-k}+\frac{x}{n}$$

$$=x^2\frac{(n-1)}{n}+\frac{x}{n}=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$$

$[0,1]$ üzerinde $n\to\infty$ için

$$B_n(1;x)\longrightarrow 1$$

$$B_n(t;x)\longrightarrow x$$

$$B_n(t^2;x)\longrightarrow x^2$$

elde edilir. O halde Korovkin teoremi gereğince $\forall f\in C[0,1]$ için $[0,1]$de

$$B_n(f;x)\longrightarrow f(x)$$

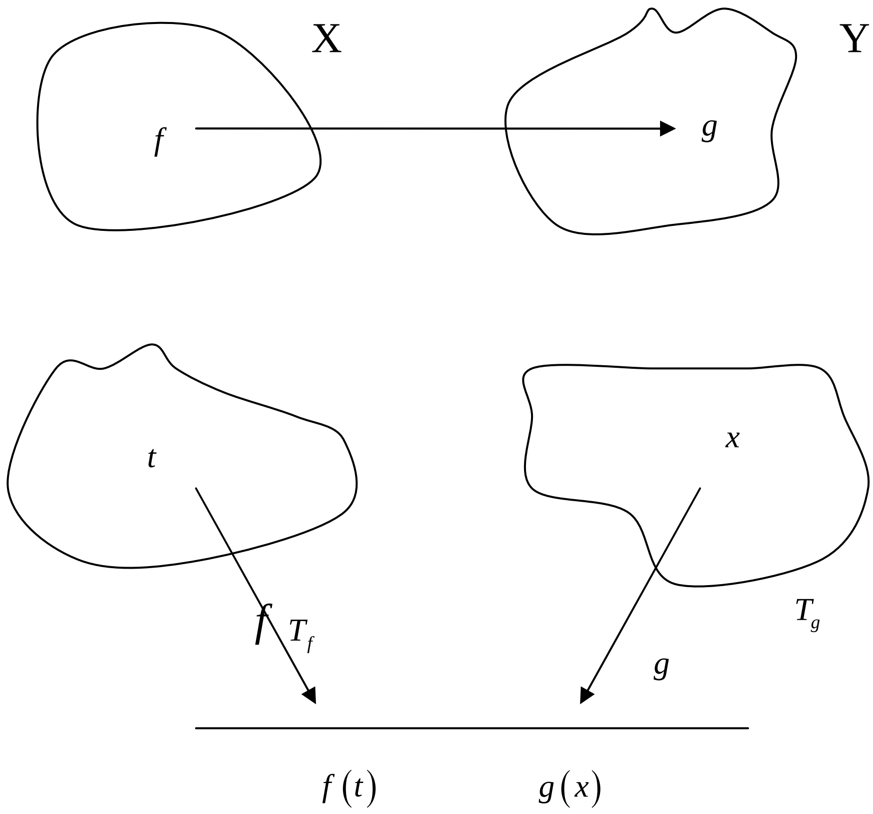
dir.

Teorem 2.2.3 (Dini teorem): (f_n) fonkisyon dizisi olsun. (f_n) e noktasal yakınsak ve (f_n) monoton fonksiyonların bir dizisi ise $f_n\to f$ dir.

Tanım 2.2.6 (Lineer Operatörler): X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. (Aynı zamanda lineer uzaylardır)

$$L:X\longrightarrow Y$$
$$f\longrightarrow L(f)=g$$

dönüşümüne operatör denir.



$L(f) = g$ yerine $L\big(f(t;x)\big) = g(x)$ gösterimini kullanıyoruz.

Tanım 2.2.7: X ve Y lineer uzaylar olsun.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall f_1, f_2 \in X$ için

$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L(f_1) + \beta L(f_2)$ sağlanıyorsa L ye lineer operatör denir.

$f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ ise L lineer operatörüne lineer pozitif operatör denir.

$f(t) \leq g(t)$ olsun $g(t) - f(t) \geq 0$ dır.

$L\big(g(t) - f(t);\big) \geq 0 \Rightarrow L\big(g(t);x\big) - L\big(f(t);x\big) \geq 0 \Rightarrow$

$L\big(g(t);x\big) \geq L\big(f(t);x\big)$ dir. Bu özelliğe monotonluk özelliği denir.

L lineer pozitif operatör olsun. L nin monotonluğundan

$-|f| \le f \le |f|$ olması nedeniyle $L\left(-|f|;x\right) \le L\left(f;x\right) f \le L\left(|f|;x\right)$ yazılabilir.L nin lineerliğinden $-L\left(|f|;x\right) \le L\left(f;x\right) \le L\left(|f|;x\right)$ ve $\left|L\left(f;x\right)\right| \le L\left(|f|;x\right)$ dır.

$f\left(t\right) \le 0$ ve L lineer pozitif operatör ise $-f\left(t\right) \ge 0$ lineer pozitif operatör olduğundan $L\left(-f\left(t\right);x\right) \ge 0$

$$-L\left(f\left(t\right);x\right) \ge 0 \Rightarrow L\left(f\left(t\right);x\right) \le 0$$

sağlanır.

Tanım 2.2.8 (Forward (İleri)Fark): $\forall k, j \ge 0$

$\Delta f\left(x_j\right) = f\left(x_{j+1}\right) - f\left(x_j\right)$ ve $\Delta^{k+1} f\left(x_j\right) = \Delta^k f\left(x_{j+1}\right) - \Delta^k f\left(x_j\right)$ şeklinde tanımlanan Δ operatörüne ileri fark operatörü denir.

Teorem 2.2.4: $\forall k, j \ge 0$ için $x_j = j$ olmak üzere

$$f\left[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}\right] = \frac{\Delta^k f\left(x_j\right)}{k!}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Tümevarım metodunu kullanalım.

$k = 0$ için eşitilik doğrudur. $k \ge 0$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim.

$k+1$ için doğru oluğunu gösterelim.

$$f\left[x_j,x_{j+1},...,x_{j+k+1}\right]=\frac{f\left[x_{j+1},...,x_{j+k+1}\right]-f\left[x_j,...,x_{j+k}\right]}{x_{j+k+1}-x_j}$$

$$=\frac{1}{k+1}\left(\frac{\Delta^k f\left(x_{j+1}\right)}{k!}-\frac{\Delta^k f\left(x_j\right)}{k!}\right)$$

$$=\frac{\Delta^{k+1} f\left(x_j\right)}{\left(k+1\right)!}$$

olup böylece istenilen eşitlik $k+1$ için de doğrudur.

