Müzeyyen ÖZHAVZALI

Yüksek Lisans Tezi

KÜ 2009

T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MÜZEYYEN ÖZHAVZALI

TEMMUZ 2009

T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

MÜZEYYEN ÖZHAVZALI

TEMMUZ 2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürünün onayı.

Doç. Dr. Burak BİRGÖREN

10/07/2009

Müdür V.

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr.Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN

Danışman

Jüri Üyeleri

Doç.Dr. Fatma Taşdelen YEŞİLDAL

Doç.Dr. Gülen Başcanbaz TUNCA

Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ

LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ÖZHAVZALI, Müzeyyen

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali Olgun

Temmuz 2009, 72 sayfa

Bu tez, bir genelleştirilmiş lineer pozitif operatörün yaklaşım özelliklerini incelemek için üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde lineer pozitif operatörlerle ilgili bazı temel kavramlar ve Korovkin teoremi verilmiştir. Üçüncü bölümde ise doğurucu fonksiyon içeren tek değişkenli lineer pozitif bir operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiş, merkez momentleri bulunmuş, süreklilik modülü ile yaklaşım hızı elde edilmiştir. Ayrıca, operatörlerin ağırlıklı yaklaşım özellikleri elde edilmiştir. Son olarak, genelleştirilmiş operatörlerin ikinci momentinin özel çözümü olan diferansiyel denklemi elde edilmiştir. Son bölümde, doğurucu fonksiyon içeren iki değişkenli modifiye Kantorovich tipli lineer pozitif bir operatör tanımlanmış ve bu operatörün yaklaşım özelliklerine bakılmıştır. Tezin bu bölümü orijinal olup yayınlanması için sunulma aşamasındadır.

Anahtar Kelimeler: Lineer Pozitif Operatör Dizisi, Korovkin Teoremi, Ağırlıklı Korovkin Tipli Teorem, Süreklilik Modülü, Lipschitz Tipli Maksimal Fonksiyonlar, Genelleştirilmiş Lineer Pozitif Operatörler, İki Değişkenli Modifiye Kantorovich Operatörleri, Yaklaşım Özellikleri.

ABSTRACT

APPROXIMATIONS PROPERTIES OF GENERALIZED OF LINEAR POSITIVE OPERATORS

ÖZHAVZALI, Müzeyyen
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor : Asist. Prof. Dr. Ali Olgun
July 2009, 72 pages

This thesis consists of three chapters in order to investigate the approximation properties of a generalized of linear positive operators. First chapter is devoted to introduction. In the second chapter, some fundamental concepts related to linear positive operators and Korovkin's theorem are given. In the third chapter, a generalization of positive linear operator is introduced and its Korovkin type approximation properties are obtained. The rate of convergence of this generalization is also obtained by means of modulus of continuity and Lipschitz type maximal functions. Moreover weighted approximation properties for the operators defined in this thesis. Finally, a differential equation is obtained so that the second moment of these generalization operators is a particular solution of it. In the last chapter a bivariate modified Kantorovich type linear positive operator is defined and its approximation properties is investigated. This part of this thesis is original and is ready for submission for possible publication.

Key Words: Sequence of Pozitive Linear Operators, Korovkin Theorem, Weighted Korovkin Type Theorem, Modulus of Continuity, Lipschitz Type Maximal Functions, Linear Pozitive Operators, Generalization of Linear Pozitive Operators, Bivariate Variables of Modified Kantorovich Operators, Applications Properties.

Kızım İlayda, Oğlum Burak Can ve Eşime…

Tezimin hazırlanması esnasında her türlü yardımını esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, bilimsel potansiyelini sonuna kadar bizlerin hizmetinde kullanan, tez yöneticisi hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali Olgun'a, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm Matematik Bölümü Hocalarıma çok teşekkür ederim.

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı.

$\|f\|_{C[a,b]}$: $C[a,b]$ uzayında norm.

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$: f_n fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması.

$L(f;x)$: L lineer pozitif operatörün f fonksiyonuna uygulanması.

$w(f;\delta)$: f fonksiyonunun süreklilik modülü.

$Lip_M\ \alpha$: M sabitiyle α. mertebeden Lipschitz sınıfı.

$L_n(f;x)$: Lineer pozitif operatörler dizisi.

$B_\rho[0,\infty)$: $|f(x)| \leq M_f \rho(x)$ şartını sağlayan tüm fonksiyonların uzayı.

$C_\rho[0,\infty)$: B_ρ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonların uzayı.

$C_\rho^0[0,\infty)$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\rho(x)}$ sonlu değeri var olan C_ρ'nin elemanı olan f

fonksiyonlarının alt uzayı.

$\|f\|_\rho = \sup\limits_{x\geq 0} \dfrac{|f(x)|}{\rho(x)}$: $C_\rho^0[0,\infty)$ uzayında norm.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, lineer pozitif operatör dizileri aracılığı ile sürekli fonksiyonların yaklaşım teorilerinde aktif olarak kullanılmaktadır.

Lineer pozitif operatörler ile yaklaşım konusunda temel, ünlü Korovkin teoremidir. Bu operatörlerin yaklaşım hızlarını ölçmek için birçok çalışmalar yapılmıştır. Bunların bazıları; süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar kullanılarak ölçülen yaklaşım hızlarıdır.

Ayrıca, $[0,\infty)$ aralığında ağırlıklı yaklaşım özellikleri de incelenebilmektedir. Yine bazı hata tahminleri ve olasılık teorisinde momentlerle ilgili bazı yararlı sonuçlar yaklaşım teorisi yardımıyla elde edilebilmektedir. Benzer sonuçlar türevler yardımıyla da elde edilebilmektedir.

Doğurucu fonksiyonlar da son yıllarda Lineer pozitif operatörlerde yaygın olarak kullanılmakta ve oldukça kullanışlı sonuçlar elde edilebilmektedir.

Bu tezin amacı, Doğurucu fonksiyon içeren Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Özelliklerini bu bahsedilen konu çerçevesinde detaylı bir şekilde incelemektir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu çalışmada ilk olarak temel kaynak Doğru[(1)] nun çalışması ele alınmıştır. Bu kaynak içerisinde geçen konular verilen diğer kaynaklar yardımıyla açılacak ve konunun derinlemesine irdelenmesi yapılacaktır. Daha sonra Taşdelen, Erençin[(2)] ve Özarslan ve arkadaşları[(3)] makaleleri birleştirilerek orijinal bir çalışma çıkarılmaya çalışılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Çalışmadaki genel amaç doğurucu fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özelliklerinin incelemektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.1.1: $N \neq \emptyset$ bir cümle ve R reel sayılar cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N 'ye R üzerinde *lineer uzay* veya *vektör uzayı* denir.

(i) $N,+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

A1) $\forall x,y \in N$ için $x+y \in N$ dir.

A2) $\forall x,y,z \in N$ için $(x+y)+z = x+(y+z)$ dir.

A3) $\forall x \in N$ için $x+\theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in N$ vardır.

A4) $\forall x \in N$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x \in N$ vardır.

A5) $\forall x,y \in N$ için $x+y = y+x$ dir.

(ii) $\forall x,y \in N$ ve için $\alpha,\beta \in R,$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

B1) $\alpha x \in N$ dir.

B2) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

B3) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$ dir.

B4) $\alpha\beta\ x = \alpha(x\beta)$ dir.

B5) $1x = x$ dir. Burada $1,R$ nin birim elemanıdır.

Yukarıdaki B3 şartındaki $+$ sembolü birinci tarafta R deki toplamayı; ikinci tarafta ise N deki toplamayı belirtmektedir. B4'deki çarpma işlemleri de aynı anlamdadır.

Tanıma dikkat edildiğinde lineer uzay, N cümlesi ve sırasıyla (i) ve (ii) şartlarını sağlayan toplama ve skalerle çarpma dönüşümlerinden ibarettir.

Tanım 2.1.2: N bir lineer uzay olsun. $\| \ \| : N \to 0,\infty$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için;

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \ \|$ fonksiyonuna N *üzerinde norm* denir. Eğer bir Lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya *Normlu uzay* denir.

Teorem 2.1.1: (Bolzano-Weiestrass Teoremi) IR, reel sayılar kümesinin, sınırlı ve sonsuz elemana sahip her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

Tanım 2.1.3: $C[a,b]$ sonlu $[a,b]$ aralığında tanımlanmış ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonlar uzayıdır.

Weierstrass teoremi gereğince göre bu uzaydan olan her bir f fonksiyonu için sonlu bir $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$ sayısı vardır, üstelik bu bir normdur. Bunu gösterelim.

i) $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\ge 0$

ii) Eğer f uzayın sıfırı ise yani $[a,b]$ aralığında $f=0$ ise o zaman bu fonksiyonun maksimumu aynı aralıkta sıfırdır. Diğer yandan eğer $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|=0$ ise o zaman $f=0$ olur.

iii) a keyfi bir reel sayı olmak üzere

$$\max_{a\le x\le b}|a\,f(x)|=|a|\max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

iv) f ve g $[a,b]$ de sürekli iki fonksiyon olmak üzere $\forall x\in[a,b]$ için

$$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\max_{a\le x\le b}|f(x)+g(x)| &\le \max_{a\le x\le b}\left(|f(x)|+|g(x)|\right)\\ &\le \max_{a\le x\le b}|f(x)|+\max_{a\le x\le b}|g(x)|\end{aligned}$$

dir, bu da $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$ ’in norm aksiyomlarını gerçeklediğini gösterir.

$C[a,b]$ uzayında norm;

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a\le x\le b} |f(x)| \qquad (2.1.1)$$

olarak tanımlanır.

Bu uzayda yakınsaklığın düzgün yakınsaklık olduğu da gösterilebilir:

Kabul edelim ki $C[a,b]$ de olan bir $f_n(x)$ fonksiyonlar dizisi $[a,b]$ aralığında $f(x)$ e düzgün yakınsasın.

Bu taktirde keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N = N(\varepsilon)$ bulunur ki $\forall n > N$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği $\forall x \in [a,b]$ için sağlanır.

$f(x) \in C[a,b]$ olsun ve dolayısı ile $f_n(x) - f(x) \in C[a,b]$ dir. Weierstrass teoremi gereğince öyle bir $x^* \in [a,b]$ vardır ki $f_n(x) - f(x)$ fark fonksiyonunun x^* daki değeri $[a,b]$ nin diğer noktalarındaki değerinden büyüktür. Ayrıca $x^* \in [a,b]$ olduğundan

$$|f_n(x^*) - f(x^*)| = \max_{a\le x\le b} |f_n(x^*) - f(x^*)| < \varepsilon$$

sağlanır ve

$$\|f_n - f\|_{C[a,b]} < \varepsilon \qquad (n \in N(\varepsilon))$$

olur.

$C[a,b]$'de olan $f_n(x)$ dizisi $C[a,b]$ uzayının normunda yakınsasın. Bu durumda keyfi pozitif ε sayısına göre öyle bir N bulunur ki $n \ge N$

olan tüm n ler için

$$\max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. Bundan dolayı $[a,b]$'deki tüm x ler için

$$|f_n(x^*) - f(x^*)| < \varepsilon, \ \ n \ge N$$

eşitsizliği sağlanır ve

$$\| f_n - f \| < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon))$$

olur.

Sonuç olarak, $C[a,b]$ uzayının normuna göre yakınsama, düzgün yakınsamasıdır.

Bu tezde düzgün yakınsama ;

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad n \to \infty$$

şeklinde gösterilir.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar

X ve Y boş olmayan iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonu Y de bir g fonksiyonuna karşılık getiren bir L kuralı varsa bu durumda X uzayında bir *operatör* tanımlanmış olur ve

$$g(x) = L(f;x)$$

biçiminde gösterilir. X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f;x) = g(x)$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine L operatörünün *değer kümesi* denir. Bu küme de $R(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1: f_1 ve f_2, X uzayında herhangi iki fonksiyon, α ve β keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü;

$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$ koşulunu gerçekliyorsa L operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 2.2.2: Negatif olmayan bir f fonksiyonu için $X^+ = \{f \in X : f \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g \geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını tanımlayalım. Eğer X uzayında tanımlanan L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa o taktirde bu lineer operatöre *Lineer Pozitif Operatör* denir. $f \geq 0$ olması durumunda $L(f;x) \geq 0$ dır. Özel olarak $L(0;x) = 0$ olduğu görülür.

