KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİE GRUPLARI VE LİE DÖNÜŞÜM GRUBU OLARAK ETKİLERİ

MAHMUT YASİN DÜLGER

OCAK 2010

ÖZET

LİE GRUPLARI VE LİE DÖNÜŞÜM GRUBU OLARAK ETKİLERİ

DÜLGER Mahmut Yasin
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Ocak 2010, 61 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında kısa bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde bir sonraki bölümde kullanılacak temel kavramlar ele alınmıştır. Üçüncü bölümde Lie grupları tanıtılmış, Lie gruplarının topolojik özellikleri, Lie altgrupları, bir Lie grubunun Lie cebiri, Lie grup etkileri ve özellikleri, vektör alanlarının Lie cebiri, Lie grup etkisi altındaki yörüngeler incelenmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Diferensiyellenebilir Manifoldlar, Lie Grupları, Lie Grup Etkileri

ABSTRACT

LIE GROUPS AND THEIR ACTIONS AS LIE TRANSFORMATIONS GROUPS

DÜLGER Mahmut Yasin
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics,M. Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
January 2010, 61 pages

This thesis consists of four parts. In the first chapter, the aim of the thesis and a brief information about the resources are given. In the second section, basic concepts that will be used in the following sections are addressed. In third chapter, Lie groups are introduced, topological properties of Lie groups, Lie subgroups, Lie algebra of a Lie group, Lie group actions and properties, Lie algebra of vector fields, orbits under Lie group actions are investigated. The fourth section is reserved for discussions and results.

Key Words : Differentiable Manifolds, Lie Groups, Lie Group Actions

TEŞEKKÜR

Bana çalışma olanağı sağlayan ve yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN 'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1.GİRİŞ

Bir Lie grubu hem bir grup, hem de bir manifolddur. Dolayısıyla bir Lie grubunun birbiri ile ilgili olan hem cebirsel hem topolojik hem de bir geometrik yapısı vardır. Buna göre Lie grupları incelenirken matematiğin bu üç dalıyla ilgili yapılar çalışılmaktadır. Bu tezde Lie grupları ve Lie dönüşüm grubu olarak etkileri ele alınmış ve örneklendirilerek incelenmiştir.

1.1 Tezin Amacı

Lie grupları ve Lie dönüşüm grubu olarak bir manifold üzerindeki etkilerinin özellikleriyle birlikte örneklendirilerek incelenmesi amaçlanmıştır.

1.2 Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Differentiable Manifolds (R. S. Clark and F. Brickell), Lineer Cebir (H. H. Hacısalihoğlu) ve Diferensiyel Geometri (A. Sabuncuoğlu) kitaplarından faydalanılmıştır. R. S. Clark ve F. Brickell Differentiable Manifolds adlı kitabında bir manifoldun topolojisini, Lie gruplarını ve Lie dönüşüm grubu altındaki etkilerini almıştır. Lie grup etkilerinin bazı özellikleri ve örnekleri için An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry (W. M. Boothby) ve Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş (H. H. Hacısalihoğlu) adlı kitaplardan faydalanılmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1 (*Topoloji, Topolojik Uzay*) :

S bir cümle ve $P(S)=\{A : A \subseteq S\}$ olmak üzere $\tau \subseteq P(S)$ olsun.

Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanıyor ise,

τ cümlesine S üzerinde bir *topoloji*, (S,τ) ya da *topolojik uzay* adı verilir.

I. $\varnothing, S \in \tau$

II. $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$, $A_i \in \tau$

III. $\bigcap_{i\in I} A_i \in \tau$, $A_i \in \tau$, $I=\{1,2,...,n\}$

Tanım 2.1.2 (*Temel Açık Cümle, Topolojik Baz*):

(S,τ) bir topolojik uzay ve $B=\{B_i : B_i \in \tau\}$ olsun.

Eğer,

I. $S=\bigcup_{i\in I} B_i$, $B_i \in B$

II. $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i\in I} B_i$, $B_i \in B$

İse B_i cümlesine *temel açık cümle*, B ailesine de S topolojisinin bir *bazı* denir.

Tanım 2.1.2 (*Komşuluk*): (S,τ) bir topolojik uzay ve $s \in S$ olsun. $s \in U \subset S$ olacak şekilde U açık altcümlesine s noktasının bir *komşuluğu* denir.

$s \in S$ nin komşulukları ailesini $\vartheta(s)$ ile göstereceğiz

$U \in \vartheta(s) \Leftrightarrow s \in U,\ U \in \tau$ dur.

Tanım 2.1.3 (*İki Fonksiyonun Kartezyen Çarpımı*): $f: A \to B$, $g: C \to D$ iki fonksiyon olsun.

$$f \times g : A \times C \to B \times D$$

$$(p,q) \mapsto (f(p), g(q))$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.4 (*Global Fonksiyon*): S ve T boş cümleden farklı iki cümle ve $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. $Domf = S$ ise f fonksiyonuna *global fonksiyon* denir.