Teorem 2.2.5: x ve $x_0,x_1,...,x_n$ apsisleri, $\left[a,b\right]$ kapalı aralığına ait noktalar olsun. f ve f in ilk n türevi bu aralıkta düzgün sürekli ve $f^{(n+1)}$ türevi $\left(a,b\right)$ aralığında mevcut olsun. Bu durumda x e bağlı $\zeta_x \in \left(a,b\right)$ için

$$f\left(x\right)-P_n\left(x\right)=\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)...\left(x-x_n\right)\frac{f^{(n+1)}\left(\zeta_x\right)}{\left(n+1\right)!} \qquad (2.4.1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: İspat için Rolle teoremini $n+1$ kez ard arda uygularız. Rolle teoremine göre fonksiyonun iki sıfır yeri arasında, türevinin sıfır olduğu en az bir nokta vardır. $x_0,x_1,...,x_n$ noktaları α dan farkı olmak üzere

$$g\left(x\right)=f\left(x\right)-P_n\left(x\right)=\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)...\left(x-x_n\right)}{\left(\alpha-x_0\right)\left(\alpha-x_1\right)...\left(\alpha-x_n\right)}\left(f\left(\alpha\right)-P_n\left(\alpha\right)\right),\alpha\in\left(a,b\right)$$

fonksiyonunu ele alalım.

g fonksiyonunun $x_0,x_1,...,x_n,\alpha$ olmak üzere $\left(n+2\right)$ tane sıfır yeri vardır. Burada g fonksiyonuna Rolle teoremi uygulanırsa g' fonksiyonunun sıfır olduğu $n+1$ tane nokta vardır. Bu şekilde g fonksiyonuna Rolle teoremi uygulanmaya devam edilirse g'' fonksiyonunu sıfır olduğu n tane

g''' fonksiyonunun sıfır olduğu tane $n-1$

$\vdots$

$g^{(n+1)}$ fonksiyonun sıfır olduğu 1 tane nokta vardır. Bu noktayı ζ_x ile gösterirsek

$$0 = f^{(n+1)}(\zeta_x) - \frac{(n+1)!\big(f(\alpha) - P_n(x)\big)}{(\alpha - x_0)(\alpha - x_1)\dots(\alpha - x_n)}$$

olur. Son eşitlikte α yerine x yazılırsa (2.4.1) elde edilir.

2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Tanım 2.3.1: $I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$w(\delta) = w(f;\delta) = \sup_{\substack{x,y \in I \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f nin süreklilik modülü denir.

w, δ nın bir fonksiyonu durumundadır.

Süreklilik modülü için aşağıdaki lemmaları verelim:

Lemma 2.3.1: w fonksiyonu monoton artan fonksiyondur.

İspat: $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olsun. Bu durumda $|x-y| < \delta_2$ koşulunu sağlayan (x, y) sayı çiftlerinin kümesi $|x-y| < \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinden daha geniştir. Kümelerdeki supremum kavramını düşünürsek süreklilik modülü tanımı gereğince

$$w(f;\delta_1) \leq w(f;\delta_2)$$

olduğu görülür.

Lemma 2.3.2: f I da sürekli ise $\lim\limits_{\delta \to 0} w(f;\delta) = 0$ dır.

İspat: f sürekli ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı vardır ki $|x-y| < \delta$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dir. Bu durumda $\delta \to 0$ için $x \to y$ olacağından $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gerçeklenir. Dolayısıyla $\lim\limits_{\delta \to 0} w(f;\delta) = 0$ dır.

Lemma 2.3.3: f düzgün sürekli $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\delta \to 0} w(f;\delta) = 0$

İspat: Teoremin gerek şartı,düzgün sürekli her fonksiyon sürekli olduğundan önceki lemmadan açıktır.

Yeter şart için $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \eta$ sayısı vardır ki $\delta < \eta$ için $w(f;\delta) < \varepsilon$ eşitsizliği gerçeklenir. Öyleyse f düzgün sürekli bir fonksiyondur.

Lemma 2.3.4: f I da sürekli $m \geq 1$ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$w(f;m\delta) \leq m w(f;\delta)$$

dır.

İspat: $w\left(f;\delta\right)=\sup\limits_{\substack{x,t\in I\\ |x-t|<\delta}}\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|$, süreklilik modülü tanımında t yerine $x+h$ yazılırsa $w\left(f;\delta\right)=\sup\limits_{\substack{x,x+h\in I\\ |h|<\delta}}\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right|$ elde edilir.

$$\left|f\left(t+mh\right)-f\left(t\right)\right|=\left|\sum_{k=0}^{m-1}f\left(t+\left(k+1\right)h\right)-f\left(t+kh\right)\right|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
w\left(f;m\delta\right)&=\sup_{\substack{t,t+u\in I\\ |u|<m\delta}}\left|f\left(t+u\right)-f\left(t\right)\right|\\
&=\sup_{\substack{t,t+mu\in I\\ |u|<\delta}}\left|f\left(t+mu\right)-f\left(t\right)\right|\\
&\leq\sup_{\substack{t,t+mu\in I\\ |u|<\delta}}\left|\sum_{k=0}^{m-1}f\left(t+\left(k+1\right)u\right)-f\left(t+ku\right)\right|\\
&\leq mw\left(f;\delta\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.3.5: f I da sürekli ve $\forall\lambda>0$ reel sayısı için

$$w\left(f;\lambda\delta\right)\leq\left(\lambda+1\right)w\left(f;\delta\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Süreklilik modülü artan olduğundan $m<\lambda<m+1$ ve $m\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
w\left(f;\lambda\delta\right)&\leq w\left(f;\left(m+1\right)\delta\right)\\
&\leq\left(m+1\right)w\left(f;\delta\right)\\
&\leq\left(\lambda+1\right)w\left(f;\delta\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 2.3.6: f I da sürekli ise,

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq w\left(f;|t-x|\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned} w\left(f;|t-x|\right) &= \sup_{\substack{x,t\in I \\ |t-x|\leq|t-x|}} \left|f(t)-f(x)\right| \\ &= \sup_{x,t\in I}\left|f(t)-f(x)\right| \\ &\geq \left|f(t)-f(x)\right|. \end{aligned}$$

Lemma 2.3.7: f I da sürekli ise

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)w\left(f;\delta\right)$$

eşitisizliği sağlanır.

İspat: Lemma 2.3.6’dan

$$\left|f(t)-f(x)\right|\leq w\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)\leq\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)w\left(f;\delta\right)$$

bulunur.

Lemma 2.3.8: f I da sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$w\left(f;\delta\right)=0\Leftrightarrow f \text{ sabit}$$

dır.

İspat: Teoremin gerek şart aşikardır. Yeter şart için,

$$w(f;\delta)=\sup_{\substack{x,t\in[a,b]\\ |x-t|<\delta}}\left|f(t)-f(x)\right|=0$$

$\forall x,t\in[a,b]$ için

$$\left|f(t)-f(x)\right|=0\Rightarrow f(t)=f(x)\ \Rightarrow\ f$$

sabittir.

Lemma 2.3.9: f I da sürekli ve $\delta_1<\delta_2$ ise

$$\frac{w(f;\delta_2)}{\delta_2}\leq\frac{2w(f;\delta_1)}{\delta_1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$w(f;\delta_2)=w\left(f;\delta_1\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\leq\left(1+\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)w(f;\delta_1)\leq 2\frac{\delta_2}{\delta_1}w(f;\delta_1)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.1: $B_n:C[0,1]\longrightarrow C[0,1]$ Bernstein polinomu için

$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|\leq\frac{3}{2}w\left(n^{-1/2}\right)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $B_n(f;x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P_{k,n}(x)$.

Burada $P_{k,n}(x)=C_n^k(1-x)^{n-k}x^k$ ve $B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P_{k,n}(x)$ yazılarak

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P_{k,n}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{\delta_n}\right)w(f;\delta_n)P_{k,n}(x) = w(f;\delta_n)\left(1+\frac{1}{\delta_n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|P_{k,n}(x)\right)$$

$$\le w(f;\delta_n)\left(1+\frac{1}{\delta_n}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)\right)^{1/2}}_{1}\right)^2\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2P_{k,n}(x)\right)^{1/2}}_{B_n\left((t-x)^2;x\right)}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$B_n\left((t-x)^2;x\right) = B_n\left(t^2;x\right)-2xB_n(t;x)+x^2B_n(1;x)$$

$$= x^2+\frac{x(1-x)}{n}+-2xx+x^2.1$$

$$= \frac{x(1-x)}{n}$$

elde edilir.