Lemma 2.2.1: Lineer pozitif operatörler monotondur.

İspat:

$\forall x$ için $g(x) \geq f(x)$ ise $g(x) - f(x) \geq 0$ dır. L lineer pozitif operatör olduğundan operatörün pozitifliğinden $L(g - f; x) \geq 0$ dır. Yine operatörün lineerliğinden $L(g;x)-L(f;x)\geq 0$ olur. Dolayısı ile $L(g;x)\geq L(f;x)$ sağlanır. Bu eşitlikte L operatörünün monoton olduğunu gösterir.

Lemma 2.2.2: Eğer L lineer pozitif operatör ise

$$\left|L(f;x)\right|\leq L(\left|f\right|;x)$$

dir.

İspat:

Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-\left|f(t)\right|\leq f(t)\leq\left|f(t)\right|$$

dir. L lineer pozitif operatör, monoton artan olduğundan

$$L(-\left|f\right|;x)\leq L(f;x)\leq L(\left|f\right|;x)$$

yazılabilir. L lineer pozitif operatörünün lineerliğinden

$$-L(\left|f\right|;x)\leq L(f;x)\leq L(\left|f\right|;x)$$

elde edilir. Böylece

$$\left|L(f;x)\right|\leq L(\left|f\right|;x)$$

sonucu elde edilerek, ispat tamamlanmış olur.

2.3. Yaklaşım Teorileri

Yaklaşım teoremleri ile ilgili en önemli teoremlerden Korovkin teoremi aşağıda verilmiştir.

2.3.1. Korovkin Teoremi

Yaklaşımlar teorisinde önemli bir yer tutan aşağıdaki teorem 1953 yılında Korovkin[(4)] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.3.1.1: (P.P.Korovkin): Eğer L_n lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında; $n \to \infty$ iken

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{2.3.1.1}$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{2.3.1.2}$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{2.3.1.3}$$

koşullarını gerçekliyorsa o taktirde $C[a,b]$ uzayında olan herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \quad a \le x \le b$$

olur.

İspat:

$f\in C[a,b]$ olduğundan $\forall x\in [a,b]$ için

$$|f(x)|\leq M \qquad (*)$$

olacak şekilde M pozitif sayısı vardır.

$f\in C[a,b]$ olduğu için $\forall \varepsilon>0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta>0$ vardır ki $t\in R$ ve $x\in [a,b]$ için $|t-x|<\delta$ olduğunda

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon \qquad (**)$$

sağlanır.

$x,t\in [a,b]$ olduğunda son eşitsizlik f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında düzgün sürekli olmasından dolayı gerçeklenir.

(*) ve (**) eşitsizliklerinden dolayı her $t\in R$ ve $x\in [a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)|\leq \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü $|t-x|<\delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ dur. Ayrıca $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2\geq 0$ olduğundan $|f(t)-f(x)|\leq \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ sağlanır.

$|t-x|\geq\delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\geq 1$ olacağından

$$\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$$

elde edilir. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için (*) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f(t)-f(x)| &\leq |f(t)|+|f(x)| \\ &\leq 2M \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2+\varepsilon \qquad (***) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned} \|L_n(f;x)-f(x)\|_{C\,a,b} &= \|L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)L_n(1;x)-f(x)\|_{C\,a,b} \\ &\leq \|L_n(f(t)-f(x);x)\|_{C\,a,b}+\|f\|_{C\,a,b}\,\|L_n(1;x)-1\|_{C\,a,b} \\ &\leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C\,a,b}+\|f\|_{C\,a,b}\,\|L_n(1;x)-1\|_{C\,a,b} \end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim (2.3.1.1) deki $\|L_n(1;x)-1\|=0$ eşitliğinden dolayı sıfıra yakınsar. Yani,

$$\|f\|_{C\,a,b}\,\|L_n(1;x)-1\|_{C\,a,b} \leq \varepsilon_n \ \ (n\to\infty,\ \varepsilon_n\to 0)$$

eşitsizliğini sağlayan ε_n dizisi vardır. O halde

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C\,a,b} \leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C\,a,b}+\varepsilon_n \qquad (****)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi yukarıdaki (****) ifadedeki birinci terimi hesaplayalım. (***) deki $\left| f(t)-f(x)\right| < \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2+\varepsilon$ eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı

$$L_n(\left| f(t)-f(x)\right|;x)$$

$$\leq L_n\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n((t-x)^2;x)$$

$$\leq \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n((t-x)^2;x)$$

$$L_n(\left| f(t)-f(x)\right|;x)=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x)-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\right]$$

$$=\varepsilon \quad L_n(1;x)-1 \quad +\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2} \quad \left[L_n(t^2;x)-x^2\right]-2x \quad L_n(t;x)-x \quad +x^2 \quad L_n(1;x)-1$$

$$=\varepsilon+\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right) \quad L_n(1;x)-1 \quad +\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x)-x^2\right]-\frac{4M}{\delta^2}x \quad L_n(t;x)-x$$

elde edilir.

$x \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right)\leq \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}b^2, \quad \frac{4M}{\delta^2}x\leq\frac{4M}{\delta^2}b$$

dir. O halde

$C_1=\frac{2M}{\delta^2}$, $C_2=2bC_1$, $C_3=\varepsilon+C_1b^2$ eşitliklerini kabul edersek

$$\left\| L_n \left| (f(t) - f(x) \right| ; x) \right\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon + C_1 \left\| L_n(t^2;x) - x^2 \right\|_{C[a,b]} + C_2 \left\| L_n(t;x) - x \right\|_{C[a,b]}$$

$$+ C_3 \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_{C[a,b]}$$

yazılabilir ve burada $\varepsilon > 0$ istenilen küçük sayıdır. $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$, $L_n(t;x) \rightrightarrows x$ ve $L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ özelliklerinden dolayı $n \to \infty$ için

$$\left\| L_n \left| (f(t) - f(x) \right| ; x) \right\|_{C[a,b]} \to 0$$

olur. Bu sonuç ve (****) eşitsizliklerinden yararlanarak

$$\left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_{C[a,b]} \to 0$$

olduğu görülür.

1962 yılında Baskakov[5], Korovkin teoremindeki $1+x^2$ fonksiyonuyla sınırlı olması halinde de yine düzgün yakınsamasının geçerli olduğunu ispatlamıştır.

Gerçekten, $x \in R$ için $\left| f(x) \right| \leq M_f (1+x^2)$ olsun.

$$\left| f(t) - f(x) \right| \leq M_f (1+t^2) + M_f (1+x^2)$$

$$= M_f (2 + t^2 + x^2)$$

$$= M_f (2 + (t-x+x)^2 + x^2)$$

$$= M_f (2 + (t-x)^2 + 2x(t-x) + 2x^2)$$

$f \in C[a,b]$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ sağlanır.

$|t-x| > \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)|$ ifadesini hesaplayalım.

$$|f(t) - f(x)| \leq M_f(1+t^2) + M_f(1+x^2)$$

$$\leq M_f\left(2 + (t-x)^2 + 2\left(\frac{|t-x|}{\delta}\right)\delta x + 2x^2\right)$$

$$= M_f\left(2 + (t-x)^2 + 2\frac{(t-x)^2}{\delta} x + 2x^2\right)$$

$$\leq M_f\left(2\frac{(t-x)^2}{\delta^2} + (t-x)^2 + 2\frac{(t-x)^2}{\delta} x + 2x^2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right)$$

$$= M_f(t-x)^2\left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + \frac{2}{\delta} x + \frac{2x^2}{\delta^2}\right)$$

$x \in [a,b]$ olduğundan parantez içindeki ifade

$$C_4 = \frac{2}{\delta^2} + 1 + 2\frac{b}{\delta} x + \frac{2b^2}{\delta^2}$$

sayısından büyük değildir. Buna göre $C_5 = C_4 M_f$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq C_3 (t-x)^2, \quad |t-x| \geq \delta$$

elde edilir. Buradan da tüm $x \in [a,b]$ ve $t \in R$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + c(t-x)^2$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini görülür ve böylece Korovkin teoremi sağlanır.

2.4. Süreklilik Modülü

Tanım 2.4.1: Kabul edelim ki f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$w(f;\delta) = \sup_{\substack{|x-t|\leq\delta \\ t,x\in[a,b]}} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *f nin süreklilik modülü* denir. Bazen bu gösterim yerine $w(\delta)$ veya $w_f(\delta)$ gösterimi de kullanılabilir. $w(f;\delta)$; değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini belirler. w,δ nın bir fonksiyonu durumundadır ve $\delta > 0$ için ve süreklilik modülünün tanımı gereğince $w(f;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

Lemma 2.4.1: $w(f;\delta)$ fonksiyonu monoton artandır.

İspat:

$0 < \delta_1 < \delta_2$ olsun. Bu durumda $|x - y| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (x, y) sayı çiftlerinin kümesi $|x - y| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramını düşünerek süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$w(f;\delta_1) \leq w(f;\delta_2)$$

olur. Bu da süreklilik modülünün monoton artan olduğunu gösterir.

Lemma 2.4.2: Kabul edelim ki f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta\to 0} w(f;\delta)=0$$

dır.

İspat:

f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğundan düzgün süreklidir. f fonksiyonunu sürekli olduğundan, süreklilik tanımından $\forall\varepsilon>0$ için bir $\eta>0$ vardır öyle ki $|t-x|<\eta$ olduğunda $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ dır. Süreklilik modülünde $\delta>\eta$ alındığında $w(f;\delta)<\varepsilon$ dır. Yani $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde $\eta>0$ bulunur öyleki $\delta>\eta$ olduğunda $w(f;\delta)<\varepsilon$ olur. Bu da

$$\lim_{\delta\to 0} w(f;\delta)=0$$

olduğunu kanıtlar.

Lemma 2.4.3: $m\in N$ olmak üzere

$$w(f;m\delta)\le mw(f;\delta)$$

dir.

İspat:

$$w(f;\delta)=\sup_{\substack{|x-t|\le m\delta \\ t,x\in [a,b]}} |f(t)-f(x)|$$

ifadesinde $t-x=mh$ seçilirse

$$w(f;m\delta) \le \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ t,x\in a,b}} \left| f(x+mh) - f(x) \right|$$

$$= \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ t,x\in a,b}} \left| f(x+mh) - f(x+(m-1)h) + \ldots f(x+h) - f(x) \right|$$

$$= \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ t,x\in a,b}} \left| \sum_{k=1}^{m} f(x+kh) - f(x+(k-1)h) \right|$$

özelliği kullanılarak

$$w(f;m\delta) \le \sum_{k=1}^{m} \sup_{|h|\le\delta} \left| f(x+kh) - f(x+(k-1)h) \right|$$

ve toplamın içindeki ifade süreklilik modülü ve toplananların sayısı m tane olduğundan

$$w(f;m\delta) \le m w(f;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.4.4: $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$w(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1) w(f;\delta)$$

dir.

İspat:

m, λ nın tam kısmı olsun. O taktirde $m \le \lambda < m+1$ olur. w süreklilik modülünün monoton azalmayan özelliğinden ve Lemma (2.4.3) ün $w(f;m\delta) \le m w(f;\delta)$ eşitsizliğinden

$$w(f;\lambda\delta) \le w(f;(m+1)\delta)$$

$$\le (m+1)w(f;\delta)$$

$$\le (\lambda+1)w(f;\delta)$$

olur. Dolayısı ile

$$w(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)w(f;\delta)$$

olarak elde edilir.

Lemma 2.4.5: δ_n sıfıra yakınsayan bir dizi ve k_f, f ye bağlı bir sabit olmak üzere,

$$w(f;\delta_n) \ge k_f \delta_n$$

dir.

