

T.C.  
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ BOYUTLU  
MEKANSAL STOKASTİK SÜREÇLERİN  
MODELLENMESİ VE ANALİZİ

YASEMİN KARAPINAR

MAYIS 2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürünün onayı.

..../..../.....

Doç. Dr. Burak BİRGÖREN

\_\_\_\_\_  
Müdür V.

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

\_\_\_\_\_  
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Yrd. Doç. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL

\_\_\_\_\_  
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA

\_\_\_\_\_

Doç. Dr. Ali ARAL

\_\_\_\_\_

Yrd. Doç. Dr. Sevgi Yurt ÖNCEL

\_\_\_\_\_

## ÖZET

### İKİ BOYUTLU MEKANSAL STOKASTİK SÜREÇLERİN İNCELENMESİ VE ANALİZİ

KARAPINAR, Yasemin

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL

Mayıs 2009, 110 sayfa

Çeşitli yöntemlerle kaydedilen bir görüntü, otoregresif mekansal süreç olarak modellenenebilir. Uzaktan algılama, emar görüntüleri vs. gibi direkt olmayan yöntemlerle yapılan görüntüleme sırasında elde edilen görüntüler çeşitli hatalar veya aykırı değerler içerebilmektedir. Yani, kaydedilen görüntü gürültüden ve/veya çevresel nedenlerden dolayı bozulmuş olabilir.

Bu çalışmada kesikli-mekan indeksli tek değişkenli otoregresif mekansal süreçlerin durum-uzay modelleri ile incelenmesini, mekansal bağımlılık katsayılarının en küçük kareler yöntemiyle tahmini ve Kalman filtresiyle durum tahminini mümkün kılan bir yaklaşım sunulmuştur. Kalman filtresinin optimalliği ancak gürültünün ve durumun Gaussian dağılımına sahip olduğu varsayımı altında sağlanabilmektedir. Bu varsayımların sağlanamaması halinde, ortaya çıkan aykırı değerlerin etkisini azaltabilmek için görüntü onarımı Dayanıklı İndirgenen Güncellenmiş Kalman Filtresi ile yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler :** Mekansal Süreçler, Dayanıklı İstatistik, Görüntü Onarımı, Kalman Filtresi.

## **ABSTRACT**

### **MODELING AND ANALYSING OF TWO DIMENSIONAL SPATIAL STOCHASTIC PROCESSING**

**KARAPINAR, Yasemin**

**Kırıkkale University**

**Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**Department of Mathematics, M. Sc. Thesis**

**Supervisor : Assist. Doc. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL**

**May 2009, 110 pages**

An image, recorded in various way, can be modeled as autoregressive spatial process. Images, which are obtained by indirect methods such as remote sensing, MRI's etc. during monitoring process, may have errors or outliers. In other words, recorded image might be distorted due to it's noise and/or enviromental conditionos.

In this study, an useful approach for investigation of autoregressive processes with univariate in discrete-space indexed space, estimation of spatial dependence coefficients by least squares method and state estimation by Kalman filtering is presented. Optimality of Kalman filter is provided by only under the assumption of distribution of noise and state is Gaussian distribution. To reduce of the effects that existed image restoration is done by Robust Reduced Update Kalman Filter for reducing the effects of the outliers while the assumptions are not provided.

**Key Words :** Spatial Processes, Robust Statistics, Image Restoration,  
Kalman Filtering.

## TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalıŐmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren ve destekleyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL'e (Kırıkkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü), tezin değerlendirilmesindeki katkılarından dolayı Sayın Jüri üyeleri hocalarıma, tezimin dilbilgisi yönünden düzeltmelerini yapan ve manevi desteğinden dolayı Sayın ArŐ. Gör. Kübra ABA DURUKAN'a ve yardımlarını esirgemeyen Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü hocalarım Yrd. Doç. Dr. Fatih TANK, Öğr. Gör. Emel KIZILOK, Öğr. Gör. Serap YÖRÜBULUT, ArŐ. Gör. Abdullah YILMAZ ve Altan TUNÇEL'e, büyük fedakarlıklarla bana destek olan arkadaşlarım ArŐ. Gör. AyŐe SARIAYDIN'a (Orta Doėu Teknik Üniversitesi Uygulamalı Matematik Enstitüsü) ve Sema IVİOĞLU'na, tezimi hazırlamam esnasında maddi manevi desteklerinden dolayı kardeşim Yasin KARAPINAR'a ve AİLEM'e teşekkürlerimi sunarım.

## ÇİZELGELER DİZİNİ

### ÇİZELGE

2.1. M tahmin edici fonksiyonları .....	33
3.1. A matrisini oluşturma .....	75
3.2. $A(i, j)$ matrisini oluşturma .....	76
3.3. Mekansal bağımlılık katsayıları ve tahminleri .....	101

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### ŞEKİL

2.1 $(x-t)^2$ fonksiyonun Amaç ve Etki fonksiyonu .....	29
2.2 $\text{sgn}(x-t)$ fonksiyonun Amaç ve Etki fonksiyonu .....	29
2.3. Huber'in Etki fonksiyonu .....	30
2.4. Haple'in Etki fonksiyonu .....	31
2.5. Tukey'in Amaç fonksiyonu .....	31
2.6. Tukey'in Etki fonksiyonu .....	32
2.7. Andrews'in Amaç fonksiyonu .....	32
3.1. Latistin geçmiş, şimdiki ve gelecek bölgelerinin gösterimi .....	64
3.2. Markov zincirinin destek kümesi .....	65
3.3. $M \times N$ bölgenin 2-B latis olarak resmedilmesi .....	69
3.4. $M \times N$ boyutlu resmin yatay ve düşey yönlerinin gösterilmesi .....	70
3.5. $M \times N$ büyüklüğüne sahip 2-B bir sayısal görüntünün temel yapısı .....	72
3.6. $16 \times 16$ 'lık bir ızgara üzerinde 256 farklı gri seviyenin gösterimi .....	74
3.7. $A$ matrisini görüntüleme .....	75
3.8. $A(i, j)$ matrisini görüntüleme .....	77
3.9. Görüntü onarma için tipik bir ortam .....	78
3.10. Farklı alanda kullanılan görüntüler .....	80
3.11. 'Borel Binası' görüntüleri .....	82
3.12. Bölünmüş Durum vektörü .....	90
3.13. Otoresif sürecin derecesi .....	96

3.14. Orijinal görüntü (Kameraman) .....	99
3.15. Mekansal bağımlılık katsayıları .....	100
3.16. Bozuk görüntü .....	101
3.17. İGKF ile onarılmış görüntü .....	102
3.18. Dayanıklı İGKF ile onarılmış görüntü .....	102



## KISALTMALAR

DKF	Dayanıklı Kalman Filtresi
EÇOT	En Çok Olabilirlik Tahmini
EF	Etki Fonksiyonu
EKK	En Küçük Kareler
EKMS	En Küçük Mutlak Sapma
HKO	Hata Kareler Ortalaması
İGKF	İndirgenen Güncelleştirilmiş Kalman Filtresi
KF	Kalman Filtresi
MMS	Medyan Mutlak Sapma
NSHP	Simetrik Olmayan Yarı Düzlem
PSGO	Peak Sinyal Görüntü Oranı

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	v
KISALTMALAR .....	vii
İÇİNDEKİLER .....	viii
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Tezin Amacı .....	6
1.2. Kaynak Özetleri .....	7
2. MATERYAL VE YÖNTEM .....	9
2.1. Temel Kavramlar .....	11
2.2. Parametre Tahmini ile İlgili Kavramlar .....	19
2.2.1. Tahmin Edicilerde Aranılan Özellikler .....	20
2.3. Dayanıklı İstatistik .....	23
2.3.1. Dayanıklı Tahmin Edici: M Tahmin Edicisi .....	27
2.4. Lineer Modeller .....	33
2.4.1. Lineer Modellerin Parametre Tahmini .....	39
2.5. Bir Başka Tahmin Metodu: Kalman Filtresi .....	51
3. ARAŞTIRMA BULGULARI .....	58
3.1. Stokastik Süreçlerle İlgili Tanımlar .....	58
3.2. Mekansal Veri Analizi .....	67

3.3. Sayısal Görüntü İşlemenin Temelleri .....	71
3.4. Görüntü Onarma .....	78
3.5. Görüntünün Modellenmesi .....	79
3.6. Görüntünün Onarılması için İndirgenen Güncelleştirilmiş Kalman Filtresi	88
3.6.1. En Küçük Hata Kareler Yöntemiyle Mekansal Bağımlılık Katsayıların Tahmini .....	95
3.6.2. Dayanıkları İndirgenen Güncelleştirilmiş Kalman Filtresi .....	97
3.7. Uygulama .....	99
4. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	104
KAYNAKLAR .....	105

## 1. GİRİŞ

Gerçek dünyadaki bir olayın, sürecin veya birimlerden oluşan ve birimleri arasındaki iç ilişkiler yanında çevre ile dış ilişkilere göre işleyen bir sistemin belli bir anlatımına model denir. Bu anlatım sözle, çizimle veya belli ölçeklerde ölçeklere fiziki benzerlik oluşturacak şekilde yapılabilir. Fakat en geçerli anlatım şekli (yolu) bilimin ortak dili olan matematiktir.

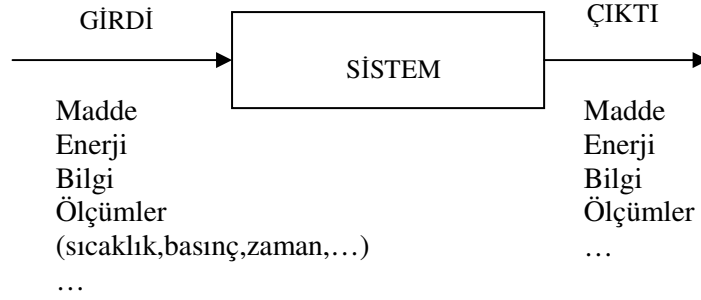
Kısaca Model, gerçek dünyadaki bir olgunun belli bir anlatımıdır, simülasyon ise model üzerinde deney yapmaktadır. Gerçek dünyada bir olayın olması, sürecin gerçekleşmesi, sistemin işleyişi bir deneyin yapılması olarak düşünülebilir. Laboratuvar ortamında düzenlenen deneylerle birlikte gerçek dünyada olup bitenleri de tabiat laboratuvarında birer deney olarak görebiliriz.

Sistem, belirli girdileri alan ve bunları uygun olarak işleyerek belirli çıktılar arasındaki ilişkiyi gösteren, bir işlevi en büyükmeyi amaçlayan varlıklar veya öğeler topluluğu olarak tanımlanabilir. Bazı durumlarda bir tek eleman bir sistem olarak, bazı durumlarda da birbirleriyle etkileşimli alt sistemlerin oluşturduğu bir bütün bir tek sistem olarak ele alınmaktadır. Örneğin, belli bir okul tek başına bir sistem olduğu gibi, bu okulda belli bir sınıf, kantin veya kütüphane de tek başına birer sistemdir.

Sistemi incelemekteki amaç, sistem davranışını öğrenmek, sistemi denetlemek, yenilemek veya korumaktır. Bazı durumlarda bilinen girdiler için sisteme bağlı olarak çıktının ne olacağı hakkında veya girdiler ve çıktılar gözlenerek (bilindiğinde) sistemin kendisi (sistem parametreleri) için bilgi çıkarmak istenebilir.

Bazı durumlarda da amaç, istenilen çıktıyı elde edebilmek için sisteme denetlenebilen girdiyi vermek olabilir<sup>(1)</sup>.

Genellikle sistemler şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilir.



Sistemler, öğeleri matematiksel işlemlerle tanımlanmış modellerle açıklanırlar. Uygulamada bir sistemin tüm özelliklerini ortaya koyabilecek uygun bir modelin seçimi oldukça önemlidir. Modelin en iyi şekilde analiz edilmesi için doğanın kendi yapısından kaynaklanan rasgelelik olgusunun göz önünde bulundurulması ve bu nedenle de istatistiksel yöntemlere başvurulması gerekir. İstatistiksel sistem modelleme ve tahmin problemleri özellikle jeofizik, elektronik, ekonomi, telekomünikasyon, su altı sistemleri ve kontrol mühendisliği gibi alanlarda karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmada sebep-sonuç ilişkileri rasgelelik içeren ve mekana göre değişen stokastik sistemler ele alınacak ve sistemin durumunun veya parametrelerinin tahmini, sistem gözlemlerini (çıktısını) kullanarak çeşitli istatistiksel yöntemlerle belirlenmeye çalışılacaktır.

Mekan-zaman analizi uzayda rasgele bir bölge üzerinde ve periodik zamana göre ölçülen rasgele değişkenin gözlemlerinin serisinin analiziyle ilgilidir. Bazı

durumlarda gözlem anı gereksiz olabilir veya gözlem zamana göre gelişmeyebilir. Bu durumda sadece mekansal süreçle ilgilenilir. Mekansal süreç, homojen, isotropik, tam durağan, zayıf durağan süreç olarak modellenebilir. Jeolojik, coğrafi, astronomik, çevresel gözlemler veya bir görüntü sadece mekansal sürecin bir realizasyonu olarak ele alınabilir<sup>(2)</sup>.

İki boyutlu sinyaller (örneğin bir görüntü), mekana bağlı gözlemlerin kümesidir. Mekansal serinin bir özelliği olarak ele alınan gözlemler genellikle bağımsız değildir. Böylece analiz gözlemlerin belli bir sırasına ve düzenine göre yapılmalıdır. Eğer sonraki veriler, önceki veriler yardımıyla tam olarak öngörülürse seri deterministiktir. Aksi takdirde sonraki veriler, önceki verilerden sadece kısmi olarak belirlenirse seri stokastiktir. Bu nedenle otoregresif model, gürültü değişkeni içerir<sup>(2)</sup>.  $c(k,l)$ , mekansal bağımlılık katsayısı ve  $w(m,n)$ , gürültü süreci olmak üzere daha önceki gözlemlerle sonraki gözlemler arasında lineer bir bağıntının olduğu varsayımı altında mekansal otoregresif model eşitliği

$$X(m,n) = \sum_{k,l} c(k,l)X(m-k,n-l) + w(m,n) \text{ ile verilebilir.}$$

İki boyutta mekânın doğal sıralaması olmadığı için mekansal ilişkinin tek yönlü, iki yönlü veya simetrik olmasına göre incelendiğinde iki boyutlu Markov zinciri, geçmiş ve lokal durum bölgesini farklı ele alır. Bu çalışmada  $X(m,n)$  simetrik olmayan yarı alan Markov zinciri olarak ele alınmıştır. Mekansal süreçlerde Kalman filtresini kullanabilmek amacıyla ardışık hesaplama avantajını sağlamak için iki boyutlu Markov zinciri, mekansal model için uygunluk sağlamalıdır. Ayrıca bu çalışmada kesikli-mekan indeksli tek değişkenli otoregresif mekansal süreçlerin durum-uzay modelleri ile incelenmesini mümkün kılan bir yaklaşım da sunulmuştur.

Mekansal bağımlılık katsayılarının ve durum vektörünün tahmini, Kalman filtresi ile yapılmıştır.

Çeşitli yöntemlerle kaydedilen bir görüntü, otoregresif mekansal süreç olarak ele alınabilir. Uzaktan algılama, emar görüntüleri vs. gibi direkt olmayan yöntemlerle alınan görüntüleme sırasında elde edilen ilk sonuçlar gerçek değerlere göre belirli hatalar (sapmalar) içerebilmektedir. Otoregresif modelin içerdiği gürültü veya çevresel nedenlerle kaydedilen görüntünün verileri, gerçek değerlerine göre bozulmuş olabilir. Elde edilen sonuçların kesinleştirilmesi ve var olan yanlış değerlerin, gerçek değerlere yakın olacak şekilde düzeltilmesi bu sebepten çok büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmada görüntünün bir latis üzerinde ele alınmış verileri incelenecektir. Elde edilen görüntü sonuçlarının iyileştirilmesi ve gerçek değerlere yakınlştırılması probleminin çözümündeki en zor noktalardan biri, iki veya daha büyük boyuta sahip küme üzerindeki veriler arasındaki ilişkinin (bağımlılık yapısının) bilinmemesidir. Görüntü modelleri latis üzerinde çeşitli bağımlılık varsayımları altında birçok çalışmada incelenmiştir. Görüntülerin elde edilmesi ve kaydedilmesi yöntemi göz önünde bulundurularak latis üzerindeki herhangi bir rasgele değişken değerlerinin kendinden önceki kaydedilmiş değerlerden bağımlı olduğunu varsayarak, gözlenen değerler yardımı ile gerçek değerlere daha yakın değerler elde etmek mümkündür.

Bir boyutlu tekrarlanan durum filtreleme tekniğini iki boyutlu durumuna genişletirken ortaya bir kaç problem çıkmaktadır. Bunlar; i) uygun bir durum vektörü tanımlayarak, uygun iki boyutlu tekrarlanan modelin nasıl kurulacağı ii) mantıksal bir yaklaşımla sonuç durum vektörünün boyutunun nasıl indirgeneceği iii) işaretleri paralel işleyerek Kalman filtre prosedürlerinin nasıl hızlandırılacağıdır.

Son yıllarda görüntü onarımı için, görüntü modelleme ve Kalman filtresinin sıralarını azaltmak önemli ölçüde dikkat çekmektedir. Bunun için bir kaç filtreleme şeması yöntemi, örneğin satır satır filtreleme, vektör filtreleme, şerit filtreleme ve blok filtreleme gibi yöntemler önerilmiştir. Woods ve Radewan<sup>(3)</sup>, Woods ve Ingle<sup>(4)</sup>, Angwin ve Kaufman<sup>(5)</sup>, Suresh ve Shenoi<sup>(6)</sup>. Woods ve Radewan<sup>(3)</sup>, gürültüden dolayı bozulan görüntü için, iki boyutlu Kalman filtresiyle ele almışlardır. Kalman filtresi denklemlerinin boyutunun düşük olması işlem zamanının azalmasına neden olmaktadır<sup>(7)</sup>.

Bu çalışmada mekana göre değişen stokastik süreçlerin modellenmesi üzerinde durulacak ve modellerin analizi için Dayanıklı Kalman Filtresi (DKF) ele alınacaktır. İstatistik paket programları yardımıyla özellikle görüntü onarma üzerine çeşitli uygulamalar yapılacaktır.

Tezin Materyal ve Yöntemler başlıklı ikinci bölümünde istatistik teorisinde yer alan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Ayrıca bu bölümde Parametre Tahmini, Dayanıklı İstatistikler, Kalman Filtresiyle ilgili bilgiler verilmiştir.

Tezin Araştırma Bulguları başlıklı üçüncü bölümünde Stokastik Süreçlerle ilgi temel kavramlar, Mekansal Stokastik Süreçlerin Görüntü İşleme alanının ele alınış biçimi, dayanıklı görüntü onarma ve mekansal bağımlılık parametrelerinin tahmini konuları ele alınmıştır ve istatistik paket programı yardımıyla bir uygulama yapılmıştır.



## 1.1. Tezin Amacı

Veriler arasında mekansal bağımlılığın olduğu varsayımı altında bozuk görüntülerin iyileştirilmesi için Kalman filtresi ile orijinal görüntünün tahmini üzerinde durulmuştur. Diğer bir deyişle amacımız çeşitli nedenlerden dolayı elde edilen bozuk görüntüyü gözlem kabul edip durum tahminiyle görüntünün aslına ulaşmaktır. Bunun için latisin herhangi bir gözesindeki verinin kendi solundaki ve üstündeki verilerle olan bağımlılık şekli, beyaz gürültü içeren bir lineer bağımlılık olduğu varsayımı altında kurulmuş model kullanılmıştır. Ama otoregresif model üzerinde istatistiksel analiz ve sonuç çıkarımı, yapabilmek için mekansal bağımlılık katsayılarının bilinmesi gereklidir. Mekansal süreçlerin, sayısal görüntü işleme alanındaki kullanımından ve uygulamalarından üçüncü bölümde bahsedilecektir.

Biliyoruz ki bilgisayar uygulamalarında bir görüntüyü nicelendirmek, çok fazla veri taşımak anlamına gelmektedir. Bu kadar çok veri çok miktarda hesap ve bellek gerektirebilir. Bu da hem zaman kaybına hem de işlem hatalarına neden olur. Kalman filtresi ise tüm veriyi kullanmamaktadır. O an hangi noktanın onarımı yapılacaksa o noktadan önceki verileri kullanmaktadır. Bunun için de hesaplamalardaki fazlalığı azaltan bir metot olan İndirgenen Güncelleştirilmiş Kalman Filtresi (İGKF) kullanılması amaçlanmıştır.

Ancak Kalman filtresinin optimalliği gözlem gürültüsünün ve durumun Gaussian dağılımına sahip olduğu varsayımına dayanır. Eğer bu varsayım sağlanamazsa beklenmedik sayıda büyük gözlemler (aykırı değerler) ortaya çıkar. Bu aykırı değerlerin etkisinden kurtulabilmek için de dayanıklı istatistiksel yöntemlerden faydalanılacaktır.

## 1.2 Kaynak Özetleri

Çalışmaya öncelikle Öztürk ve Özbek<sup>(1)</sup>'in “Matematiksel Modelleme ve Simülasyon” kitabından başlanılmış olup, çalışmanın genelinde kullanılacak olan temel kavramlar Akdi<sup>(8)</sup>'in “Matematiksel İstatistiğe Giriş” ve parametre tahmini ile ilgili kavramlarda Öztürk ve arkadaşları<sup>(9)</sup>'nın “Parametre Tahmini ve Hipotez Testi” kitaplarından yararlanılmıştır. Genel bilgiler Ripley<sup>(10)</sup>, Cliff ve Ord<sup>(11)</sup>, Cressie<sup>(12)</sup>, Gikhman ve Skorokhod<sup>(13,14)</sup>, Fox<sup>(15,16)</sup>, Ljung ve Söderström<sup>(17)</sup>, Öncel<sup>(18)</sup>, Gebizlioğlu ve arkadaşları<sup>(19)</sup>, Muirhead<sup>(20)</sup>'in çalışmalarından derlenmiştir.

Won ve Gray<sup>(21)</sup>, Woods<sup>(22)</sup>, Kızılkaya<sup>(23)</sup>; görüntünün sayısal olarak nasıl işlendiğini ve görüntü onarımının önemini vurgulamışlardır. Böylece görüntü işleme hakkında ayrıntılı bilgiler için bu çalışmalardan yararlanılmıştır.

İki boyutlu mekansal süreçlerin durum-uzay modellemesi ve Kalman filtresiyle durum ve parametre tahmini problemlerinin irdelenmesi ve çözümü için Woods ve Radewan<sup>(3)</sup>, Woods ve Ingle<sup>(4)</sup>, Suresh ve Shenoi<sup>(6)</sup>, Kaufman ve arkadaşları<sup>(24)</sup>, Angwin ve Kaufman<sup>(5)</sup>, Cheng ve Zhang<sup>(7)</sup>, Azimi-Sadjadi ve Bannour<sup>(25)</sup>, Öncel<sup>(26,27)</sup>, Öncel ve arkadaşları<sup>(28)</sup>'nin çalışmalarından yararlanılmıştır. Ayrıca Masreliez ve Martin<sup>(29)</sup>, Martin<sup>(30)</sup>, Martin ve Masreliez<sup>(31)</sup>, Wilcox<sup>(32)</sup>, Hampel ve arkadaşları<sup>(33)</sup>, Kashyap ve Eom<sup>(34)</sup>, Kashyap ve Poor<sup>(35)</sup>,ın dayanıklı istatistik üzerine yapmış oldukları çalışmalardan yararlanılmıştır. Bu çalışmalarda görüntünün skaler olarak taranması durumunda Kalman filtresi denklemlerinin indirgenmesi üzerinde durmuşlardır. Daha sonra görüntünün daha iyi netlik kazanması için Dayanıklı Kalman Filtresinin İndirgenmesini (DKFİ) önermişlerdir.

Çetin ve Tekalp<sup>(36,37)</sup> çalışmalarında Woods ve Radewan<sup>(3)</sup> tarafından ortaya konulan iki boyutlu Kalman filtresi denklemlerine Masreliez ve Martin<sup>(29)</sup>'nin dayanıklı istatistik metodunu uygulayarak dayanıklı iki boyutlu Kalman filtresi denklemlerini ifade etmişlerdir. Böylece görüntünün dayanıklı kalman filtresiyle tahmini için bu çalışmalardan yararlanılmıştır. Aliev ve arkadaşları<sup>(38)</sup>, Belaifa ve Schwartz<sup>(39)</sup>, Chee ve Soh<sup>(40)</sup>, Terrien ve arkadaşları<sup>(41)</sup>'n çalışmalarından da faydalanılmıştır.

Bilinmeyen mekansal bağımlılık parametrelerinin tahmini için ise Kaufman ve arkadaşları<sup>(24)</sup>, Woods<sup>(22)</sup>'un çalışmalarından yararlanılmıştır. Matlab paket programında görüntü işleme komutları hakkında Gonzalez ve arkadaşları<sup>(42)</sup>'nin kitabından yararlanılmıştır.

## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

Model, gerçek dünyadaki bir olgunun anlatımıdır, bir temsilidir. Gerçek dünyanın çok karmaşık olması sebebiyle modeller, anlatmak istedikleri olgu ve sistemleri basitleştirerek belli varsayımlar altında ele almaktadır. Modeller ne kadar karmaşık görünseler de gerçeğin eksik bir anlatımıdır. Kısaca model denilen olgu, model kurucunun gerçeği anlayışının bir ürünüdür. Bazı durumlarda, gerçek dünyadaki bir olgu ile ilgili birden fazla model kurulmaktadır. Bu modeller birbirinden farklı olmakla birlikte (örneğin, ışık için tanecik ve dalga modellerinde olduğu gibi) olgunun belli bazı özelliklerinin anlatımında biri diğerine göre daha iyi veya kötü olabilmektedir.

Gerçek dünyadaki bir olgunun modellenmesi sırasında ilgilenilen özellikler (hız, ivme, ...) ile anlatımdaki karşılıkları (vektör, türev, ...) arasındaki bağ, ölçme işlemine dayalıdır. Ölçme her bilim dalının kendine özgü zorluklar içeren ve çözülmesi gereken bir problemdir. Örneğin, sıcaklığın nasıl ve ne ile ölçüleceği fiziğin bir problemdir. Enflasyonun nasıl ve ne ile ölçüleceği ekonominin bir problemidir. Zeka düzeyinin ölçülmesi psikoloji ve pedagojinin bir problemidir. Birçok durumda ölçmenin nasıl yapılacağı belirlenmesi, ölçü biriminin ve bazı durumlarda da ölçü aletinin (terazi, ölçek, metre, termometre, anket, test, ...) bulunması araştırmanın en zor aşamalarından birisidir. Bir ölçme sonucu, ölçülen özelliğin modeldeki karşılığı olan değişkenin aldığı değer olarak ele alınmaktadır. Ölçülen özellik rasgelelik içerdiğinde modelde buna karşılık gelen değişken doğal olarak rasgele değişken olacaktır.

Matematiksel modeller:

- Stokastik (rasgele değişken içeren) ve deterministik (rasgele değişken içermeyen) matematiksel modeller.
- Lineer ve lineer olmayan modeller.
- Sürekli (diferansiyel denklem) ve kesikli (fark denklemi, ...) modeller.

Gerçek dünyayı anlama ve anlatmada, yani modellemede insan aklının en güçlü iki aracı matematik ve istatistiktir. İstatistik özellikle, rasgelelik içeren olguların modellenmesinde ön plana çıkmaktadır.

Bir modelin yararlı olması için, olgu veya sistem ile ilgili bazı girdiler (veriler) verildiğinde bunların sonuçlarını ortaya çıkaran bir çözüm yönteminin bilinmesi ve bu yöntemin uygulanabilmesi gerekir. Örneğin, belli bir olgu bir diferansiyel denklem ile modellendiğinde bu denklemin çözüm yolunun da bilinmesi gerekir. Bu, soyut bir bilim dalı olan matematiğin bir sorunudur. Eğer model stokastik ise çözümleme istatistiğin bir sorunu olur. Diğer bir deyişle, çözümleme sonucunda elde edilen sonuçların yorumlanması ve bu sonuçlardan gerçek dünya hakkında açıklamalar ve tahminler yapılması karar kuramı çerçevesinde istatistiğin bir sorunu haline gelir. Ayrıca verilerin nasıl toplanacağı, ortaya atılan bir modelin (teorinin, hipotezin) sınanmasının (test edilmesinin) nasıl yapılacağı yine istatistik biliminin bir sorunudur<sup>(1)</sup>.

Bu kesimde, ileri bölümlerde kullanılacak temel olasılık kavramları yanında, rasgele değişkenlerin bazı kavramları ve dayanıklı istatistik ile ilgili bilgiler verilecektir.

## 2.1 Temel Kavramlar

İstatistik, rasgelelik içeren olaylar, sistemler ve süreçler hakkında bizleri bilgilendiren bir bilim dalıdır. Fakat rasgelelik kavramı henüz tam olarak açıklanmamıştır. Tüm bilimler gerçek dünyadaki olaylar hakkında insanları bilgilendirmek için çalışır. Fakat gerçek dünyadaki olaylar tamamen rasgele gelişen olaylardır. Bir paranın havaya atılması deneyinde sonucun ne olabileceği (yazı veya tura) söylenebilir. Fakat para havaya atıldığı zaman yazı/tura gelecek denilemez. Aynı para havaya defalarca atıldığında kaç defa tura/yazı geleceği de söylenemez. Fakat kaç defa yazı/tura geleceğinin olasılığı verilebilir. Bu paranın düzgün olup olmadığı şüphesi varsa, parayı havaya defalarca atarak, elde edilen sonuçları bir yere not edip, paranın hileli olup olmadığı hakkında belli bir anlam düzeyinde bir şey söylenebilir. Bunu yaparken de gerçek dünyadaki olayları, bilinen bir dünyaya aktararak, o dünyada işlemler yapılabilir. Çünkü gerçek dünyadaki olaylar ile bir işlem yapılamaz. Örneğin, yazı ile tura, ne toplanabilir ne de çarpılabilir. İşte gerçek dünyadaki olayları bilinen (matematiksel) dünyaya götüren bu fonksiyon rasgele değişkendir. Burada gerçek dünya, üzerinde çalışılan kitle, yani örnek uzaydır<sup>(8)</sup>.

**Tanım 2.1**  $\Omega$  boş olmayan bir küme ve  $U$  da  $\Omega$  üzerinde tanımlı bir sigma cebir olsun.  $U$  üzerinde

$$\begin{aligned} P: U &\rightarrow [0,1] \\ A &\rightarrow P(A) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan  $P$  küme fonksiyonu,

- i.  $\forall A \in U$  için  $P(A) \geq 0$
- ii.  $P(\Omega) = 1$
- iii.  $A_n$  'ler  $U$  'daki ayrık olayların bir dizisi olmak üzere

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa  $P$  'ye bir **olasılık ölçüsü**,  $P(A)$  sayısına ise  $A$  olayının **olasılığı** ve  $(\Omega, U, P)$  üçlüsüne de bir **olasılık uzayı** denir<sup>(8)</sup>.

**Tanım 2.2**  $(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow R \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned} \tag{2.1}$$

fonksiyonu  $\forall a \in R$  için,  $\{\omega: X(\omega) \leq a\} \in U$  koşulunu sağlıyor ise bu fonksiyona bir **rasgele değişken** denir.

Burada bir fonksiyonun ters görüntüsünün tanımından

$$X^{-1}(-\infty, a] = \{\omega: X(\omega) \leq a\} \tag{2.2}$$

yazılabilir. (2.2) eşitliğinden yararlanarak, (2.1)'de tanımlanan  $X$  fonksiyonun bir rasgele değişken olabilmesi için gerekli koşul,

$$\forall a \in R \text{ ve } X^{-1}(-\infty, a] \in U$$

olmasıdır<sup>(8)</sup>.

**Tanım 2.3**  $(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı olmak üzere  $P$  olasılık ölçüsü yardımıyla

$$F_X : R \rightarrow [0,1]$$
$$x \rightarrow F_X(x) = P\{w : X(w) \leq x\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona,  $X$  rasgele değişkenin **dağılım fonksiyonu** (d.f) denir<sup>(8)</sup>.

**Teorem 2.1**  $(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı olmak üzere  $X$  bir rasgele değişken ve  $F$  de  $X$  rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda  $F$  dağılım fonksiyonu

- i. Azalmayan bir fonksiyondur.
- ii. Sağdan süreklidir.
- iii.  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  ve  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

özelliklerini sağlar<sup>(8)</sup>.

**Teorem 2.2**  $X$  bir rasgele değişken ve  $F$  de  $X$ 'in dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda,

- i.  $P(w : a < X(w) \leq b) = F(b) - F(a)$



$$\text{ii. } P(w: X(w) = x) = F(x^+) - F(x^-)$$

dır.

Eğer  $X$  rasgele değişkeni kesikli yani,  $D_X$  sayılabilir bir küme ise,  $P(X = x) = F_X(x^+) - F_X(x^-)$  eşitliğinden yararlanarak  $X$ 'in *olasılık fonksiyonu* (o.f.),

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & , \quad x \in D_X \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Herhangi bir  $f_X(x)$  fonksiyonunun, bir rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu olabilmesi için

$$\text{i. } f_X(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in R$$

$$\text{ii. } \sum_{x \in D_X} f_X(x) = 1$$

koşullarının sağlanması gerekir<sup>(8)</sup>.

**Tanım 2.4** Bir  $X$  rasgele değişkenin aldığı değerlerin kümesi  $D_X$  olmak üzere

$\mathcal{X} = D_X^n \subset R^n$  kümesine **örneklem uzayı** denir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  örneklemindeki rasgele değişkenlerin gözlenen değerleri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  olmak üzere  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{X} \subset R^n$  dir<sup>(9)</sup>.

**Tanım 2.5**  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , olasılık (yoğunluk) fonksiyonu  $f_X(., \theta)$  ve  $\Theta$  parametre kümesinin elemanı  $\theta$  olan dağılımdan bir örnekleminin,  $\mathbf{T}: \mathcal{X} \rightarrow R^k$  Borel

ölçülebilir ( $\theta$  bilinmeyen parametresine bağlı olmayan) bir fonksiyon olmak üzere  $\mathbf{T}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele vektörüne **istatistik** denir<sup>(9)</sup>.

Rasgele değişkenler örnek uzaydan (üzerinde çalışılan kitle) reel sayılara giden bir fonksiyondur. İstatistiğin esas amaçlarından bir tanesi üzerinde çalışılan kitleyi anlayabilmek, yani bu kitlenin bazı karakteristikleri hakkında tahminlerde bulunmaktır. Kitleyi karakterize eden özellikler genellikle bilinmemektedir, bu bilinmeyenlere **parametre** denir<sup>(8)</sup>.

Bu istatistik bilinmeyen bir parametreyi tahmin etmek amacıyla kullanılırsa **tahmin edici** adını alır ve  $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  olarak gösterilir. Tahmin edicinin aldığı değere de **tahmin** denir.

**Tanım 2.6**  $f$  bir olasılık (yoğunluk) fonksiyonu olmak üzere,

$$F = \left\{ \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right); \mu \in R, \sigma > 0 \right\}$$

ailesine  $f(x)$  standart olasılık (yoğunluk) fonksiyonlu **konum ölçek parametrelili aile** (location-scale parameter family) ve  $(\mu, \sigma)$  ikilisine **konum-ölçek parametresi** (location-scaler parameter) denir.

$F = \{f(x-\mu); \mu \in R\}$  ifadesine **konum parametrelili aile** ve  $\mu$ 'ye de **konum parametresi** (location parameter) denir.

$F = \left\{ \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right); \sigma > 0 \right\}$  ifadesine **ölçek parametre ailesi** ve  $\sigma$ 'ya da **ölçek parametresi** (scale parameter) denir<sup>(9)</sup>.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele örneklem olmak üzere,  $\hat{\theta}$  tahmin edicisi her  $a$  için,

$$\hat{\theta}(a + X) = \hat{\theta}(a + X_1, a + X_2, \dots, a + X_n) = a + \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = a + \hat{\theta}(X)$$

ise  $\hat{\theta}$  tahmin edicisine **konum tahmin edicisi** denir. Eğer  $\hat{\theta}$  tahmin edicisi her  $a > 0$  için,  $\hat{\theta}(aX) = \hat{\theta}(aX_1, aX_2, \dots, aX_n) = a\hat{\theta}(X)$  ise  $\hat{\theta}$ 'ya **ölçek tahmin edicisi** denir. Ayrıca her  $a > 0$  ve her  $b$  için  $\hat{\theta}$  tahmin edicisi

$$\hat{\theta}(aX + b) = \hat{\theta}(aX_1 + b, aX_2 + b, \dots, aX_n + b) = a\hat{\theta}(X) + b$$

özelliğini sağlıyorsa  $\hat{\theta}$ 'ya **konum-ölçek tahmin edicisi** denir.

**Tanım 2.7**  $(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı ve

$$(X_1, X_2, \dots, X_n): \Omega \rightarrow R^n$$

$$w \rightarrow (X_1, X_2, \dots, X_n)(w) = (X_1(w), X_2(w), \dots, X_n(w))$$

olmak üzere, her  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$  için  $\{w: X_i(w) \leq a_i, i = 1, 2, \dots, n\} \in U$  özelliği sağlamıyor ise  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  fonksiyonuna **n-boyutlu rasgele vektör** denir<sup>(43)</sup>.

**Tanım 2.8**  $(\Omega, U, P)$  bir olasılık uzayı,  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  n-boyutlu rasgele vektör olmak üzere,

$$X_j: \Omega \rightarrow R_j$$

$$w \rightarrow X_j(w) = I_j \cup (X_1, X_2, \dots, X_n)(w)$$

fonksiyonuna  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$   $n$ -boyutlu rasgele vektörünün **j. bileşen fonksiyonu** denir<sup>(43)</sup>.

Bir  $n$ -boyutlu rasgele vektörün her bileşeni bir rasgele değişkendir.

**Tanım 2.9**  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$   $n$ -boyutlu rasgele vektör olsun.

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n} : R^n \rightarrow [0, 1]$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow F_{(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x_i)\right)$$

fonksiyonuna  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele vektörünün **dağılım fonksiyonu** denir<sup>(43)</sup>.

**Tanım 2.10**  $n$ -boyutlu bir rasgele vektörün  $D \subset R^n$  değer kümesi sayılabilir olduğunda  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele vektörüne **kesikli rasgele vektör** denir<sup>(43)</sup>.

**Tanım 2.11**  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , kesikli  $n$ -boyutlu bir rasgele vektör olmak üzere

$$f : D \rightarrow R$$
$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

fonksiyonuna  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'nin **olasılık fonksiyonu** denir<sup>(43)</sup>.

Kesikli bir  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele vektörünün olasılık fonksiyonu  $f$  ise

1)  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$

2)  $\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$

$$3) F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{a_1 \leq x_1 \\ a_2 \leq x_2 \\ \dots \\ a_n \leq x_n \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D}} f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

dir.  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'nin olasılık dağılımının belirlenebilmesi için  $f$  olasılık fonksiyonunun bilinmesi yeterlidir. Genelde sayılabilir bir  $D$  kümesinde tanımlı (1) ve (2) özelliğini sağlayan bir fonksiyon, çok değişkenli bir olasılık dağılımı belirler<sup>(43)</sup>.

**Tanım 2.12** Bir  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$   $n$ -boyutlu bir rasgele vektörün  $F$  dağılım fonksiyonu,

$$1) f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

özelliklerini sağlayan bir  $f : R^n \rightarrow R$  fonksiyonu yardımıyla

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1$$

olarak yazılabiliyorsa  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'e **sürekli rasgele vektör** ve  $f$  fonksiyonuna  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 'nin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir.

Dağılım fonksiyonu  $F$  olan bir  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} & , \quad F \text{ in türevlenebildiği noktalarda} \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

biçimindedir<sup>(43)</sup>.

Kitle parametrelerini tahmin etmek için, yani o parametre değerini ölçmek için bir deney birçok defa tekrarlanır. Deneylerin sonunda elde edilen değerlerin bir dizi analizi sonunda bir sonuç elde edilir. Fakat bu deneylerin tekrarlanması da bazı kurallara bağlıdır. Her bir deney sonunda bir değer elde edilir. Yani rasgele değişkenin aldığı değer gözlenir.

**Tanım 2.13** Bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerin bir dizisine **örneklem** adı verilir.

Bir deneyin  $n$  defa tekrarlanması durumunda,  $n$ -hacimli bir örnek, birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rasgele değişkenlerin bir dizisidir.  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , dağılım fonksiyonu  $F$ , olasılık (yoğunluk) fonksiyonu  $f$  olan bir kitleden alınan bir örneklem ise,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  rasgele vektörünün ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad (2.3)$$

şeklindedir<sup>(8)</sup>.

## 2.2 Parametre Tahmini ile İlgili Kavramlar

Gerçek dünyada rasgelelik olgusu içeren bir özellik ile ilgili ölçme işlemine karşılık gelen  $X$  rasgele değişkenin olasılık dağılımının olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,  $F = \{f(., \theta) : \theta \in \Theta\}$  ailesinin bir elemanı olsun.  $\theta \in \Theta$  için  $f(., \theta)$

olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna sahip dağılımdan alınmış bir örneklem  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  olmak üzere, örneklemin kendisinin veya bir  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  istatistiğinin hangi  $\theta$  değerini desteklediğini bilmek, yani  $\theta$ 'yı tahmin etmek (kestirmek) istatistik teorisinde önemli bir problemdir.

### 2.2.1 Tahmin Edicilerde Aranılan Özellikler

Tahminlerin iyi birer tahmin edici olmaları için bazı özelliklere sahip olmaları gerekmektedir. Burada bu özellikler ile ilgili temel kavramlar tanımlanacaktır.

**Tanım 2.14**  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $\theta$  parametresi için bir tahmin edici olmak üzere her  $\theta \in \Theta$  için,

$$E_{\theta}(T) = \theta \quad (2.4)$$

eşitliği sağlanıyorsa,  $T$  tahmin edicisine  $\theta$  parametresi için **yansız** bir tahmin edici denir<sup>(9)</sup>.

**Tanım 2.15** Yansız olmayan tahmin edicilere **yanlı** tahmin edici ve

$$Bias_{\theta}(T) = \theta - E_{\theta}(T) \quad (2.5)$$

değerine **yan** (bias) denir<sup>(9)</sup>.

**Tanım 2.16**  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $\theta$  parametresi için bir tahmin edici olmak üzere  $\forall \theta \in \Theta$  için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\theta} [T(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \theta \quad (2.6)$$

eşitliği sağlanıyorsa,  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  tahmin edicine  $\theta$  parametresi için **limitte yansız** bir tahmin edici denir<sup>(9)</sup>.

**Tanım 2.17**  $Y$ , beklenen değeri sıfır olan bir rasgele değişken olmak üzere, pozitif reel sayıların bir  $(a_n)$  dizisi için,

$$a_n(T(X_1, X_2, \dots, X_n) - \theta) \xrightarrow{d} Y \quad (2.7)$$

oluyorsa,  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  tahmin edicisine  $\theta$ 'nın  $a_n$  -**asimptotik yansız** ve  $a_n = 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  olduğunda kısaca **asimptotik yansız** bir tahmin edicisi denir<sup>(9)</sup>. Burada “ $\xrightarrow{d}$ ” gösterimi dağılımda yakınsama anlamına gelmektedir.

**Tanım 2.18**  $\theta$ 'nın yansız tahmin edicilerinin sınıfı  $\mathfrak{S}$  olmak üzere  $T^* \in \mathfrak{S}$  için,

$$Var_{\theta}(T^*) \leq Var_{\theta}(T) , \forall \theta \in \Theta , T \in \mathfrak{S}$$

oluyorsa,  $T^*$  tahmin edicisine **düzgün en küçük varyanslı yansız** tahmin edici denir<sup>(9)</sup>.

**Tanım 2.19**  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $\theta$  parametresi için bir tahmin edici olmak üzere,

$$HKO_{\theta}(T) = E(T - \theta)^2$$

değerine (beklenen değer var olması halinde)  $T$  tahmin edicisinin **Hata Kareleri Ortalaması** (HKO) denir<sup>(9)</sup>.

Bir  $T$  tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,



$$\begin{aligned}
HKO_{\theta}(T) &= E_{\theta}(T - \theta)^2 = E_{\theta}(T - E(T) + E(T) - \theta)^2 \\
&= E_{\theta}(T - E_{\theta}(T))^2 + (E(T) - \theta)^2 \\
&= Var_{\theta}(T) + Bias_{\theta}^2(T)
\end{aligned}$$

olarak da yazılabileceğinden hem varyansı hem de yanlılığı kontrol etmektedir. Yansız tahmin edicilerin hata kareler ortalaması, tahmin edicinin varyansına eşit olacaktır.

$T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ve  $T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $\theta$  parametresi için iki tahmin edici olmak üzere, her  $\theta \in \Theta$  için,

$$HKO_{\theta}(T_1) \leq HKO_{\theta}(T_2)$$

oluyorsa,  $T_1$  tahmin edicisine HKO ölçütüne göre  $T_2$  'den daha iyidir denir<sup>(9)</sup>.

**Tanım 2.20**  $\theta$  parametresinin bir  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  tahmin edicisi için “ $\xrightarrow{P}$ ” olasılıkta yakınsamayı ifade etmek üzere,

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow{P} \theta$$

oluyorsa, yani seçilen her  $\varepsilon > 0$  için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}(|T(X_1, X_2, \dots, X_n) - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad (2.8)$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu tahmin ediciye **zayıf tutarlı** veya kısaca **tutarlı** tahmin edici ve

$$T(X_1, X_2, \dots, X_n) \xrightarrow{hhhy} \theta \quad (2.9)$$

oluyorsa, bu tahmin ediciye **güçlü tutarlı** tahmin edici denir.  $\theta$  parametresinin bir  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  tahmin edicisi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} HKO_{\theta} [T(X_1, X_2, \dots, X_n)] = 0 \quad (2.10)$$

oluyorsa, bu tahmin ediciye **Hata Kareleri Ortalamasında tutarlıdır** denir<sup>(9)</sup>.

### 2.3 Dayanıklı İstatistik

Bu kesimde uç değerlerden dolayı meydana gelecek sorunları önlemek için kullanılan dayanıklı istatistikten bahsedilecektir.

Örnekleme yer alan verinin çoğunluğundan büyük miktarda uzak gözlemlerin, örneklemedeki diğer verilerle aynı dağılımdan geldiği şüphe uyandırır. Şüphe uyandıran verilere uç değer, kirli bilgi, kirletici, sapan değer (outlier), aykırı değer gibi isimler verilmiştir. Bu şüpheli gözlemler doğal rasgelelik sonucunda ortaya çıkabildikleri gibi kişi ya da makine hatası, ölçme hatası, kayıt hatası veya sistemdeki bir işleyişin bozukluğundan dolayı da ortaya çıkabilir.

Aykırı gözlemler bir örnekleme, verinin çoğunluğundan oldukça farklılık gösteren, sapan gözlemlerdir<sup>(44)</sup>. Bu gözlemler yanlış parametre tahminlerine, yanlış model kurmaya, model varsayımlarının sağlanamamasına ve dolayısıyla yanlış analiz sonuçlarının ortaya çıkmasına neden olurlar.

İstatistiğin en eski ve üzerinde çokça çalışılmış konulardan birisi de aykırı değerlerdir. Veri yığınının içinden çıkan aykırı değerler klasik istatistiki sonuç çıkarımında büyük hatalara yol açabilmektedir.

İstatistiksel analizlerin ana amaçlarından birisi, verilerden yararlanarak bu verilerin geldiği kitle dağılımını ve/veya dağılımın parametrelerini belirlemeye çalışmaktır. Bir dağılımın en önemli karakteristikleri konum ve ölçek parametreleridir. Klasik istatistiksel sonuç çıkarımında bu parametrelerin en iyi biçimde (yansız, tutarlı, etkin, yeterli, minimum varyanslı gibi) tahmin edilmesi istenmektedir. Bu amaç için yapılan çalışmalarda parametrelerin tahmin edicilerinin (istatistikler) aykırı değerlerden etkilenmemesi istenmektedir. Aykırı değerlerden etkilenen istatistikler ise, veride aykırı değer olması durumunda büyük hatalar yapılmasına neden olmaktadır. Diğer bir deyişle, klasik istatistiki sonuç çıkarımı şüpheli değerlere karşı dayanıksızdır. Bu noktadan hareketle, bu türlü bir sorunun giderilmesi için yapılan çalışmalar dayanıklı istatistiğin temelini oluşturur. Bir tahmin edicinin dayanıklı olarak tanımlanabilmesi, bir veya daha fazla veri noktası herhangi bir yerde rasgele büyürken tahmin edicinin sonlu kalabilmesi olarak ifade edilebilir. Dayanıklı (Robust) istatistiksel yöntemler ilk kez 1953 yılında Box tarafından öne sürülmüştür.

Dayanıklı istatistiğin temel amaçları şunlardır:

- i. Veri yığınının yapısını belirlemek.
- ii. Sapan veri noktalarını (şüpheli değerleri) belirlemek ve büyük hatalara karşı koruma sağlamak.
- iii. Kaldıraç noktalarını (Leverage Points) (yüksek etkili veri noktalarını) belirlemek ve uyarıda bulunmak.
- iv. İstenmeyen serisel ilişki veya daha genel olarak yapısal ilişki varsayımlarından sapmalarla ilgilenmek.