$[0,1]$ üzerinde $x(1-x)\le\frac{1}{4}$ olduğundan

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right| \le w(f;\delta_n)\left|1+\frac{1}{\delta_n}\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}\right|$$

ve $\delta_n = n^{-1/2}$ alınırsa

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right| \le w\left(f;n^{-1/2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = w\left(f;n^{-1/2}\right)\frac{3}{2}$$

elde edilir.

2.4. q-Tamsayıları Ve Özellikleri

Tanım 2.4.1: $r \in \mathbb{N}$ ve $q > 0$ için $[r]_q$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[r]_q = \begin{cases} (1-q^r)\big/(1-q), & q \neq 1, \\ r, & q=1, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

$[r]_q$ ifadesine bir q-tamsayısı denir ve $[r]$ veya $[r]_q$ şeklinde gösterilir(2). Bu tanımı r herhangi bir reel sayı olacak şekilde genişletilirse $[r]_q$ ifadesine q-reel sayısı denir.

Herhangi $q > 0$ için

$$\mathbb{N}_q = \left\{ [r]_q ,\ \ \mathrm{r} \in \mathbb{N}\ \ için \right\} \tag{2.4.2}$$

kümesini tanımlayalım.

(2.4.1) tanımından

$$\mathbb{N}_q = \left\{ 0,1,1+q,1+q+q^2,1+q+q^2+q^3,\dots \right\} \tag{2.4.3}$$

yazılabilir.

Açık şekilde görülüyor ki $q = 1$ konulduğunda N_q kümesi,

negatif olmayan tamsayılar kümesinini ifade eder.

Tanım 2.4.2: $q > 0$ şeklinde verilsin. $r \in \mathbb{N}$ için $[r]_q!$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[r]_q! = \begin{cases} [r]_q [r-1]_q \dots [1]_q , & \mathrm{r} \geq 1, \\ 1, & \mathrm{r}=0, \end{cases} \tag{2.4.4}$$

$[r]_q!$ ifadesine q-faktöriyel denir(2).

Tanım 2.4.3: Tüm k doğal sayısı ve $r \geq 0$ için binom katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanır(2);

$$\begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[k]_q [k-1]_q ... [k-r+1]_q}{[r]_q !} \tag{2.4.5}$$

Tanım 2.4.4: n ve r herhangi iki pozitif tamsayı olsun. $n \geq r \geq 0$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q [n-1]_q ....[n-r+1]_q}{[r]_q !} = \frac{[\mathrm{n}]_q !}{[\mathrm{r}]_q ![\mathrm{n\text{-}r}]_q !} \tag{2.4.6}$$

olur.

Açıkça $q = 1$ için

$$[\mathrm{n}]_1 = n, \qquad [\mathrm{n}]_1 ! = n! \ , \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

dır.

Gauss denklemleri

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q + q^r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}_q \tag{2.4.7}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = q^{n-r} \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}_q \tag{2.4.8}$$

Pascal tipindeki bağıntıları sağlar. $n \geq r \geq 0$ şeklinde olduğu zaman (2.4.6) kullanılarak aşağıdaki ifade yazıldığında (2.4.7) yi elde edebiliriz. Gerçekten

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q + q^r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}_q = \left([r]_q + q^r [n-r]_q\right) \frac{[n-1]_q !}{[r]_q ! [n-r]_q !} \tag{2.4.9}$$

olup diğer taraftan

$$[r]_q + q^r[n-r]_q = \frac{1-q^r}{1-q} + \frac{q^r\left(1-q^{n-r}\right)}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q} = [n]_q$$

dır[(2)]. Bu ifade (2.4.9) da yerine yazılıp gerekli kısatmalar yapılırsa (2.4.9) un sağ tarafının $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ ye eşit olduğu görülür.

(2.4.7) ve (2.4.8) de $q=1$ yazarsak;

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \tag{2.4.10}$$

bildiğimiz binom katsayılarını elde etmiş oluruz.

Bu bağıntıdan

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

olduğu açıktır.

Binom sayıları pozitif rasyonel sayılardır. $n,r \in$ için $n \geq r \geq 0$ durumunda her zaman pozitif tamsayı oldugunu da söyleyebiliriz.

(2.4.6) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{\left(1-q^{n-r+1}\right)\left(1-q^{n-r+2}\right)...\left(1-q^n\right)}{(1-q)\left(1-q^2\right)...\left(1-q^r\right)} \tag{2.4.11}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ parametresine göre bir rasyonel fonksiyondur. Diğer yandan adi Binom katsayıları, rasyonel sayıdan çok bir tamsayıdır. Pascal tipindeki bağıntılardan (2.4.7) ya da (2.4.8) den herhangi birini kullanarak (2.4.10) un, q nun rasyonel fonksiyonundan daha çok q nun bir polinomu olduğunu görmüş oluruz.

Newton q-Binom formulü aşağıdaki şekildedir:

$$\left(1+x\right)\left(1+qx\right)...\left(1+q^{n-1}x\right)=\prod_{s=1}^{n}\left(1+q^{s-1}x\right)=\sum_{s=0}^{n}q^{s(s-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q x^s \quad (2.4.12)$$

Buruda $q=1$ yazıldığında klasik binom açılımı olan

$$\left(1+x\right)^n=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s \qquad (2.4.13)$$

elde edilir.

(2.4.12) yi elde etmek için önce

$$G_n\left(x\right)=\left(1+x\right)\left(1+qx\right).........\left(1+q^{n-1}x\right)=\sum_{r=0}^{n}c_r x^k \qquad (2.4.14)$$

gösterilimini göz önüne alalım.

(2.4.14) de x yerine qx yazarsak

$$\left(1+q^n x\right)G_n\left(x\right)=\left(1+x\right)G_n\left(qx\right),$$

elde edilir ki buradan

$$\left(1+q^n x\right)\sum_{s=0}^{n}c_r x^r=\left(1+x\right)\sum_{s=0}^{n}c_r\left(qx\right)^r$$

bulunur. x^s in katsayıları karşılaştırılırsa

$$c_s+q^n c_{s-1}=q^s c_s+q^{s-1}c_{s-1},$$

öyle ki $1\le s\le n$ için

$$c_s=q^{s-1}\left(\frac{1-q^{n-s+1}}{1-q^s}\right)c_{s-1}=q^{s-1}\frac{\left[n-s+1\right]}{\left[s\right]}c_{s-1}$$

ve $c_0=1$

için

$$c_s=q^{s(s-1)/2}\frac{\left[n-s+1\right]_q\left[n-s+2\right]_q.....\left[n\right]_q}{\left[s\right]_q\left[s-1\right]_q...\left[1\right]_q}c_0=q^{s(s-1)/2}\begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q \qquad (2.4.15)$$

elde edilir[2].

Şimdi bazi gerekli formülleri hatırlatalım:

İlki Newton Binom formülü

$$\left(1+x\right)\left(1+qx\right)...\left(1+q^{n-1}x\right)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2}x^k . \qquad (2.4.16)$$

(2.4.16) den elde edilen, $|q|<1$ için Euler in özdeşliğidir(3).

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k(k-1)/2}x^k}{(1-q)^k\,[k]_q!}=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+q^k x\right) \qquad (2.4.17)$$

olduğunu biliyoruz.

$$b_{nk}\left(q;x\right):=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q \frac{q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}}{\left(1-x+qx\right)...\left(1-x+q^{n-1}x\right)} \qquad (2.4.18)$$

olmak üzere (2.4.16) dan

$$\sum_{k=0}^{n}b_{nk}\left(q;x\right)=1\ , \qquad x\in[0,1] \qquad (2.4.19)$$

elde edilir(3).