İspat:

Süreklilik modülünde δ için bir alınarak

$$w(f;1) = w(f;\frac{1}{\delta_n}\delta_n)$$

olarak yazılabilir. Lemma (2.3.4) ün $w(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)w(f;\delta)$ eşitsizliğini kullanarak

$$w(f;\frac{1}{\delta_n}\delta_n) \le \left(\frac{1}{\delta_n}+1\right) w(f;\delta_n)$$

$$\le \left(\frac{1+\delta_n}{\delta_n}\right) w(f;\delta_n)$$

elde edilir. δ_n nin yakınsak bir dizi olmasında dolayı $\delta_n + 1 \leq k$ şeklinde bir k sabiti mevcuttur. O taktirde

$$w(f;1) \leq \frac{k}{\delta_n} w(f;\delta_n)$$

olur.

Eğer $k_f = \dfrac{w(f;1)}{k}$ seçilirse

$$w(f;\delta_n) \geq k_f \delta_n$$

elde edilir.

Lemma 2.4.6: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon ise her $x,t \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq w(f;|t-x|)$$

dır.

İspat:

Süreklilik modülünün tanımından ve Lemma (2.3.4) ün $w(f;m\delta_1) \leq m w(f;\delta_2)$ eşitsizliği kullanılarak

$$|f(t) - f(x)| \leq w(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta)$$

$$\leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) w(f;\delta)$$

sonucu elde edilir.

Lemma 2.4.7: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının tüm noktalarında türevlenebilen fonksiyon ve türevi sınırlı ise, o taktirde c bir sabit olmak üzere

$$w(f;\delta)\leq c\delta$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat:

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının tüm noktalarında türevlenebilir ve türevi sınırlı olsun. Bu durumda $|f'(x)|\leq c$ olacak biçimde $c>0$ sayısı vardır. Ortalama Değer Teoremi gereğince

$\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(\xi)$ olacak şekilde bir $\xi\in\ a,b$ vardır. Böylece f nin

süreklilik modülü tanımından

$$\begin{aligned} f(t)-f(x) &= f'(\xi)\ t-x \\ &= c\ \ t-x \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın mutlak değeri ve sonra supremumu alınırsa

$$\underbrace{\sup_{\substack{|x-t|\leq m\delta \\ t,x\in\ a,b}} |f(t)-f(x)|}_{=W(f;\delta)}\leq \sup_{\substack{|x-t|\leq m\delta \\ t,x\in\ a,b}} |t-x|$$

olur ve buradan da $w(f;\delta)\leq c|t-x|\leq c\delta$ elde edilir.

2.5. Lipschitz Sınıfı

Tanım 2.5.1: f fonksiyonu bir $< a,b >$ aralığında sürekli ve reel değerli tanımlı olsun. ($< a,b >$ ifadesi $[a,b]$ veya (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,\infty)$ biri olarak tanımlanır.) Her $x,y \in < a,b >$ için $0 < a \leq 1$ olmak üzere

$|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|^{\alpha}$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda f fonksiyonuna α mertebeli M sabitli *Lipschitz sınıfındandandır* denir ve bu sınıf $Lip_M\ \alpha$ şeklinde gösterilir.

2.5.1. Lipschitz Sınıfındaki Fonksiyonların Özellikleri

Lemma 2.5.1.1: $f \in Lip_M\ \alpha$ ise $f,\ a,b$ de düzgün süreklidir.

Lemma 2.5.1.2: $\alpha > 1$ ise f sabittir.

Lemma 2.5.1.3: $[a,b]$ aralığında bir f fonksiyonu için $|f'(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $f'(x)$ fonksiyonu varsa o taktirde $f \in Lip_M\ 1$ sınıfındandır.

Lemma 2.5.1.4: $[a,b]$ aralığı sonlu ise $\alpha < \beta$ için $Lip\beta \subset Lip\alpha$ dır.

Lemma 2.5.1.5: $f \in Lip_M\ \alpha$ ve $w(f;\delta) \leq M.\delta^{\alpha}$ ifadeleri eşdeğerdir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1.1. Operatörlerin Genelleştirilmesi

Daha önce üzerinde değişik çalışmalar yapılan operatörlerden bazıları bilinen özel operatörlerdir (Bernstein, Szasz, Meyer- König ve Zeller vs.) [6-10]. Bu operatörlerin üzerinde onların bazı karakterlerini bozmadan çeşitli genelleştirmeler yapılabilir. Bunlara bir örnek olarak,

$$L_n(f;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right)\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}, \quad n\in N \tag{3.1.1}$$

operatörü verilebilir, burada

$a_{n,\upsilon}=\dfrac{\varphi_n^{\upsilon}(0)}{\varphi_n^{(\upsilon-1)}(0)}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n,\upsilon}}{\upsilon}=\mu$, $0\le x<\dfrac{1}{\mu}$ ve $f\in C\left[0,\dfrac{1}{\mu}\right)$ koşullarını sağlarken, $C^{\infty}[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar sınıfı olmak üzere $\varphi_n(x)\in C^{\infty}$ ve

$\varphi_n=\sum\limits_{\upsilon=0}^{\infty}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\dfrac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}$ aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $\{\varphi_n\}$ dizisinin her elemanı $B=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|<\dfrac{1}{\mu}\right\}$ diskini içeren D tanım kümesinde analitiktir.

(ii) Her $\upsilon=1,2,\ldots$ için $\varphi_n^{(\upsilon)}(0)=\dfrac{d^{\upsilon}}{dx^{\upsilon}}\varphi_n(x)\Big|_{x=0}>0$ dır.

(iii) Her $x\in\left[0,\dfrac{1}{\mu}\right)$ için $\varphi_n>0$ dır.

(iv) $\{c_n\}$ dizisi vardır, öyle ki $\left|\frac{\upsilon+1}{a_{n,\upsilon+1}}-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right|\leq c_n$ ve $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ dır.

Yukarıdaki operatörde $\varphi_n(x)=(1-x)^{-n-1}$, $a_{n,\upsilon}=\upsilon+n$, $\mu=1$ ve $c_n=\frac{1}{n}$

alınırsa ve L_n operatörü Cheney ve Sharma tarafından tanımlanan

$$M_n(f;x)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon}{\upsilon+n}\right)m_{n,\upsilon}(x),\ \ 0\leq x<1 \qquad (3.1.2)$$

şeklindeki Meyer-König ve Zeller Operatörüne (MKZ) dönüşür, burada

$m_{n,\upsilon}(x)=\binom{n+\upsilon}{\upsilon}x^{\upsilon}(1-x)^{n+1}$. Bu operatörler literatürde Bernstein Kuvvet Serileri olarak bilinir.

$\varphi_n(x)=(1+x)^n$, $a_{n,\upsilon}=n-\upsilon+1$ alınırsa ve (3.1.1) de tanımlanan L_n operatörü

$$B_n(f;x)=(1+x)^{-n}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon}{n-\upsilon+1}\right)\binom{n}{\upsilon}x^{\upsilon} \qquad (3.1.3)$$

şeklindeki Bleiman, Butzer ve Hahn Operatörüne (BBH) dönüşür.

$\varphi_n(x)=e^{nx}$, $a_{n,\upsilon}=n$, $\mu=0$ ve $c_n=\frac{1}{n}$ alınırsa ve (3.1.1) de tanımlanan L_n operatörü

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon}{n}\right)\frac{(nx)^{\upsilon}}{\upsilon!} \qquad (3.1.4)$$

şeklindeki Szasz Operatörüne dönüşür.

Lemma 3.1.1: Her $n \in N,\ x \in [0,a]\ (0 < a < \frac{1}{\mu})$ için

$$L_n(e_0, x) = 1$$

dir, burada $e_0 = 1$ dır.

İspat:

$L_n(f;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} f(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}) \varphi_n^{(\upsilon)}(0) \frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}$ tanımında $f(t) = 1$ yazılır ve

$\varphi_n(x)$ ün $x = 0$ daki Taylor kuvvet serisi açılımından $\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \varphi_n^{(\upsilon)}(0) \frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!} = \varphi_n(x)$

olması özelliği de kullanılırsa

$$L_n(e_0;x) = \underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \varphi_n^{(\upsilon)}(0) \frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{1} = 1$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.2: Her $n \in N,\ x \in [0,a]\ (0 < a < \frac{1}{\mu})$ ve $e_1 = x$ için

$$L_n(e_1, x) = x$$

dir, burada $e_1 = x$ dir.

İspat:

$$L_n(f;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}$$ tanımında $f(t)=t$ ve

$a_{n,\upsilon}=\dfrac{\varphi_n^{\upsilon}(0)}{\varphi_n^{(\upsilon-1)}(0)}$ ın değeri yerine yazılırsa,

$$L_n(e_1;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon\varphi_n^{(\upsilon-1)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$\upsilon=\upsilon+1$$

$$=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\ \upsilon+1\ \varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon+1}}{\upsilon+1\ !}$$

$$=x\frac{1}{\varphi_n(x)}\underbrace{\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{\varphi_n(x)}$$

elde edilir. Sonra Lemma (3.1.1) den $\dfrac{1}{\varphi_n(x)}\displaystyle\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}=1$ değeri yerine

yazıldığında,

$$L_n(e_1,x)=x$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.3: Her $n\in N,\ x\in\ 0,a\ \ (0<a<\frac{1}{\mu})$ için

$$\left|L_n(e_2,x)-x^2\right|\le c_n x$$

dir, burada $e_2 = x^2$ dir.

İspat:

L_n tanımında f yerine $e_2 = x^2$ ve $a_{n,\upsilon} = \dfrac{\varphi_n^{\upsilon}(0)}{\varphi_n^{(\upsilon-1)}(0)}$ değeri yazılırsa,

$$L_n(e_2;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{\upsilon^2}{a_{n,\upsilon}^2} \varphi_n^{(\upsilon)}(0) \frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}$$
$$= \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}} \varphi_n^{(\upsilon-1)}(0) \frac{x^{\upsilon-1}}{(\upsilon-1)!}$$

olur.

Yukarıdaki ifadede $\upsilon \to \upsilon+1$ yazalım. Böylece

$$L_n(e_2;x) = \frac{x}{\varphi_n(x)} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{\upsilon+1}{a_{n,\upsilon+1}} \varphi_n^{(\upsilon)}(0) \frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

elde edilir.

L_n operatörünün (iv) özelliğindeki $\left| \dfrac{\upsilon+1}{a_{n,\upsilon+1}} - \dfrac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}} \right| \le c_n$ şeklinde bir $\{c_n\}$ dizisi

var olması son ifadede yerine yazılırsa

$$L_n(e_2,x) = x \underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \left[\frac{\upsilon+1}{a_{n,\upsilon+1}} - \frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}} \right] \varphi_n^{(\upsilon)}(0) \frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{\le c_n} + x \underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}} \varphi_n^{(\upsilon)}(0) \frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{=x}$$

$$\le c_n x + x^2$$

elde edilir. Bu da istenen $\left| L_n(e_2,x) - x^2 \right| \le c_n x$ sonucunu verir.

3.2. Süreklilik Modülü Yardımıyla Yaklaşım Hızının Elde Edilmesi

Bu bölümde (3.1.1) de ile tanımlanan L_n operatörü için süreklilik modülünün yardımıyla yaklaşım hızı incelecektir.

Teorem 3.2.1: $f \in C[0,a]$ olsun. $x \in [0,a]$ ve $n \in N$ olmak üzere (3.1.1) de tanımlanan L_n operatörü için

$$\left\| L_n(f;.) - f(.) \right\| \leq (1+\sqrt{a})\, w(f:\sqrt{c_n})$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:

Süreklilik modülünün tanımı ve önceki kısımda verilen özellikleri kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} |f(t)-f(x)| &\leq w(f;|t-x|) \\ &\leq w\left(f;\delta\frac{|t-x|}{\delta}\right) \\ &\leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right) w(f;\delta) \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

elde edilir. $L_n(f(t);x)-f(x)$ ifadesine $L_n(f(x);x)$ ifadesi eklenip çıkarılır ve L_n in ve pozitif ve lineer olması kullanılırsa

$$L_n(f(t);x)-f(x) = L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)$$

$$L_n(f(t);x)-f(x) = L_n(f(t)-f(x);x) + f(x)\,[L_n(1;x)-1]$$

elde edilir. En son ifadenin mutlak değeri alındığında, Lemma (2.2.2) den

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| \leq L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

olur.