Tanım 2.1.5 (*Sürekli Fonksiyon*): S ve T iki topolojik uzay $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonu $s \in S$ de *süreklidir* $\Leftrightarrow$ $\forall V \in \vartheta(f(s))$ için $\exists U \in \vartheta(s) \ni f(U) \subset V$ dir.

Tanım 2.1.6 (*Homeomorfizm*): S ve T iki topolojik uzay $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon sürekli, birebir ve açık ise f fonksiyonuna bir *homeomorfizm* denir.

Tanım 2.1.7 (*Altcümle Topolojisi*): (S,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset S$ olsun. Bu durumda $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ koleksiyonu A cümlesi üzerinde bir topolojidir.

Bu topolojiye A cümlesi üzerinde tanımlı *altcümle topolojisi* denir.

Tanım 2.1.8 (*Ayırma aksiyomları*): (S,τ) bir topolojik uzay olsun.

$T_1 : \forall p,q \in S$ için $p \neq q$ olmak üzere $\exists U \in \vartheta(p), \exists V \in \vartheta(q)$ için $p \notin V$ ve $q \notin U$ dir.

$T_2 : \forall p,q \in S$ için $p \neq q$ olmak üzere $\exists U \in \vartheta(p), \exists V \in \vartheta(q)$ $\ni$ $U \cap V = \varnothing$ dir.

T_2 ayırma aksiyomunu sağlayan bir topolojik uzay T_1 ayırma aksiyomunu sağlar.

T_2 ayırma aksiyomunu sağlayan bir topolojik uzaya *Hausdorff* uzayı denir.

Tanım 2.1.9 (*İrtibatlı uzay*): (S,τ) bir topolojik uzay olmak üzere, S ayrık iki açığının birleşimi olarak yazılamıyorsa *S irtibatlıdır* denir.

(S,τ) topolojik uzayı irtibatlıdır $\Leftrightarrow$ $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ olacak şekilde $\forall U_1, U_2 \in \tau$ için $\mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2 \neq \mathrm{S}$ dir.

Teorem 2.1.1 S irtibatlı ise S nin boş cümleden farklı hem açık hem kapalı altcümlesi S ye eşit olmak zorundadır.

2.2. Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1 (*Diferensiyellenebilir fonksiyon*): $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ uzayının koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olsun. $1 \leq i \leq n$ için $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_i &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ p &\mapsto x_i(p) = p_i \end{aligned}$$

dir. p noktasında f nin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koordinat fonksiyonlarına göre kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna p noktasında *diferensiyellenebilirdir* denir.

$\mathbb{R}^n$ nin her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonu C^∞ *sınıfındandır* denir.

$$\begin{tikzcd} f:\mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[dr, "f_j = \pi_j \circ f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\pi_j"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

f fonksiyonu $z \in Dom(f) \subset \mathbb{R}^n$ de C^∞ sınıfındandır $\Leftrightarrow$ $1 \leq j \leq m$ için $\forall f_j$ fonksiyonu $z \in Dom(f) \subset \mathbb{R}^n$ de C^∞ sınıfındandır.

$$f=(f_1,f_2,\ldots,f_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

$$z\mapsto f(z)=(f_1(z),f_2(z),\ldots,f_m(z))$$

Tanım 2.2.2 (*Jakobien Matris*): $\mathbb{R}^n$ uzayının koordinat fonksiyonları $x_1,x_2,\ldots,x_n$ olsun.

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$$

fonksiyonu C^∞ sınıfından olmak üzere f fonksiyonunun jakobien matrisi

$$J_f:\mathbb{R}^n\to M(k\times n,\mathbb{R})=\mathbb{R}^k_n$$

$$z\mapsto J_f(z)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{k\times n}$$

fonksiyonu ile tanımlanır.

Teorem 2.2.1 (*Kapalı Fonksiyon Teoremi*):

$$f:\ \mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q\cong\mathbb{R}^{p+q}\to\mathbb{R}^p$$

C^∞ sınıfından olmak üzere ve

$$f(a,b)=0,\ det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\neq 0 \qquad (i,j=1,2,\ldots,p)$$

özelliğine sahip bir nokta $(a,b)\in Dom\,f$ ise; $\exists V\in\vartheta(a),\exists W\in\vartheta(b)\ni$

$\forall w\in W$ için $\exists v\in V\ni f(v,w)=0$ dır.