Gerçekten $x=1$ için (2.4.19) açıktır. $x\neq 1$ için

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$$

$$=\left(1-x\right)^n\left(1+\frac{x}{x-1}\right)\left(1+q\frac{x}{x-1}\right)...\left(1+q^{n-1}\frac{x}{x-1}\right)$$

$$=\left(1-x+qx\right)...\left(1-x+q^{n-1}x\right)$$

yazılabileceğinden böylece (2.4.19) doğruluğu görülmüş olur(3).

$q\in(0,1)$ olsun. $n\to\infty$ iken

$$b_{\infty k}\left(q;x\right)=\frac{q^{k(k-1)/2}\left(x/(1-x)\right)^k}{(1-q)^k\,[k]_q!\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+q^j\left(x/(1-x)\right)\right)},\quad x\in[0,1) \qquad (2.4.20)$$

yazılabilir.

(2.4.17) den $q \in (0,1)$ ve $x \in [0,1)$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}(q;x) = 1 \tag{2.4.21}$$

olur[3].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Giriş

3.1.Bernstein Operatörleri ve Özellikleri

$f:[0,1]\rightarrow R$ fonksiyonunun Bernstein polinomunun

$$(B_n)f(x):=\mathrm{B_n}(f;x):\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ \ \mathrm{n}=1,2,3,...,$$

şeklinde olduğunu biliyoruz.

$f\in C[0,1]$ için, $[0,1]$ aralığında $\{B_n(f;x)\}$ in $f(x)$ e düzgün yakınsadığını göstereceğiz.

Simdi Bernstein polinomlarının bazı özelliklerini verelim

1. $B_n(f;0)=f(0)$ ve $B_n(f;1)=f(1)$.

2. Bernstein polinomu;

$$B_n(1;x)=1,$$

$$B_n(t;x)=x,$$

$$B_n(t^2;x)=x^2\frac{(n-1)}{n}+\frac{x}{n}=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$$

eşitliklerini sağlar

3. Her $a,b \in \mathbb{R}$ ve $f,g \in C[a,b]$ için

$$B_n(af+bg;x)=aB_n(f;x)+bB_n(g;x)$$

eşitliğinden dolayı Bernstein polinomları lineerdir.

Teorem 3.1.1: Bernstein polinomları

$$B_n(f;x)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\Delta^k f(0)x^k$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada Δ, Tanım (2.2.8) deki ileri fark operatörüdür.

İspat: $(1-x)^{n-r}$ ifadesini açarak başlarsak

$$B_n(f;x)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f\left(\frac{r}{n}\right)x^r\sum_{s=0}^{n-r}(-1)^s\binom{n-r}{s}x^s$$

elde ederiz. $t=r+s$ dersek $\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{n-r}=\sum_{t=0}^{n}\sum_{r=0}^{t}$, şeklinde yazılabilir ve

$$\begin{aligned}B_n(f;x)&=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}x^t\sum_{r=0}^{t}(-1)^{t-r}f\left(\frac{r}{n}\right)\\&=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}\Delta^t f(0)x^t\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{\Delta^m f(x_0)}{h^m}=f^{(m)}(\zeta)$$

olduğu biliniyor.

Şimdi de $B_n(x^k;x)$ yı bulalım:

$\zeta \in (x_0,x_m)$, $h=\dfrac{1}{n}$, $x_0=0$ ve $f(x)=x^k$ olduğunda

$$B_n\left(x^k;x\right)=\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}\Delta^k f\left(0\right)x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}x^k$$

şeklinde yazılabilir. $a_k=\binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}$ denirse

$$a_k=\binom{n}{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{n^k}=\frac{n\left(n-1\right)...\left(n-\left(k+1\right)\right)}{n^k}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k+1}{n}\right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$B_n\left(x^k;x\right)=a_0+a_1x+...a_nx^n$$

bulunur. Örneğin $f\left(x\right)=x^2$

$$B_n\left(x^2;x\right)=\binom{n}{0}\Delta^0 f\left(0\right)+\binom{n}{1}\Delta\ f\left(0\right)x+\binom{n}{2}\Delta^2 f\left(0\right)x^2$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.1.2: $f\in\left(0,1\right)$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ olmak üzere $\exists n_0\in N \ni \forall n>n_0$ için

$$\left|B_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

dir.

İspat: Diğer bir ifadeyle $\left[0,1\right]$ de sürekli olan bir f fonksiyonun Bernstein polinomu $\left[0,1\right]$ aralığında f 'e düzgün yakınsadığını gösterelim

$\left(\frac{k}{n}-x\right)^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2-2x\frac{k}{n}+x^2$ ifadesi operatörde yerine yazılır ise

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}=B_n\left(t^2;x\right)-2xB_n\left(t;x\right)+x^2B_n\left(1;x\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k} = x^2+\frac{x}{n}\left(1-x\right)-2xx+x^2$$

$$=\frac{x}{n}\left(1-x\right)$$

olduğu açıktır. Şimdi

$$B_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(x\right)\right)\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$$

ifadesi için $\delta > 0$ olmak üzere

$$S_\delta = \left\{k : \left|\frac{k}{n}-x\right| \geq x\right\}$$

kümesini tanımlayalım.

$$B_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)=\sum_{k\in S_\delta}+\sum_{k\notin S_\delta}=A_1+A_2$$

şeklinde toplamı ikiye ayıralım.

$$k\in S_\delta \Rightarrow \left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{1}{\delta^2}\geq 1$$

dir. Ayrıca $\left[0,1\right]$ aralığında sürekli her fonksiyon sınırlı olduğundan

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\left|f\left(x\right)\right|\leq 2M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Buna göre

$$\left|A_1\right|=\sum_{k\in S_\delta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(x\right)\right)\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$$

$$\leq\sum_{k\in S_\delta}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(x\right)\right|\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$$

$$\leq 2M\sum_{k\in S_\delta}\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$$

$$\leq 2M\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n}<\frac{M}{2n\delta^2}$$

dir. f , $[0,1]$ üzerinde sürekli olduğunda aynı zamanda da düzgün süreklidir. Bu durumda $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_0 \ni |x-x'|<\delta$ şartını sağlayan her x için $|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}$ dir. Şimdi A_2 için üst sınır bulalım

$$|A_2|=\sum_{k\notin S_\delta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leq\sum_{k\notin S_\delta}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^k$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{\varepsilon}{2}$$

dir. Buradan

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leq|A_1|+|A_2|\leq\frac{M}{2n\delta^2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

olup δ sayısı $n_0>\frac{M}{\varepsilon\delta^2}$ şartını sağlayacak şekilde seçilirse

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leq\frac{M}{2n_0\delta^2}+\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir. O zaman $B_n(f;x)$ polinomu f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

3.2. q-Bernstein Operatörleri ve Özellikleri

Tanım 3.2.1: $f \in C[0,1]$ ve $R_{n,q} : C[0,1] \to C[0,1]$ için

$$R_{n,q}(f) = R_n(f,q;x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) b_{nk}(q;x) \qquad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanan lineer operatöre Bernstein operatörünün q-anoloğu denir[3]. $B_n(f;x)$ f in Bernstein polinomu iken $R_n(f,1;x) = B_n(f;x)$ olarak ifade edilebilir. $q \neq 1$ durumu için $R_n(f,q;x)$ operatörü polinomlardan daha çok rasyonel fonksiyonları ifade eder.