Son olarak elde edilen bu ifadeye (3.2.1) den elde edilen $L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)$ yerine yazıldığında,

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| \leq L_n\left|\left(w(f;\delta)(1+\frac{|t-x|}{\delta});x\right)\right|+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

elde edilir.

$L_n(1;x)=1$ değeri son eşitsizlikte yerine yazıldığında ve burada L_n in lineerlik özelliği kullanıldığında,

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| \leq L_n\left|\left(w(f;\delta)(1+\frac{|t-x|}{\delta});x\right)\right|+L_n\left|(w(f;\delta);x)\right|$$

olur. $w(f;\delta)$ sabit bir sayı olduğundan, eşitsizlikte dışarı alındığında,

$$L_n(f(t);x)-f(x) \leq w(f;\delta)\left[L_n(\frac{|t-x|}{\delta};x)+L_n(1;x)\right]$$

$$\leq w(f;\delta)(\frac{L_n(|t-x|;x)}{\delta}+1)$$

elde edilir.

Şimdi $L_n(|t-x|;x)$ e bakalım.

$L_n(|t-x|;x)=L_n(1.|t-x|;x)$ ifadesinde Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayalım;

$$L_n(|t-x|;x)=L_n(1.|t-x|;x)\leq L_n(1;x)^{1/2}\left[L_n((t-x)^2;x)\right]^{1/2}$$

Sonra

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq w(f;\delta)\frac{1}{\delta}\left(L_n(1;x)^{1/2}.\left[L_n(t-x)^2;x)\right]^{1/2}+1\right)$$

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq w(f;\delta)\left(\left[\frac{L_n((t-x)^2;x)}{\delta}\right]^{1/2}+1\right)$$

olur. Burada ki $L_n((t-x)^2;x)$ ifadesi açılır ve Lemma (3.1.2) deki $L_n(e_1,x)=x$ ve Lemma (3.1.3) deki $\left|L_n(e_2,x)-x^2\right|\leq c_n x$ değerleri kullanılırsa, son eşitsizlik

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq w(f;\delta)\left(\left(\frac{c_n x}{\delta}\right)^{1/2}+1\right)$$

olur. $\delta=\sqrt{c_n}$ alınır ve $[0,a]$ aralığında x in maksimum değeri a olacağından, x'in bu değeri son eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq w(f;\sqrt{c_n})\left(\frac{\sqrt{c_n}\sqrt{x}}{\sqrt{c_n}}+1\right)$$

$$\leq w(f;\sqrt{c_n})\ \sqrt{x}+1$$

$$\leq w(f;\sqrt{c_n})\ \sqrt{a}+1$$

olarak elde edilir. Bu da istenen sonucu verir.

3.3. $[0,\infty)$ Aralığında Lineer Pozitif Operatörlerin Ağırlıklı Yaklaşım Özellikleri

Eğer

$$L_n(f;x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right)\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}, \quad f\in C\left[0,\frac{1}{\mu}\right]$$

olarak (3.1.1) de tanımlanan operatörde $\mu=0$ alınırsa, $0\le x<\frac{1}{\mu}$ aralığı $[0,\infty)$ aralığına döner. Bu durumda $L_n(f;x)$ operatöründe $\varphi_n(x)=e^{nx}$, $a_{n,\upsilon}=n,\quad \mu=0$ ve $c_n=\frac{1}{\mu}$ alınırsa operatör,

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} f\left(\frac{\upsilon}{n}\right)\frac{(nx)^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

şeklindeki Szasz Operatörüne dönüşür.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|L_n(f;x)-f(x)\right|=0$ özelliği $f\in C[0,\infty)$ aralığındaki her bir fonksiyon için geçerli olmaz. Korovkin teoremi kapalı ve sınırlı aralıktaki Genelleştirilmiş Lineer Pozitif operatörler için geçerli olduğundan, Gadjiev tarafından tanımlanan Ağırlıklı Korovkin Tipli teorem, Lineer Pozitif operatörler için sonsuz aralıkta yaklaşım özelliklerini elde etmek için kullanılır. Öncelikle, aşağıdaki uzayları ve $\rho(x)=1+x^2$ için fonksiyonu tekrar hatırlayalım.

$B_\rho\left[0,\infty\right) : \left| f(x)\right| \le M_f \rho(x) \quad 0 \le x < \infty$, şartını sağlayan tüm fonksiyonların uzayı,

$C_\rho\left[0,\infty\right) \subset B_\rho$ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonların uzayı,

$C_\rho^0\left[0,\infty\right) : \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\rho(x)}$ limiti var ve sonlu olan $f \in C_\rho$ fonksiyonlarının alt uzayı,

$C_\rho^0\left[0,\infty\right)$ uzayı $\left\| f\right\|_\rho = \sup\limits_{x\ge 0} \dfrac{\left| f(x)\right|}{\rho(x)}$ (3.3.1)

şeklindeki normla birlikte lineer normlu uzaydır. Buradaki ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, C_ρ ve B_ρ uzaylarına *ağırlıklı uzaylar* denir. Bu bölümde (3.3.1) şeklinde tanımlanan norm kullanıldı.

A_n, $C_\rho\left[0,\infty\right)$ den $B_\rho\left[0,\infty\right)$ ya giden lineer pozitif operatörler dizisi olsun, öyle ki $e_r = t^r$ olmak üzere,

$\lim\limits_{n\to\infty} \left\| A_n(e_r;.) - e_r\right\|_\rho = 0,\ r = 0,1,2$ şartını sağlasın. Bu durumda

$\lim\limits_{n\to\infty} \left\| A(f;.) - f\right\|_\rho = 0$ hangi $f \in C_\rho$ için sağlanır sorusunun cevabını araştıralım.

Ağırlıklı uzaylarda operatörlerin yaklaşım özelliklerini inceleyeceğimiz temel teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem A: A_n, $C_\rho[0,\infty)$'den $B_\rho[0,\infty)$'ye giden lineer pozitif operatörler dizisi olsun ve

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n(e_r;.)-e_r\right\|_\rho=0,\ r=0,1,2$$

sağlansın. Bu durumda bir $f\in C_\rho^o$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|A_n(f;.)-f\right\|_\rho=0$ sağlanır ve $\rho(x)=1+x^2$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n(f^*;.)-f^*\right\|_\rho\geq 1$$

olacak şekilde bir $f^*\in C_\rho\setminus C_\rho^o$ sağlayan f^* fonksiyonu vardır.

Lemma 3.3.1: A_n lineer pozitif operatörünün $C_\rho:=C_\rho[0,\infty)$ dan $B_\rho:=B_\rho[0,\infty)$ uzayına dönüşüm yapması için gerek ve yeter koşul, $M_\rho:\rho$ ya bağlı sabit olmak üzere

$$\left\|A_n(\rho;.)\right\|_\rho\leq M_\rho$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat:

Gereklilik; $A_n:C_\rho\to B_\rho$'ye bir lineer pozitif operatör olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $f\in C_\rho$ için $A_n(f)\in B_\rho$ olur. Diğer yandan,

$|\rho(x)|\leq c\rho(x),\quad \forall c\geq 1$ (sabit) olduğundan,

$\rho(x)\in C\rho$ dir. Böylece, $A_n(\rho;.)\in B_\rho$ dir.

B_ρ uzayının tanımından, ($B_\rho\ 0,\infty := \left| f(x) \right| \le M_f \rho(x)$)

$$\frac{\left| A_n(\rho;x) \right|}{\rho(x)} \le M_\rho$$

yazılabilir. $x \ge 0$ için her iki tarafın supremumu alınırsa

$$Sup \frac{\left| A_n(\rho;x) \right|}{\rho(x)} \le Sup\, M_\rho$$

olur. Buradan

$$\left\| A_n(\rho;.) \right\|_\rho \le M_\rho$$

sonucu elde edilir.

Yeterlilik; Eğer $f \in C_\rho$ ise

$$\left\| f \right\|_\rho \le M_\rho \tag{3.3.2}$$

yazılabilir. $A_n(f;x)$ in monoton olmasından dolayı,

$$\begin{aligned} \left| A_n(f;x) \right| &\le A_n(\left| f \right|;x) \\ &= A_n(\frac{\left| f \right| \rho}{\rho};x) \\ &\le \left\| f \right\|_\rho A_n(\rho;x) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\left\| f \right\| \rho$ in (3.3.2) deki $\left\| f \right\|_\rho \le M_\rho$ eşitsizliği kullanılır ve eşitsizliğin her iki yanı $\rho(x)$ e bölünürse

$$\frac{\left| A_n(f;x) \right|}{\rho(x)} \le M_\rho \frac{A_n(\rho;x)}{\rho(x)} \tag{3.3.3}$$

olur.

En son eşitsizlikte, her iki tarafın $x \geq 0$ için supremumu alınırsa

$$Sup \frac{|A_n(f;x)|}{\rho(x)} \leq M_\rho Sup \frac{A_n(\rho;x)}{\rho(x)}$$

elde edilir. Buradan da

$$\|A_n(f;.)\|_\rho \leq M_\rho \|A_n(\rho;.)\|_\rho$$

sonucu bulunur. Böylece (3.3.3) den $A_n(\rho;x) \in B_\rho$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.3.2: L_n (3.1.1) de verilen lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Tüm $f \in C_\rho^0$ için $\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere

$$\|L_n(f;.) - f\|_\rho \to 0 \qquad n \to \infty$$

dır.

İspat:

İspat için Teorem (A) daki $\lim_{n\to\infty} \|A_n(e_r;.) - e_r\|_\rho = 0,\ r = 0,1,2$ şartların sağlandığını göstermek yeterlidir.

Öncelikle L_n in C_ρ den B_ρ ya bir lineer operatör olduğunu gösterelim.

$\|L_n(\rho;.)\|_\rho \leq \sup_{x\geq 0} \frac{|x^2 + c_n x|}{1+x^2} \leq 1 + c_n \quad n \to \infty,\ c_n \to 0$ a gittiğinden, $\forall n$ için $c_n < \mu$ olacak şekilde bir μ sabiti vardır. Bundan dolayı Lemma (2.2.1) deki lineer pozitif operatörlerin monoton olma özelliğinden

$$\|L_n(\rho;.)\|_\rho \leq (M+1)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$L_n : C_\rho \to B_\rho$$

dır.

$f \in C_\rho^0$, $n \to \infty$ ken $\|L_n(f;.) - f\|_\rho = 0$, $r = 0,1$ olduğunu görmek için $L_n(e_0, x) = 1$ ve $L_n(e_1, x) = x$ eşitlikleri kullanılarak

$$\|L_n(e_r;.) - e_r\|_\rho = 0,\ r = 0,1$$

elde ederiz.

Son olarak Lemma (3.1.3) deki $L_n(e_2, x) = x^2$ eşitliğini kullandığımızda $r = 2$ için $n \to \infty$, $c_n \to 0$ $\|L_n(e_r;.) - e_r\|_\rho \leq c_n$ ifadesinde istenilen sonucu elde ederiz.

3.4. Lipschitz Tipli Maksimal Fonksiyonlar

Tanım 3.4.1: Lipschitz tipi α. dereceden maksimal fonksiyonlar Lenze tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\tilde{W}_\alpha(f;x) = \sup_{t \neq x} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t-x|^\alpha},\ x \in [0,a],\ \alpha \in (0,1]$$

Şimdi, $\left|L_n(f;x)-f(x)\right|$ farkının yaklaşım hızını Lipschitz tipi maksimal fonksiyonların yardımı ile hesaplayalım.

Teorem 3.4.1: (3.1.1) de tanımlanan $L_n(f;x)$ operatörü için,

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right| \leq (c_n x)^{\alpha/2}\tilde{W}_\alpha(f;x)$$

eşitzliği gerçeklenir.