Verinin şüpheli değer içermesi durumunda, çeşitli dışlama kuralları kullanarak bu değerlerin yok edilmesi sağlanıp, kalan veri üzerinden klasik istatistiksel yöntemler kullanılabilir. Ancak bu durumda örneklem hacmi küçülür, hangi verinin aykırı değer olduğuna yanlış karar verilebilir. Bunun yerine dayanıklı istatistiksel yöntemlere başvurmak önerilir. Normal (Gaussian) dağılımın konum parametresinin tahmin edicisi olarak örneklem ortalaması pek çok kritere göre en iyi tahmin edicidir. Ancak her model için Normal dağılım varsayımı yapılamamaktadır. Özellikle ağır kuyruk içeren dağılımlar için tercih edilmez. Örneğin,

$$f(x) = \frac{1}{\pi \left[ 1 + (x - \theta)^2 \right]}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \theta \in R$$

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip Cauchy dağılımı ağır kuyruğu olan bir dağılımdır ve bu dağılımın konum parametresinin tahmin edicisi olan örneklem ortalamasının yerine örneklem medyanı dayanıklı bir tahmin edicidir.

Bir lineer modelin bilinmeyen parametreleri, en küçük kareler (EKK) yöntemiyle tahmin edilmek istenirse ve örneklemede aykırı değerler varsa bulunan tahminler optimal olmayacaktır. Aykırı gözlem sayısının örneklem hacmine oranı olabilecek en küçük kirlenme düzeyini verir ve bu düzey **kırılma noktası** olarak adlandırılır. Veri kümesindeki  $n$  tane veriden  $m$  tanesi bozuk veri (aykırı gözlem) iken  $T$  tahmin edicisinin kırılma (bozulma) noktası,

$$\varepsilon^*(T) = \text{minimum} \left\{ \frac{m}{n}, \text{ Yan}(m, T) \text{ sonsuz iken} \right\}$$

olarak ifade edilir. Burada  $X$  orijinal örneklem  $X'$  aykırı verileri içeren örneklem olmak üzere

$$Yan(m, T) = \text{maksimum} \|T(X') - T(X)\|$$

dır ve aykırı değerlerin neden olduğu en büyük yanlılığı gösterir.

Bir tahmin edici için kırılma noktası, gözlemlerin ne kadarı kirlendiğinde tahmin edicinin bozulmadan, kırılmadan sağlam sonuçlar vereceğini gösteren bir ölçüttür. Ayrıca sonlu bir örneklemedeki şüpheli verilere tanınan toleranstır ve tahmin edicinin ne kadar aykırı değerle baş edebileceğini gösterir. EKK tahmin edicilerinin kırılma noktası  $\varepsilon^* = \frac{1}{n}$ 'dir. Böylece aykırı değerlere karşı aşırı hassastır. Tek bir aykırı gözlem, tahmin edicinin olacağı değeri etkileyerek bozacaktır.

Etki fonksiyonu (EF), her bir verinin tahmin edicisi üzerindeki marjinal etkisini ölçer. Tahmin edicinin verideki bozulmalara karşı vereceği tepki hakkındaki bilgi, etki fonksiyonundan elde edilir. Eğer tahmin edicinin dağılımı, örneklemin dağılımı olan  $F$ 'ye bağlı ise bu tahmin edici küçük miktardaki bozulmalardan bile etkilenebilir.  $\Delta x$ , aykırı gözlemin dağılımını,  $F_{x,\varepsilon} = (1-\varepsilon)F(x) + \varepsilon\Delta x$  ise  $x$  noktasında ve  $\varepsilon$  oranında bozulmuş dağılımını göstermek üzere bir aykırı değer, tahmin edicisi üzerindeki etkisi  $\frac{T(F_{x,\varepsilon}) - T(F)}{\varepsilon}$  olarak ifade edilir. Buna göre etki fonksiyonu,

$$EF(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T(F_{x,\varepsilon}) - T(F)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer bir tahmin edici etki fonksiyonuna sahip ise bu tahmin edici

$$\sqrt{n}(T_n - T(F)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, V(T, F))$$

biçiminde asimptotik normal dağılıma sahiptir. Burada “ $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d}$ ”, dağılımda yakınsamayı gösterir ve  $V(T, F) = \int EF(y, T, F)^2 dF(y)$  dir<sup>(45)</sup>.

### 2.3.1 Dayanıklı Tahmin Edici: M Tahmin Edicisi

L tahmin edicisi, M tahmin edicisi, A tahmin edicisi, D tahmin edicisi, Genelleştirilmiş M tahmin edicisi, P tahmin edicisi, R tahmin edicisi, S tahmin edicisi, W tahmin edicisi gibi dayanıklı pek çok tahmin edici çeşitleri bulunmaktadır. Bu çalışmada M tahmin edicisi üzerinde durulacaktır.

M tahmin edicisi, aykırı değerlerin etkisini azaltan bir yöntemdir. Bu yöntem örneklemede aykırı değerlerin olması veya modelde yer alan rasgele değişkenlerin dağılımları hakkında yapılan varsayımların sağlanamaması durumunda kullanılır.

M tahmin edicileri, Huber<sup>(46)</sup> tarafından ortaya konmuştur ve genel bir  $\rho(x, \cdot)$  fonksiyonunu en küçük yapma fikrine dayanır. Literatürde çeşitli  $\rho$  fonksiyonları önerilmektedir. Fox<sup>(15)</sup>,  $\rho$  fonksiyonun özelliklerini:

- $\rho(x) \geq 0 \quad \forall x$  için,
- $\rho(0) = 0$ ,
- $\rho(x) = \rho(-x) \quad \forall x$  için,
- $\rho(x_i) \geq \rho(x_j), \quad |x_i| > |x_j|$

olarak vermiştir.

M tahmin edicileri, belirtilmiş bir dağılımın konum parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin genelleştirilmiştir. Diğer bir deyişle M tahmin edicileri, en çok olabilirlik (Maksimum Likelihood) tipi tahmin ediciler olarak anılırlar. Dayanıklı istatistik dilinde ise etki fonksiyonu olarak adlandırılır. M tahmin edicilerin tek zaafı,  $\rho$  'nun uygulayıcı tarafından seçilmesidir.

$$x_1, x_2, \dots, x_n \text{ örneklem ve } T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = t \text{ tahmin olmak üzere } \sum_{i=1}^n \rho(x_i, t)$$

fonksiyonun  $t$  'ye göre minimize eden  $T_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , M tahmin edicisidir.

$\rho$  fonksiyonunun  $t$  'ye göre birinci türevi  $\psi$  fonksiyonu olmak üzere

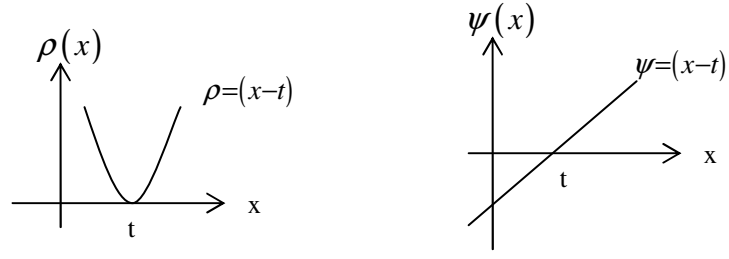
$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i, t) = 0 \text{ 'ı sağlayan } t \text{ değeri, aradığımız M tahmin edicisi } T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ 'i}$$

verir. Burada  $\rho$  'nun  $t$  'ye göre türevlenebildiği ve sürekli olduğu varsayılır.

- $\rho(x, t) = (x - t)^2$  olarak seçildiğinde  $\sum_{i=1}^n (x_i - t)^2$  minimize edilir. Yani

$$\rho \text{ 'nun } t \text{ 'ye göre türevi alınıp sifıra eşitlendiğinde, } \sum_{i=1}^n (x_i - t) = 0 \text{ 'dan } t = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ elde}$$

edilir, tahmin edici  $T_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}$  örneklem ortalamasıdır ve en bilindik M tahmin edicisidir.



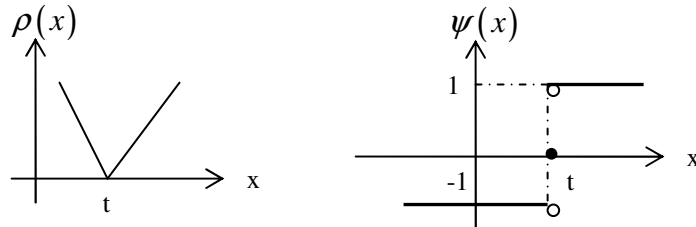
**Şekil 2.1**  $(x-t)^2$  fonksiyonun Amaç ve Etki fonksiyonu.

$\psi(\cdot) = \rho'(\cdot)$ 'nin sınırlı ve sürekli olması istenir. Sınırlılığın istenmesinin nedeni, herhangi bir gözlemin tahmin üzerinde ortaya çıkacak olan, etkinin büyük ve rasgele olmasını engellemek, sürekliliğin istenmesinin nedeni ise yuvarlama hatalarının büyük etkilerinin ortadan kalkmasını sağlamaktır.

- $\rho(x,t) = |x-t|$  olarak seçilirse  $\psi(x,t) = \text{sgn}(x-t)$  dır. Burada

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

dır.  $\sum_{i=1}^n \text{sgn}(x_i - t) = 0$  ise  $t$  örneklemin medyanıdır.



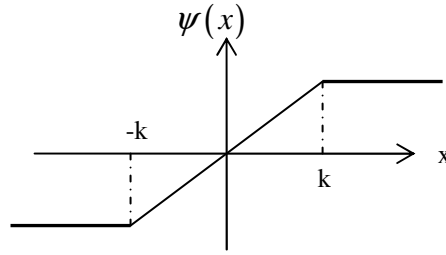
**Şekil 2.2**  $\text{sgn}(x-t)$  fonksiyonun Amaç ve Etki fonksiyonu.



Huber'in, amaç fonksiyonunu

$$\rho(x) = \begin{cases} kx - \frac{k^2}{2} & , |x| > k \\ \frac{x^2}{2} & , |x| \leq k \end{cases}$$

biçiminde belirlemiştir.  $k$ , Gaussian modelinde arzu edilen verimi sağlayacak şekilde keyfi olarak seçilecektir.  $k$ 'nın küçük değerlerinde aykırı değerlerin etkisi azalacaktır. Genellikle uygulayıcı tarafından  $1.14 < k < 1.945$  arasında bir değer seçilmesi önerilmiştir.

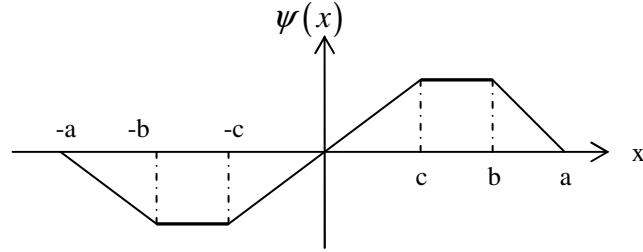


**Şekil 2.3** Huber'in Etki fonksiyonu.

Hample'ın, amaç fonksiyonunu

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & , |x| \leq a \\ ax - \frac{a^2}{2} & , a < |x| \leq b \\ \frac{a(b+c-a)}{2} - \frac{a(c-x)^2}{2(c-b)} & , b < |x| \leq c \\ \frac{a(b+c-a)}{2} & , |x| > c \end{cases}$$

şeklinde belirlemiştir. Burada  $a, b$  ve  $c$  sabit değerlerdir ve literatürde bu sabitlere sırasıyla 1.7, 3.4 ve 8.5 değerlerinin verilmesi önerilmiştir<sup>(44)</sup>.

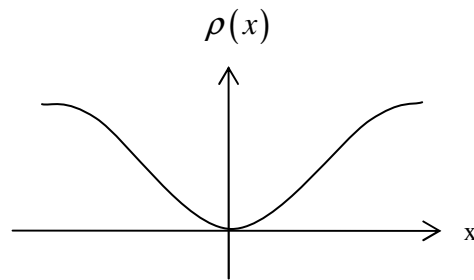


**Şekil 2.4** Haple'in Etki fonksiyonu.

Tukey'in ikili ağırlıklar fonksiyonu (Bi-weight),

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} [1 - (1 - x^2)^3] & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{6} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

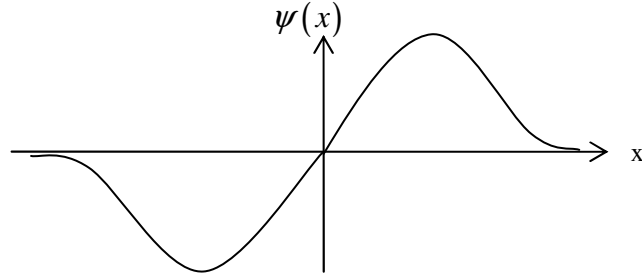


**Şekil 2.5** Tukey'in Amaç fonksiyonu.

Tukey'in etki fonsiyonu ise

$$\psi(x) = \begin{cases} x(1-x^2)^2 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , dy \end{cases}$$

şeklindedir.

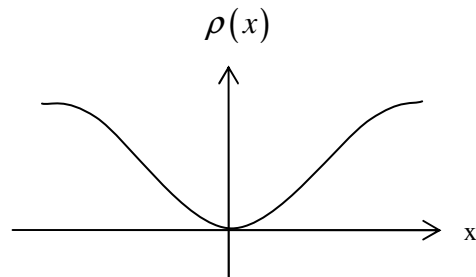


**Şekil 2.6** Tukey'in Etki fonsiyonu.

Andrews<sup>(47)</sup>, amaç fonsiyonunu

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} [1 - \text{Cos}(\pi x)] & , -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{\pi^2} & , x > 1 \end{cases}$$

şeklinde belirlemiştir.



**Şekil 2.7** Andrews'in Amaç fonsiyonu.

M tahmin edici fonksiyonun hesaplanmasında kullanılabilcek çok sayıda fonksiyon önerilmiştir. Önerilen bazı M tahmin edicileri ile bunlardan elde edilen etki fonksiyonları Çizelge 2.1’de listelenmiştir.

**Çizelge 2.1** M tahmin edici fonksiyonları.

Tahminci	Amaç Fonksiyonu $\rho(x)$	Etki Fonksiyonu $\psi(x) = \rho'(x)$
Least Square	$\rho(x) = x^2$	$\psi(x) = 2x$
Huber	$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & ,  x  \leq k \\ kx - \frac{k^2}{2} & ,  x  > k \end{cases}$	$\psi(x) = \begin{cases} x & ,  x  \leq k \\ k \text{sng}(x) & ,  x  > k \end{cases}$
Hampel (üç parçalı yeniden azalan) $0 < a \leq b \leq c$	$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & ,  x  \leq a \\ ax - \frac{a^2}{2} & , a <  x  \leq b \\ \frac{a(b+c-a)}{2} - \frac{a(c-x)^2}{2(c-b)} & , b <  x  \leq c \\ \frac{a(b+c-a)}{2} & ,  x  > c \end{cases}$	$\psi(x) = \begin{cases} x & ,  x  \leq a \\ a \text{sng}(x) & , a <  x  \leq b \\ \frac{a(c-x)}{c-b} \text{sng}(x) & , b <  x  \leq c \\ 0 & ,  x  > c \end{cases}$
Tukey	$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} [1 - (1-x^2)^3] & , -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{6} & , x > 1 \end{cases}$	$\psi(x) = \begin{cases} x(1-x^2)^2 & ,  x  \leq 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$
Andrews	$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} [1 - \text{Cos}(\pi x)] & , -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{\pi^2} & , x > 1 \end{cases}$	$\psi(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{c}\right) &  x  \leq c\pi \\ 0 &  x  > c\pi \end{cases}$

## 2.4 Lineer Modeller

Bu kesimde istatistik teorisi ve ekonometri alanlarında önemli yeri olan regresyon analizinin temelini oluşturan lineer modellerden bahsedilecektir. Üç farklı

varsayıma dayanan durumlar altında lineer modelin bilinmeyen parametrelerinin tahmin edicileri ve özellikleri tartışılacaktır. Lineer modeller için yapılan bu açıklamalar, ileri bölümlerde bahsedilecek olan otoregresif süreçlerin modellenmesinin ve parametrelerin tahmin edicisinin daha iyi anlaşılabilmesi için verilmiştir.

$Y$  gözlemlerin  $n \times 1$  mertebeli vektörü (rasgele vektör),  $X$   $n \times p$  ( $n < p$ ) mertebeli bilinen sayıların matrisi,  $\beta$   $p \times 1$  mertebeli bilinmeyen parametrelerin vektörü,  $\epsilon$   $n \times 1$  mertebeli rasgele değişkenlerin gözlenebilir olmayan bir vektörü ( $E(\epsilon) = \mathbf{0}$ ,  $\text{Cov}(\epsilon) = \Sigma$ ) olmak üzere bunlar arasında,

$$Y = X\beta + \epsilon \quad (2.11)$$

biçiminde varsayılan bağıntıya **lineer model** denir<sup>(48)</sup>.

(2.11) lineer modelinde  $X\beta$  'ya modelin **deterministik kısmı**,  $Y$  ve  $\epsilon$  'na da modelin **stokastik kısmı** denir.  $Y$  vektörü, bağımlı değişken, tepki değişkeni veya açıklanan değişken denilen bir rasgele değişken ile ilgili gözlemlerin vektörüdür.  $X$  matrisine tasarım matrisi, açıklayıcı değişkenlerin gözlem matrisi veya bağımlı değişkenlerin gözlem matrisi gibi isimler verilmektedir.  $\epsilon$  vektörüne ise hata vektörü denmektedir.

(2.11)'de verilen lineer model pek çok özel hallere sahiptir. Bunlar,  $\epsilon$  'nun dağılımına,  $\Sigma$  kovaryans matrisine,  $X$  'in yapısına ve rankına bağlıdır. Aksini belirtmedikçe modelimizdeki  $X$  matrisinin tam sütun ranklı ( $\text{rank}(X) = p$ ) olduğunu kabul edeceğiz. Ayrıca  $\epsilon$  'nun dağılımı hakkında aşağıdaki üç durumu göz önüne alacağız:

1. Durum:  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$

2. Durum:  $\boldsymbol{\varepsilon}$  bilinmeyen bir dağılıma sahiptir ve  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ ,  $\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 I$  dir.

Bu durumu  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 I)$  biçiminde göstereceğiz.

3. Durum:  $\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 V$ ,  $V$  bilinmeyen pozitif tanımlı bir matristir.

1. Durum'da her bir  $\varepsilon_i$ ,  $0$  ortalamalı bilinmeyen  $\sigma^2$  varyanslı normal dağılıma sahiptir ve  $\varepsilon_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ )'ler bağımsızdır. 2. Durum'da, her bir  $\varepsilon_i$ 'nin beklenen değeri sıfır,  $\varepsilon_i$ 'ler ilişkisiz (uncorrelated), bilinmeyen ortak  $\sigma^2$  varyansına sahiptirler.

1. ve 2. Durum'daki varsayımlar altındaki modellere **Gauss-Markov modelleri** denir. 2. Durum'daki modellere bazen **en küçük kareler modelleri** de denilebilir. Ayrıca hata terimi normal dağılımlı olduğunda bu modellere **hipotez modelleri** denir.

Gerçek dünyadaki olayların lineer model olarak modellenmesi sırasında  $Y, X, \boldsymbol{\beta}$  ve  $\boldsymbol{\varepsilon}$  çok değişik şekilde anlamlandırılır. Bazı modellerde  $Y$  üretim miktarı, bazılarında boy uzunluğu, bazılarında ise bir ekonomi değişkeni olabilir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad \varepsilon_i \text{ 'ler bağımsız}$$

veya

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

gösterimi altında,

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

modeline **basit lineer regresyon modeli** denir<sup>(48)</sup>.

Bir lineer modelde açıklayıcı değişken sayısı birden çok olduğunda modele **çoklu lineer model** (multiple linear model) denir. Ancak bir modelde bağımlı değişken birden çok ise o zaman modele **çok değişkenli model** (multivariate model) denir.

Bir malzemenin imalatında sıcaklık ( $x_1$ ) ile basıncın ( $x_2$ ) sertlik ( $Y$ ) üzerindeki etkisinin incelendiğini düşünelim. İmalat sırasında sıcaklık ( $^{\circ}C$ ) ve basınç ( $kg/cm^2$ )

$$D = \{(x_1, x_2) : 500 \leq x_1 \leq 1500, \quad 1000 \leq x_2 \leq 2000\}$$

bölgesinde değerler almak üzere, sertlik üzerine etkisi

$$Y(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0$$

gibi bir model ile anlatılmış (modellenmiş) olsun.  $\beta_1$  katsayısı sıcaklığın sertlik üzerinde etkisini,  $\beta_2$  katsayısı basıncın ve  $\beta_3$  katsayısı da ikisinin ortak etkisini anlatmaktadır. Bu etkileri veya kısaca model parametreleri tahmin edilmek istenilsin.

Sıcaklık ve basınç değerlerinde  $(x_{1i}, x_{2i}) \in D$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  imal edilen parçaların sertlikleri  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ölçülüp, elde edilen gözlemler

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{11} \cdot x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{21} \cdot x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n1} \cdot x_{n2} \end{bmatrix}$$

biçiminde olsun.  $\beta$  katsayılar vektörü olmak üzere, söylenenler

$$Y = X\beta + \epsilon$$

lineer modeli ile ifade edilir.

Sıcaklık ile basıncın, sertlik üzerindeki etkisinin fonksiyon biçiminde bir bağıntı ile ifade edilip edilmeyeceği, bu bağıntının biçiminin ne olacağı veya sıcaklık ile basınç değişkenlerinin sertliği ne derece etkileyip etkilemediği gibi sorunlar ilk olarak metalurji biliminin sorunlarıdır. Metalurji biliminin kanunlarına göre sıcaklık ile basıncın sertlik üzerindeki etkisi tam olarak belirlenmiş olabilir, bağıntı biçimsel olarak belirlenmiş ancak içinde bilinmeyen katsayılar vardır veya aralarında bir bağıntı var ama ne olduğu belirlenmemiş olabilir. İlk durumda istatistikçinin yapacağı fazla bir şey kalmamıştır. Belki belirlenmiş olan modelin gerçekliliğinin sınanmasında yardımcı olabilir. İkinci ve üçüncü durumlarda istatistikçiye önemli görevler düşmektedir. Amaç belirlendikten sonra (örneğin bu amaç hangi sıcaklık ve basınçta malzemenin sertliği maksimum olmaktadır, olabilir.) gözlemlerin alınacağı en iyi deney tasarımının ve ardından istatistiksel sonuç çıkarımının yapılması istatistik biliminin sorunudur<sup>(48)</sup>.



Ölçme aletindeki hatalardan veya ölçmek istediğimiz niceliğin doğrudan ölçülemiyor olmasından dolayı gözlenmesi gereken bir  $x$  değeri yerine

$$X = x + U, \quad E(U) = 0, \quad \text{Var}(U) = \sigma_u^2$$

olmak üzere  $X$  rasgele değişkeninin aldığı değer gözlenmesi söz konusu olabilir. Böyle bir açıklayıcı değişkenin, örneğin

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{cases} E(\varepsilon_i) = 0, \quad \text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \varepsilon_i \text{ ler ilişkisiz} \\ X_i = x_i + U_i, \quad E(U_i) = 0, \quad \text{Var}(U_i) = \sigma_u^2 \end{cases}$$

gibi bir modelde yer alması durumunda modele, açıklayıcı değişkenleri ölçme hatası bulunduran model veya kısaca **hatalı ölçümlü model** denir. Hatalar hakkında değişik varsayımlar yapılabilir.

Hata ölçümlü basit lineer modelin uygulanmasında belli bir üründe verim ( $Y$ ) ile topraktaki azot miktarı ( $X$ ) arasındaki ilişkiyi anlatan

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

modeli ele alınabilir. Bu modelde  $X_i$ , topraktaki  $i$ . ölçüm yapıldığında gözlenen azot miktarı olmak üzere bu miktarın gerçek değerinin bulunması ölçme işlemine bağlıdır. Azot miktarının gerçek değeri olan  $x_i$  yerine,

$$X_i = x_i + U_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gibi  $X_i$  rasgele değişkenlerin değerlerinin gözleneceğini düşünmek daha akılcı görünmektedir<sup>(48)</sup>.

### 2.4.1 Lineer Modellerin Parametre Tahmini

Bu kısımda

$$Y = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

modelinde,

1. Durum :  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$
2. Durum :  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 I)$
3. Durum :  $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 V$

için parametre tahmini problemi, tam ranklı modellerde ( $rank(X : n \times p) = p$ ) ele alınacaktır<sup>(48)</sup>. Parametre kümesi,

$$\Omega = \{(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) : \boldsymbol{\beta} \in R^p, \sigma^2 > 0\}$$

olmak üzere 1. Durum'da normal dağılım ile ilgili istatistiksel sonuç çıkarmaya en çok olabilirlik yöntemi ile başvurulur. 2. Durum'da ise EKK yöntemine başvurulur.