$R_n(f,q;x)$ operatörü aralığın başlangıç ve bitim noktalarındaki her $q > 0$ ve n=1,2,3,... için

$$R_n(f,q;x) = f(0), \quad R_n(f,q;1) = f(1) \qquad (3.2.2)$$

özelliğine sahiptir.

Bununla birlikte her $q > 0$ ve n=1,2,3,.... için $C[0,1]$ aralığında $R_n(f,q;x)$ lineer pozitif operatörlerdir.

$x \in [0,1)$ için aşağıdaki ifadeleri kullacağız.

$$u := \frac{x}{1-x,} \quad \mathrm{u} \in [0,\infty) \qquad (3.2.3)$$

$x \in [0,1)$ için ve

$$w_n(q;x) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + q^j u\right)$$

iken, b_{nk}

$$
\begin{aligned}
b_{nk}(q;x) &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{q^{k(k-1)/2}(1-x)^n\left(x/1-x\right)^k}{(1-x)^n \prod_{j=0}^{n-1}\left(1+q^j\left(x/(1-x)\right)\right)} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{q^{k(k-1)/2}u^k}{w_n(q;u)} =: \rho_{nk}(q;u)
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\rho_{nk}(q;u) = b_{nk}\left(q;\frac{u}{u+1}\right)$$

ve

$$R_n(f,q;x) = R_n\left(f,q;\frac{u}{u+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[k]_q}\right)\rho_{\infty k}(q;u)$$

olduğu görülür. (2.4.19)'u kullanırsak

u $\in [0,\infty)$ için

$$\sum_{k=0}^{n} \rho_{nk}(q;u) = 1 \tag{3.2.5}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $q \in (0,1)$ için (2.4.20) yi kullanarak

$$w_\infty(q;x) = \prod_{j=0}^{\infty}\left(1+q^j u\right)$$

iken

$$b_{\infty k}(q;x) = b_{\infty k}\left(q;\frac{u}{u+1}\right) = \frac{q^{k(k-1)/2}u^k}{(1-q)^k [k]_q!\, w_\infty(q;u)} = \rho_{\infty k}(q;u) \tag{3.2.6}$$

elde edebiliriz[3].

Açık bir şekilde (2.4.21) gösteriyor ki $q \in (0,1)$ ise

u $\in [0,\infty)$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho_{\infty k}\left(q;u\right)=1 \tag{3.2.7}$$

dir[3].

Sonuç 3.2.1: $R_n\left(f,q;x\right)$ operatörü $q>0$ $n=1,2,3,...,$ için lineer fonksiyon üretir; yani

$$\begin{aligned}R_n\left(at+b,q;x\right)&=R_n\left(at,q;x\right)+R_n\left(b,q;x\right) \qquad (3.2.8)\\&=aR_n\left(t,q;x\right)+bR_n\left(1,q;x\right)\\&=ax+b\,.\end{aligned}$$

Lemma3.2.2: Aşağıdaki eşitlikler doğrudur[3]:

$$\begin{aligned}R_n\left(1,q;x\right)&=1,\\R_n\left(t,q;x\right)&=x,\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$R_n\left(t^2,q;x\right)=x^2+\frac{x\left(1-x\right)}{\left[n\right]_q}-\frac{x^2\left(1-x\right)\left(1-q\right)}{1-x+xq}\left(1-\frac{1}{\left[n\right]_q}\right). \tag{3.2.10}$$

İspat:(2.4.19) dan

$$R_n\left(1,q;x\right)=\sum\nolimits_{k=0}^{n}b_{nk}\left(q;x\right)=1$$

dir. $x\in\left[0,1\right)$ için (3.2.9), (3.2.10) i ispatlamak yeterlidir. Çünkü $x=1$ olduğunda (3.2.2) sağlanır.Diğer taraftan

$$\begin{aligned}R_n\left(t,q;\frac{u}{u+1}\right)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\frac{q^{k(k-1)/2}u^k}{w_n\left(q;u\right)}\\&=\frac{u}{u+1}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_q\frac{q^{(k-1)(k-2)/2}\left(qu\right)^{k-1}}{w_{n-1}\left(q;qu\right)}\end{aligned}$$

$$=\frac{u}{u+1}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_{n-1,k}\left(q;qu\right)=\frac{u}{u+1}$$

elde edilebiliriz ve böylece (3.2.9) ispatlanmış olur.

Benzer şekilde

$$R_n\left(t^2,q;\frac{u}{u+1}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[k\right]_q^2}{\left[n\right]_q^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\frac{q^{k(k-2)/2}u^k}{w_n\left(q;u\right)}$$

$$=\frac{u}{u+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left[k+1\right]_q}{\left[n\right]_q}\rho_{n-1,k}\left(q;qu\right)$$

$$=\frac{u}{u+1}\frac{\left[n-1\right]_q}{\left[n\right]_q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1-q^{k+1}}{1-q}}{\left[n-1\right]_q}\rho_{n-1,k}\left(q;qu\right)$$

$$=\frac{u}{u+1}\frac{\left[n-1\right]_q}{\left[n\right]_q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1-q+q-q^{k+1}}{1-q}}{\left[n-1\right]_q}\rho_{n-1,k}\left(q;qu\right)$$

$$=\frac{u}{u+1}\frac{\left[n-1\right]_q}{\left[n\right]_q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1+q\left[k\right]_q}{\left[n-1\right]_q}\rho_{n-1,k}\left(q;qu\right)$$

$$=\frac{u}{u+1}\frac{\left[n-1\right]_q}{\left[n\right]_q}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+q\left[k\right]_q}{\left[n-1\right]_q}\right)\rho_{n-1,k}\left(q;qu\right)$$

yazılabilir.(3.2.5) ve (3.2.9) un da kullanılmasıyla

$$R_n\left(t^2,q;\frac{u}{u+1}\right)=\frac{u}{u+1}\frac{\left[n-1\right]_q}{\left[n\right]_q}\left(\frac{1}{\left[n-1\right]_q}+q\frac{qu}{qu+1}\right)$$

$$=\frac{u}{u+1}\frac{1}{\left[n\right]_q}+\frac{u}{u+1}\frac{qu}{qu+1}\left(1-\frac{1}{\left[n\right]_q}\right)$$

olur.

$$R_n\left(t^2,q;x\right)=\frac{x}{\left[n\right]_q}+\frac{qx^2}{1-x+qx}\left(1-\frac{1}{\left[n\right]_q}\right)$$

$$= x^2\left(1-\frac{1}{[n]_q}\right)+\frac{x}{[n]_q}-\left(x^2-\frac{qx^2}{1-x+qx}\right)\left(1-\frac{1}{[n]_q}\right)$$

$$= x^2+\frac{x(1-x)}{[n]_q}-\frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}\left(1-\frac{1}{[n]_q}\right)$$

olduğu açıktır(3).

Lemma 3.2.3: $q \in (0,1)$ olmak üzere $b_{nk}(q;x)$,ve $b_{\infty k}(q;x)$ ifadeleri sırasıyla (2.4.18) ve (2.4.20) de verilsin. O zaman $x \in [0,1)$ için

$b_{nk}(q;x) \to b_{\infty k}(q;x)$, k=0,1,2...

olur.