İspat:

İspat için

$$\left|f(x)-f(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})\right| = \left|x-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right|^{\alpha}\frac{\left|f(x)-f(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})\right|}{\left|x-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right|^{\alpha}}$$

eşitliğin sağ tarafının supremumu alınırsa;

$$\left|f(x)-f(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})\right| \leq \underbrace{\sup_{t\neq x}\frac{\left|f(x)-f(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})\right|}{\left|x-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right|^{\alpha}}}_{\tilde{W}\alpha(f;\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})}.\left|x-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right|^{\alpha}$$

olur. Bu eşitsizlik için $\tilde{W}_\alpha(f;x)$ in tanımı kullanarak,

$$\left|f(x)-f(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})\right| \leq \tilde{W}_\alpha(f;\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})\left|x-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right|^{\alpha} \qquad (3.4.1)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik göz önüne alındığında;

$$L_n(f;x)-f(x)=\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(f(x)-f(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})\right)\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}$$

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq\tilde{W}_{\alpha}(f;x)\left[\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left|x-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right|^{\alpha}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}\right] \qquad (3.4.2)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.4.2) eşitsizliğine $p=\frac{2}{\alpha}$ ve $q=\frac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq\tilde{W}_{\alpha}(f;x)\left\{\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(x-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right)^{2}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}\right\}^{\alpha/2}$$

$$\times\left\{\underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{1}\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

olur. Bu eşitsizlikte sol taraftaki $\left(x-\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\right)^{2}$ ifadesini açılırsa,

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq\tilde{W}_{\alpha}(f;x)\left\{\underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}x^{2}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{x^{2}}-\underbrace{\frac{2}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}x\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{2x.x}\right.$$

$$\left.+\underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\upsilon^{2}}{a_{n,\upsilon}{}^{2}}\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{c_nx+x^{2}}\right\}^{\alpha/2}$$

elde edilir. $L_n(e_0;x)=1,\ L_n(e_1;x)=x$ ve $L_n(e_2;x)=x^2$ değerleri kullanılarak

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq\tilde{W}_{\alpha}(f;x)\ \ x^{2}-2x.x+c_nx+x^{2}\ \ {}^{\alpha/2}$$

$$\leq\tilde{W}_{\alpha}(f;x)(c_nx)^{\alpha/2}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

3.5. Lineer Pozitif Operatörlerin Merkez Momentlerinin Bulunması

Bazı durumlarda, lineer pozitif operatörlerin mononomları için sadece hata yaklaşımları elde edilebilir. Bu düşünceye örnek olarak MKZ ve BBH operatörlerinden bahsedilmiştir. Fakat genellikle lineer pozitif operatörlerin mononomları için açık formülünü bulmak çok önemlidir. Bu açık ifadeleri elde etmek için bazı diferansiyel denklemlerden yararlanılmıştır. Özellikle mononomların açık formları, operatörlerin merkez momentlerini bulmak için kullanılır. Sık sık, operatörlerin faydalı bazı özelliklerini elde etmek için ise merkezi momentler kullanılır.

Bu kısmın amacı, lineer pozitif operatörlerin diferansiyel denklemlere uygulamaktır. Çünkü lineer pozitif operatörlerin 2. momentleri, bu denklemlerin özel çözümünüdür. Örneğin, MKZ operatörlerinde $\alpha = 0,\ b_n = n$ dir. BBH operatörlerinde ise $a_n = 1,\ b_n = n+1$ dir.

Kabul edelim ki; $h_n(x)$ ler

$$\frac{d}{dx}\varphi_n(x) = h_n(x)\varphi_n(x) \tag{3.5.1}$$

eşitliğini sağlayan fonksiyonlar dizisi olsun. Örneğin MKZ operatörleri için

$h_n(x) = \dfrac{n+1}{1-x}$ olduğu (3.1.2) de ve BBH operatörleri için de $h_n(x) = \dfrac{n}{1+x}$ olduğu hesaplanabilir.

Lemma 3.5.1: (3.1.1) de tanımlanan L_n operatörü

$$x\frac{d}{dx}L_n(f;x)=-xh_n(x)L_n(f;x)+b_nL_n(fg;x) \tag{3.5.2}$$

fonksiyonel diferansiyel denklemini sağlar, burada $g(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})=\frac{\upsilon}{b_n}$ dir.

İspat:

İspat için ilk önce L_n operatörünün x e göre türevini alalım.

$$\frac{d}{dx}L_n(f;x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}f(\frac{\upsilon}{a_{n\upsilon}})\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}\right]$$

$$=-\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}f(\frac{\upsilon}{a_{n\upsilon}})\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}f(\frac{\upsilon}{a_{n\upsilon}})\upsilon\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon-1}}{\upsilon!}$$

olur. (3.5.1) deki $\frac{d}{dx}\varphi_n(x)=h_n(x)\varphi_n(x)$ eşitliği yukarıda yerine yazılıp x ile her iki taraf çarpılırsa

$$x\frac{d}{dx}L_n(f;x)=-xh_n(x)\underbrace{\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}f(\frac{\upsilon}{a_{n\upsilon}})\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!}}_{L_n(f;x)}$$

$$+\frac{1}{\varphi_n(x)}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}f(\frac{\upsilon}{a_{n\upsilon}})\upsilon\varphi_n^{(\upsilon)}(0)\frac{x^{\upsilon}}{\upsilon!} \tag{3.5.3}$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıdaki (3.5.3) de $g(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})=\frac{\upsilon}{b_n}$ değerini yerine yazılıp ve $g(\frac{\upsilon}{a_{n,\upsilon}})$ nun paydası υ den bağımsız olması dikkate alındığında

$$x\frac{d}{dx}L_n(f;x)=-xh_n(x)L_n(f;x)+b_nL_n(fg;x)$$

şeklindeki (3.5.2) deki sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.1: (3.5.1) de sırasıyla verilen b_n ve $h_n(x)$ ler için (3.1.1) de tanımlanan L_n operatörünün 2. mononomu

$$xy'+\left[xh_n(x)+(b_n(-1)^{\alpha}\right]y=x(h_n(x)-b_n)$$

diferansiyel denklemin özel çözümüdür. Burada $g(t)=\dfrac{t+(-1)^{\alpha}t^2}{1-t^2}$ ve $f(t)=1-t^2$ dir.

İspat:

$x\frac{d}{dx}L_n(f;x)=-xh_n(x)L_n(f;x)+b_nL_n(fg;x)$ diferansiyel denkleminde $f(t)=1-t^2$ seçilir ve L_n operatörünün lineerliliği kullanılırsa;

$$x\frac{d}{dx}L_n(1-t^2;x)=x\frac{d}{dx}L_n(1;x)-xL_n(t^2;x)$$

$$=-xh_n(x)L_n(1-t^2;x)+b_nL_n(t+(-1)^{\alpha}t^2;x)$$

$$=-xh_n(x)L_n(1;x)+xh_n(x)L_n(t^2;x)+b_nL_n(t;x)+b_nL_n((-1)^{\alpha}t^2;x)$$

elde edilir. L_n operatörünün Lemma (3.1.1) ve Lemma (3.1.2) deki $L_n(e_0;x)=1,\ L_n(e_1;x)=x$ özellikleri yerine yazılıp, düzenlemeler yapılırsa

$$x\frac{d}{dx}L_n(t^2;x)+(xh_n(x)+b_n(-1)^{\alpha})L_n(t^2;x)=x(h_n(x)-b_n)$$

yazılabilir ki bu da $xy' + (xh_n(x) + b_n(-1)^{\alpha})y = x(h_n(x) - b_n)$ şeklindeki teoremin ispatını verir.

3.6. İki Değişkenli Doğurucu Fonksiyon İçeren Modifiye Kantorovich Tipli Bir Lineer Pozitif Operatör

Tek değişkenli lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri çeşitli genelleştirilmiş operatörler için de aktif bir biçimde çalışılmaktadır. Bu çalışmaların çoğu çok değişkenli lineer pozitif operatörlere de uygulamaya çalışılmaktadır. Bu amaca uygun olarak aşağıda doğurucu fonksiyon içeren iki değişkenli Modifiye Kantorovich tipli bir lineer pozitif operatör için yaklaşım özelliklerinin incelenmesine çalışılmıştır.

3.7. İki Değişkenli Modifiye Kantorovich Tipli $M_{m,n}(f;x,y)$ Operatörü

$M_{m,n}(f;x,y)$ $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörünü, $I^2 = 0,A \times 0,B$,

$$I(m,n,k,l) = \left[\frac{m}{a_m(k)}, \frac{m+1}{a_m(m+1)}\right] \times \left[\frac{n}{c_n(l)}, \frac{n+1}{c_n(l+1)}\right],\ 0 \le x \le A,\ 0 \le y \le B,$$

$$0 \le \frac{z}{a_m(k)} \le A,\ 0 \le \frac{u}{c_n(l)} \le B;\ A,B \in (0,1);\ \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) \ge 0,\ \forall (s,t) \in D^2 \subset R^2,\ f \in C(I^2)$$

olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$M_{m,n}(f;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}(x,y,s,t)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

3(.7.1)

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)dzdu$$

burada $F_{m,n}(x,y;s,t)$, $F_{m,n}(x,y;s,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur ve bu fonksiyonlar $\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)$ fonksiyonu için doğurucu fonksiyon olarak bilinir.

Şimdi $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörü içinde bulunan ifadeler için aşağıdaki özelliklerin gerçeklendiklerini kabul edelim:

i) $(k+1)\Gamma_{k+1,l}^{m,n}(s,t)=a_m(k+1)\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)$

ii) $\max\{k,m\}\, a_m(k)\le a_m(k+1)$

iii) $ka_m(k+1)+k\varphi_m=(k+1)a_m(k)\ (k\in N_o,\ \varphi_m<m, m\to\infty,\ \lim\varphi_m=0)$

iv) $(l+1)\Gamma_{k,l+1}^{m,n}(s,t)=c_n(l+1)\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)$

v) $\max\{l,n\}\, c_n(l)\le c_n(l+1)$

vi) $lc_n(l+1)+l\psi_n=(l+1)c_n(l)\ (l\in N_o, \psi_n<n,\ n\to\infty, \lim\psi_n=0)$

Ayrıca $i=0,1,2,3$ için $f_i(u,v)$, $f_o=1, f_1=u, f_2=v, f_3=u^2+v^2$ olarak tanımlayalım.

Bazı özel seçimler ile (3.7.1) de tanımlanan $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörün, bazı bilinen önemli operatörlerin Modifiye şekillerine dönüşebilir.

Örneğin**,**

$$F_{m,n}(x,y,s,t)=(1-x)^{-m-1}(1-y)^{-n-1},\ a_m(k+1)=m,\ c_n(l+1)=n,\ \Gamma(s,t)=\binom{m+k}{k}\binom{l+n}{l}$$

şeklinde seçildiğinde, (3.8.1) de tanımlanan $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörü,

$$M_{m,n}(f;x,y)=\frac{1}{(1-x)^{-m-1}(1-y)^{-n-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\binom{l+m}{l}x^k y^l\int_l^{l+1}\int_k^{k+1} f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)dzdu$$

şeklinde iki değişkenli Meyer-König ve Zeller operatörünün Kantorovich tipini içeren bir modifiye şekline dönüşür.

Diğer yandan (3.7.1) de tanımlanan $M_{m,n}(f;x,y)$ operatöründe $F_{m,n}(x,y,s,t)=e^{mx}e^{ny}$ ve $a_m(k)=\frac{m^k}{k!},\ c_n(l)=\frac{n^l}{l!},\ \Gamma_{k,l}^{m,n}=1$ olarak seçildiğinde,

$$S_n(f;x,y)=e^{-nm}e^{-ny}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{mx}{k!}^{k}\frac{ny}{y!}^{l}x^k y^l\int_l^{l+1}\int_k^{k+1} f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)dzdu$$

iki değişkenli Szazs operatörünün bir Modifiye Kantorovich Tipli şekli elde edilir.