#### 1. Durum ( $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ )

$$Y = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

$$\mathbf{Y}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

olmak üzere  $\sigma^2$ 'nin ve  $\boldsymbol{\beta}$ 'nin en çok olabilirlik (maximum likelihood) tahmin edicilerini bulalım. *Olabilirlik fonksiyonu*,

$$L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n (\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}$$

ve logaritması,

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y}) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

dır. Parametre kümesi,

$$\Omega = \{(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) : -\infty < \beta_i < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \sigma^2 > 0\}$$

üzerinde  $L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$  veya  $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$  fonksiyonunu maksimum yapan  $\boldsymbol{\beta}$  ve  $\sigma^2$ 'yi bulmak için,

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} (\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y})) = -\frac{1}{2\sigma^2} (-2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} (\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2; \mathbf{Y})) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

birinci türevlerin sıfıra eşitlenmesiyle,

$$\frac{1}{\sigma^2}(X^T Y - X^T X \beta) = 0,$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(Y - X\beta)^T(Y - X\beta) = 0$$

veya

$$\begin{cases} X^T X \beta = X^T Y \\ \sigma^2 = \frac{(Y - X\beta)^T(Y - X\beta)}{n} \end{cases}$$

denkleminin normal denklemler (Yule-Walker Denklemleri) ismini taşıyan

$$X^T X \beta = X^T Y$$

denkleminde

$$\tilde{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (\text{rank}(X) = p, \quad X^T X \text{ regüler}),$$

$$\tilde{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y + (I - (X^T X)^{-1} X^T X)z,$$

$$z \in R^p \quad (\text{rank}(X) < p, \quad X^T X \text{ singüler})$$

ve ikinci denklemden,

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2 &= \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}})}{n} \\
&= \frac{1}{n} \left[ (\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}) \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[ \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{Y}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \right] \\
&= \frac{1}{n} \mathbf{Y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) \mathbf{Y}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$  ve  $\tilde{\sigma}^2$ 'ye  $\boldsymbol{\beta}$  ve  $\sigma^2$ 'nin **en çok olabilirlik tahmin edicileri** denir<sup>(48)</sup>.

Şimdi  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$  ve  $\tilde{\sigma}^2$  tahmin edicilerinin yansız birer tahmin edici olup olmadıklarını inceleyelim:

$\forall \boldsymbol{\beta} \in R^p$  için

$$E(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = E\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}\right] = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E(\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T E[\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$$

olmak üzere  $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ 'nin *yansız tahmin edicisidir*.

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\sigma}^2) &= E\left[\frac{\mathbf{Y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) \mathbf{Y}}{n}\right] = \frac{1}{n} E\left[\mathbf{Y}^T (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) \mathbf{Y}\right] \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \text{tr}\left[(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) \text{Cov}(\mathbf{Y})\right] + E(\mathbf{Y}^T) (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) E(\mathbf{Y}) \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \text{tr}\left[(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) \sigma^2 \mathbf{I}\right] + (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T) (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right\} \\
&= \frac{1}{n} \text{tr}\left(\sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T)\right) + 0 \\
&= \frac{1}{n} \sigma^2 (n - p) = \frac{n - p}{n} \sigma^2
\end{aligned}$$

olmak üzere  $\tilde{\sigma}^2$ ,  $\sigma^2$  için yansız bir tahmin edici değildir. Ancak,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-p} \tilde{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{Y}^T \left( I - X (X^T X)^{-1} X^T \right) \mathbf{Y}}{n-p}$$

için

$$E(\hat{\sigma}^2) = E\left(\frac{n}{n-p} \tilde{\sigma}^2\right) = \frac{n}{n-p} E(\tilde{\sigma}^2) = \sigma^2, \text{ her } \sigma^2 > 0$$

olduğundan  $\hat{\sigma}^2$  tahmin edicisi yansızdır.  $\hat{\sigma}^2$  tahmin edicisine yansızlık için **düzeltilmiş en çok olabilirlik tahmin edicisi** denir. Bundan böyle  $\beta$  ve  $\sigma^2$ 'yi tahmin etmek için  $\tilde{\beta}$  ve  $\tilde{\sigma}^2$ 'yi kullanacağız ve  $\tilde{\beta}$ 'yi da  $\hat{\beta}$  ile göstereceğiz.

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{Y}^T \left( I - X (X^T X)^{-1} X^T \right) \mathbf{Y}}{n-p}$$

## 2. Durum ( $\boldsymbol{\varepsilon} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ )

$$\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 I), \quad \text{rank}(X_{n \times p}) = p$$

modelinin  $\mathbf{Y}$  örnekleminin dağılımı bilinmediğinde  $\beta$  ve  $\sigma^2$  parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri söz konusu değildir.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y} - X\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - X\boldsymbol{\beta})$$

karesel formunu minimum yapan  $\hat{\beta}$  vektörüne  $\beta$ 'nin **en küçük kareler tahmin edicisi** denir.

$$\min_{\beta} (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) = (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta})$$

ve

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

olmak üzere,  $\hat{\beta}$  tahmin edicisine bağlı olan ve  $\sigma^2$ 'nin yansız tahmin edicisi olan,

$$\sigma^2 = \frac{Y^T (I - X(X^T X)^{-1} X^T) Y}{n - p} = \frac{(Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta})}{n - p}$$

tahmin edicisine de alışlagelmiş olarak  $\sigma^2$ 'nin **en küçük kareler tahmin edicisi** denir.

$\hat{\beta}$  ve  $\hat{\sigma}^2$  tahmin edicileri sırasıyla  $\beta$  ve  $\sigma^2$  için yansız tahmin ediciler olmak üzere, bu tahmin edicilerin dağılımları hakkında küçük örneklem için herhangi bir şey söylenemez. Büyük örneklem için ( $n \rightarrow \infty$  için)  $\hat{\beta}_n$ 'nin dağılımı yaklaşık olarak  $\beta$  ortalama vektörü ve  $\hat{\sigma}^2 (X_{n \times p}^T X_{n \times p})^{-1}$  varyans-kovaryans matrisi ile normal dağılıma sahip olduğu söylenebilir.

$l$   $p \times 1$  mertebeli bilinen bir vektör olmak üzere,  $l^T \beta$ 'nin lineer tahmin edicilerinin

$$\mathfrak{S} = \{T(Y) : T(Y) = a^T Y + a_0, \quad a \in R^n, \quad a_0 \in R\}$$

sınıfında bir  $T^*(Y) \in \mathfrak{S}$  tahmin edicisi her  $\beta$  için

$$E[T^*(Y)] = l^T \beta$$

ve

$$\text{Var}(T^*(Y)) \leq \text{Var}(T(Y)), \text{ her } T(Y) \in \mathfrak{S}$$

özelliklerine sahip ise  $T^*(Y)$  tahmin edicisine  $l^T \beta$ 'nin **minimum varyanslı lineer yansız** veya kısaca **en iyi lineer yansız** (best linear unbiased) **tahmin edicisi** denir<sup>(48)</sup>.

### **Teorem 2.3 ( Gauss-Markov Teoremi )**

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I, \quad \text{rank}(X_{n \times p}) = p$$

modelinde  $l^T \beta$ 'nin en iyi lineer yansız tahmin edicisi  $l^T \hat{\beta}$ 'dir.

**İspat :**  $l^T \beta$ 'nin lineer tahmin edicilerinin sınıfı,

$$T(Y) \in \mathfrak{S} = \{T(Y) : T(Y) = a^T Y + a_0, \quad a \in R^n, \quad a_0 \in R\}$$

olsun.  $a \in R^n$  vektörü,

$$a = \left( (X^T X)^{-1} X^T \right)^T l + b, \quad b \in R^n$$

biçiminde yazılırsa,

$$T(Y) = l^T (X^T X)^{-1} X^T Y + b^T Y + a_0$$



olur.  $T(\mathbf{Y})$  tahmin edicisi  $\mathbf{b}$  vektörü ve  $a_0$  sayısına bağlıdır. Böyle bir  $T(\mathbf{Y})$  tahmin edicisi  $\mathbf{l}^T \boldsymbol{\beta}$ 'nin yansız bir tahmin edicisi olacaksa, her  $\boldsymbol{\beta}$  için

$$E(T(\mathbf{Y})) = \mathbf{l}^T \mathbf{b}$$

olur. O zaman, her  $\boldsymbol{\beta}$  için

$$\mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T X \boldsymbol{\beta} + \mathbf{b}^T X \boldsymbol{\beta} + a_0 = \mathbf{l}^T \mathbf{b},$$

$$\mathbf{l}^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{b}^T X \boldsymbol{\beta} + a_0 = \mathbf{l}^T \mathbf{b},$$

$$\mathbf{b}^T X \boldsymbol{\beta} + a_0 = 0$$

olacaktır. Diğer bir deyişle

$$\mathbf{b}^T X = 0 \text{ ve } a_0 = 0$$

olmalıdır.  $\mathbf{l}^T \boldsymbol{\beta}$ 'nin lineer yansız tahmin edicilerinin sınıfı,

$$\mathfrak{S}_1 = \left\{ T(\mathbf{Y}) : T(\mathbf{Y}) = \left( \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T + \mathbf{b}^T \right) \mathbf{Y}, \mathbf{b} \in R^n, \mathbf{b}^T X = 0 \right\}$$

olsun.  $T(\mathbf{Y}) \in \mathfrak{S}_1$  için,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(T(\mathbf{Y})) &= \left( \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T + \mathbf{b}^T \right) \text{Cov}(\mathbf{Y}) \left( \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T + \mathbf{b}^T \right)^T \\
&= \left( \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T + \mathbf{b}^T \right) \sigma^2 I \left( \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T + \mathbf{b}^T \right)^T \\
&= \sigma^2 \left[ \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T \left( \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T \right)^T + 2\mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \right] \\
&= \sigma^2 \left[ \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} \mathbf{l} + 2\mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \right] \\
&= \sigma^2 \left[ \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} \mathbf{l} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \right]
\end{aligned}$$

olmak üzere minimum varyanslı tahmin edici  $\mathbf{b} = 0$  olan tahmin edicidir. Buna göre

$\mathbf{l}^T \boldsymbol{\beta}$ 'nin lineer yansız tahmin edicileri arasında varyansı en küçük olanı

$$T(\mathbf{Y}) = \mathbf{l}^T (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{Y} = \mathbf{l}^T \hat{\mathbf{b}}$$

dır<sup>(48)</sup>.

**Teorem 2.4**  $\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ ,  $\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 I$ ,  $E(\varepsilon_i^4) = 3\sigma^4$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

modelinde,  $\sigma^2$  parametresi için

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{Y}^T \left( I - X (X^T X)^{-1} X^T \right) \mathbf{Y}}{n - p}$$

tahmin edicisi,  $\mathbf{Y}$ 'nin bir karesel formu biçiminde olup yansız tahmin ediciler arasında minimum varyanslıdır<sup>(48)</sup>.

**İspat :** (Graybill, 1976)  $\hat{\sigma}^2$ 'ye  $\sigma^2$ 'nin en iyi karesel yansız (best quadratic unbiased) tahmin edicisi denir.

### 3. Durum ( $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 V)$ )

Bu kısımda öncelikle,  $V$  bilinen pozitif tanımlı bir matris olduğunda  $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 V$  durumu ele alınacaktır. Daha sonra  $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Sigma$  ve  $\Sigma$ 'nin bir pozitif tanımlı matris olması durumu ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

$\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 V)$ ,  $V$  bilinen pozitif tanımlı bir matris,  $rank(X_{n \times p}) = p$  modelinde  $V_{n \times n}$  matrisinin,  $rank(G_{n \times n}) = n$  olan bir  $G$  matrisi cinsinden ayrışımı

$$V = G^T G$$

olmak üzere modelin her iki tarafı soldan  $(G^T)^{-1}$  ile çarpılsın.

$$\mathbf{Z} = (G^T)^{-1} \mathbf{Y} \sim N\left((G^T)^{-1} X\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I\right),$$

$$\boldsymbol{\eta} = (G^T)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

ve  $A = (G^T)^{-1} X$  için model

$$\mathbf{Z} = A\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}$$

olarak yazıldığında,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{Z} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} \mathbf{Y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{Z}^T \left[ I - A(A^T A)^{-1} A^T \right] \mathbf{Z}}{n - p} = \frac{\mathbf{Y}^T \left[ V^{-1} - V^{-1} X (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} \right] \mathbf{Y}}{n - p}$$

tahmin edicileri sırasıyla  $\beta$  ve  $\sigma^2$  için *düzgün minimum varyans yansız tahmin edicilerdir*. Bunlara **Aitken tahmin edicileri** denir. Ayrıca,

$$\beta \sim N\left(\beta, \sigma^2 (X^T V^{-1} X)^{-1}\right)$$

ve

$$\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-p)}^2$$

dağılımlıdır.

$Y = X\beta + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ ,  $\Sigma$  pozitif tanımlı matris,  $\text{rank}(X_{n \times p}) = p$  modelinde  $\beta$  parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicisini bulmaya çalıştığımızda,

$$\tilde{\beta} = (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} Y$$

biçiminde bir ifade ortaya çıkmaktadır.  $\Sigma$  bilinmediğinden  $\tilde{\beta}$  bir tahmin edici olarak kullanılamaz. Diğer taraftan  $\beta$ 'nin en küçük kareler tahmin edicisi

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

dır. Bu tahmin ediciye  $\beta$ 'nin alışılmış en küçük kareler (ordinary least squares) tahmin edicisidir. Doğal olarak  $\hat{\beta} \neq \tilde{\beta}$  olduğunda EKK tahmin edicisi düzgün minimum varyanslı yansız tahmin edici olmayacaktır.

**Teorem 2.5**  $Y = X\beta + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$  modelinde EKK tahmin edicisi

$(X^T X)^{-1} X^T Y$ 'nin  $\beta$  için düzgün minimum varyanslı yansız tahmin edicisi olması

için gerek ve yeter şart

$$\Sigma X = XF$$

olacak şekilde singüler olmayan bir  $F : p \times p$  matrisinin var olmasıdır<sup>(48)</sup>.

**İspat :**  $\Sigma X = XF$  olacak şekilde singüler olmayan  $F : p \times p$  matrisi var olsun. O

zaman

$$\begin{aligned} (X^T X)^{-1} X^T &= (X^T X)^{-1} F^T (F^T)^{-1} X^T = \left[ (F^T)^{-1} (X^T X)^{-1} (F^T)^{-1} X^T \right] \\ &= (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} \end{aligned}$$

olduğunda

$$(X^T X)^{-1} X^T Y = (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} Y$$

olur. Böylece alışılmış EKK tahmin edicisi ile Aitken tahmin edicisi aynıdır.

Tersine,

$$(X^T X)^{-1} X^T = (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \Sigma^{-1}$$

olması için

$$\begin{aligned} (X^T X)^{-1} X^T \Sigma &= (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \\ X^T \Sigma &= (X^T X) (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T \\ \Sigma X &= X (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T X = XF \end{aligned}$$

olur. Burada  $F = (X^T \Sigma^{-1} X)^{-1} X^T X$ ,  $p \times p$  tipinde singüler olmayan bir matristir.

**Sonuç :**  $Y = X\beta + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \Sigma)$ ,  $X = [\mathbf{1}, X_2, \dots, X_p]$  modelinde,

$$\Sigma_{n \times n} = \sigma^2 (1 - \rho) I + \sigma^2 \rho I = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{-1}{n-1} < \rho < 1$$

biçiminde ise  $\beta$ 'nin EKK tahmin edicisi düzgün minimum varyanslı yansız tahmin edicidir.

$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$  tahmin edicisi EKK tahmin edicisi olmakla birlikte hata terimi normal dağılımlı olduğunda en çok olabilirlik tahmin edicisidir<sup>(48)</sup>.

## 2.5 Bir Başka Tahmin Metodu: Kalman Filtresi

Bu kesimde durum-uzay modelinde yer alan beyaz gürültü süreçlerinin ve  $X(0)$  başlangıç durumunun normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında Kalman filtresi verilmiştir.

Durum-uzay modelinde problem olan, gözlenemeyen  $X(k)$  durumunu,  $Y(1), Y(2), \dots, Y(k)$  gözlemlerini kullanarak tahmin etmektir. Bu problem filtreleme olarak bilinir.

İndirgemeli (ardışık) tahmin, sadece  $k$  anındaki  $Y(k)$  gözlemini ve  $k-1$  anındaki  $X(k)$  durumu için en iyi  $\hat{X}(k)$  değerini tahmin etme problemidir. Bu tahmin,

- Sonsal dağılımın en büyükleme ölçütüne göre
- En küçük HKO ölçütüne göre

elde edilebilir. Durum-uzay modelindeki hata terimleri ve başlangıç durumu normal dağılıma sahip olduğunda bu iki ölçüte göre elde edilen tahmin birbirine denktir.

Durum-uzay modeli, sistemin durumunu gösteren ancak gözlenemeyen  $\{X(k), k=0,1,2,\dots\}$  stokastik süreci ile ilgili bir durum eşitliği ve gözlenebilen  $\{Y(k), k=0,1,2,\dots\}$  stokastik süreci ile ilgili bir ölçüm (gözlem) eşitliğinden oluşan,

$$X(k) = CX(k-1) + Gw(k) \quad (2.12)$$

$$Y(k) = HX(k) + v(k) \quad (2.13)$$

şeklinde bir modeldir. Burada  $X(k) \in R^n$  sistem durum vektörünü,  $Y(k) \in R^m$  sistem gözlem vektörünü göstermektedir. Ayrıca  $C$ ,  $n \times n$  boyutlu sistem geçiş matrisini,  $H$ ,  $m \times n$  boyutlu gözlem matrisini göstermektedir.  $G$  matrisi ise boyutu uygun şekilde seçilmiş matristir.  $w(k) \in R^n$  ve  $v(k) \in R^m$  sıfır ortalamalı beyaz gürültü süreçlerini (hata terimi) göstermektedir. Beyaz gürültü süreçlerinin her  $k, j$  değerleri için

$$\delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

olmak üzere

$$E[v(k)] = 0 \quad (2.14)$$

$$E[w(k)] = 0 \quad (2.15)$$

$$E[v(k)v^T(j)] = R\delta_{kj} \quad (2.16)$$

$$E[w(k)w^T(j)] = Q\delta_{kj} \quad (2.17)$$

$$E[v(k)w^T(j)] = 0 \quad (2.18)$$

$$E[X(0)] = \bar{X}(0) \quad (2.19)$$

$$E[(X(0) - \bar{X}(0))(X(0) - \bar{X}(0))^T] = P_0 \quad (2.20)$$

$$E[v(0)w^T(k)] = 0 \quad (2.21)$$

$$E[X(0)v^T(k)] = 0 \quad (2.22)$$

varsayımlarını sağladığı kabul edilir<sup>(49)</sup>. (2.16) ve (2.17)'deki  $\delta_{k,j}$  Kronecker deltasıdır. Ayrıca, tüm  $k = 0, 1, 2, \dots$  anlarında  $C, H, G, Q$  ve  $R$  matrislerinin bilindiği varsayılır. Buna göre;  $\{X(k)\}$  stokastik süreci, Markov sürecidir. Hata terimleri ve başlangıç durumu normal dağılıma sahip ise modele Gauss-Markov süreci de denmektedir.

Ele alınan durum-uzay modelindeki hata terimlerinin



$$w(k) \sim N(0, Q)$$

$$v(k) \sim N(0, R)$$

$$X(0) \sim N(\bar{X}(0), P_0)$$

şeklinde normal dağılıma sahip olduğu, hata terimlerinin ve başlangıç durumunun (2.12)-(2.22) eşitlikleri ile verilen varsayımları sağladığı kabul edilsin. En iyi filtreleme problemi,  $\mathbf{Y}(k) = \{Y(0), Y(1), \dots, Y(k)\}$  gözlemleri verildiğinde durum tahmini  $X(k)$ 'nin en iyi tahminini belirleme problemidir. Yapılan varsayımlar altında,  $X(k)|\mathbf{Y}(k)$  rasgele vektörünün dağılımı normal dağılıma sahiptir.

$\mathbf{Y}(k) = \{Y(0), Y(1), \dots, Y(k)\}$  gözlemleri alındığında  $X(k)$  durumunun tahmini

$$\hat{X}_{k|k} = E[X(k)|Y(0), Y(1), \dots, Y(k)] = E[X(k)|\mathbf{Y}(k)] = \hat{X}_a(k)$$

ile, hatanın kovaryans matrisi

$$P_{k|k} = E\left[\left(X(k) - \hat{X}_{k|k}\right)\left(X(k) - \hat{X}_{k|k}\right)^T | \mathbf{Y}(k)\right] = P_b(k)$$

ile,  $\mathbf{Y}(k-1) = \{Y(0), Y(1), \dots, Y(k-1)\}$  gözlemleri verildiğinde  $X(k)$  durumunun tahmini

$$\hat{X}_{k|k-1} = E[X(k)|Y(0), Y(1), \dots, Y(k-1)] = E[X(k)|\mathbf{Y}(k-1)] = \hat{X}_b(k)$$

ile, hatanın kovaryans matrisi

$$P_{k|k-1} = E\left[\left(X(k) - \hat{X}_{k|k-1}\right)\left(X(k) - \hat{X}_{k|k-1}\right)^T | \mathbf{Y}(k-1)\right] = P_b(k)$$

ile gösterilsin. Yapılan varsayımlar altında  $X(k)$ 'nin  $Y(k)$  ile koşullandırılmış dağılımı normal değildir. Burada  $a$  indisi  $Y(0), Y(1), \dots, Y(k)$  gözlemleri alındıktan sonra (after),  $b$  indisi  $Y(k)$  gözlemi alınmadan önceki (before) tahmini gösterir<sup>(50)</sup>.

Buna göre Kalman filtresi,

$$P_{0|1} = P(0)$$

$$\hat{X}_{0|1} = \bar{X}(0)$$

başlangıç değerlerine bağlı olarak aşağıdaki algoritma ile verilir:

$$\hat{X}_b(k) = C\hat{X}_a(k-1) \quad (2.23)$$

$$\hat{X}_a(k) = \hat{X}_b(k) + K(k)[Y(k) - H\hat{X}_b(k)] \quad (2.24)$$

$$K(k) = P_b H^T [HP_b(k)H^T + R]^{-1} \quad (2.25)$$

$$P_a(k) = [I - K(k)H]P_b(k) \quad (2.26)$$

$$P_b(k) = CP_a(k-1)C^T + GQG^T \quad (2.27)$$

Eşitlik (2.23) önceki tahmini kullanılarak ileri doğru sistem modeli elde edilir. (2.24) eşitliğinde  $Y(k)$  yeni gözlemi kullanılarak tahmin güncelleştirilir. (2.25) denklemi, (2.24) eşitliğindeki güncelleştirme için kazanç matrisidir. (2.26) ve (2.27) denklemleri yeni kazanç matrisini hesaplamak için gereken hata kovaryanslarıdır. (2.24) ve sonsal dağılımın en büyüklenmesi ölçütüne göre elde edilen tahmin, koşullu beklenen değer tahminine denktir<sup>(49)</sup>.

Masreliez ve Martin<sup>(29)</sup>'nin çalışmasına göre dayanıklı Kalman filtresi:

Basit doğrusal model olan (2.13)'ü göz önüne alalım. (2.13) eşitliğindeki gözlem modelinden dayanıklı model geçebilmek için yapılan dönüşüm

$$Z = THX + w \quad (2.28)$$

biçimindedir.  $X$  'den bağımsız olarak  $Z = TY$   $r \times 1$  boyutlu gözlem vektörü  $T$   $r \times r$  boyutlu dönüşüm matrisi ve  $w = Tv$   $r \times 1$  gürültü vektörüdür. (2.28)'deki gözlem ilişkileri göz önünde tutulsun ve  $v = Z - TH\bar{X}$  olmak üzere,  $X$  'in önsel dağılımı  $\bar{X}$  ortalamalı,  $M$  kovaryans matrisli Gaussian ( $X \sim N(\bar{X}, M)$ ) olsun. Bu durumda

$$\hat{X} = \bar{X} + MH^T T^T \Psi(v) \quad (2.29)$$

olmak üzere,  $v = Z - TH\bar{X}$  dayanıklılık sınırı olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$P = E(\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T \leq M - MH^T T^T THM . E_{F_0} \{\psi'(v)\} \quad (2.30)$$

dır ve vektörün etki fonksiyonu  $\Psi(\cdot)$ ,  $\Psi_i(v) = \psi(v_i)$  bileşimine sahiptir. Böylece (2.12) ve (2.13) eşitliklerini göz önünde tutarak, dayanıklı Kalman filtresi denklemleri:

$$\hat{X}(k) = \bar{X}(k) + M(k)H^T(k)T^T(k)\psi(v(k)) = \hat{X}_a(k) \quad (2.31)$$

$$\bar{X}(k) = C\hat{X}(k-1) = \hat{X}_b(k) \quad (2.32)$$

$$v(k) = T(k)[Y(k) - H(k)\bar{X}(k)] \quad (2.33)$$

$$M(k) = CP(k-1)C^T + Q = P_b(k) \quad (2.34)$$

biçimdedir. Burada  $Q$ ,  $w$ 'nin kovaryansıdır.