İspat: (3.2.3) eştiliğinden sonra sırasıyla (3.2.4) ve (3.2.6) yardımıyla tanımlanan $\rho_{nk}(q;u)$ ve $\rho_{\infty k}(q;u)$ e bakalım.

$u \in [0,\infty)$ için $\rho_{nk}(q;u) \to \rho_{\infty k}(q;u)$ olduğunu gösterirsek lemma ispatlanmış olur.

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \to \frac{1}{(1-q)^k [k]_q!}$ olduğu için ve $u^k / w_\infty(q;u)$ $[0,\infty)$ aralığında sınırlı olduğundan

$$\text{u} \in [0,\infty) \text{ için } \frac{u^k}{w_n(q;u)} \to \frac{u^k}{w_\infty(q;u)} \qquad (3.2.11)$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir(3).

Bunu ispatlamak için sürekli fonksiyonlarda monoton dizilerinin düzgün yakınsaklığı ile ilgili Dini'nin teoremini kullanmamız gerekir.

Bu teoremden

$$\frac{u^k}{w_n(q;u)} \to \frac{u^k}{w_\infty(q;u)} \tag{3.2.12}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.1: $\{R_n(f,q;x)\}$ dizisi $f \in C[0,1]$ e düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $q_n \to 1$ olmasıdır(3).

İspat: $R_n(f,q;x)$ pozitif lineer operatör olduğu için Korovkin teoremi her $f \in C[0,1]$ için $R_n(f,q;x) \to f(x)$ olması için gerek ve yeter koşul $R_n(t^m,q_n;x) \Rightarrow x^m$, $x \in [0,1]$ ve m=0,1,2 olmasıdır.

(3.2.8) dan dolayı $m=0,1$ için bu ifade herhangi bir $\{q_n\}$ dizisi için doğrudur.

(3.2.10) den $x \in [0,1]$ için $R_n(t^2,q_n;x) \to x^2$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{x(1-x)}{[n]_{q_n}} - \frac{x^2(1-x)(1-q_n)}{1-x+xq_n}\left(1-\frac{1}{[n]_{q_n}}\right) \to 0 \tag{3.2.13}$$

dir.

i. $q_n \to 1$ ve $n \geq k$ durumunda herhangi bir sabit k pozitif tamsayısı için $[n]_{q_n} \geq [k]_{q_n}$ olduğunu kabul edelim. Bundan dolayı

$$\lim\ \inf_{n\to\infty} [n]_{q_n} \geq \lim_{n\to\infty} [k]_{q_n} = k .$$

k keyfi olduğundan $[n]_{q_n} \to \infty$ olur.

Sonuç olarak $x \in [0,1]$ için

$$\frac{x(1-x)}{[n]_{q_n}} \to 0$$

dir.

Aynı zamanda $q \geq 1/2$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$\frac{x^2(1-x)}{1-x+xq} \leq \frac{1/4}{1-x+xq} \leq \frac{1/4}{1-x/2} \leq \frac{1}{2}$$

dir. Bundan dolayı (3.2.13) doğrudur.

ii. Farz edelim herhangi $f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ için

$$R_n(f, q_n; x) \to f(x)$$

olsun. O zaman $x \in [0,1]$ için $R_n(t^2, q_n; x) \to x^2$

dir ve (3.2.13) den $x \in [0,1]$ için

$$\frac{x(1-x)}{[n]_{q_n}} - \frac{x^2(1-x)(1-q_n)}{1-x+xq_n}\left(1-\frac{1}{[n]_{q_n}}\right) \to 0$$

dır.

$x = 1/2$ alırsak $n \to \infty$ için

$$\frac{1/4}{[n]_{q_n}} - \frac{1/8(1-q_n)}{1/2(1+q_n)}\left(1-\frac{1}{[n]_{q_n}}\right) \to 0$$

şeklinde elde edilir.

Ya da $n \to \infty$ için

$$\frac{1}{[n]_{q_n}} + \left(1-\frac{2}{1+q_n}\right)\left(1-\frac{1}{[n]_{q_n}}\right) \to 0$$

şeklinde bulunur.

Farz edelim ki $\{q_n\}$ 1 e yaklaşmasın. O zaman $\{q_n\}$ dizisi $\{q_m\} \to t \neq 1$ olacak

şeklinde bir alt diziye sahiptir.Eğer $t < 1$ ise $[m]_{q_m} \to \frac{1}{1-t}$ olur.O zaman

$$\frac{1}{[m]_{q_m}}+\left(1-\frac{2}{1+q_m}\right)\left(1-\frac{1}{[m]_{q_m}}\right)\to 1-t+\left(1-\frac{2}{1+t}\right)t=\frac{t-1}{t+1}\neq 0$$

dir.

$t>1$ için $[m]_{q_m}\to\infty$ elde edilir ve

$$\frac{1}{[m]_{q_m}}+\left(1-\frac{2}{1+q_m}\right)\left(1-\frac{1}{[m]_{q_m}}\right)\to 1-\frac{2}{1+t}=\frac{t-1}{t+1}\neq 0$$

yazılabilir.(özelde $t=\infty$ için limit 1 e eşittir)

Bu çelişki durumu $q_n\to 1$ olduğunu gösterir.

Teorem3.2.1 gösteriyor ki $\{R_n(f,q;x)\}$ dizisi bazı sürekli fonksiyonlara $q\neq 1$ durumunda yaklaşmayabilir. $q>0$, $q\neq 1$ şeklinde sabitlenen q sayısı için $\{R_n(f,q;x)\}$ dizisinin yakınsaklığını tartışarak f ye yakınsayan diziler için gerekli ve yeterli koşulları diğer teoremlerde ortaya koyacağız.

Öncelikle $q\in(0,1)$ olsun.

$$b_{\infty k}(q;x)=\frac{q^{k(k-1)/2}\left(x/(1-x)\right)^k}{(1-q)^k\,[k]_q!\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+q^j\left(x/(1-x)\right)\right)},\quad x\in[0,1)$$

olmak üzere

$q\in(0,1)$ ve $x\in[0,1)$ için

$$\sum_{k=0}^{n}b_{\infty k}(q;x)=1$$

olduğunu hatırlayalım.

Aşağıdaki şekilde bir fonksiyon yazalım

$$\tilde{R}_{\infty}(f,q;x)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(1-q^k\right) b_{\infty k}(q;x) & \text{eğer } x\in[0,1)\\ f(1) & \text{eğer } x=1\end{cases} \tag{3.2.14}$$

$[0,1]$ aralığında $f(x)$ sınırlı iken $\tilde{R}_{\infty}(f,q;x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında iyi tanımlı olur.

Teorem 3.2.2: $q\in(0,1)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $f\in C[0,1]$ ve $x\in[0,1]$ için

$$R_n(f,q;x)\to \tilde{R}_{\infty}(f,q;x)$$

dir[(3)].

İspat: (3.2.2) ten $x\in[0,1)$ için $R_n(f,q;x)\to R_{\infty}(f,q;x)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$$\Delta:=\left|R_n(f,q;x)-R_{\infty}(f,q;x)\right|$$

gösterimini kullanalım.

$x\in[0,1)$ için

$$\Delta=\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) b_{nk}(q;x)-\sum_{k=0}^{\infty} f(1-q^k) b_{\infty k}(q;x)\right|$$

dir.