3.8. $M_{m,n}(f;x,y)$ in Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde, (3.7.1) ile tanımlanan $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörünün Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özelliklerini $f_i(u,v),\ f_o=1,\ f_1=u,\ f_2=v,\ f_3=u^2+v^2$ test fonksiyonları yardımıyla inceleceğiz. Bu işlemleri de $I^2 = 0,A \times 0,B$ olmak üzere $f \in C\ I^2$ fonksiyonları için yapacağız.

$$\left|\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)-(x,y)\right|=\sqrt{\left(\frac{z}{a_m(k)}-x\right)^2+\left(\frac{u}{c_n(l)}-y\right)^2} \qquad (3.8.1)$$

olmak üzere

$$w(f;\delta)=\sup\left\{\left|f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)-f(x,y)\right|;(z,u),(x,y)\in I^2,\left|\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right),(x,y)\right|<\delta\right\}$$

şeklinde tanımlanan w fonksiyonuna f in süreklilik modülü adını veriyoruz. Bu fonksiyon aşağıdaki iyi bilinen özellikleri sağlar.

i) $w(f;\delta)\geq 0$ ve $0<\delta_1<\delta_2$ için $w(f;\delta_1)\leq w(f;\delta_2)$ dir.

ii) $\lim\limits_{\delta\to 0} w(f;\delta)=0$.

Ayrıca her bir $\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)\in I^2$ için, w süreklilik modülü

$$\left|f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)-f(x,y)\right|\leq w(f;\delta)\left(1+\frac{\left|\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)-(x,y)\right|}{\delta}\right) \qquad (3.8.2)$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 3.8.1: $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörü için $f \in C(I^2)$ olmak üzere

$$lim_{m,n\to\infty} \left\| M_{m,n}(f;x,y) - f(x,y) \right\|_{C(I^2)} = 0 \qquad (3.8.3)$$

dır.

İspat:

İspat için $f_i,\ i = 0,1,2,3$ ile verilen test fonksiyonları kullanılacaktır.

Ayrıca, $F_{m,n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$ olduğunu göz önünde tutulacaktır.

$$M_{m,n}(f_0;x,y) = \frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times \int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} 1dzdu$$

$$= \frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times \left(l + \frac{n}{c_n(l+1)} - l \right)\left(k + \frac{m}{a_m(k+1)} - k \right)$$

$$= 1$$

olarak elde edilir.

Şimdi $lim_{m,n\to\infty} \left\| M_{m,n}(f_1;x,y) - f_1(x,y) \right\|_{C(I^2)} = 0$ ve

$lim_{m,n\to\infty} \left\| M_{m,n}(f_2;x,y) - f_2(x,y) \right\|_{C(I^2)} = 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için ii) göz önüne alınarak

$$\frac{1}{a_m(k)a_m(k+1)} \le \frac{1}{m^2}$$

yazılabilir. Ayrıca $(k+1)\Gamma^{m,n}_{k+1,l}(s,t) = a_m(k+1)\Gamma^{m,n}_{k,l}(s,t)$ şeklindeki i) şartı kullanılarak

$$M_{m,n}(f_1;x,y) = \frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma^{m,n}_{k,l}(s,t)x^k y^l$$

$$\times \int_l^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_k^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} \frac{z}{a_m(k)} dz du$$

$$= \frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma^{m,n}_{k,l}(s,t)x^k y^l$$

$$\times \frac{1}{2a_m(k)}\left[l + \frac{n}{c_n(l+1)} - l\right]\left[\left(k + \frac{m}{a_m(k+1)}\right)^2 - k^2\right]$$

$$M_{m,n}(f_1;x,y) = \frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m}\Gamma^{m,n}_{k,l}(s,t)x^k y^l$$

$$\times \frac{1}{2a_m(k)}\left[\frac{2mk}{a_m(k+1)} + \frac{m^2}{a_m{}^2(k+1)}\right]$$

$$M_{m,n}(f_1;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\left[\frac{km}{a_m(k)a_m(k+1)}+\frac{1}{2}\frac{m^2}{a_m(k)\ a_m(k+1)^{\ 2}}\right]$$

$$=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k}{a_m(k)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l+\frac{m}{2F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l}{a_m(k)a_m(k+1)}$$

$$k\to k+1$$

$$=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k+1}{a_m(k+1)}\Gamma_{k+1,l}^{m,n}(s,t)x^{k+1}y^l+\frac{m}{2m^2}$$

$$\leq\frac{x}{F_{m,n}}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l}_{F_{m,n}}+\frac{1}{2m}$$

$$\leq x+\frac{1}{2m}$$

Böylece

$$M_{m,n}(f_1;x,y)\ \leq x+\ \frac{1}{2m}$$

olarak elde edilir. Buradan kolayca $lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f_1;x,y)-f_1(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0$

olduğu görülür.

Benzer şekilde vi) gereğince,

$$\frac{1}{c_n(l)c_n(l+1)}\leq\frac{1}{n^2}$$

yazılabilir. Ayrıca $(l+1)\Gamma_{k,l+1}^{m,n}(s,t)=c_n(l+1)\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)$ iv) özelliği de göz önüne

alınarak

$$M_{m,n}(f_1;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}\frac{z}{a_m(k)}dzdu$$

$$=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\ \frac{1}{2c_n(l)}\left[\frac{2nl}{c_n(l+1)}+\frac{n^2}{c_n^{\,2}(l+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\ \left[\frac{ln}{c_n(l)c_n(l+1)}+\frac{1}{2}\frac{n^2}{c_n(l)\left(c_n(l+1)\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{c_n(l)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l+\frac{n}{2F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)}{c_n(l)c_n(l+1)}x^k y^l$$

$$l\to l+1$$

$$M_{m,n}(f_1;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{c_n(l+1)}\Gamma_{k,l+1}^{m,n}(s,t)x^k y^{l+1}+\frac{n}{2n^2}$$

$$\le\frac{y}{F_{m,n}}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l}_{F_{m,n}}+\frac{1}{2n}$$

$$\le y+\frac{1}{2n}$$

elde edilir. Bu durumda $lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f_1;x,y)-f_1(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0$ olduğu görülür.

Şimdi $lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f_3;x,y)-f_3(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0$ olduğunu gösterelim. Bunun için i), ii) ve v) özelliklerini kullanmamız gerekecektir.

$$M_{m,n}(f_3;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}\left[\left(\frac{z}{a_m(k)}\right)^2+\left(\frac{u}{c_n(l)}\right)^2\right]dzdu$$

$$=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times\left\{\frac{a_m(k+1)}{m}\left[\frac{1}{3\ a_m(k)^{\ 2}}\left(k+\frac{m}{a_m(k+1)}\right)^3-\frac{1}{3}\frac{k^3}{a_m(k)^{\ 2}}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{c_n(l+1)}{n}\left[\frac{1}{3\ c_n(l)^{\ 2}}\left(l+\frac{n}{c_n(l+1)}\right)^3-\frac{1}{3}\frac{l^3}{c_n(l)^{\ 2}}\right]\right\}$$

olur. Gerekli düzenlemeler ve hesaplamalar yapılırsa,

$$M_{m,n}(f_3;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\ \frac{a_m(k+1)}{m}$$

$$\times\left\{\left[\frac{k^2m}{a_m(k)^{\ 2}\,a_m(k+1)}+\frac{km^2}{a_m(k)^{\ 2}\ \ a_m(k+1)^{\ 2}}+\frac{m^3}{3\ a_m(k)^{\ 2}\ \ a_m(k+1)^{\ 3}}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{c_n(l+1)}{n}\left[\frac{l^2n}{c_n(l)^{\ 2}\,c_n(l+1)}+\frac{ln^2}{c_n(l)^{\ 2}\ \ c_n(l+1)^{\ 2}}+\frac{n^3}{3\ c_n(l)^{\ 2}\ \ c_n(l+1)^{\ 3}}\right]\right\}$$

$$M_{m,n}(f_3;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\left[\frac{k^2}{a_m(k)^{\,2}}+\frac{km}{a_m(k)^2 a_m(k+1)}\right]$$

$$k\to k+1$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m^2}{3a_m^2(k)a_m^2(k+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\left[\frac{l^2}{c_n(l)^{\,2}}+\frac{l\,n}{c_n(l)^2 c_n(l+1)}\right]$$

$$l\to l+1$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n^2}{3c_n^2(l)c_n^2(l+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k}{a_m(k)}\underbrace{\frac{k}{a_m(k)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)}_{\Gamma_{k-1,l}^{m,n}}x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{a_m(k)a_m(k+1)}\underbrace{\frac{k}{a_m(k)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)}_{\Gamma_{k-1,l}^{m,n}}x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{3a_m(k)a_m(k+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{c_n(l)}\underbrace{\frac{l}{c_n(l)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)}_{\Gamma_{k,l-1}^{m,n}}x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n}{c_n(l)c_n(l+1)}\underbrace{\frac{l}{c_n(l)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)}_{\Gamma_{k-1,l}^{m,n}}x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{3c_n(l)c_n(l+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$M_{m,n}(f_3;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k}{a_m(k)}\Gamma_{k-1,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$k\rightarrow k+2$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{a_m(k)a_m(k+1)}\Gamma_{k-1,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$k\rightarrow k+1$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{3a_m(k)a_m(k+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{c_n(l)}\Gamma_{k,l-1}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$l\rightarrow l+2$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{n}{c_n(l)c_n(l+1)}\Gamma_{k,l-1}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$l\rightarrow l+1$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n}{3c_n(l)c_n(l+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$M_{m,n}(f_3;x,y)=\frac{x^2}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k+2}{a_m(k+2)}\Gamma_{k+1,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{x}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{a_m(k+1)a_m(k+2)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{3a_m(k)a_m(k+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{y^2}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+2}{c_n(l+2)}\Gamma_{k,l+1}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$M_{m,n}(f_3;x,y)=\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{k}{a_m(k)}\Gamma_{k-1,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$k \to k+2$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{a_m(k)a_m(k+1)}\Gamma_{k-1,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$k \to k+1$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{3a_m(k)a_m(k+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{c_n(l)}\Gamma_{k,l-1}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$l \to l+2$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{n}{c_n(l)c_n(l+1)}\Gamma_{k,l-1}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$l \to l+1$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n}{3c_n(l)c_n(l+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{y}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n}{c_n(l+1)c_n(l+2)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{3c_n(l)c_n(l+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$M_{m,n}(f_3;x,y)=\frac{x^2}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{(k+1)}{a_m(k+1)}+\frac{(k+1)\varphi_m}{a_m(k+1)}\right]\Gamma_{k+1,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{x}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{m}{a_m(k+1)a_m(k+2)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{3a_m(k)a_m(k+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{y^2}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{(l+1)}{c_n(l+1)}+\frac{(l+1)\psi_n}{c_n(l+1)}\right]\Gamma_{k,l+1}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{y}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{n}{c_n(l+1)c_n(l+2)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^{l+1}$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{3c_n(l)c_n(l+1)}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$M_{m,n}(f_3;x,y)\leq\frac{x^2}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y+\frac{x^2\varphi_m}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{x}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{m}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l+\frac{1}{3m^2}$$

$$+\frac{y^2}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l+\frac{y^2\psi_n}{nF_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$+\frac{y}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l+\frac{1}{3n^2}$$

$$\leq\frac{x^2}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(1+\frac{\varphi_m}{m})\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l+\frac{x}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{m}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l+\frac{1}{m^2}$$

$$+\frac{y^2}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(1+\frac{\psi_n}{n})\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\ \frac{y}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l+\frac{1}{n^2}$$

$$=x^2(1+\frac{\varphi_m}{m})+\frac{x}{m}+\frac{1}{m^2}+y^2(1+\frac{\psi_n}{n})+\frac{y}{n}+\frac{1}{n^2}$$

elde edilir. Böylece $m\to\infty,\ n\to\infty$ için,

$$lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f_3;x,y)-f_3(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0$$

olduğu görülür.

Korovkin Teoreminin çok değişkenli durumu Volkov[11] tarafından verilmiştir. $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörünün yakınsaklığını Volkov'un teoremine göre de görebiliriz[11].

Teorem 3.8.2: $M_{m,n}(f;x,y)$ lineer pozitif operatörü için

$$lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f_i;x,y)-f_i(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0,\ i=0,1,2,3 \tag{3.8.4}$$

sağlanıyorsa, o taktirde

$$lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0$$

dir. Burada $f_o=1, f_1=u, f_2=v, f_3=u^2+v^2$ ve $f\in C(I^2)$ dir.

İspat:

f sınırlı olduğundan, $\forall(x,y)\in I^2$ için $|f(x,y)|<R$ olacak biçimde $R>0$ vardır. Ayrıca $f\in C(I^2)$ olduğundan

$$\left|(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)})-\ x-y\ \right|=\sqrt{(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2+(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2}<\delta$$

için $\left|f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)})-f(x,y)\right|<\varepsilon$ olur.