**Örnek 2.1** Bir skaler gözlem ilişkisi ele alınsın.  $Y = HX + v$  ile  $H = 1$  olmak üzere  $X$ 'in önsel dağılımı Gaussian  $N(\cdot|0, \sigma_x^2)$  ve  $v$ , Gaussian olduğunda olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(v) = (1-\varepsilon)N(\cdot|0, 1) + \varepsilon N(\cdot|0, \sigma^2)$  ve  $E(v) = 0$ ,  $Var(v) = E(v^2) = \sigma_v^2 = (1-\varepsilon) + \varepsilon\sigma^2$  olur. Böylece  $Y$  rasgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu

$$f(Y) = (1-\varepsilon)N(\cdot|0, (1+\sigma_x^2)) + \varepsilon N(\cdot|0, (\sigma^2 + \sigma_x^2))$$

biçiminde elde edilir.  $Z = Y(1+\sigma_x^2)^{-1/2}$  ve  $w = v(1+\sigma_x^2)^{-1/2}$  dönüşümü yapıldığında dönüştürülen gözlemlerin ilişkisinin  $Z = THX + w$  olduğu kabul edilsin. Burada  $TH = (1+\sigma_x^2)^{-1/2}$  dır. Benzer işlemle  $v = Z - TH\bar{X} = Z$  elde edilir. Eğer  $\psi(\cdot) = \psi_\varepsilon(\cdot)$  ile (2.31)'deki tahmin edicisi kullanılırsa

$$\hat{X}_R = \bar{X} + \frac{\sigma_x^2}{1+\sigma_x^2} (1+\sigma_x^2)^{1/2} \psi_\varepsilon \left[ \frac{Y - \bar{X}}{(1+\sigma_x^2)^{1/2}} \right]$$

elde edilir. <sup>(29)</sup>.

### 3. ARAŞTIRMA BULGULARI

#### 3.1 Stokastik Süreçlerle İlgili Tanımlar

Bu bölümde stokastik süreçlerle ilgili tanımlar Skorokhod ve ark. <sup>(51)</sup>, dan ve Gikhman ve ark. <sup>(13,14)</sup>, dan verilecektir.

**Tanım 3.1**  $(\Omega, F, P)$  bir olasılık uzayı ve  $D \subset R^d$  olmak üzere her  $s \in D$  olan mekan indeksi sabiti için  $\Omega$ 'da bir rasgele değişken oluyorsa  $X(s, w)$  fonksiyonuna  **$d$ -boyutlu stokastik süreç** denir. Özel olarak  $d = 1$  seçildiğinde *zamansal süreç*,  $d = 2$  olarak seçildiğinde *mekansal süreç* ele alınmış olur.

Başka bir ifadeyle,

$$\begin{aligned} X : D \times \Omega &\rightarrow R \\ (s, w) &\rightarrow X(s, w) \end{aligned}$$

fonksiyonu, her  $s \in D$  için  $\mathcal{B}$  Borel  $\sigma$ -cebirindeki her  $B$  kümesi için  $X^{-1}(B) = \{w : X(s, w) \in B\} \in F$  olmak üzere  $\Omega$ 'ya göre  $F$  ölçülebilense **stokastik süreç** adını alır. Aynı zamanda her bir  $w \in \Omega$  sabit olayı için  $X(s, w)$ ,  $s$ 'ye bağlı tek değişkenli reel değerli fonksiyon olur<sup>(27)</sup>.

**Tanım 3.2** Reel değerler alan  $X(s, w)$  fonksiyonlarının her birine  $\{X(s, w)\} = \{X(s)\}$  sürecinin **realizasyonu** denir. Eğer her  $h > 0$  ve  $s \in D$  için  $P\{x-h < X(s) < x+h\}$  olasılığı varsa,  $x$ 'e  $\{X(s), s \in D\}$  mekansal sürecinin bir **olası (mümkün) değeri** denir<sup>(27)</sup>.

**Tanım 3.3**  $X(s, w) = X(s)$  olmak üzere her  $s_1, s_2, \dots, s_k \in D$  ve her  $x_1, x_2, \dots, x_k \in R$  için

$$F_{s_1, s_2, \dots, s_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P\{X(s_1) \leq x_1, X(s_2) \leq x_2, \dots, X(s_k) \leq x_k\}$$

fonksiyonu  $\{X(s), s \in D\}$  mekansal sürecinin  **$k$ -boyutlu dağılım fonksiyonu** olarak adlandırılır<sup>(27)</sup>.

**Tanım 3.4**  $A_j = (-\infty, x_j]$  olmak üzere her  $k, s \in D \subset R^d$  için

$$F_{s_1, s_2, \dots, s_k}(A_1, A_2, \dots, A_k) = P\left(w: \bigcap_{j=1}^k \{X(s_j, w) \in A_j\}\right) \quad (3.1)$$

ifadesine  $\{X(s, w)\}$  mekansal sürecinin **sonlu boyutlu dağılım sınıfı** denir.

(3.1) eşitliği, mekansal sürecin  $k$ -boyutlu dağılımından seçilen her  $k \in N^+$  ve her bir  $s_j$  ( $j=0, 1, 2, \dots, k$ ) değerleri için  $D$ 'de  $d$ -boyutlu vektörlerdir. Her bir  $A_j$ ,  $X(s, w)$ 'nin değerler kümesinden olan borel kümeleridir.

(3.1) eşitliği ile verilen sonlu boyutlu dağılımlar aşağıdaki koşullara sahiptir:

**i.**  $1, 2, \dots, k$  sayılarının  $i_1, i_2, \dots, i_k$  şeklindeki  $k!$  sayıda farklı şekilde yer değiştirmeleri için

$$F_{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}}(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}) = F_{s_1, s_2, \dots, s_k}(A_1, A_2, \dots, A_k)$$

eşitliği vardır. Başka bir ifadeyle, sonlu boyutlu dağılımlarda koordinatlar istenilen şekilde yer değiştirebilir.

ii. İstenilen  $k \in N^+$  için,

$$F_{s_1, s_2, \dots, s_k} (A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, \infty) = F_{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}} (A_1, A_2, \dots, A_{k-1})$$

ifadesi  $X(s_1), X(s_2), \dots, X(s_{k-1})$ 'nin  $k-1$  boyutlu dağılım fonksiyonudur ve

$$F_{s_1, s_2, \dots, s_k} (A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, -\infty) = 0$$

dır.

Bu iki koşula **sonlu boyutlu dağılımlar ailesinin uyum koşulları** denir<sup>(51)</sup>.

**Teorem 3.1** Uyum koşulları sağlanan her sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları ailesi için bir olasılık uzayı ve sonlu boyutlu dağılımları bu aile ile aynı olan bu uzayda tanımlı bir süreç vardır<sup>(13)</sup>.

Bu teorem Kolmogorov teoremi olarak bilinir. Kolmogorov teoremine göre istenilen sonlu boyutlu dağılımlar sınıfı için bu sonlu boyutlu dağılımlara sahip olan  $X(s)$  stokastik mekansal süreci vardır<sup>(52)</sup>.

**Tanım 3.5** Her  $s_1, s_2, \dots, s_k \in D$  için

$$F_{s_1, s_2, \dots, s_k} (A_1, A_2, \dots, A_k) = F_{s_1} (A_1) F_{s_2} (A_2) \dots F_{s_k} (A_k)$$

yazılabiliyorsa  $\{X(s_1), X(s_2), \dots, X(s_k)\}$  rasgele değişkenlerine **bağımsız rasgele değişkenler** ve  $\{X(s), s \in D\}$ 'e **bağımsız değerli mekansal süreç** denir. Diğer bir deyişle,  $X$ 'in  $s_i$  mekan noktasındaki değeri,  $i \neq j$  için  $s_j$  mekan noktalarındaki değerlerinden bağımsızdır. Buna göre bağımsız değerli sürecin çok boyutlu dağılımları tüm tek boyutlu dağılımları ile tanımlanır.

Eğer her  $s_1, s_2, \dots, s_k \in D$  için  $X(s_1), X(s_2) - X(s_1), \dots, X(s_k) - X(s_{k-1})$  rasgele değişkenleri bağımsız ise  $\{X(s), s \in D\}$ 'e **artışları bağımsız mekansal süreç** denir<sup>(27)</sup>.

**Tanım 3.6**  $X(s)$  mekansal süreci göz önüne alınsın.  $i = 0, 1, 2, \dots, k$  için  $s_i \in D$  olmak üzere

$$m_k(s_1, s_2, \dots, s_k) = E[X(s_1)X(s_2)\dots X(s_k)]$$

değerine  $\{X(s), s \in D\}$  mekansal sürecin  $k$ . **dereceden moment fonksiyonu** denir.

$X(s)$  sürecin değerler kümesi reel sayılar kümesidir.  $X(s)$ 'nin Birinci dereceden moment fonksiyonu

$$m_1(s) = E[X(s)] = M_X(s)$$

olmak üzere  $M_X(s)$  değerine, **mekansal sürecin ortalaması** denir.

$$M_k(s_1, s_2, \dots, s_k) = E[(X(s_1) - M_X(s_1))(X(s_2) - M_X(s_2))\dots(X(s_k) - M_X(s_k))]$$

değerine  $\{X(s), s \in D\}$  mekansal sürecin  $k$ . **dereceden merkezileştirilmiş moment fonksiyonu** denir. İkinci dereceden merkezileştirilmiş moment fonksiyonuna ise **kovaryans fonksiyonu** denir. Kovaryans fonksiyonu

$$Cov(s_1, s_2) = E[X(s_1)X(s_2)] - E[X(s_1)]E[X(s_2)], \text{ her } s_1, s_2 \in D$$



olarak da yazılabilir<sup>(27)</sup>.  $s_2 = s_1$  olarak seçilirse  $X(s_1)$ 'in varyansı elde edilir ve  $Var(X(s_1)) = \sigma_x^2$ , ( $\sigma^2 \geq 0$ ) olarak gösterilir.  $\sqrt{\sigma_x^2} = \sigma_x$  değeri sürecin standart sapmasıdır.

### Tanım 3.7

$$f_X(X(s_i)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(X(s_i) - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}, \quad X(s_i) \in \mathbb{R}, \quad s_i \in D$$

ifadesine  $X(s_1), X(s_2), \dots, X(s_k)$  birbirinden bağımsız ve aynı  $\mu_x$  ve  $\sigma_x > 0$  parametrelili Gaussian dağılımına sahip rasgele değişkenlerin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir ve  $N(\mu_x, \sigma_x^2)$  şeklinde gösterilir. Bu ifadeye aynı zamanda **Normal (Gaussian) Dağılım** da denir. Eğer  $\mu_x(s) = 0$  ise  $\{X(s), s \in D\}$  süreci özel olarak **beyaz gürültü süreci** (white noise processes) olarak adlandırılır.

**Tanım 3.8**  $s_1, s_2, \dots, s_k \in D$  için  $X(s) = \{X(s_1), X(s_2), \dots, X(s_k)\}$ 'in ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(X(s)) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X(s) - \mu_x)^T \Sigma^{-1} (X(s) - \mu_x)\right\},$$

$$X(s) \in \mathbb{R}^k, \quad s_i \in D$$

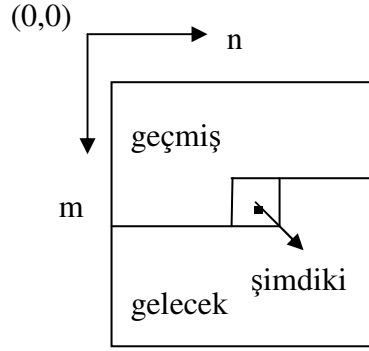
biçiminde olup,  $X(s)$  süreci Gaussian dağılımına sahip ise **Gaussian süreci** olarak adlandırılır. Bir Gaussian mekansal süreci  $E[X(s)] = \mu_x$  ve  $Cov(s_1, s_2) = \Sigma$  fonksiyonlarıyla tam olarak tanımlanabilir<sup>(27)</sup>.

**Tanım 3.9**  $d=1$  seçilerek zamansal  $\{X(s), s \in R\}$  stokastik sürecin dizin kümesindeki  $k$  sayıda zaman noktasının herhangi bir  $s_1 < s_2 < \dots < s_k$  kümesi için  $X(s_k)$ 'nin  $\{X(s_1), X(s_2), \dots, X(s_{k-1})\}$ 'in verilen değerlerine göre koşullu dağılımı yalnızca  $X(s_{k-1})$ 'in değerine bağlı ise,  $\{X(s), s \in R\}$  sürecine **Markov süreci** denir. Buna göre herhangi gerçel  $x_1, x_2, \dots, x_k$  sayıları için

$$P(X(s_k) = x_k | X(s_1) = x_1, \dots, X(s_{k-1}) = x_{k-1}) = P(X(s_k) = x_k | X(s_{k-1}) = x_{k-1}) \quad (3.2)$$

olur ve bu eşitliğe **Markov özelliği** denir. Markov süreci zamanlar sabitlenerek kesikli olarak ele alınırsa özel olarak **Markov zinciri** adını alır.

Mekansal süreçlerde modelin tanımına göre iki boyutlu Markov zincirinin tanımı, geçmiş ve bölgesel durumun seçimine göre farklı yapılmaktadır. Mekansal süreçlerde ardışık hesaplama avantajını sağlamak için iki boyutlu Markov zinciri mekansal modele uygun tanımlanmalıdır. İki boyutta doğal bir ardışık sıralama olmadığından mekansal ilişkinin tek yönlü, iki yönlü veya simetrikliğine göre incelenmesine bağlı olarak iki boyutlu Markov zinciri, geçmiş ve bölgesel durumun bölgesini farklı ele alır. Mekansal bağımlılığın yönüne göre bölgesel ve geçmiş durumun farklı seçilmesi halinde Cressie<sup>(12)</sup> ile Jeng ve Woods<sup>(53)</sup> tarafından farklı Markov zinciri tanımları yapılmıştır. Bu çalışmada Markov zinciri, Jeng ve Woods<sup>(53)</sup>'ün simetrik olmayan yarı alan tanımına uygun olarak ele alınmıştır. Mekansal süreç latis üzerinde ele alındığında genel tarama soldan sağa doğru giderek satırdan satıra yapılır. Latis üzerindeki bazı noktalar geçmiş, bir nokta şimdiki, geri kalan bütün noktalar da gelecek olarak isimlendirilir. Latisin böyle parçalanması Şekil 3.1'de gösterilmiştir<sup>(52)</sup>.



**Şekil 3.1** Latisin geçmiş, şimdiki ve gelecek bölgelerinin gösterimi.

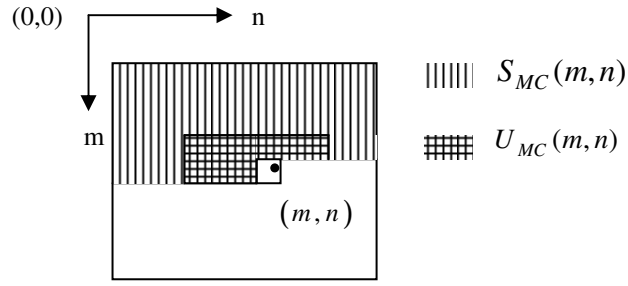
Mekansal bağımlılığın yönüne göre lokal ve geçmiş durumun farklı seçilmesi halinde Jeng and Woods<sup>(53)</sup> ve Cressie<sup>(12)</sup> tarafından değişik mekansal Markov zinciri tanımlaması yapılmıştır.

**Tanım 3.10 (Mekansal Markov Zinciri)**

$[0, M - 1] \times [0, N - 1]$  sınırlı karesel latis üzerinde tanımlanan tek yönlü iki boyutlu Markov zincirini  $X(m, n)$  ile gösterelim. Latisin uygun olarak kenar ve üst değerleri başlangıç koşulu olarak göz önüne alınsın. Simetrik olmayan yarı alan Markov zinciri için geçmiş ve lokal durum için destek kümesi  $(k, l) \in [0, M - 1] \times [0, N - 1]$  ve  $(k, l)$  mekan noktasındaki rasgele değişken  $X(k, l)$  olmak üzere

$$S_{MC}(m, n) = \{X(k, l) : k \leq m, l < n \text{ veya } k < m, l = n\}$$

kümesini göz önüne alalım ve  $U_{MC}(m, n) \subset S_{MC}(m, n)$  olsun. Şekil 3.2 bu veri kümelerinin şekil üzerindeki bir örneğini göstermektedir<sup>(52)</sup>.



**Şekil 3.2** Markov zincirinin destek kümesi.

Bu veri kümeleri kullanılarak tek yönlü iki boyutlu Markov zinciri Tanım 3.11’de tanımlanmıştır.

**Tanım 3.11** Her  $(m,n) \in [0, M-1] \times [0, N-1]$  için

$$P[X(m,n) | S_{MC}(m,n)] = P[X(m,n) | U_{MC}(m,n)] \quad (3.3)$$

eşitliğini sağlayan mekansal rasgele  $X(m,n)$  zinciri, simetrik olmayan yarı alan **Markov zinciri** olarak adlandırılır.  $S(m,n)$ ,  $(m,n)$  noktasındaki geçmiş durum,  $U(m,n)$  ise  $(m,n)$  noktasındaki lokal durumdur. Literatürde MC indisi, Markov Zincirinin (Markov Chain) kısaltması olarak kullanılmaktadır. Olasılık teorisinin zincir kuralının uygulanmasını tekrarlırsak, simetrik olmayan yarı alan Markov zincirinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$P(\underline{X}) = \prod_{m,n} P[X(m,n) | U_{MC}(m,n)] \quad (3.4)$$

dir. Burada  $\underline{X}$  sınırlı karesel bölgedeki tüm  $X(m,n)$ ’lerdir<sup>(52,53)</sup>.

**Tanım 3.12** Her  $s_i \in R^d$  için  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  mekan noktaları olmak üzere  $\{X(s_1), X(s_2), \dots, X(s_k)\}$ 'nin ortak dağılım fonksiyonu  $P\{X(s_1) \leq x_1, X(s_2) \leq x_2, \dots, X(s_k) \leq x_k\}$  olarak gösterilir. Eğer mekan koordinatların lineer bir dönüşümü yapıldığında dağılım fonksiyonun gösterdiği değer değişmiyorsa, yani

$$P\{X(s_1) \leq x_1, X(s_2) \leq x_2, \dots, X(s_k) \leq x_k\} = P\{X(as_1 + b) \leq x_1, X(as_2 + b) \leq x_2, \dots, X(as_k + b) \leq x_k\}$$

oluyorsa  $\{X(s), s \in R^d\}$  mekansal sürecine **homojen mekansal süreç** denir<sup>(12)</sup>.

**Tanım 3.13** Eğer  $s$  vektörü orijin etrafında rotasyona tabi tutulduğunda  $P\{X(s_1) \leq x_1, X(s_2) \leq x_2, \dots, X(s_k) \leq x_k\}$  değeri değişmiyorsa  $\{X(s), s \in R^d\}$  mekansal sürecine **isotropik mekansal süreç** denir<sup>(12)</sup>.

Tanım 3.12 ve 3.13'e göre, mekansal süreci homojen ve isotropikse bir bölgenin farklı alanlarından alınan gözlemler aynı dağılımlı olur. Diğer bir ifadeyle, tam homojen ve isotropik bir mekansal süreç, **tam (güçlü) durağan** süreçtir<sup>(12)</sup>.

**Tanım 3.14** Belirli mekan noktalarındaki mekansal değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonu, o mekan noktalarından  $h$  vektörü kadar başka mekan noktalarına gidildiğinde elde edilen değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonuna eşitse,  $\{X(s), s \in D\}$  mekansal sürecine **tam durağan mekansal süreç** denir. Bu ifade

$$F_{s_1, s_2, \dots, s_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_{s_1+h, s_2+h, \dots, s_k+h}(x_1, x_2, \dots, x_k), \text{ her } n \geq 1, \text{ her } h \in R^d$$

eşitliği ile verilir. Buna göre, eğer tam (güçlü) durağan sürecin kovaryans fonksiyonu varsa

$$E[X(s)] = E[X(s+h)] = \mu, \text{ her } s \in D, h \in R^d$$

$$Cov(X(s_1), X(s_2)) = Cov(X(s_1+h), X(s_2+h)), \text{ her } s_1, s_2 \in D, h \in R^d$$

olur<sup>(27)</sup>.

**Tanım 3.15** Aşağıdaki koşulları sağlayan  $\{X(s), s \in D\}$  mekansal sürecine **ikinci derece (zayıf) durağan mekansal süreç** denir<sup>(27)</sup>:

- i.  $E(X(s)) = \mu, \forall s \in D$
- ii.  $Cov(X(s_1), X(s_2)) = C(s_1 - s_2), \forall s_1, s_2 \in D$

### 3.2 Mekansal Veri Analizi

Mekansal veri analizi, mekana bağlı olarak gelişen süreçleri incelemek amacıyla yapılır ve tüm olaylar, olgular ve nesnelere mekansal özellikleriyle statik veya dinamik olarak ele alınırlar. Coğrafi bilgi sistemi, uzaktan algılama, örüntü tanıma, görüntü iyileştirme gibi pek çok alanda yapılan araştırmalarda verinin mekansal özellikleri göz önünde bulundurulur. Ayrıca arkeoloji, deprem, sağlık, nüfus, suç olayları, kanser araştırmaları ile ilgili pek çok olayın bölgesel değerlendirmeleri mekansal veri analiziyle ele alınır. Çünkü bu analizler, birbirine yakın mekanlardaki veriler arasında mekansal bir etkileşimin (ilişkinin) olabileceği varsayımından hareketle bilinen istatistiksel tekniklere göre daha duyarlıdır. Bunun için bu çalışmada, mekansal veri analizleri tanıtılacaktır.

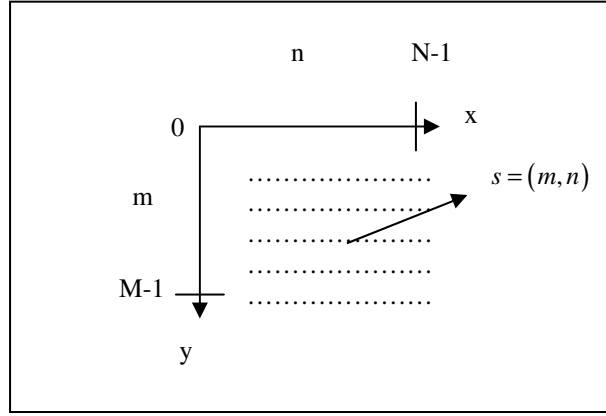
Tanım 3.1'de  $w$ 'nin sabit kalıp  $s$ 'nin değişmesi  $\{X(s), s \in D\}$  mekan stokastik sürecin,  $s$ 'nin sabit kalıp  $w$ 'nin değişmesi ise sabit mekanda rasgele olayın var olduğunu gösterir.  $\{X(s), s \in D\}$  kümesindeki bir rasgele değişkenin değeri onun pozisyonuna bağlı ise bu rasgele değişkene **mekansal (bölgeleştirilmiş) rasgele değişken** denir. Mekanda örnekleme rasgele yapılıdır, fakat bunların alındığı mekanların belli uyumunun (oryantasyon), hacim ve geometrik şekle sahip oldukları düşünülür. Mekan konum noktalarını, bir harita üzerinde coğrafi konumları (enlem-boylam, ada-parşel vb.) ile sistemli olarak belirlemek amaçlandığında, bu noktalar latis, grid, poligon, teselasyon gibi düzenlerde ele alınarak hesaplama ve veri takibi kolaylaştırılır. Mekan konum sistemlerinde verinin alındığı bölgeler eşit büyüklükte değilse veriler ağırlıklandırılmalıdır. Ama bu düzenlerin doğaya uygun olmaması da bir dezavantajdır. Eğer  $D \subset R^2$  kümesindeki  $s$ 'ler kendi aralarında eşit uzaklıkta konumlandırılmışsa iki boyutta ortaya konulan mekan noktaları sistemine **latis (lattice) sistemi** denir. Latisdeki noktaların birleştirilerek grid sistemi oluşturulur. Noktaların üzerinden doğrular çizilir. Gözlemlerin, her kafesin merkezinde alındığı varsayılır. Poligon sistemi, en az iki boyutta üç kenarı olan birbirine bitişik üçgen şekillerdir. Teselasyon sistemi, beşgenlerden oluşur. Nokta şekil (point pattern) düzeninde ise konumlar belli bir düzende değil rasgele olarak karşımıza çıkar<sup>(54)</sup>.

İstatistiksel sinyal işleminin son 40 yılda çok geliştiği ve görüntü işleme tekniklerine de katkıda bulunduğu görülmektedir. Sinyal işleme ve görüntü işleme olasılık, rasgele süreçler, sistem ve dönüşüm teknikleriyle yakından ilişkilidir. Markov rasgele alanı, görüntünün iki veya üç boyutlu ele alınışında Markov zincirinin genelleştirilmesidir. 1970'lerin başında Rus bilgi teoristi Roland

Dobrushin tarafından görüntü üzerine teorik çalışmalara dayalı modeller ortaya konulmuştur.

Bir görüntünün rasgele alanı  $Y = \{Y_s, s \in D\}$  olarak modellenenir. Burada

- $D = \{(m, n) | 0 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1\}$  indeks kümesidir.



**Şekil 3.3**  $M \times N$  bölgenin 2-B latis olarak resmedilmesi.

Şekil 3.3'te görüldüğü gibi  $M \times N$  bölge kesikli iki boyutlu karesel tamsayıli (integer) veya latis (lattice) olarak resmedilir.

- Latisin her bir noktası  $s = (m, n) \in D$  için  $Y_s$  reel değerli rasgele değışkendir.