$\varepsilon>0$ olsun. w_f in f in süreklilik modülünü ifade etsin ve $w_f(1-a)<\varepsilon/3$ olacak şekilde bir $a\in(0,1)$ noktası seçelim. $1-q^{R+1}\geq a$ şartını sağlayacak şekilde bir R pozitif tamsayı seçilsin. Bu durumda tüm $k\geq R+1$ için $[k]_q/[n]_q\geq a$ dir .(2.4.19) ve (2.4.21) formüllerini kullanarak

$$\Delta = \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) - f(1) \right) b_{nk}(q;x) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(f(1-q^k) - f(1) \right) b_{\infty k}(q;x) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=0}^{R} \left(f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) - f(1) \right) b_{nk}(q;x) - \sum_{k=0}^{R} \left(f(1-q^k) - f(1) \right) b_{\infty k}(q;x) \right|$$

$$+ \sum_{k=R+1}^{n} \left| f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) - f(1) \right| b_{nk}(q;x) + \sum_{k=R+1}^{\infty} \left| f\left(1-q^k\right) - f(1) \right| b_{\infty k}(q;x)$$

$$:= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

yazabiliriz.

$n \to \infty$ için $f\left([k]_q / [n]_q\right) \to f\left(1-q^k\right)$ olduğundan Lemma 2 yi uygulayarak

yeterince büyük bir n için $\delta_1 < \varepsilon/3$ elde edilir.

$x \in [0,1)$ için $b_{nk}(q;x) \geq 0$ olduğundan δ_2 için

$$\delta_2 \leq w_f(1-a) \cdot \sum_{k=R+1}^{n} b_{nk}(q;x) \leq w_f(1-a) \sum_{k=0}^{n} b_{nk}(q;x)$$

$$= w_f(1-a) < \varepsilon/3$$

yazılabilir.Benzer şekilde (2.4.21) kullanarak $\delta_3 \leq w_f(1-a) < \varepsilon/3$ elde edilir. Dolayısıyla yeterince büyük n için $\Delta < \varepsilon$ dur.

SONUÇ: $q \neq 1$ olacak seçilde seçilsin. $f \in C[0,1]$ ve $g(x) := f(1-x)$ olsun.

Bu durumda $x \in [0,1]$

$$R_n(f,q;x) \to R_\infty(f,q;x) = \begin{cases} R_\infty(f,q;x), & \text{q} \in (0,1) \text{ için} \\ R_\infty(g,1/q;x), & \text{q} \in (1,\infty) \text{ için} \end{cases}$$

dir.

$q>0$ şeklinde seçildiğinde $\{R_n(f,q;x)\}$ dizisi herhangi bir $f\in C[0,1]$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

$q\in(0,1)$ için limit fonksiyonun açık formu (3.2.13) de verildi. $q\in(1,\infty)$ durumu da,

$$b_{\infty k}(1/q;x)=\frac{q^k\left((1-x)/x\right)^k}{(q-1)\ldots(q^k-1)\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+\left((1-x)/(q^jx)\right)\right)},\quad x\in(0,1]$$

iken

$$R_\infty(f,q;x)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}f(1/q)b_{\infty k}(1/q;1-x) & ,\ x\in(0,1]\ \text{için}\\ f(0) & ,\ x=0\ \text{için}\end{cases}\qquad(3.2.15)$$

dir

(3.2.13) ve (3.2.15) nin kesin formu kullanılarak $q\neq 1$ için $\{R_n(f,q;x)\}$ in bir yaklaşım dizisi olmasını sağlayacak yeter ve gerek şartlar elde edilebilir.

Teorem 3.2.3: $f\in C[0,1]$ve $g(x):=f(1-x)$ olsun[3].Bu durumda herhangi bir $q>0$ ve $x\in[0,1]$ için

$$R_n(f,q;x)=R_n(g,1/q;1-x)$$

İspat: $x=1$ ve x=0 için (3.2.2) dan dolayı ifade açıktır. Bu durumda kabul edelim ki $x\neq 0$ olsun. Açıktır ki

$$R_n(f,q;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{[n-k]_q}{n_q}\right)\cdot b_{n,n-k}(q;x).$$

Biliyoruz ki

$$\begin{bmatrix}n\\ n-k\end{bmatrix}_q\cdot\frac{q^{(n-k)(n-k+1)/2}}{q^{n(n-1)/2}}=\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}_{1/q}\left(\frac{1}{q}\right)^{k(k-1)/2}$$

dir. Bu durumda

$$b_{n,n-k}(q;x)=\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q \frac{q^{(n-k)\cdot(n-k-1)/2}x^{n-k}(1-x)^k}{q^{n(n-1)/2}x^n\prod_{j=0}^{n}(1+((1-x)/q^j x))}$$

$$=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1/q} \frac{(1/q)^{k(k-1)/2}\, x^{n-k}(1-x)^k}{\prod_{j=0}^{n}(x+((1-x)/q^j))}$$

$$=b_{n,n-k}(q;x)=b_{nk}\left(\frac{1}{q};1-x\right)$$

elde edilir

NOT:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1/q}=\frac{[n]_{1/q}!}{[n-k]_{1/q}![k]_{1/q}!}$$

$$=\frac{[n]_{1/q}\ldots[n-k+1]_{1/q}}{[k]_{1/q}}$$

$$=\frac{\dfrac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}\cdots\dfrac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n-k+1}}{1-\frac{1}{q}}}{\dfrac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^k}{1-\frac{1}{q}}\cdots\dfrac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^1}{1-\frac{1}{q}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-q^n}{1-q}\cdot\frac{q}{q^n}\right)\cdots\left(\frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}\,\frac{q}{q^{n-k+1}}\right)}{\frac{1-q^k}{1-q}\cdot\frac{q}{q^k}\cdots 1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)\cdots\cdot\left(\frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}\right)}{\frac{1-q^k}{1-q}\cdots 1}\cdot\frac{\frac{1}{q^{n-1}}\cdots\frac{1}{q^{n-k}}}{\frac{1}{q^{k-1}}\cdots 1}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1/q} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1} \cdots \left(\frac{1}{q}\right)^{n-k}}{\left(\frac{1}{q}\right)^{k(k-1)/2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n-k-1} \cdots 1}{\left(\frac{1}{q}\right)^{n-k-1} \cdots 1}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1/q} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n(n-1)/2}}{\left(\frac{1}{q}\right)^{k(k-1)/2} \left(\frac{1}{q}\right)^{(n-k)(n-k+1)/2}}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q \cdot \frac{q^{(n-k)(n-k+1)/2}}{q^{n(n-1)/2}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1/q} \left(\frac{1}{q}\right)^{k(k-1)/2}$$

Diğer yandan

$$\frac{[n-k]_q}{[n]_q} = \frac{[n]_{1/q} - [k]_{1/q}}{[n]_{1/q}} = 1 - \frac{[k]_{1/q}}{[n]_{1/q}}$$

olması aşağıdaki açıklamadan görüldüğü gibi mümkündür

$$\frac{\frac{1-q^{n-k}}{1-q}}{\frac{1-q^n}{1-q}} = 1 - \frac{1-\frac{1}{q^k}}{1-\frac{1}{q^n}}$$

$$\frac{1-q^{n-k}}{1-q^n} = 1 - \frac{\left(q^k - 1\right)}{\left(q^n - 1\right)} \frac{q^n}{q^k}$$

$$\frac{1-\frac{q^n}{q^k}}{1-q^n} = \frac{q^{n+k} - q^k - q^{n+k} + q^n}{\left(q^n - 1\right) q^k}$$

$$\frac{\frac{q^k - q^n}{q^k}}{1-q^n} = \frac{q^{n+k} - q^k - q^{n+k} + q^n}{\left(q^n - 1\right) q^k}$$

$$\frac{q^n - q^k}{\left(1-q^n\right) q^k} = \frac{q^n - q^k}{\left(1-q^n\right) q^k}\,.$$

bundan dolayı

$$R_n\left(f,q;x\right)=\sum_{k=0}^{n} f\left(1-\frac{[k]_{1/q}}{[n]_{1/q}}\right)b_{nk}\left(\frac{1}{q};1-x\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{[k]_{1/q}}{[n]_{1/q}}\right)b_{nk}\left(\frac{1}{q};1-x\right)$$

$$=R_n\left(g,\frac{1}{q};1-x\right)$$

olur.