$\forall f\in C(I^2)$ olduğu için $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır, öyle ki $(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)})\in I^2$

olduğunda

$$\left| f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}) - f(x,y) \right| < 2R$$

olur.

İkinci olarak $(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}) \in C\ I^2$, $\sqrt{(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2+(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2} \geq \delta$ olduğunda $(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2+(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2 \geq \delta^2$ olur. Bu durumda da

$$\left| f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}) - f(x,y) \right| < \frac{2R}{\delta^2}\left[(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2+(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2 \right] \tag{3.8.5}$$

yazılabilir.

Böylece $(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}),\ (x,y) \in (I^2)$ ve $f \in C(I^2)$ için

$$\left| f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}) - f(x,y) \right| < \varepsilon + \frac{2R}{\delta^2}\left[(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2+(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2 \right] \tag{3.8.6}$$

yazılabilir.

$M_{m,n}(f;x,y)$ operatörü lineer ve pozitif olduğu için

$$\left| M_{m,n}(f;x,y) - f(x,y) \right| = \left| M_{m,n}(f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)});x,y) - M_{m,n}(f(x,y);x,y) + M_{m,n}(f(x,y);x,y) - f(x,y) \right|$$

yazılabilir. Bu eşitlik için operatörün monotonluğunu da göz önüne alınıp normun üçüncü özelliğini kullanırsak

$$\left| M_{m,n}(f;x,y) - f(x,y) \right| \leq \left| M_{m,n}(f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)});x,y) - f(x,y) \right|$$

$$+ \left| M_{m,n}(f(x,y);x,y) - f(x,y) \right|$$

$$\left|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq M_{m,n}\left(\left|f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)-f(x,y)\right|;x,y\right)$$

$$+\left|f(x,y)\right|\left|M_{m,n}(f_0;x,y)-f_0(x,y)\right| \tag{3.8.7}$$

olur ve (3.8.6) ı kullanarak

$$\left|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq M_{m,n}(\varepsilon;x,y)+\frac{2R}{\delta^2}M_{m,n}\left[\left(\frac{z^2}{a_m{}^2(k)}+\frac{u^2}{c_n{}^2(l)};x,y\right)\right]$$

$$-2\frac{2R}{\delta^2}M_{m,n}\left[\frac{z}{a_m(k)}x+\frac{u}{c_n(l)}y\right]$$

$$+\frac{2R}{\delta^2}M_{m,n}\left[x^2+y^2\right]+\left|f(x,y)\right|\left|M_{m,n}(f_0;x,y)-f_0(x,y)\right|$$

$$\leq M_{m,n}\left(\left|\varepsilon+\frac{2R}{\delta^2}\left[\left(\frac{z}{a_m(k)}-x\right)^2+\left(\frac{u}{c_n(l)}-y\right)^2\right]\right|;x,y\right)$$

$$+\left|f(x,y)\right|\left|M_{m,n}(f_0;x,y)-f_0(x,y)\right|$$

$$\leq M_{m,n}(\varepsilon;x,y)+\frac{2R}{\delta^2}M_{m,n}\left[\left(\frac{z}{a_m(k)}-x\right)^2;x,y)\right]$$

$$+\frac{2R}{\delta^2}M_{m,n}\left[\left(\frac{u}{c_n(l)}-y\right)^2\right]$$

$$+\left|f(x,y)\right|\left|M_{m,n}(f_0;x,y)-f_0(x,y)\right|$$

$$\left|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq M_{m,n}(\varepsilon;x,y)+\frac{2R}{\delta^2}M_{m,n}\left[(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2;x,y)\right]$$

$$+\frac{2R}{\delta^2}M_{m,n}\left[(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2\right]$$

$$+\left|f(x,y)\right|\left|M_{m,n}(f_0;x,y)-f_0(x,y)\right|$$

$$\left|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq M_{m,n}(\varepsilon;x,y)$$

$$+\frac{2R}{\delta^2}\left[\frac{z^2}{a_m{}^2(k)}-2\frac{z}{a_m(k)}x+x^2+\frac{u^2}{c_n{}^2(l)}-2\frac{u}{c_n(l)}y+y^2\right]$$

$$+\left|f(x,y)\right|\left|M_{m,n}(f_0;x,y)-f_0(x,y)\right|$$

$$\leq\varepsilon+M_{m,n}(\varepsilon;x,y)+\frac{2R}{\delta^2}M_{m,n}(f_3;x,y)$$

$$-\frac{4Rx}{\delta^2}M_{m,n}(f_1;x,y)-\frac{4Ry}{\delta^2}M_{m,n}(f_2;x,y)$$

$$+\left|f(x,y)\right|\left|M_{m,n}(f_0;x,y)-f_0(x,y)\right|$$

yazılabilir. Yukarıdaki son eşitsizliğin, $(x,y)\in I^2$ de supremumu alınır ve

Teoremde verilen

$$lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f_i;x,y)-f_i(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0,\ i=0,1,2,3$$

özellikleri kullanılırsa,

$lim_{m,n\to\infty}\left\|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C(I^2)}=0$ olur ki bu istenilen sonuçtur.

3.9. $M_{m,n}(f;x,y)$ Operatörünün Yaklaşım Hızı

Bu bölümde $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörünün yaklaşım hızı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

Teorem 3.9.1: $M_{m,n}(f;x,y)$ (3.7.1) ile tanımlanan operatör olmak üzere her $f \in C(I^2)$ için

$$\left\| M_{m,n}(f;x,y) - f(x,y) \right\|_{C(I^2)} \leq (1+K^{1/2}) w(f;\delta_{m,n})$$

dır, burada $K = \max\{A, A^2, B, B^2\}$, $\delta_{m,n} = \left(\frac{\varphi_m}{m} + \frac{\psi_n}{n} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$ ve $w(f;\delta_{m,n})$, f nin süreklilik modülüdür.

İspat:

$M_{m,n}(f;x,y)$ operatörü lineer ve monoton olduğundan

$$\left| M_{m,n}(f;x,y) - f(x,y) \right|_{C(I^2)} \leq M_{m,n}\left(\left| f(\frac{z}{a_m(k)}, \frac{u}{c_n(l)}) - f(x,y) \right| ; x,y \right)$$

$$M_{m,n}\left(\left| f(\frac{z}{a_m(k)}, \frac{u}{c_n(l)}) - f(x,y) \right| ; x,y \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m} \frac{c_n(l+1)}{n} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) x^k y^l \tag{3.9.1}$$

$$\times \int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} \left| f(\frac{z}{a_m(k)}, \frac{u}{c_n(l)}) - f(x,y) \right| dz du$$

yazılabilir. (3.8.1) ve (3.8.2) göz önüne alınıp

$\delta_{m,n} = \sqrt{(\frac{z}{a_m(k)} - x)^2 + (\frac{u}{c_n(l)} - y)^2}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\left| M_{m,n}(f;x,y) - f(x,y) \right|_{C(I^2)}$$

$$\leq \frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m} \frac{c_n(l+1)}{n} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) x^k y^l$$

$$\times \int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} w(f; \sqrt{(\frac{z}{a_m(k)} - x)^2 + (\frac{u}{c_n(l)} - y)^2})dzdu$$

$$\leq w(f;\delta_{m,n}) \left(1 + \frac{\frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m} \frac{c_n(l+1)}{n} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) x^k y^l}{\delta_{m,n}} \right.$$

$$\left. \times \int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} \sqrt{(\frac{z}{a_m(k)} - x)^2 + (\frac{u}{c_n(l)} - y)^2 dzdu} \right)$$

$$\leq w(f;\delta_{m,n}) \left(1 + \frac{1}{\delta_{m,n}} \left[\frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m} \frac{c_n(l+1)}{n} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) x^k y^l \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} \sqrt{(\frac{z}{a_m(k)} - x)^2 + (\frac{u}{c_n(l)} - y)^2 dzdu} \right] \right)$$

olur. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right|_{C(I^2)}$$

$$\leq w(f;\delta_{m,n})\left\{1+\frac{1}{\delta_{m,n}}\left[\frac{1}{F_{m,n})}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}\left(\sqrt{(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2+(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2}\right)^2 dzdu\right]^{1/2}\right\}$$

$$\times\underbrace{\left[\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}dzdu\right]^{1/2}}_{g=1}$$

$$\leq w(f;\delta_{m,n})\left\{1+\frac{1}{\delta_{m,n}}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2+(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2 dzdu\right)^{1/2}\right\}$$

$$=w(f;\delta_{m,n})\left\{1+\frac{1}{\delta_{m,n}}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}\left[\frac{z^2}{(a_m(k))^2}-\frac{2zx}{a_m(k)}+\frac{u^2}{(c_n(l))^2}-\frac{2uy}{c_n(l)}+y^2\right]dzdu\right)^{1/2}\right\}$$

$$=w(f;\delta_{m,n})\left\{1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_{m,n}}\left(M_{m,n}(f_3;x,y)-2xM_{m,n}(f_1;x,y)-2yM_{m,n}(f_2;x,y)+(x^2+y^2)M_{m,n}(f_0;x,y)\right)^{1/2}\right\}$$

elde edilir. Daha sonra $i=0,1,2,3,\ M_{m,n}(f_i;x,y)$ değerleri yerine yazılırsa

$$\left|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right|_{C(I^2)}\leq w(f;\delta_{m,n})\ 1+\frac{1}{\delta_{m,n}}$$

(3.9.2)

$$\times\left((x^2(1+\varphi_m)+\frac{x}{m}+\frac{1}{m^2}+y^2(1+\psi_n)+\frac{y}{n}+\frac{1}{n^2}-2x(x+\frac{\varphi_m}{2m})-2y(y+\frac{\psi_n}{2n})+x^2+y^2\right)^{1/2}\Bigg\}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin supu alınır, $K=\max\{A,A^2,B,B^2\}$ değeri yerine yazılırsa;

$$\left|M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right|_{C(I^2)}$$

$$\leq w(f;\delta_{m,n})$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{\delta_{m,n}}\sup\left(x^2\varphi_m+\frac{x}{m}+\frac{1}{m^2}+y^2+y^2\psi_n+\frac{y}{n}+\frac{1}{n^2}-2x^2-x\frac{\varphi_m}{m}-2y^2-\frac{\psi_n}{n}+x^2+y^2\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leq w(f;\delta_{m,n})\left\{1+\frac{\sqrt{K}}{\delta_{m,n}}\underbrace{\left(\frac{\varphi_m}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{\psi_n}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}}_{=\delta_{m,n}}\right\}$$

$$=w(f;\delta_{m,n})(1+K^{1/2})$$

sonucu elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi $0<\alpha\leq 1$ aralığında tanımlı ve $Li\widetilde{p}_M(\alpha)$ şeklinde gösterilen Modifiye Lipschitz sınıfını kullanarak operatörünün yaklaşım hızını inceleyelim. Bunun için Altın ve arkadaşları(12) tarafından yapılan çalışmalarda verilen Modifiye Lipschitz sınıfını hatırlayalım.

$$\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right),\ (x,y)\in I^2,\ \ R>0,\ f\in C(I^2)$$ için

$$\left| f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)-f(x,y)\right| \leq R\left|\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)-(x,y)\right|^{\alpha} \qquad (3.9.3)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfa *Modifiye Lipschitz sınıfı* denmektedir. Ayrıca $Lip_M(\alpha)\subset Li\tilde{p}_M(\alpha)$ dır[12].

Teorem (3.9.2): $M_{m,n}\ f;x,y$ şeklinde tanımlanan operatör ve $K=max\ A,A^2,B,B^2\ ,\ R>0$ ve $\delta_{m,n}=\left(\frac{\varphi_m}{m}+\frac{\psi_n}{n}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$ olmak üzere, $f\in Li\tilde{p}_M(\alpha)$ sınıfındaki her bir f için,

$$\left\| M_{m,n}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C(I^2)}\leq RK^{1/2}\delta_{m,n}{}^{\alpha}$$

dır.