$Y$  rasgele alanı, ortak olasılık dağılımıyla karakterize edilir. Bir  $A$  Borel kümesinin olasılığı,  $Y$ 'nin aldığı değerler kesikli ise

$$P_Y(A) = P(Y \in A) = \sum_A P_Y(y) \quad (3.5)$$

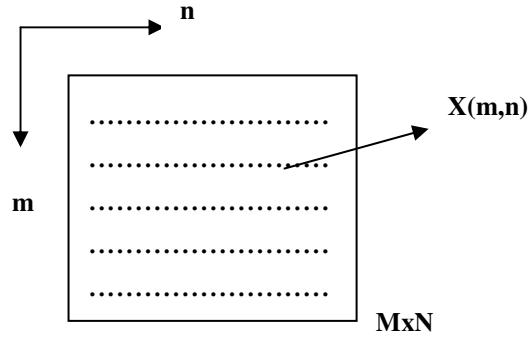
$Y$ 'nin aldığı değerler sürekli ise



$$P_Y(A) = P(Y \in A) = \int_A dP_Y(y) \quad (3.6)$$

olarak verilir. Kısaca  $Y$  rasgele alanı, indeks kümesi iki boyutlu olan rasgele değişkendir<sup>(21)</sup>.

$M \times N$ -kesikli iki boyutlu bölgenin kendine özgü bir taranışı vardır. Soldan sağa doğru taramak, nicelik bakımından sonuçları değiştirmeyeceğinden, soldan sağa doğru satırlar taranarak ilerlenir<sup>(2)</sup>. Tarama, birinci satırın başından başlayarak sonuna kadar devam edip bir sonraki satırın başına gelmektedir. Böylece bölge,  $M - 1$  kez tekrarlanarak taranmış olur. Bu tarama biçimine **raster tarama** denir.



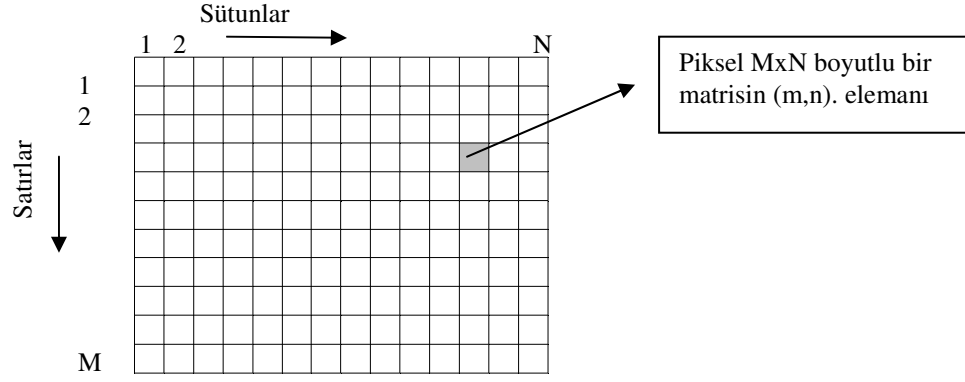
**Şekil 3.4**  $M \times N$  boyutlu resmin yatay ve düşey yönlerinin gösterilmesi.

Resmin boyutu genelde 2'nin kuvveti olarak seçilir. Bu seçim hesap kolaylığı ve anlaşılabilirliği sağlar. Tabii farklı da seçilebilir. Bu çalışmada asıl ilgilenilen konu gerçek bir resmin ya da bozulmuş bir resmin nasıl modelleneceğidir. Bu konu hakkında ayrıntılı bilgi Kesim 3.4'te verilecektir.

### 3.3 Sayısal Görüntü İşlemenin Temelleri

Sayısal görüntü işleme (digital image processing), görüntü verilerinin bilgisayar kullanarak işlenmesi anlamına gelir. Görüntü, görme ve görünüm ile ilgili bir kavramdır. Nesnelerin, yüzeylerine çarpan veya içlerinden geçen ışınları yansıtmaları yoluyla algılanmaları **görme**, söz konusu nesnelerin bu yoldan algılanabilen içeriği **görünüm**, görünümün herhangi bir biçimde sağlanmış iki boyutlu çizgesi ise **görüntü** olarak adlandırılır. Görüntü, üç boyutlu görünümün iki boyut üzerindeki haritası olarak da tanımlanabilir. Analog görüntülerin bilgisayar ortamında işlenebilmesi için sayılaştırılmaları gerekir. Sayılaştırma için ilk olarak örnekleme, daha sonra nicemleme (kuantalama) yapılır<sup>(23)</sup>.

$X(m,n)$ 'nin bilgisayar ortamında işlenebilmesi için hem konumsal (uzaysal) olarak hem de genlikle sayısallaştırılması gerekir. Görüntü fonksiyonuna ilişkin  $(m,n)$  uzaysal koordinatlarının sayılaştırılması, **görüntü örnekleme** olarak adlandırılırken;  $X(m,n)$ 'nin genlik değerlerinin sayısallaştırılmasına **görüntü nicemleme (kuantalama)** adı verilir. Hem örnekleme hem de nicemleme işleminin birlikte gerçekleştirildiği yapıya bir **örnek tarayıcı (scanner)** denir. Tarayıcıdan belli formatlarda elde edilen görüntüler sayısaldir ve bilgisayarda yazılımlarla işlenebilecek haldedir.



**Şekil 3.5**  $M \times N$  büyüklüğüne sahip 2-B bir sayısal görüntünün temel yapısı.

Örnekleme ve nicemeleme işleminden sonra elde edilen sayısal görüntü, belli bir aralıktaki pozitif tamsayı değerlerinin dikdörtgen şeklindeki ızgaralardan (grid) oluşmuş bir dizisidir (Şekil 3.5). Piksel, sayısal bir görüntüyü oluşturan en küçük eleman olup bir pikselin sahip olduğu değer ilgili görüntü elemanının parlaklık şiddetini belirtir. Parlaklık şiddeti ile ilgili olan pozitif tamsayı değeri, nicemeleme ile belirlenir<sup>(23)</sup>.

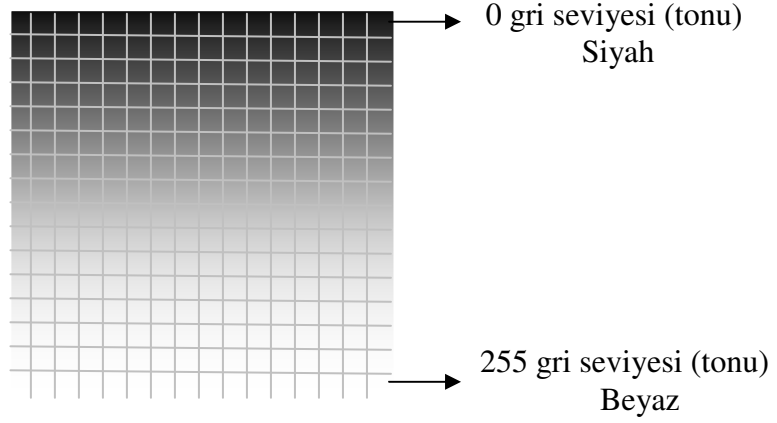
Örnekleme ve nicemeleme işlemine ek olarak sayısallaştırma işlemi, görüntü boyutlarının ve her bir pikselin sahip olabileceği parlaklık değerinin belirlenmesini de gerektirir. Uygulamada genel olarak bu büyüklükler

$$N = 2^d, \quad M = 2^h, \quad G = 2^t \quad (3.7)$$

biçiminde hesapsal kolaylık için 2'nin katları olacak şekilde seçilir. (3.7)'deki  $d, h$  ve  $t$  pozitif tamsayı değerleri olup  $G$  parlaklık değerlerinin sayısını ifade eder.

Eğer bir görüntüyü  $M$  satır  $N$  sütundan meydana gelmiş bir matris olarak ele alırsak bu matrisin  $m$ . satır ve  $n$ . sütundaki elemanı, görüntünün ilgili noktadaki parlaklık değeri veya görüntünün ilgili noktasındaki **gri seviye değeri**dir ve bu değer

$X(m,n)$  olarak gösterilir. Bu sayısal dizinin veya matrisin her bir elemanına **görüntü elemanı** veya **piksel** denir. Her bir pikseldeki parlaklık değerinin kodlandığı bit sayısına ( $t$ ; bit sayısı) göre gri seviye aralığı belirlenir. En basit durumda pikseller “0” veya “1” değerlerini alırlar. Bu piksellerden oluşan görüntülere **ikili (binary) görüntü** adı verilir. İkili görüntüde her bir pikseldeki parlaklık değeri  $t=1$  bit ile kodlanır ve (3.7)’de verilen hesaplama göre  $G=2^1=2$  olur. Bunun anlamı, ikili görüntüde gri seviye anlamında iki renk hakimdir: siyah (0) ve beyaz (1). Her bir pikseli  $t>1$  olacak şekilde kodlanan görüntülere ise **gri-ton** (gray scale, monochromatic) görüntüler adı verilir. Uygulamada yaygın olarak kullanılan gri-ton görüntülerin her bir pikseli  $t=8$  bit ile kodlanmıştır. Bu tip görüntülerde her bir piksel  $G=2^8=256$  farklı gri ton (parlaklık seviyesi) değerinden oluşur ve gri değer aralığı  $G=\{0,1,2,\dots,255\}$  biçiminde ifade edilir. Kural olarak, “0” gri seviyesi siyah renge, “255” gri seviyesi ise beyaz renge ve bu değerler arasındaki gri seviyeler ise gri tonlara karşılık gelir. Şekil 3.6’da  $M \times N = 16 \times 16$ ’lık bir ızgara üzerinde 256 farklı gri seviyenin gösterimi verilmiştir<sup>(23)</sup>.



**Şekil 3.6** 16×16'lık bir ızgara üzerinde 256 farklı gri seviyenin gösterimi.

Daha önce de ifade edildiği gibi  $M \times N$  piksele sahip iki boyutlu sayısal bir görüntü,  $M$  satır ve  $N$  sütundan oluşan bir matris gibi düşünülebilir. Matrisin bileşenleri, satır ve sütunların kesiştiği her bir noktada (ki bu noktalar sayısal görüntünün en küçük parçası olan pikseli temsil eder) pozitif tamsayı değerlerine sahiptir. Bu değerler rasgele olamazlar.

Sayısal bir görüntüyü temsil eden matrisin bileşenleri hiçbir zaman negatif ve tamsayı dışındaki değerlerden oluşamaz. Ancak, görüntü üzerinde işlemler yapıldıktan sonra elde edilen yeni görüntü içerisinde bu gibi sonuçlarla karşılaşmak olasıdır. Böyle durumlarda, yeni görüntüyü bilgisayar ekranında doğru bir biçimde görüntüleyebilmek için matris değerleri üzerinde uygun ölçeklendirme ve yuvarlatma işlemleri yapılmalıdır<sup>(23)</sup>.

Sayısal görüntülerin Matlab'da görüntülenmesine yönelik bazı örnekler verilmiştir<sup>(23)</sup>:

**Örnek 3.1** İki boyutlu rampa fonksiyonu 8-bit gri-ton görüntüsünün oluşturulması ile ilgili olup,  $256 \times 256$  pikselden oluşan bu sayısal görüntünün matris temsili

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \cdots & 255 \\ 0 & 1 \cdots & 255 \\ \vdots & \vdots \cdots & \vdots \\ 0 & 1 \cdots & 255 \end{pmatrix}$$

256 sütun 256 satır

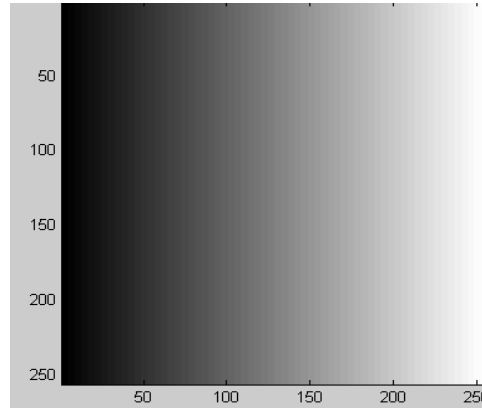
biçimindedir. Matlab'da  $A$  matrisini oluşturma Çizelge 3.1'de ve görüntüleme işlemi Şekil 3.7'de verilmiştir.

**Çizelge 3.1**  $A$  matrisini oluşturma.

Yukarıdaki görüntüyü veren Matlab kodu:

```
for i=1:256,  
    for j=1:256,  
        A(i,j)=j-1,  
    end  
end
```

```
%Görüntüleme için aşağıdaki kod satırlarından herhangi biri kullanılabilir  
figure, imshow(A,[0 255]);  
figure, imagesc(A); colormap(gray); axis('image')
```



**Şekil 3.7**  $A$  matrisini görüntüleme.

**Örnek 3.2** Merkezi (256,256) piksel konumunda olan ve yarıçapı 100 pikselden oluşan bir dairenin 512×512 pikselden oluşan 1-bit gri-ton görüntüsünün elde edilmesi.

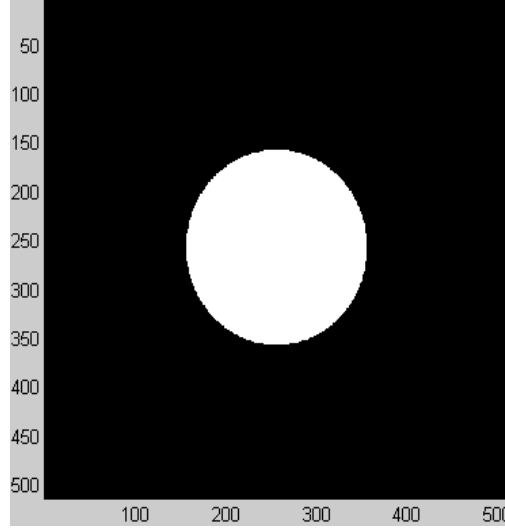
Bu sayısal görüntünün matris gösterimi

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \sqrt{(i-256)^2 + (j-256)^2} < 100 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

ile  $i=1,2,\dots,512$  ve  $j=1,2,\dots,512$  için oluşturulur. Matlab'da  $A(i, j)$  matrisini oluşturma Çizelge 3.2'de ve görüntüleme işlemi Şekil 3.8'de verilmiştir.

**Çizelge 3.2**  $A(i, j)$  matrisini oluşturma.

```
Yukarıdaki görüntüyü veren Matlab kodu:  
for i=1:512,  
    for j=1:512,  
        radius=sqrt((i-256)^2+(j-256)^2);  
        if radius<100  
            A(i,j)=1;  
        else  
            A(i,j)=0;  
        end  
    end  
end  
  
%Görüntüleme için aşağıdaki kod satırı kullanılabilir  
figure,imagesc(A); colormap(gray); axis('image')
```



**Şekil 3.8**  $A(i, j)$  matrisini görüntüleme

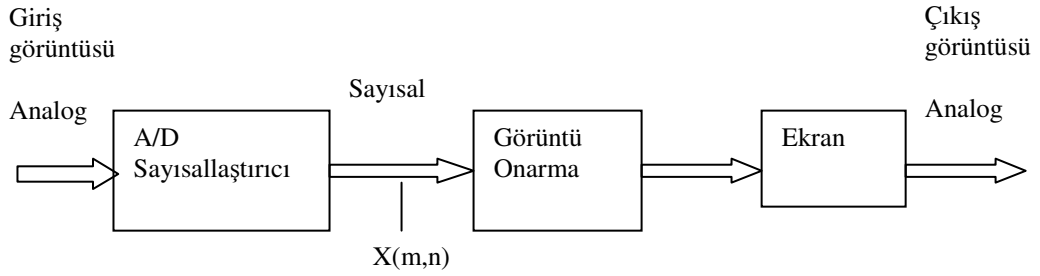
Görüntü işlemedeki ilk adım, sayısal görüntü elde etme işlemidir. Görüntüyü gerçek dünyadan bir film tabakasına veya bir hafıza birimine almamızı sağlayan, resim alıcılarıdır. Bu cihazlarda bir resim algılayıcısı ve algılanan resmi sayısal hale dönüştüren sayısallaştırıcı birim bulunmaktadır. Eğer resmi algılayıcısı resmi doğrudan sayısal hale dönüştürmüyorsa, algılayıcı tarafından elde edilen analog resim bir analog/dijital (A/D) dönüştürücü yardımıyla sayısal hale dönüştürülür. Sayısal kamera, tarayıcı ve sayısal fotoğraf makinesi analog resim veya görüntüleri sayısala dönüştüren yapılara örnek olarak verilebilir.

Sayısal resim elde edildikten sonraki aşama ise ön-işleme'dir. Ön-işleme, elde edilen sayısal görüntüyü kullanmadan önce daha başarılı bir sonuç elde edebilmek amacıyla görüntünün bazı ön işlemlerden geçirilmesidir. Bu işlemler temel olarak, görüntüyü iyileştirme (image enhancement), görüntü onarma (image restoration) ve görüntü sıkıştırma (image compression) alt başlıkları altında toplanabilir<sup>(23)</sup>.



### 3.4 Görüntü Onarma

Görüntü iyileştirmede olduğu gibi görüntü onarma yöntemlerinin de temel amacı, çeşitli nedenlerle bozulmaya uğramış olan görüntülerde bozulmanın etkisini azaltmak veya tamamen ortadan kaldırmaktır. Bu anlamda görüntü iyileştirme ile görüntü onarma sanki birbirinin aynı olan iki işlem gibi görünse de bu ikisi arasında bazı önemli farklar vardır. Görüntü iyileştirmede verilen bir görüntünün daha iyi görünür hale getirilmesi amaçlanır. Görüntü iyileştirme algoritmalarına göre görüntü onarma yöntemleri daha fazla matematik gerektirirler ve daha karmaşıktırlar. Görüntü onarma algoritmaları, işaret ve bozulmanın ayrıntılı özelliklerini kullanmak için tasarlanır<sup>(23)</sup>. Görüntünün onarılmasındaki amaç ise, bozulmuş görüntüden yararlanarak orijinal görüntüye en yakın yeni bir görüntü elde etmektir. Bu amaç için kullanılan pek çok teknik vardır. Bu çalışmada iki boyutlu stokastik mekansal süreçlerin modellenmesi ile görüntü onarma işlemine istatistiksel yöntemlerle yaklaşmıştır.



**Şekil 3.9** Görüntü onarma için tipik bir ortam.

Bir görüntü onarma sistemi için tipik bir ortam Şekil 3.9'da gösterilmiştir. Şekil 3.9'daki sayısallaştırıcı ve ekran ideal ise herhangi bir onarma işlemine gerek

olmaksızın çıkış görüntüsü ile giriş görüntüsü benzer olacaktır. Uygulamada ise, sayısallaştırıcı ve ekranda çok farklı bozucu etkiler meydana gelebilir. Bir görüntü onarma sistemi ile bozucu etkilerin üstesinden gelinmeye çalışılır ve böylece çıkış görüntüsü ile giriş görüntüsü olabildiğince birbirine yakın olur<sup>(23)</sup>.

Bir görüntü onarma sistemi, bozulmanın türüne bağlı olarak geliştirilir. Bu anlamda, toplamsal rasgele gürültüyü azaltmaya yönelik tasarlanan algoritmalarla bulanıklaşma etkisini ortadan kaldırmak için geliştirilen yöntemler birbirinden tamamen farklıdır<sup>(23)</sup>. Burada önemli olan iyileştirme sonuçlarının gerçeğe ne kadar yaklaştığıdır. Bu amaçla bir sonraki kesimde görüntüyü bozan faktörlerin neler olabileceği araştırılmış ve bulanık bir görüntüdeki bozucu etki matematiksel olarak hesaplanmaya ve modellenmeye çalışılmıştır.

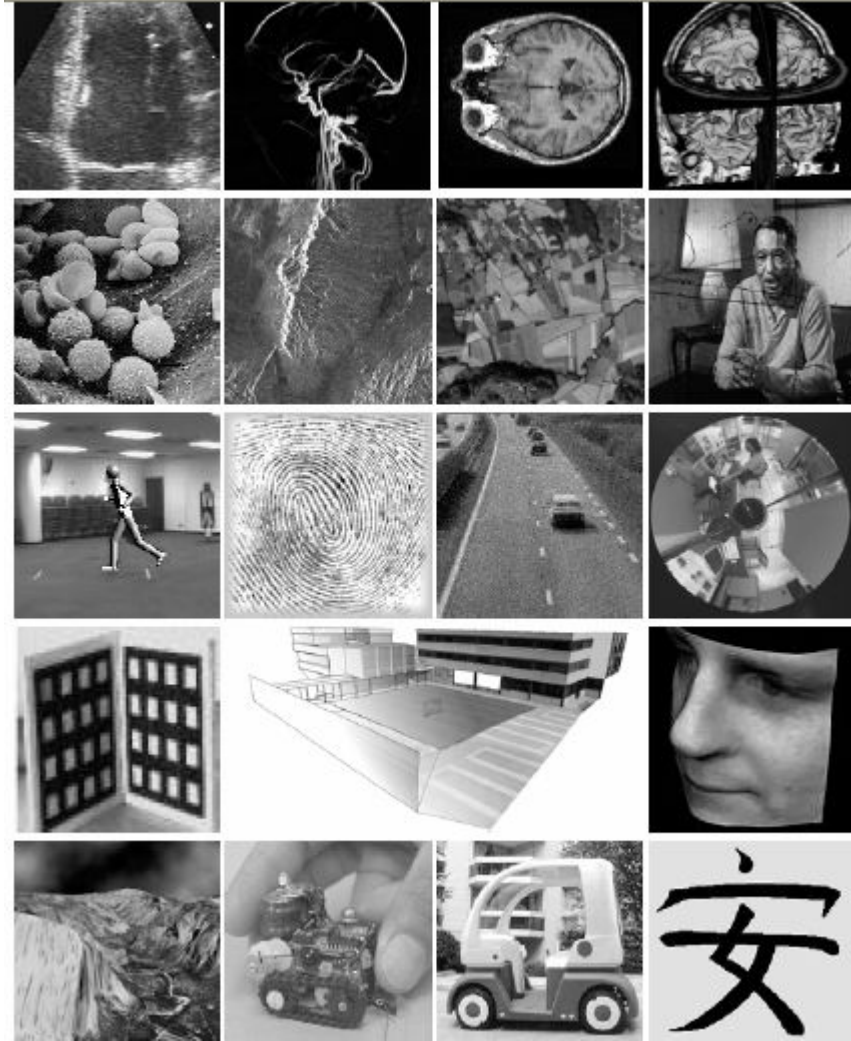
### 3.5 Görüntünün Modellenmesi

Sayısal görüntü işleme metotları günümüzde pek çok alanda kullanılmaktadır.

- Çeşitli görüntülerin makineler tarafından algılanıp otomatik iş yapmak için kullanılması: otomatik harf tanıma, parmak izi, yüz tanıma, kan örneği inceleme...
- Tıbbi alanda: X-ışını uygulamaları, ultrason, tomografi, mamografi ve manyetik rezonans görüntüleme gibi görüntülerin sayesinde hastalık teşhisi yapmak için
- Coğrafya alanında: havadan veya uzaydan çekilen resimlerle çevre analizi yapmak için, astronomi ve uzay araştırmalarında,
- Fizikte elektron mikroskobundan elde edilen görüntüler,

- Savunma ve endüstriyel uygulamalarda,
- Askeri alanlarda hedef tanımlama

gibi pek çok kullanım alanı vardır. Görüntünün daha iyi yorumlanabilmesi için bu görüntülerin yüksek kalitede daha net bir şekilde elde edilmesi istenir.



Şekil 3.10 Farklı alanda kullanılan görüntüler<sup>(55)</sup>.

Model kurma ve analiz kuantalama üzerinde yapılır ve işlem sonucunda elde edilen değerler yeniden kodlandığında yeni bir görüntü elde edilir. Diğer bir ifadeyle,

görüntü iki boyutlu bir ışık şiddet (yoğunluk) fonksiyonudur. Sayısal görüntü ise görüntünün  $(m, n)$  koordinatlarının ve  $X(m, n)$  parlaklık veya grilik seviyesinin sayılaştırılması anlamında kullanılmaktadır. Bu çalışmada  $X(m, n)$  bir mekansal stokastik süreç olarak modellenmiştir<sup>(56,57)</sup>. Sayısal görüntü elde edilirken iki türlü görüntüyü bozma etkeni ortaya çıkar. Bunlar

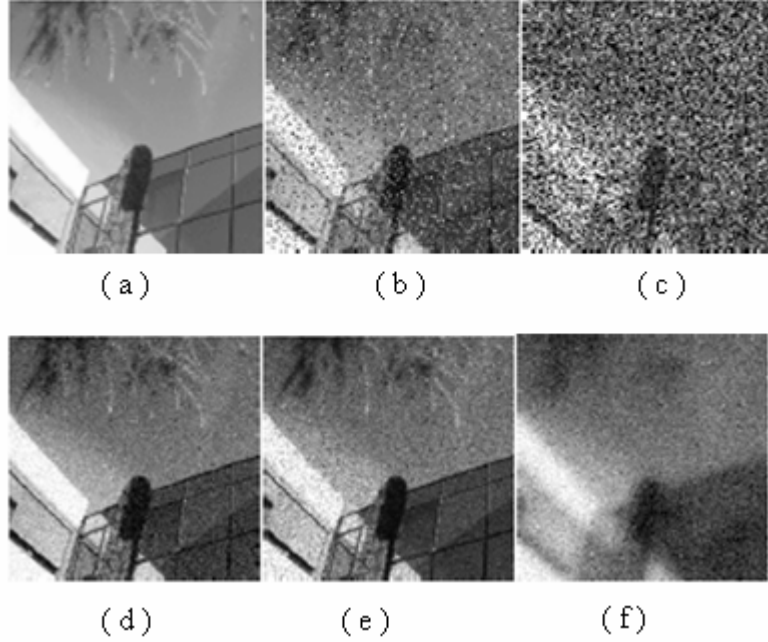
- 1) Bulanıklık,
- 2) Gözlem gürültüsü.