Teorem 3.2.4: $q>0$ ve $q\neq 1$ olacak şekilde seçilsin ve $f\in C\left[0,1\right]$ olsun.

Tüm $x\in C\left[0,1\right]$ ler için $R_\infty\left(f,q;x\right)=f\left(x\right)$ olması için gerek ve yeter şart $a,b\in R$ için $f\left(x\right)=ax+b$ olmasıdır. $q=1$ durumunda $\left\{R_n\left(f,q;x\right)\right\}=\left\{B_n\left(f;x\right)\right\}$, herhangi $f\in C\left[0,1\right]$ fonksiyonununa yakınsayan bir dizisi olurken $q\neq 1$ durumunda f lineer olmadıkça $\left\{R_n\left(f,q;x\right)\right\}$ dizisi f e yakınsamaz[(3)].

İspat: $f\left(x\right)=ax+b$ ise o zaman (3.2.2) eşitliğinden tüm $n=1,2...$ler için

$$R_n\left(f,q;x\right)=ax+b$$

dir

$$\begin{aligned}R_n\left(f,q;x\right)&=R_n\left(at+b,q;x\right)\\&=R_n\left(at,q;x\right)+R_n\left(b,q;x\right)\\&=aR_n\left(t,q;x\right)+bR_n\left(1,q;x\right)\\&=ax+b\end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$R_\infty\left(f,q;x\right)=\lim_{n\to\infty}R_n\left(f,q;x\right)=ax+b=f\left(x\right)$$

Şimdi farz edelim ki tüm $x \in [0,1]$ ler için $f \in C[0,1]$ ve

$R_{\infty}(f, q; x) = f(x)$ olsun

Teorem 3.2.3 ten dolayı $q \in (0,1)$ durumunda ifadeyi ispatlamak yeterlidir.

Şimdi aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım

$$\varphi(x) := f(x) - (f(1) - f(0))x$$

$\varphi(0) = \varphi(1)$ ve $R_{\infty}(\varphi, q; x) = \varphi(x)$ olduğu açıktır. Tüm $x \in [0,1]$ için

$\varphi(x) = \varphi(0) = \varphi(1)$ olduğunu ispatlayacağız.

$$M := \max_{x \in [0,1]} \varphi(x)$$

(sürekli fonksiyon kapalı aralıkta en büyük ve en küçük değerini alır.)

Kabul edelim ki $\varphi(1) < M$ olsun

Bazı $z_0 \in [0,1]$ için $\varphi\left(\underbrace{1 - q^k}_{z_0}\right) < M$

$$M = \varphi(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\varphi(1 - q^k)}_{<M} b_{\infty k}(q; z) < M$$

Bu durumda $M < M$ olur ki bu da bir çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır.

$\varphi(1) \geq M$ kabul edelim

$$\varphi(x) \leq M \leq \varphi(1)$$

Tüm değerler maksimum dan küçük olması lazım. Bu da çelişkidir.

$\varphi(1) \leq \varphi(x)$ olduğunu gösterelim.

Bunun için $\varphi(x) \equiv \varphi(1) \equiv b$ seçelim.

O zaman $\varphi(x) := f(x) - (f(1) - f(0))x$ da değerleri yerine yazarsak

$$b = \varphi(x) = f(x) - \left(\underbrace{f(1) - f(0)}_{a} \right) x$$

$$f(x) = ax + b$$

olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada q-tamsayıları ve Bernstein polinomları ile bunlardan elde edilen q-Bernstein polinomları incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar şunlardır.

- Bernstein, eğer $f \in C[0,1]$ ise, $\{B_n(f;x)\}$ in $[0,1]$ aralığında $f(x)$ e düzgün yakınsadığını ispatlamıştır.
- $R_{n,q}(f) = R_n(f,q;x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) b_{nk}(q;x)$ Lupaş'ın tanımladığı Bernstein operatörünün bir q-analoğudur.
- Eğer $q=1$ olursa $R_n(f,1;x)$ klasik Bernsten operatörüdür. $q \neq 1$ için $R_n(f,q;x)$ operatörü, polinomdan daha çok rasyonel bir fonksiyonu ifade eder.
- Herhangi $f(x) \in C[0,1]$ olması için gerek ve yeter şart $q_n \to 1$ durumunda $R_n(f,q_n;x)$ in, $f(x)$ e düzgün yakınsadığı ispatlanmıştır.
- $q \neq 1$ şeklinde bir q seçildiğinde ve gerek ve yeter şart $f(x)$ lineer olması halinde $R_n(f,q;x)$, $f(x) \in C[0,1]$ e düzgün yakınsar
- Lupaş operatörleri tüm $q > 0$ için pozitif lineer operatorler üretebilirken q-Bernstein operatörleri sadece $q \in (0,1)$ da lineer pozitif operator üretir, bu avantaja rağmen Lupaş operatörleri, q-Bernstein operatörlerinden daha az bilinir.

- Bernstein operatörlerinin ileri fark operatörü yardımı ile gösterilebilmektedir
- herhangi bir $f \in C[0,1]$ için $R_n(f,q;x)$ bir yaklaşım dizisi olduğunu gösterilmiştir. Diğer bir deyişle $q_n \to 1$ olması yeter ve gerek şart $[0,1]$ üzerinde $R_n(f,q;x)$, $f(x)$'e düzgün yakınsamaktadır.
- $q \in (0,1)$ ve $q \in (1,\infty)$ durumları için $R_n(f,q;x)$ operatöründe bir simetri kurulabilmektedir.
- $q \neq 1$ olacak şekilde seçildiğinde $R_n(f,q;x)$, $f(x)$e yakınsaması için $q_n \to 1$ olması gerekmektedir.
- q sabit olduğunda ($q=1$) klasik hali Lupaş operatörlerinin yaklaşımını sağlayan en iyi durumdur.

KAYNAKLAR

1. Mustafa Balcı Analize Giriş 1-2, Balcı Yayınları, Ankara, 2006.

2. G.M. Philips, Interpolation and Approximation by Polynomials, Springer-Verlag,

3. S. Ostrovska, On the Lupaş q-anologue of the Bernstein operator.Rocky Mountain of the journel of mathematics. Volume 36, Number 5, 2006

4. X. Li, P. Mikusinski, H. Sherwood and M.D Taylor, On approximation of copulas, in Distributions with given marginals and moment problem(V.Benes, J. Stepan, eds.) Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997

5. A generalization of the Bernstein polynomials based on the q-integers, ANZIAM J. 42 (2000), 79-86.

6. S. Cooper and S. Waldron, The eigenstructure of the Bernstein operator, J. Approx. Theory **105** (2000), 100-112

7. S. Petrone, Random Bernstein polynomials, Scand. J. Statist. 26 (1999), 373-393

8. G. G. Lorentz, Bernstein polynomials, Chelsea, New York, 1996