İspat:

$f\in Li\tilde{p}_M(\alpha)$ olsun. $M_{m,n}\ f;x,y$ nin lineer ve pozitif olması ile (3.9.3) ifadesi de yerine yazıldığında

$$\left| M_{m,n}\left(f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right);x,y\right)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}\left| f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right)-f(x,y)\right| dzdu$$

$$\left|M_{m,n}(f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)});x,y)-f(x,y)\right| \leq \frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times \int_l^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_k^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}\left|f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)})-f(x,y)\right| dzdu$$

$$\left|M_{m,n}(f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)});x,y)-f(x,y)\right| \leq \frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times \int_l^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_k^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} R\left|(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)})-(x,y)\right|^{\alpha} dzdu$$

olur.

$$\left|M_{m,n}(f(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)});x,y)-f(x,y)\right| \leq \frac{R}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l \tag{3.9.4}$$

$$\times \int_k^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}\int_l^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\left|(\frac{z}{a_m(k)}-x)^2+(\frac{u}{c_n(l)}-y)^2\right|^{\alpha} dzdu$$

yazılabilir.

Bu son eşitsizliğe $p=\frac{2}{\alpha}, q=\frac{2}{2-\alpha}$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| M_{m,n}(f(\frac{z}{a_m(k)}, \frac{u}{c_n(l)}); x,y) - f(x,y) \right|$$

$$\le \frac{R}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m} \frac{c_n(l+1)}{n} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) x^k y^l$$

$$\times \int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} \left| (\frac{z}{a_m(k)} - x)^2 + (\frac{u}{c_n(l)} - y)^2 \right|^{\alpha} .1.dzdu$$

$$\le R \left[\frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m} \frac{c_n(l+1)}{n} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) x^k y^l \right.$$

$$\left. \times \int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} (\frac{z}{a_m(k)} - x)^2 + (\frac{u}{c_n(l)} - y)^2 dzdu \right]^{\alpha/2}$$

$$\times \left[\underbrace{ \frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m} \frac{c_n(l+1)}{n} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) x^k y^l \int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}} \int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}} dzdu }_{g=1} \right]^{\alpha/2-\alpha}$$

$$\left| M_{m,n}(f(\frac{z}{a_m(k)}, \frac{u}{c_n(l)}); x,y) - f(x,y) \right|$$

$$\le R \left[\frac{1}{F_{m,n}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_m(k+1)}{m} \frac{c_n(l+1)}{n} \Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t) x^k y^l \right.$$

$$\left. \times (\frac{z^2}{a_m{}^2(k)} - \frac{2xz}{a_m(k)} + x^2) + (\frac{u^2}{c_n{}^2(l)} - \frac{2yu}{c_n(l)} - y^2) dzdu \right]^{\alpha/2} dzdu$$

$$= R \left[M_{m,n}(f_3; x,y) - 2x M_{m,n}(f_1; x,y) \right.$$

$$\left. -2y M_{m,n}(f_2; x,y) + (x^2 + y^2) M_{m,n}(f_0; x,y) \right]^{\alpha/2}$$

olur. Daha sonra,

$$\left| M_{m,n}\left(f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right);x,y\right) - f(x,y)\right|$$

$$= R\left[\left(x^2(1+\varphi_m) + \frac{x}{m} + \frac{1}{m^2} + y^2(1+\psi_n) + \frac{y}{n} + \frac{1}{n^2} \right.\right.$$

$$\left.\left. -2x\left(x+\frac{\varphi_m}{2m}\right) - 2y\left(y+\frac{\psi_n}{2n}\right) + x^2 + y^2 \right)\right]^{\alpha/2}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin supremumu alınır ve $K = max\{A, A^2, B, B^2\}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\left| M_{m,n}\left(f\left(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)}\right);x,y\right) - f(x,y)\right|$$

$$= R\left[x^2(1+\varphi_m) + \frac{x}{m} + \frac{1}{m^2} + y^2(1+\psi_n) \right.$$

$$\left. + \frac{y}{n} + \frac{1}{n^2} - 2x\left(x+\frac{\varphi_m}{2m}\right) - 2y\left(y+\frac{\psi_n}{2n}\right) + x^2 + y^2 \right]^{\alpha/2}$$

$$= R\left[sup(x^2 + x^2\varphi_m + \frac{x}{m} + \frac{1}{m^2} \right.$$

$$\left. + y^2 + y^2\psi_n + \frac{y}{n} + \frac{1}{n^2} - 2x^2 - x\frac{\varphi_m}{m} - 2y^2 - \frac{\psi_n}{n} + x^2 + y^2 \right]^{\alpha/2}$$

$$\leq RK^{1/2}\delta_{m,n}{}^{\alpha}$$

elde edilir. Bu da istenen sonucu verir.

3.10. $M_{m,n}\ f;x,y$ Operatörünün Kısmi Türevli Denklemlere Uygulanışı

Bu bölümde tanımlanan operatörün kısmi diferansiyel denklemlere uygulanışı üzerinde durulmuştur.

Teorem 3.10.1: $g(\frac{z}{a_m(k)},\frac{u}{c_n(l)})=k+l$ olmak üzere (3.7.1) de tanımlanan

$M_{m,n}\ f;x,y$ operatörü

$$\left(x\frac{\partial M_{m,n}}{\partial x}+y\frac{\partial M_{m,n}}{\partial y}\right)=\frac{1}{F_{m,n}}\left(-x\frac{\partial M_{m,n}}{\partial x}-y\frac{\partial M_{m,n}}{\partial y}\right)M_{m,n}(f,x,y)+M_{m,n}(fg;x,y)$$

kısmi türevli denklemini gerçekler. Burada $(x,y)\in I^2$ ve $f\in C(I^2)$ dir.

İspat:

$f\in C(I^2)$ olduğundan, (3.7.1) in kuvvet serisi I^2'de yakınsaktır. Bundan dolayı, $M_{m,n}(f;x,y)$, I^2 de terim terime türevlenebilirdir. $M_{m,n}(f;x,y)$ operatörünün her iki yanının x e göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial x}M_{m,n}(f;x,y)=\frac{-\frac{\partial}{\partial x}F_{m,n}}{F^{2}_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma^{m,n}_{k,l}(s,t)x^{k}y^{l}$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}f\left(\frac{z}{a_m\ k},\frac{u}{c_n\ l}\right)dzdu$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma^{m,n}_{k,l}(s,t)kx^{k-1}y^{l}$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}f\left(\frac{z}{a_m\ k},\frac{u}{c_n\ l}\right)dzdu$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanı x ile çarpılırsa,

$$x\frac{\partial}{\partial x}M_{m,n}(f;x,y)=\frac{-x\frac{\partial}{\partial x}F_{m,n}}{F^{2}_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma^{m,n}_{k,l}(s,t)x^{k}y^{l}$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}f\left(\frac{z}{a_m\ k},\frac{u}{c_n\ l}\right)dzdu$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma^{m,n}_{k,l}(s,t)kx^{k}y^{l}$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}f\left(\frac{z}{a_m\ k},\frac{u}{c_n\ l}\right)dzdu$$

olur. Bu durumda

$$x\frac{\partial}{\partial x}M_{m,n}(f;x,y)=\frac{-x\frac{\partial}{\partial x}F_{m,n}}{F_{m,n}}M_{m,n}(f;x,y)$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l \tag{3.10.1}$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}kf\left(\frac{z}{a_m\ k},\frac{u}{c_n\ l}\right)dzdu$$

yazılabilir. Aynı şekilde $M_{m,n}(f;x,y)$ için y ye göre türev alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial y}M_{m,n}(f;x,y)=\frac{-\frac{\partial}{\partial y}F_{m,n}}{F_{m,n}^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}f\left(\frac{z}{a_m\ k},\frac{u}{c_n\ l}\right)dzdu \tag{3.10.2}$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^{l-1}$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}lf\left(\frac{z}{a_m\ k},\frac{u}{c_n\ l}\right)dzdu$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı y ile çarpılırsa

$$y\frac{\partial}{\partial y}M_{m,n}(f;x,y)=\frac{-y\frac{\partial}{\partial y}F_{m,n}}{F_{m,n}}M_{m,n}(f;x,y)$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}lf\left(\frac{z}{a_m\ k},\frac{u}{c_n\ l}\right)dzdu$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$x\frac{\partial}{\partial y}M_{m,n}(f;x,y)+y\frac{\partial}{\partial y}M_{m,n}(f;x,y)=\frac{-\frac{\partial}{\partial x}F_{m,n}}{F_{m,n}}M_{m,n}(f;x,y)$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{k}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}kf\left(\frac{z}{a_m\;k},\frac{u}{c_n\;l}\right)dz$$

$$+\frac{-y\frac{\partial}{\partial y}F_{m,n}}{F_{m,n}}M_{m,n}(f;x,y)$$

$$+\frac{1}{F_{m,n}}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_m(k+1)}{m}\frac{c_n(l+1)}{n}\Gamma_{k,l}^{m,n}(s,t)x^k y^l$$

$$\times\int_{l}^{l+\frac{n}{c_n(l+1)}}\int_{lk}^{k+\frac{m}{a_m(k+1)}}lf\left(\frac{z}{a_m\;k},\frac{u}{c_n\;l}\right)dzdu$$

olur ve $g\left(\frac{z}{a_m\;k},\frac{u}{c_n\;l}\right)=k+l$ olduğu da dikkate alınıp operatörün tanımı göz önüne alınırsa,

$$\left(x\frac{\partial M_{m,n}}{\partial x}+y\frac{\partial M_{m,n}}{\partial y}\right)=\frac{1}{F_{m,n}}\left(-x\frac{\partial M_{m,n}}{\partial x}-y\frac{\partial M_{m,n}}{\partial y}\right)M_{m,n}(f,x,y)+M_{m,n}(fg;x,y)$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülür.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada önce lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri ve yaklaşım teorilerine temel olan Korovkin teoremi verilmiş, süreklilik modülü ve Lipschitz tipi maksimal fonksiyonlardan bahsedilmiştir. Daha sonra lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özelliklerinden bahsetmek için doğurucu fonksiyonları ve pozitif lineer operatörlerin merkez momentlerin bulunmuş ve süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı elde edilmiştir. Son olarak da iki değişkenli Modifiye Kantorovich tipli bir lineer pozitif operatör tanımlanmış ve bu operatörün yaklaşım özelliklerine bakılmıştır.

Sonuç olarak operatörlerin yaklaşım özellikleri, yaklaşım hızı ve yakınsaklığı lineer pozitif operatörler sınıfı için önemli bir çalışma alanıdır. İki değişkenli, fonksiyonlar için de benzer çalışmalar yürütülmektedir. Bu tezde de bu tip çalışmaların belirli bir kısmının incelenmesi yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. O.Doğru, J. Math. Anal. Aprox. No:1, **342**, 161170.(2008).
2. F. Taşdelen, A. Erençin, J. Math. Anal. Appl.,**331**, No.1, 727-735. (2007).
3. M.A.Özarslan ,O. Duman, H.M.Srivastava, Math. Comp. Model., N.S., no. **3- 12** 359-368. (1998).
4. P.P.Korovkin, Linear operators and approximation theory, Hindustan Publish Co.,Delphi. (1960).
5. B. Lenze, Hungary, Colloq. Math. Soc. Ja′ nos Bolyai **58**, 469-496. (1990).
6. O. Doğru, M. A. Özarslan and F. Taşdelen, Stud. Sci. Math. Hungarica **41(4),** 415-429. (2004).
7. H. Hacısalihoğlu, A. Hacıyev. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı,A.Ü.F.F.Döner Sermaye İşletmesi Yayınları.**No:31**, Ankara (1995).
8. E. W. Chenay, A. Sharma, Canad.J.Math. **16** 241-252. (1964).
9. M. K. Khan, J. Approx. Theory **57**, 90-103. (1989)
10. A. Altın, O.Doğru and M.A.Özarslan, WSEAS Trans. Math. **3**, 607-610. (2004).
11. V.I.Volkov, Russian Dokl. Akad. Nauk SSSR(N.S) **115**, 17-19. (1957).
12. A. Altın, O.Doğru and F.Taşdelen, J. Math. Anal. Appl. **312**, 181-194 (2005).