Bulanıklık, kameranın düzgün odaklanmamış lensinden, kamera ile görüntüsü elde edilmek istenen nesne arasında gelişebilecek atmosferik olaylardan, nesnenin veya kameranın hareket halinde olmasından veya kameranın nesneye çok fazla yaklaştırılması sonucu meydana gelebilir.

Gözlem gürültüsü rasgeledir ve görüntünün aktarım ortamından, kayıt ortamından, kayıt sisteminin zayıflığından ortaya çıkan ölçüm hatalarından ya da bilginin sayısal kayıt için nicelendirilmesi işleminden kaynaklanabilir<sup>(58)</sup>.



'Borel binası' görüntüsü (INRIA Sophia-Antipolis)



**Şekil 3.11** 'Borel Binası' görüntüleri. (a) Gerçek görüntü. (b) Tuz-biber gürültülü görüntü. (c) Speckle gürültülü görüntü. (d) Toplamsal Gaussian gürültülü görüntü. (e) Artan Gaussian gürültülü görüntü. (f) Bulanık ve toplamsal Gaussian gürültülü görüntü<sup>(55)</sup>.

Bazen aynı görüntünün tekrar elde edilmesi imkansız, çok güç veya çok maliyetli ya da kullanılan cihazlar düşük çözünürlükte olabilir. Elimizde bozulmuş bir görüntü varsa gerçek görüntüye en yakın görüntüyü elde etmek için bozuk

görüntüyü onarmak ve hatta orijinal görüntüyü geri elde etmek amaçlanır. Birçok durumda eldeki görüntüdeki bozukluk, bulanıklık ve gürültüye ait net bilgi yoktur. Bu bilgiler olsa bile verilerdeki aykırı değerler onarılmış (tahmin edilmiş) görüntü üzerinde büyük bir etkiye sahip olabilir. Veri kümesinde aykırı değerlerin olması durumunda görüntü onarımında dayanıklı yöntemler kullanılmaktadır<sup>(56,57)</sup>.

Bir görüntünün herhangi  $(m, n)$  noktasında ele alalım. O an bulunan noktaya şimdi bulunduğumuz mekanı, kendisinden önceki noktalar geçmiş ve kendisinden sonraki noktalar ise gelecek mekanı göstermektedir. Bu durum Şekil 3.1'de gösterilmiş idi. Matematiksel olarak bu durum

$$geçmiş(m, n) = \{(i, j) : i = m, 0 \leq j \leq n-1\} \cup \{(i, j) : 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq M-1\}$$

$$şimdiki(m, n) = \{(i, j) : i = m, j = n\}$$

$$gelecek(m, n) = \{(i, j) : i = m, n+1 \leq j \leq M-1\} \cup \{(i, j) : m+1 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq M-1\}$$

olarak ifade edilir. Şekil 3.1'de gösterilen bölge çok büyük bir bölge ise bu gölgeye geçmiş bölgeye **simetrik olmayan yarı düzlem** (NSHP-nonsymmetric half plane) adı verilir ve  $\delta_{\oplus+}$  ile gösterilir. NSHP desteği, bir bölgenin içindeki piksel korelasyon uzantısını belirtir. Şimdi ve geçmiş bölgeler birleştirilirse bu bölge de  $\mathfrak{R}_{\oplus+}$  ile gösterilir<sup>(59)</sup>.

Kısaca bu bölgeler

$$\delta_{\oplus+} = Geçmiş (0,0)$$

$$\mathfrak{R}_{\oplus+} = Geçmiş (0,0) + Şimdiki (0,0)$$

şeklinde ifade edilir.

Latis üzerindeki gözelerin komşuluk yapısı göz önünde bulundurularak değişkenler arasında lineer bir bağlantı, otoregresif model aracılığı ile kurulabilir.  $m$  yatay koordinatı,  $n$  dikey koordinatı ve  $X(m, n)$ ,  $(m, n)$  latis noktasındaki rasgele değişkeni göstermek üzere, geçmiş gözelerdeki mekansal rasgele değişkenlerle şimdiki gözedeeki mekansal rasgele değişkenler arasında lineer bir ilişkinin olduğu varsayımı altında

$$X(m, n) = \sum_{(k, l) \in \mathfrak{R}_{\oplus+}} c(k, l) X(m-k, n-l) + w(m, n) \quad (3.8)$$

$$\mathfrak{R}_{\oplus+} = \{(k, l) : 1 \leq k \leq M, -M \leq l \leq M, k = 0, 1 \leq l \leq M\} = \{k \geq 0, l \geq 0\} \cup \{k < 0, l > 0\}$$

$$c_{00} = 0$$

yazılabilir. (3.8) eşitliği ile latis üzerindeki göze koordinatlarına göre değişen mekansal otoregresif model kurulabilir. Bu model,  $(M \times M)$ . derece simetrik olmayan yarı alan otoregresif model olarak adlandırılır ve Markov özelliğine sahiptir<sup>(28)</sup>. Burada  $c(k, l)$ , mekansal bağımlılık katsayısıdır ve kısaca  $c_{kl}$  olarak da gösterilir.  $w(m, n)$ , sıfır ortalamalı ve  $Q_w$  kovaryanslı ilişkisiz beyaz gürültü sürecidir. (3.8) eşitliğine alternatif olarak

$$X(m, n) = c^T X(m-1, n) + w(m, n) \quad (3.9)$$

eşitliği ile durum denklemi olarak da ifade edilebilir. Bu modeli her bir gözedeeki gözlemlerle birleştirirsek uygun gözlem denklemi

$$Y(m, n) = X(m, n) + v(m, n) \quad (3.10)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada  $Y(m, n)$ , gözlem süreci ve  $v(m, n)$ , sıfır ortalamalı,  $Q_v$  kovaryanslı ilişkisiz beyaz gürültü sürecidir. (3.9) ve (3.10) eşitlikleri ile kurulan modelde sistemin kendi içinden kaynaklanan hatalar  $w(m, n)$  gürültüsüyle gösterilmiştir. Kısaca sistem bazen kendi kendisini değiştirir. Örneğin, bir jeolojik çalışmanın yapıldığı toprakta titreşimler ölçülmeye çalışıldığında, mekansal bölgede bulunan ağaçların rüzgar etkisini köklerine iletmesi nedeniyle topraktaki titreşimlerde ortaya çıkacak farklılıklar, sinyalin ürettiği  $w(m, n)$  gürültü sürecinde yer alacaktır. Böylece ölçümlerden kaynaklanan hatalar ise  $v(m, n)$  gürültüsüyle gösterilmiştir. Ölçme aletinin bozuk olması, hassasiyetinin yetersizliği veya ölçümü yapan kişinin tecrübesizliği, dikkatsizliği nedeniyle ortaya çıkacak hatalar  $v(m, n)$  gözlem gürültü süreci içinde yer alacaktır.  $v(m, n)$  ve  $w(m, n)$  süreçleri, basit süreç veya tam rasgele süreç olarak da isimlendirilir. Literatürde genellikle beyaz gürültü süreçleri olarak adlandırılırlar.  $Q_w$  ve  $c_{kl}$  bilindiğinde Kalman filtresi kullanılarak  $X(m, n)$ 'nin EKK ortalaması tahmini bulunabilir. Bununla birlikte durum tahmini yapabilmek için otoregresif sürecin bağımlılık katsayılarının bilinmesi ya da önsel olarak tahmin edilmesi gerekir<sup>(52)</sup>.

$X(m, n)$ 'nin önceki ile sonraki durumu arasında lineer bir bağıntının olduğu varsayımı altında dinamik model, görüntü üzerinde (3.8) ve (3.10) eşitlikleri ile verilen denklemlerle ele alınabilir. Burada orijinal görüntü  $X(m, n)$ , bozuk görüntü  $Y(m, n)$  ile gösterilmiştir<sup>(22)</sup>.  $X(m, n)$ 'in Markov özelliğine sahip olduğu varsayılır.



$c(k,l)$  otoregresif sürecin mekansal bağımlılık süreci parametresi,  $w = \{w(m,n)\}$  beyaz gürültü Gaussian,  $v$ 'den bağımsız ve sıfır ortalamalı,  $\sigma_w^2$  varyanslıdır. Kısaca matematiksel olarak

$$E[w(m,n)] = 0, E[w(m+i, n+j), w(m,n)] = \sigma_w^2 \delta(i, j)$$

şeklinde ifade edilir ve burada  $\delta(i, j)$  Kronecker delta fonksiyonudur.

$v = \{v(m,n)\}$  sıfır ortalamalı,  $\sigma_v^2$  varyanslı homojen Gaussian beyaz gürültüsüdür.

Ayrıca  $v = \{v(m,n)\}$  ve  $w = \{w(m,n)\}$  gürültü süreçleri birbirinden bağımsızdır.

İstatistiksel olarak  $v = \{v(m,n)\}$  gürültü sürecine göre  $X = \{X(m,n)\}$ 'in bir tahmin edicisini elde etmeyi isteriz.

Mekansal bağımlılık katsayılarının tahmini, iki boyutlu homojen kesikli Markov rasgele alan, (3.8) ile verilen otoregresif süreç olarak modellendiğinde beyaz gürültü sürecinin varyansı  $E[w(m,n)^2] = \sigma_w^2$  minimize edilecek şekilde en küçük HKO kriterine göre bulunur<sup>(22)</sup>. Buna göre (3.8) eşitliği ile verilen modelin tahmin edicisi

$$\hat{X}(m,n) = \sum_{(k,l)} c(k,l) X(m-k, n-l)$$

olmak üzere

$$\sigma_w^2 = E \left[ X(m,n) - \sum_{(k,l)} c(k,l) X(m-k, n-l) \right]^2$$

varyansını minimize eden  $c(k,l)$ 'ler en küçük HKO tahmin edicileridir. Dolayısıyla bu minimizasyon problemi

$$E \left[ \left\{ X(m,n) - \sum_{(k,l)} c(k,l) X(m-k,n-l) \right\} X(m-p,n-q) \right] = 0$$

$$\underbrace{E[X(m,n)X(m-p,n-q)]}_{\sigma_x^2} - \sum_{(k,l)} c(k,l) E[X(m-k,n-l)X(m-p,n-q)] = 0$$

biçimini alır. Bu denklemlere **Normal (Yule-Walker)** denklemleri denir. Homojen, sıfır ortalamalı ve kovaryansı

$$r_{m,n}(p,q) = E[X(m,n)X(m-p,n-q)]$$

olan  $X(m,n)$  mekansal sürecinin mekansal bağımlılık katsayıları

$$r_{m,n}(p,q) = \sum_{(k,l)} c(k,l) r_{m,n}(k,l)$$

denklemlerinden elde edilir. Homojen, sıfır ortalamalı ( $1 \times 1$ ). dereceden çeyrek alan otoregresif mekansal sürecin mekansal bağımlılık katsayıları  $c(k,l) = \{c(1,0), c(0,1), c(1,1)\}$ 'nin tahmini için normal denklemlerin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} r(1,0) \\ r(0,1) \\ r(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(1,-1) & r(0,-1) \\ r(-1,1) & r(0,0) & r(-1,0) \\ r(0,1) & r(1,0) & r(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(1,0) \\ c(0,1) \\ c(1,1) \end{bmatrix}$$

biçimindedir<sup>(22)</sup>. Görüntü iyileştirmedeki performans kriteri olarak

$$HKO = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\hat{x}(i, j) - x(i, j))^2}{N.M}$$

kullanılmıştır.

Bir görüntünün sinyal oranı ne kadar çok ve gürültü miktarı ne kadar az ise bu görüntünün o kadar kaliteli bir görüntü olduğu söylenebilir. Bu nedenle Peak Sinyal Gürültü Oranı (peak signal to noise ration)

$$PSGO = 10 \cdot \log \left( \frac{255}{\sqrt{HKO}} \right) dB$$

formülüyle hesaplanır ve birimi decibel (dB)'dir. Gürültüden temizlenmiş bir görüntünün güvenilirliği HKO ve PSGO ile ölçülebilir. Onarılmış bir görüntüde HKO ne kadar küçük ve PSGO ne kadar büyük ise düzeltilen görüntü orijinaline o kadar yaklaşır<sup>(60)</sup>.

### 3.6 Görüntünün Onarılması İçin İndirgenen Güncelleştirilmiş Kalman Filtresi (İGKF)

Görüntünün skaler olarak raster biçimde taranması halinde Kalman filtresini elde etmek amacıyla durum vektörü

$$\mathbf{X}(m, n) = \begin{bmatrix} X(m, n), X(m-1, n), \dots, X(1, n) \\ ; X(N, n-1), \dots, X(1, n-1); \\ \vdots \\ ; X(N, n-M), \dots, X(m-M, n-M) \end{bmatrix}^T \quad (3.11)$$

biçiminde tanımlanır. Skaler taranmayla Kalman filtresi için  $X(m, n)$  durum vektörü,  $M(N+1)+1$  boyutludur. Burada  $M$ , ardışık modelin derecesi ve  $N$ , inceleme yapılan bölgenin genişliğidir. Latis üzerinde tüm noktalar (2.24) eşitliğine denk denklemlerde güncelleştirilmelidir. Bu dönüşümünden sonra durum denklemi

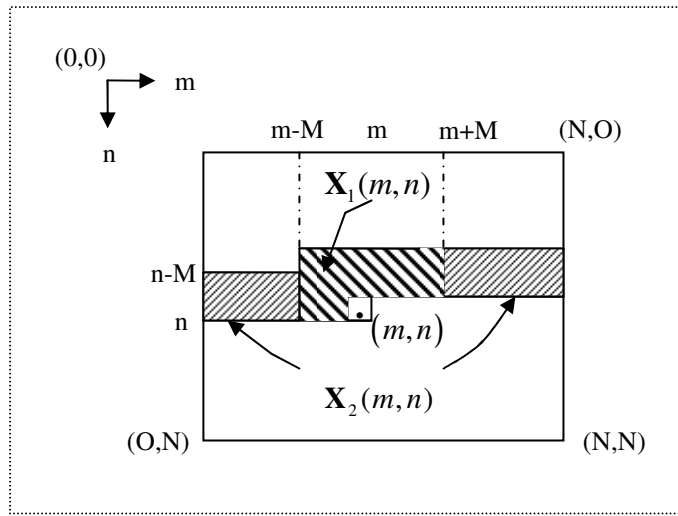
$$X(m, n) = X(m-1, n) + w(m, n) \quad (3.12)$$

olarak tanımlanır ve gözlem modeli ise (3.10) eşitliği ile ifade edilmiştir. Bu dönüşümden sonra, kolaylıkla  $\mathbf{X}$  vektörünün Kalman filtresi denklemleri elde edilir. Başlangıç koşulu olarak görüntünün üst kısmından ilk  $M(N+1)+1$  tane ve soldan da içeri doğru ilk  $M$  tane değişkenin değeri bilinmelidir. Her bir satır için  $N-M-1$  kez filtreleme yapılır<sup>(27)</sup>.

Filtreleme yaparken (3.12) denkleminin kullanılması, hesaplama miktarının çok olmasına ve çok büyük hafızaya ihtiyaç duyulmasına neden olacaktır. Örneğin, (3.8) eşitliğindeki gibi  $(M \times M)$ . derece sistem modelinde gözlem bölgesi  $N \gg M$  olmak üzere  $(N \times N)$ 'den oluşan latis bölgesindeki filtreleme için (2.23)'ten (2.27)'ye kadar olan eşitliklerdeki matris denklemlerinin boyutu yaklaşık olarak  $MN$ 'dir. Bu da hesaplama derecesinin yaklaşık  $M^3 N^3$  kadar olması demektir. Bunun yanı sıra modelin mekansal değişmezlik özelliği kullanılarak bu hesaplamaların derecesi yaklaşık olarak  $M^2 N^2$ 'ye düşürülebilir. Ayrıca bu hesaplamaları yapacak gelişmiş ve hızlı bir bilgisayara ihtiyaç vardır<sup>(27)</sup>.  $N \gg M$  olduğunda indirgenen güncelleştirilmiş süreç sayesinde hesaplamaların büyük bir kısmı azaltılır. Böylece genellikle sürecin başladığı  $(m, n)$  mekan noktasından uzaklığı kesin olarak belirlenen sınırlar içinde kalan durum vektörünün elemanlarını güncelleştirmek için

seçilir. Bu algoritmayla sonuca iyi bir yaklaşımda bulunulur.  $(m,n)$  mekan noktasındaki gözlemler etrafında bölge sınırlandırılmış olacağından, uzak noktaların güncelleştirilmesinin ihmali, sonuçları minimal olarak etkiler<sup>(3,4)</sup>.

$\mathfrak{R}_{\oplus}$  gösterge kümesi,  $c(k,l)$  için simetrik olmayan yarı düzlemi (NSHP) kısaca  $\mathbf{X}_1(m,n)$ 'in destek kümesini ifade eder.  $\delta_{\oplus}(m,n)$  ise  $\mathbf{X}(m,n)$  durum vektörünün destek kümesidir.



**Şekil 3.12** Bölünmüş Durum vektörü.

$M \times M$  boyutundaki karesel bölge üzerinde  $\{Y(m,n)\}$  gözlenir. Şekil 3.12'deki

$\mathbf{X}_1(m,n)$  için durum vektörü matematiksel olarak

$$\mathbf{X}_1(m,n) = \begin{bmatrix} X(m,n), X(m-1,n), \dots, X(m-M+1,n); \\ X(m+M+1,n-1), \dots, X(m-M+1,n-1); \\ \vdots \\ X(m+M+1,n-M), \dots, X(m-M+1,n-M) \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

biçiminde tanımlanır. Geri kalan bölge  $\mathbf{X}_2(m, n)$  üzerindedir. Buna göre durum vektörü

$$\mathbf{X}(m, n) = [\mathbf{X}_1^T(m, n), \mathbf{X}_2^T(m, n)]^T \quad (3.14)$$

biçimindedir. Böylece dinamik durum-uzay modeli ise

$$\mathbf{X}(m, n) = \mathbf{C}\mathbf{X}(m-1, n) + \mathbf{w}(m, n) \quad (3.15)$$

$$Y(m, n) = \mathbf{H}\mathbf{X}(m, n) + v(m, n) \quad (3.16)$$

şekilde ifade edilir. Burada  $\mathbf{C}$  sistem yayılma matrisidir.  $\mathbf{C}$  matrisi  $\mathbf{X}$ 'e benzer şekilde

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

biçiminde parçalanır.  $\mathbf{C}_{11}$  ve  $\mathbf{C}_{12}$  tüm  $\{c_{kl}\}$  terimlerin içerir ve  $\mathbf{C}$ 'nin geri kalan kısımları kaydırma dönüşümünü oluşturur. Bu durumda (3.15) eşitliği yeniden yazılırsa

$$\mathbf{X}_1(m, n) = \mathbf{C}_{11}\mathbf{X}_1(m-1, n) + \mathbf{w}_1(m, n) + \mathbf{C}_{12}\mathbf{X}_2(m-1, n) \quad (3.18)$$

olur.  $\mathbf{w}$ 'ler  $\mathbf{X}$ 'e benzer bölünmüştür. (3.18) eşitliği hesaplamalarında odak noktası olarak  $(m, n)$  noktasını alır.  $\mathbf{X}_2$  sadece önceden hesaplanan değerlerin kaydırılmasını gerektirir.

$\mathbf{w}(m,n) = [w(m,n), 0, \dots, 0]^T$  gürültü vektörüdür ve  $\mathbf{H} = (1, 0, \dots, 0)$  dir.  $\mathbf{H}$  matrisi,  $\mathbf{X}$  durum vektörüne benzer şekilde yeni bir gözlem denklemini alması için  $\mathbf{H} = (\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2)$ ,  $\mathbf{H}_2 = 0$  biçiminde parçalanır. Böylece yeni gözlem denklemi

$$Y(m,n) = \mathbf{H}_1 \mathbf{X}_1(m,n) + v(m,n) \quad (3.19)$$

olarak ifade edilir ve satırdan satıra  $\{Y(m,n)\}$  dizisinin tarandığı varsayımı altında Kalman filtresi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

Öngörü:

$$\mathbf{P}_b(m,n) = \mathbf{C} \mathbf{P}_a(m-1,n) \mathbf{C}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_w \mathbf{G}^T \quad (3.20)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{1b}(m,n) = \mathbf{C}_{11} \hat{\mathbf{X}}_{1a}(m-1,n) + \mathbf{C}_{12} \hat{\mathbf{X}}_{2a}(m-1,n) \quad (3.21)$$

Güncelleme:

$$\mathbf{K}_1(m,n) = \mathbf{P}_{11,b}(m,n) \mathbf{H}_1^T [\mathbf{H}_1 \mathbf{P}_{11,b}(m,n) \mathbf{H}_1^T + \sigma_v^2]^{-1} \quad (3.22)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{1a}(m,n) = \hat{\mathbf{X}}_{1b}(m,n) + \mathbf{K}_1(m,n) [Y(m,n) - \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{X}}_{1b}(m,n)] \quad (3.23)$$

$$\mathbf{P}_{11,a}(m,n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_1(m,n) \mathbf{H}_1^T] \mathbf{P}_{11,b}(m,n) \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{P}_{12,a}(m,n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_1(m,n) \mathbf{H}_1^T] \mathbf{P}_{12,b}(m,n) \quad (3.24b)$$

Burada  $\mathbf{Q}_w$  kovaryans matrisidir ve  $\mathbf{G} = \mathbf{I}$  'dır,  $a$  (after) indisi güncelleştirilmeden sonra ve  $b$  (before) indisi güncelleştirmeden önce işlem yapıldığını gösterir<sup>(4)</sup>. Diğer

bir deyişle,  $\hat{\mathbf{X}}_{1,b}(m,n)$ ,  $Y(m-1,n)$  gözlendiğinde (verildiğinde)  $\mathbf{X}$  durumunun en küçük varyanslı yansız tahmini gösterir.

Hata kovaryans matrisinin güncelleştirilmeden sonrası ve öncesine kadar olan eşitliklerde verilen denklemler, standart Kalman filtresi denklemleri üzerinde hesaplamalar yapılarak bulunur. Bu denklemleri daha iyi anlamak için matris notasyonundan skaler notasyona geri dönmek faydalı olur. Skaler olarak yazılan denklemlerde üstteki indis filtredeki adımı, argüman ise verinin görüntü üzerindeki yerini gösterir. Bu durumda indirgenen güncelleştirilmiş Kalman filtresi

$$\hat{X}_b^{(m,n)}(m,n) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}_{\oplus+}} c_{kl} \hat{X}_a^{(m-1,n)}(m-k, n-l) \quad (3.25)$$

ve (3.20)'de öngörülen tahmin hatası

$$R_b^{(m,n)}(m,n; k,l) = \sum_{op} c_{op} R_a^{(m-1,n)}(m-o, n-p; k,l), (k,l) \in \mathcal{D}_{\oplus+}^{(m,n)} \quad (3.26)$$

$$R_b^{(m,n)}(m,n; m,n) = \sum_{kl} c_{kl} R_b^{(m,n)}(m,n; m-k, n-l) + \sigma_w^2 \quad (3.27)$$

olarak ifade edilir.  $\mathcal{D}_{\oplus+}^{(m,n)}$ ,  $\mathbf{X}(m,n)$  durum vektörünün destek bölgesidir. (3.22)'deki denklemin özdeşi

$$K^{(m,n)}(i,j) = \frac{R_b^{(m,n)}(m,n; m-i, n-j)}{R_b^{(m,n)}(m,n; m,n) + \sigma_v^2}, (i,j) \in \mathfrak{R}_{\oplus+}^{(m,n)} \quad (3.28)$$

şeklinde ifade edilir ve (3.23)'in benzeri de



$$\hat{X}_a^{(m,n)}(i, j) = \hat{X}_b^{(m,n)}(i, j) + K^{(m,n)}(m-i, n-j) \left[ Y(m, n) - \hat{X}_b^{(m,n)}(m, n) \right],$$

$$(i, j) \in \mathfrak{R}_{\oplus+} \quad (3.29)$$

$$R_a^{(m,n)}(i, j; k, l) = R_b^{(m,n)}(i, j; k, l) - K^{(m,n)}(m-i; n-j) R_b^{(m,n)}(m, n; k, l),$$

$$(i, j) \in \mathfrak{R}_{\oplus+}^{(m,n)}, (k, l) \in \mathfrak{D}_{\oplus+}^{(m,n)} \quad (3.30)$$

biçimindedir. (3.30)'daki denklem hem (3.24a) hem de (3.24b) eşitlikleri gibi ifade edilir<sup>(4)</sup>.

İGKF denklemlerinin güncelleme (update) işlemi optimal olmasına rağmen öngörü (preduction) işlemleri, sadece en yakın komşuları üzerinden olduğu için zayıf optimaldir. Güçlü optimalliğin olması için öngörü ve güncelleme aşamalarının her ikisinin de optimal olması gerekir. Güçlü optimalliği sağlayabilmek için aşağıdaki işlemler uygulanır<sup>(3,4)</sup>:

$$E \left[ X_1(m, n) | \hat{X}_1(m, n) \right] \neq \hat{X}_1(m, n)$$

olduğundan öngörü zayıf optimaldir. Optimal tahmin vektörü

$$\mathbf{b}(m, n) = E \left[ \hat{X}_1(m, n) \hat{X}_1^T(m, n) \right]^{-1} E \left[ \hat{X}_1(m+1, n) \hat{X}_1^T(m, n) \right]$$

hesaplanarak güçlü optimalliği

$$\begin{aligned} \hat{X}_1(m+1, n) &= \mathbf{b}^T(m, n) \hat{X}_1(m, n) \\ &= \sum_{\mathfrak{R}_{\oplus+}} b_{k,l}^{(m,n)} \hat{X}^{(m,n)}(m-k, n-l) \end{aligned}$$

biçiminde sağlayabiliriz. Burada  $b_{k,l}^{(m,n)}$ ,  $\mathbf{b}(m,n)$ 'nin elemanlarıdır. İşlemdeki hesaplamaların derecesi aşağıda verilmiştir.

<u>Denklem No</u>	<u>Yapılan İşlemin Hesaplama Derecesi</u>
(3.25)	$O(M^2)$ , $M$ . derece NSHP model için her $(k,l)$ için $O(M^2)$ işlem içerir.
$\mathcal{D}_{\oplus}^{(m,n)}$	$O(MN)$ tane eleman içerir.
(3.26)	$O(M^3N)$ tane işlem yapılır.
(3.27), (3.28), (3.29)	$O(M^2)$ tane işlem gerektirir.
(3.30)	$(i,j) \in \mathfrak{R}_{\oplus}^{(m,n)}$ ile her bir $(i,j),(k,l)$ çifti için (3.27)'deki gibi $O(M^3N)$ hesaplama gerektirir.

### 3.6.1 En Küçük Hata Kareler Yöntemiyle Mekansal Bağımlılık Katsayılarının Tahmini

Önceki bölümde (3.8) eşitliği ile verilen skaler mekansal otoregresif süreci, (3.9) ve (3.10) eşitliklerine benzer olarak

$$X(m,n) = C_1 X_1(m-1,n) + w(m,n) \quad (3.31)$$

ve  $Y_1(m-1,n) = X_1(m-1,n) + v_1(m,n)$  biçiminde durum uzay modeli olarak ifade edilebilir. Burada  $Y_1$ 'in parçalanması, Şekil 3.12'de gösterildiği gibi  $X_1$ 'in

parçalanmasına benzerdir. Daha sonra  $Y(m, n)$  gözlemleri kullanılarak ( $Q_v$  bilindiğinde) (3.31) eşitliği ile verilen denkleme EKK metodu uygulanarak  $c_{kl}$  mekansal bağımlılık katsayılarının tahmin edicisi bulunur.

$$\begin{aligned} E[w(m, n)^2] &= E[X(m, n) - \mathbf{c}^T \mathbf{X}_1(m-1, n)]^2 \\ &= E[Y(m, n) - v(m, n) - \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_1(m-1, n) + \mathbf{c}^T \mathbf{v}_1(m-1, n)]^2 \end{aligned}$$

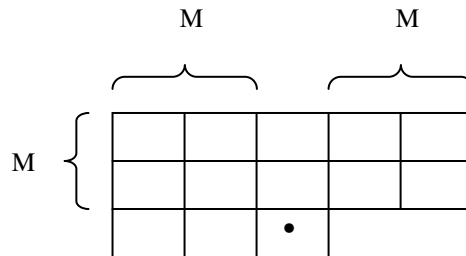
olmak üzere

$$J = \sum_{(m,n)} [Y(m, n) - v(m, n) - \mathbf{c}^T \mathbf{Y}_1(m-1, n) + \mathbf{c}^T \mathbf{v}_1(m-1, n)]^2$$

eşitliğinin sağ tarafının  $\mathbf{c}$ 'ye göre gradientinin sifıra eşitlenmesiyle gürültünün kareleri toplamı olan  $\sum_i w_i^2$  en küçük olacak şekilde  $c_{kl}$  mekansal bağımlılık katsayılarının tahmin edicisi

$$\hat{\theta} = \left( \sum_w \mathbf{Y}_1(m-1, n) \mathbf{Y}_1^T(m-1, n) - N_w \cdot I \sigma_v^2 \right)^{-1} \left( \sum_w Y(m, n) \mathbf{Y}_1(m-1, n) \right) \quad (3.32)$$

olarak bulunur. Burada  $\sigma_v^2$ ,  $v(m, n)$  beyaz gürültü sürecinin varyansıdır. Ayrıca  $N_w$ ,  $W$  bölgesindeki gözenek sayısıdır ve  $\hat{\theta}$  yansız tahmin edicidir<sup>(24)</sup>.



Şekil 3.13 Otoregresif sürecin derecesi.

Mekansal sürecin Şekil 3.13'te verilen derecesine göre parametre vektörü

$$\boldsymbol{\theta} = \left[ c_{-M,-M}, \dots, c_{M,-M}, c_{-M,-M+1}, \dots, c_{M,-M+1}, \dots, c_{-M,0}, \dots, c_{-1,0} \right] \quad (3.33)$$

ve satır satır taramayla gözlem vektörü

$$\mathbf{Y}_1(m-1, n) = \left[ Y(m-M, n-M), \dots, Y(m+M, n-M), \dots, Y(m-M, n-M+1), \dots, \right. \\ \left. Y(m+M, n-M+1), \dots, Y(m-M, n), \dots, Y(m-1, n) \right] \quad (3.34)$$

olarak tanımlanır. Bu tarama veya mekansal noktaların tüm sıralaması latis üzerinde geçmiş-şimdiki-gelecek ilişkisine dayanmaktadır<sup>(52,61)</sup>

### 3.6.2 Dayanıklı İndirgenen Güncelleştirilmiş Kalman Filtresi (DİGKF)

Bu kesimde, iki boyutlu İGKF'nin dayanıklı bir uyarlaması verilecektir. DİGKF, Gaussian dağılımından gürültünün dağılım sapmalarından dolayı bozulan görüntünün onarımı için kullanılabilir.

Birçok sinyal işleme uygulamalarında, görüntüyü bozan gürültüleri tespit edip orijinal görüntüye en yakın yeni bir görüntü elde etmek istenir. Bunun için birçok araştırmacı, geçen on yılda görüntü onarımının problemine oldukça büyük gayret sarf etmiştir<sup>(62)</sup>.

Gürültünün doğasına bağlı olarak görüntü onarımı için çeşitli algoritmalar önerilir. Woods ve arkadaşları<sup>(3,4)</sup> beyaz Gaussian gürültüsü tarafından kirlenen görüntünün onarılması için İGKF'yi ve iki boyutlu Kalman filtresine etkili bir yaklaşımı önerir. Ayrıca gerçek görüntüdeki komşu pikseller arasındaki mekansal korelasyon (mekansal benzerlik) Gauss-Markov modeli ile gösterilmiştir. Beyaz

Gaussian gürültü süreci olan  $w(m,n)$  sıfır ortalamalı ve varyansı  $\sigma_w^2$  değişkeni ile ifade edilen otoregresif bir süreç olarak (3.8)'de ifade edildiği gibi modellenmişti.

Kalman filtresinin optimalliği, gözlem gürültüsünün ve durumun Gaussian (Normal) dağılımına sahip olduğu varsayımına dayanır. Eğer bu varsayım sağlanamazsa beklenmedik sayıda büyük gözlemler (aykırı değerler) ortaya çıkar. Bu durum da İGKF'nin performansını düşürür. (3.8) denkleminde gözlem gürültüsü  $v_b(m,n)$ 'nin  $\varepsilon$ -kirletilmiş Gaussian dağılımına sahip olduğu varsayımı yapılırsa uç değer ortaya çıkar<sup>(36)</sup>.

$v_a(m,n)$ ,  $v_b(m,n)$  bağımsız Gaussian gürültüleri sırasıyla  $\sigma_a^2$  ve  $\sigma_b^2$  varyanslarına sahiptir.  $\sigma_b^2 \gg \sigma_a^2$  olmak üzere

$$v(m,n) = \begin{cases} v_a(m,n) & 1-\varepsilon \text{ olasılıkla} \\ v_b(m,n) & \varepsilon \text{ olasılıkla} \end{cases} \quad (3.35)$$

dir. Burada  $\varepsilon$  sifıra yakın pozitif küçük bir sayıdır.  $v_b(m,n)$  tuz biber gürültüsü olarak adlandırılır ve verideki uç değerlerin kaynağı olarak görülür. Dolayısıyla  $Y(m,n) - \hat{X}_b^{(m,n)}(m,n)$  kestirim (prediction) hatası uç değer içerir. Bu uç değer (3.29) denkleminde yer alacağı için  $\hat{X}_a^{(m,n)}(i,j)$  tahmini direkt olarak bu uç değerden etkilenir ve görüntü onarma sürecinin performansını düşürebilir. Bu performans düşüklüğünden (uç değerlerin etkisinden) kurtulabilmek için Kesim 2.3'te anlatılan dayanıklı istatistiksel yöntemlerden faydalanılacaktır. Çizelge 2.1'de yer alan etki fonksiyonları kullanılarak İGKF denklemlerinde durum tahmini dayanıklı olarak elde edilir. Bunun için durum denklemi

$$\hat{X}_a^{(m,n)}(i,j) = \hat{X}_b^{(m,n)}(i,j) + K^{(m,n)}(m-i,n-j)t^{-1}.\psi\left(t\left[Y(m,n) - \hat{X}_b^{(m,n)}(m,n)\right]\right),$$

$$(i,j) \in \mathfrak{R}_{\oplus+} \quad (3.36)$$

biçiminde güncellenir. Burada  $t$ , Masreliez ve Martin<sup>(29)</sup>,de tanımlanan ölçeklendirilmiş dönüşümdür.  $\psi$  ise Kesim 2.3, Çizelge 2.1’de tanımlanan etki fonksiyonudur<sup>(36)</sup>.

### 3.7 Uygulama

Bu kesimde Matlab 7.1 bilgisayar programının alt klasöründe bulunan ve Şekil 3.14’te verilen kameraman görüntüsü kullanılarak daha önceki bölümlerde verilen teorik bilgilerin uygulamaları yapılacaktır.

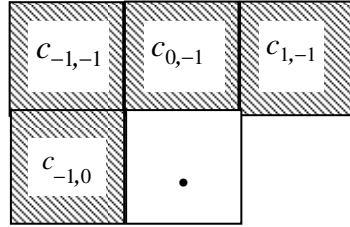


**Şekil 3.14** Orijinal görüntü (Kameraman).

Kameraman görüntüsü  $256 \times 256$  boyutlarında olup 8 bit (256 gri seviyeli) kuantalanmıştır. Pek çok çalışmada kullanılan bu görüntü orijinal görüntü olarak

kabul edilip bu görüntünün mekansal bağımlılık parametrelerinin Kesim 3.6.1’de verilen yöntemle tahmin edilmesi amaçlanmıştır.

(3.8)-(3.10) eşitliği ile verilen modellere uygun olarak  $v(i, j) \sim N(0, 100)$  ve  $w(i, j) \sim N(0, 125)$  olarak seçilmiştir. Ayrıca otoregresif modelin derecesi  $1 \times 1$  olarak seçilmiş ve homojen, tek yanlı isotropik mekansal bağımlılığın olduğu varsayılmıştır. (3.33) eşitliği ile verilen  $\theta$  vektörü, otoregresif sürecin derecesi  $1 \times 1$  olduğundan  $\theta = [c_{-1,-1}, c_{0,-1}, c_{1,-1}, c_{-1,0}]$  olarak ele alınmıştır.



**Şekil 3.15** Mekansal bağımlılık katsayıları.

Şekil 3.15’te mekansal bağımlılık katsayılarının latis üzerindeki yerleri gösterilmiştir. Şekil 3.14’te verilen orijinal görüntü ve seçilen  $\sigma_v^2=100$  kullanılarak (3.32) eşitliği ile verilen formülden  $\hat{\theta}$  hesaplandığında bulunan sonuçlar Çizelge 3.3’te verilmiştir.

**Çizelge 3.3** Mekansal bağımlılık katsayıları ve tahminleri.

Bağımlılık Katsayıları $\theta$	$\hat{\theta}$
$c_{-1,-1}$	0.2105
$c_{0,-1}$	0.5135
$c_{1,-1}$	0.1179
$c_{-1,0}$	0.4945

Orijinal görüntü  $\varepsilon$ -kirletilmiş gürültüyle bozulmuştur ve  $\varepsilon, \sigma_a$  ve  $\sigma_b$  sırasıyla 0.1, 10 ve 100 seçilmiştir. Bozuk görüntü Şekil 3.16'daki gibi elde edilmiştir.



**Şekil 3.16** Bozuk görüntü.

Çizelge 3.3'te verilen mekansal bağımlılık katsayıları ve Kesim 3.6'da verilen İGKF denklemleri kullanılarak görüntü onarıldığında yeni görüntü Şekil 3.17 biçiminde elde edilmiştir. HKO, 345 olarak hesaplanmıştır.





**Şekil 3.17** İGKF ile onarılmış görüntü.

Şekil 3.16 ile verilen bozuk görüntüye (3.36) denklemini kullanmak suretiyle DİGKF denklemleri uygulanarak onarma işlemi yapıldığında ise Şekil 3.18 ile verilen görüntü elde edilmiştir.



**Şekil 3.18** Dayanıklı İGKF ile onarılmış görüntü

Kesim 2.3.1’de verilen etki fonksiyonlarından Huber’in etki fonksiyonu kullanılmış ve deneme yanılma yolu ile  $k = 20$  olarak seçilmiştir. HKO, 82 olarak

hesaplanmıştır. Diğer kesme fonksiyonları kullanılarak yapılan simülasyon çalışmalarında da benzer sonuçlar elde edilmiştir. (3.36) eşitliğinde yer alan dönüşüm ölçeği  $t = 0.286$  dır.

Uygulama kısmındaki hesaplamalar için Matlab 7.1 paket programından yararlanılmıştır.

#### 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada önce istatistik teorisinde yer alan bazı tanımlar verilmiş ve parametre tahmini, tahmin edicilerde aranan özellikler, tahmin edici bulma yöntemleri üzerinde durulmuştur. Daha sonra mekansal süreçlerin teorisi ele alınmıştır. Mekansal süreçlerin analizinde kullanılan otoregresif modeller, olgu ve olayların mekansal ilişkisini ortaya koymakta ve öngörüler yapılmasına imkan vermektedir. Çalışmada, mekansal Markov zincirleri yaklaşımı ile mekanlar arası ilişkinin yapısal dinamiğini ortaya koyan modeller ve tahmin yöntemleri sunulmuştur.

Kesikli mekan indeksli iki boyutlu mekansal süreçlerin durum-uzay modelleri ile incelenmesine imkan veren bir yaklaşım sunulmuştur. Durum vektörünün ve mekansal bağımlılık katsayılarının tahmini için Kalman filtresi tahmin yönteminin uygun hale getirilmesi tartışılmıştır.

Latis tipi mekan noktaları dışındaki hallerde ele alınabilecek mekan süreçlerinin durum-uzay modelleriyle analizi ilerideki çalışmaların konusu olacaktır. Öte yandan sürekli mekan parametrelili mekansal süreçlerinin aynı yaklaşımlarla analizi sunulan sonuçlar ışığında kolaylıkla ele alınabilecektir. Fakat bu durumda istatistiksel hesaplama problemleriyle karşılaşılması söz konusu olup, bu meseleler ileride ele alınabilecek konular arasında görülmektedir.

Uygulamada durum vektörünün tahmini olarak görüntü onarma (iyileştirme) üzerinde durulmuştur.

## KAYNAKLAR

1. F. Öztürk ve L. Özbek, Matematiksel Modelleme ve Simülasyon, Gazi Kitabevi, Ankara, 2004.
2. Ö. L. Gebizlioğlu ve S. Yurt, Dinamik Sistem Modelleri ile Mekansal Süreçler Analizi III. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu Bildirileri, Uludağ Üniv. Güçlendirme Vakfı Yayın, No.131, 1(1997).
3. J. W. Woods and C. H. Radewan, IEEE Transactions on Information Theory, Vol.IT-23, No.4, 473 (1977).
4. J. W. Woods and V. K. Ingle, IEEE Transactions on ASSP, Vol.29, No.2,188(1981).
5. D. Angwin and H. Kaufman, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol.16, 21 (1989).
6. B. Suresh and B. Shenoi, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.Cas.28, No.4, (1981).
7. H. D. Cheng and J. Y. Zhang, Kalman Filter for Image Restoration and Its Vlsi Implementation, Pattern Recognition: Architectures, World Scientific Publishing Co., 1991.
8. Y. Akdi, Matematiksel İstatistiğe Giriş, Bıçaklar Kitabevi, Ankara, 2005.
9. F. Öztürk, Y. Akdi, H. Aydoğdu ve İ. Karabulut, Parametre Tahmini ve Hipotez Testi, Bıçaklar Kitabevi, Ankara, 2006.
10. B. D. Ripley, Spatial Statistics, John Wiley & Sons, 1981.
11. A. D. Cliff and J. K. Ord, Spatial Processes, Pion Limited, 1981.

12. N. Cressie, Statistics For Spatial Data, John Wiley & Sons,1993.
13. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, Introduction to the Theory of Random Processes, Kieve State Univ., W. B. Saunders Company, 1969.
14. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, Introduction to the Theory of Random Processes, Translated by Scripta Technica, Inc. W. B. Saunders Company, 1965.
15. J. Fox, Robust Regression, <http://cran.r-project.org/doc/contrib/Fox-Companion/appendix--bust-regression.pdf> (Erişim tarihi:27.02.2009), Appendix to An R and S-PLUS Companion to Applied Regression, 2002.
16. J. Fox, Applied Regression Analysis, Linear Models and Related Methods, Sage Publications, 1997.
17. L. Ljung, T. Söderström, Theory and Practice of Recursive Identification, MIT press, London, 1983.
18. S. Yurt, DİE, Araştırma Sempozyumu Bildirileri, 223 (1997).
19. Ö. L. Gebizlioğlu, F. A. Alioğlu and S. Y. Öncel, Estimation of Spatial Dependence in Image Restoration, Inauqural Euro Conference of The Eastern Mediterranean Region, Proceedings of The International Biometric Society, Athens Greece, Books of Abstract, pp.32, 2001.
20. R. J. Muirhead, Aspects of Multivariate Statistical Theory, John Wiley & Sons, Inc, 1982.
21. C. S. Won and R. M. Gray, Stochastic Image Processing: Transmission, Processing and Storage, Springer, 2004.
22. J. W. Woods, Multidimensional Signal, Image, and Video Processing and Coding, Illustrated, Academic Press, 2006.

23. A. Kızılkaya, Sayısal Görüntü İşleme Ders Notları, Pamukkale Üniv. Müh. Fak. Elek. Elektronik Müh. Bölümü, 2008.
24. H. Kaufman, J. W. Woods, S. Dravida and M. Tekalp, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-28, No.7, July (1983).
25. M. R. Azimi-Sadjadi and S. Bannour, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.38, No.9, September (1991).
26. S. Y. Öncel, Mekansal Süreçlerde Kalman Filtresiyle Parametre Tahmini, Gazi Üniv. İstatistik Konferans Bildiriler Kitabı, sf.167-174, 1998.
27. S. Y. Öncel, Durum-Uzay Modelleriyle Mekansal Süreçler Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 1997.
28. S. Y. Öncel, Ö. L. Gebizlioğlu and F. A. Alioğlu, Spatial Dependency Parameter Estimation Via Robust Extended Kalman Filtering, International Congress on Characterizations Modelling and Applications, page 96-99, Antalya/TURKEY, 2001.
29. C. J. Masreliez and R. D. Martin, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-22, No.3, June (1977).
30. R. D. Martin, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol.IT-18, 596(1972).
31. R. D. Martin and C. J. Masreliez, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol.IT-21, (1975).
32. R. R. Wilcox, Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing, Second Edition, Elsevier Academic Pres, 2005.
33. F. R. Hampel, E. M. Ronchetti, P. J. Rousseeuw and W. A. Stahel, Robust Statistics, New York, John Wiley, 1986.

34. R. Kashyap and K. Eom, Robust Image Modelling Techniques with an Image Resmtion Application, IEEE Trans. ASSP., Aug. 1988.
35. S. A. Kassam and H.V. Poor, Robust Techniques for Signal Processing, Proc. IEEE March 1985.
36. A. E. Çetin and A. M. Tekalp, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.37, No.1, 155 (1990).
37. A. E. Çetin and A. M. Tekalp, Robust Identification and Retoration of Images, IEEE International Conference on Circuits and Systems, Portland, Oregon,1989.
38. F. A. Aliev, S. Y. Öncel and Ö. L. Gebizlioğlu, Robust Techniques for Kalman Filtering: Parameter Estimation and Image Restoration, Fourth Biennial International Conference on Statistics, Probability and Related Areas, June 14-16, 2002 Northern Illinois University in DeKalb, Illinois, 2002.
39. H. Belaifa and H. Schwartz, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.40, No.10, (1992).
40. Y. K. Chee and Y. C. Soh, Acoustics, Speech, and Signal Processing, Proceedings, (ICASSP'01), IEEE International Conference on Vol.3, 1825 (2001).
41. C. W. Therrien, T. F. Quatieri, D. E. Dudgeon, Proceedings of the IEEE Vol.74, 532 (1986).
42. R. C. Gonzalez, Richard E. Woods, Steven L. Eddins, Digital Image Processing Using MATLAB, Pearson Prentice Hall, 2003.
43. F. Öztürk, Matematiksel İstatistik, AÜFF Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No.10, Ankara, 1993.

44. M. L. Tiku, W.Y. Tan, N. Balakrishnan, Robust Inference, New York: Marcel Dekker, Inc., 1986.
45. P. J. Huber, Robust Statistics, New York, Wiley, 1981.
46. P. J. Huber, Ann. Math. Statist., Vol.35, 73 (1964).
47. D. Andrews, Techometrics, Vol.16, No.4 253(1974).
48. F. Akdeniz ve F. Öztürk, Lineer Modeller, AÜFF Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No.38, Ankara, 1996.
49. L. Özbek, Gazi Üniv. Fen Bilimleri Ens. Dergisi, Cilt **13**, No.1, s.113 (2000).
50. L. Özbek, Kesikli Zaman Durum-Uzay Modelleri İndirgemeli Tahmin ve Yakınsama Problemleri, Doktora Tezi, Ankara Üniv., Ankara, 1998.
51. A. V. Skorokhod, V. S. Korolyuk, N. J. Portenko and A. F. Turbin, Theory of Probability and Mathematical Statistics Handbook, Nauka, Moskow, (In Russian), 1985.
52. S. Y. Öncel, Ö. L. Gebizlioğlu ve S. İ. Yörübulut, İki Boyutlu Mekansal Otoresif Modelin Bağımlılık Parametrelerinin Tahmin Edilmesi, AÜFF İstatistik Bölümü V. İstatistik Günleri Sempozyumu Bildiriler Kitabı, Poster, s.387-393, Antalya, 2006.
53. F. Jeng and J. W. Woods, On The Relationship of The Markov Mesh to The Nshp Markov Chain, Pattern Recognition Letters, No.4, pp.273-279, 1987.
54. S. İ. Yörübulut ve S. Y. Öncel, Mekansal Veri Analizi ve Bir Uygulama, 5. İstatistik Günleri Sempozyumu Bildiriler Kitabı, Poster, syf.379-386, Antalya, Mayıs 2006.



55. G. Aubert and Pierre Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and The Calculus of Variations*, second Edition, Springer 2006.
56. K. Özkan, *Düşük Çözünürlüklü Görüntülerden Yüksek Çözünürlüklü Görüntü Elde Etme*, Doktora Tezi, Osmangazi Üniv., Eskişehir, 2007.
57. R. M. Haralick and L. G. Shapiro, *Computer and Robot Vision*, Addison Wesley Publishing Co., USA, 1993.
58. Ö. Akbulut, *Ötelemiş Çoklu Görüntülerin Restorasyonu*, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2006.
59. Y. Becerikli, *Toplamsal Gauss Gürültülü Görüntülerin Kalman Süzgeci ile Onarımı*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniv., İstanbul, 1994.
60. S. Qureshi, *Image Filtering*, In *Embedded Image Processing on The TMS320C6000™DSP*, Springer, page 103-209, 2005.
61. A. M. Tekalp, H. Kaufman and J. W. Woods, *IEEE Transactions On Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol.ASSP-33, No.2, (1985).
62. A. N. Venatsanopoulos, *Digital Image Processing and Analysis*, in *Signal Processing*, editors: J. L. Lacoume, T. S. Durrani, R. Stora, North Holland, Amsterdam, 1987.