$\chi:W\subset\mathbb{R}^q\to V\subset\mathbb{R}^p \qquad w\mapsto\chi(w)=v$ fonksiyonu C^∞ sınıfındandır $\ni f(v,w)=0$

Tanım 2.2.3 (*Diffeomorfizm*): $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olmak üzere

I. f birebirdir.
II. f diferensiyellenebilir
III. f^{-1} diferensiyellenebilir

ise f ye *diffeomorfizm* denir.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.3.1 (*Harita*): M bir cümle olsun ve

$$x: M \to \mathbb{R}^n$$

fonksiyonu için $Dom\, x = U$ olmak üzere aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyor ise (U,x) ye M de bir *n-boyutlu harita* denir.

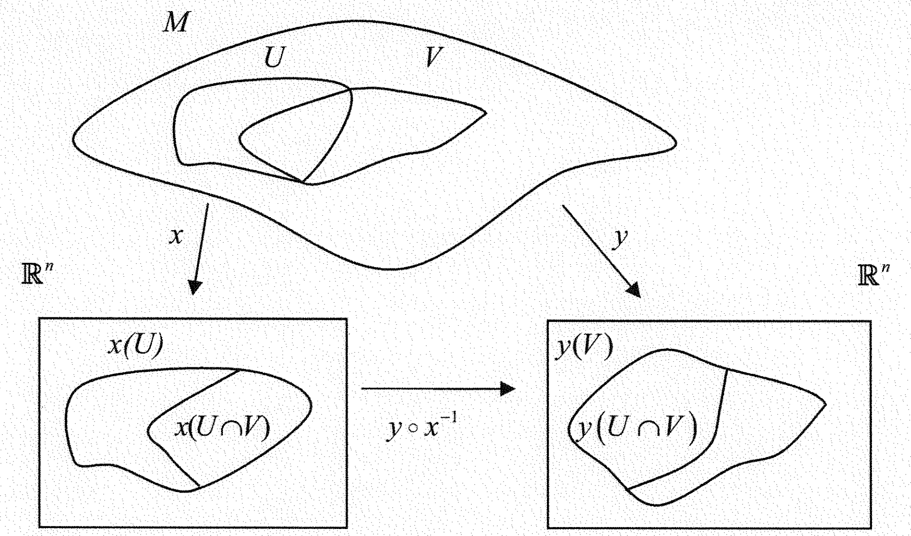
H_1) x, birebirdir.

H_2) $x(U)$, $\mathbb{R}^n$ de açıktır.

Tanım 2.3.2 (*Haritaların Uyumluluğu*): (U,x), (V,y), M de $U \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde herhangi iki harita olsun. (Şekil 2.3.1)

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

biçiminde verilen $y \circ x^{-1}$ dönüşümü bir diffeomorfizm ise (U,x) ile (V,y) haritaları *uyumludur* denir.



(Şekil 2.3.1)

Tanım 2.3.3 (C^∞*-Atlas*): $A = \{(U_i, x_i) : i \in I\}$ M nin haritalarının bir koleksiyonu olsun. Eğer aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyor ise A ya M nin bir C^∞*-atlası* denir.

A_1) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$

A_2) $\forall i, j$ için (U_i, x_i) ve (U_j, x_j) uyumludur.

Tanım 2.3.4 (*Denk Atlas*): M bir cümle A_1 ve A_2, M nin iki C^∞-atlası olsun $A_1 \cup A_2$ de M nin bir C^∞-atlası ise A_1 ve A_2 atlaslarına M de denk atlaslar denir.

Tanım 2.3.5 (*Tam Atlas*): M cümlesinin bir C^∞-atlası, M nin hiçbir C^∞-atlası tarafından ihtiva edilmiyorsa bu atlasa M nin bir tam atlasıdır denir.

Teorem 2.3.1: Bir diferensiyellenebilir manifoldun her C^∞-atlası bir tek tam atlas tarafından kapsanır.

Sonuç 2.3.1: Bir diferensiyellenebilir manifoldun denk atlasları aynı tam atlas içerisinde bulunur. Dolayısıyla her bir tam atlas bir denklik sınıfıdır.

Tanım 2.3.6 (*Diferensiyellenebilir Manifold*): Bir M cümlesinin bir C^∞-tam atlasına M de bir n-boyutlu C^∞-yapı denir. Bu yapı ile birlikte M ye *n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold* adı verilir

Örnek 2.3.1: $\mathbb{R}$ nin 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısı belirttiğini gösterilim.

$M = \mathbb{R}$ olsun

$$x = \underbrace{id}_{\text{özdeşlik}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$s \mapsto x(s) = s$ olmak üzere

H$_1$) x birebirdir.

H$_2$) $x(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ açıktır.

O halde $(\mathbb{R}, x)$, $\mathbb{R}$ nin bir haritadır. $A = \{(\mathbb{R}, x)\}$ olsun;

A$_1$) Örtü aksiyomu aşikardır.

A$_2$) $x \circ x^{-1} = x$ diffeomorfizmdir.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "x"] & \\ \mathbb{R} \arrow[rr, "x \circ x^{-1} = x"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$A = \{(\mathbb{R}, x)\}$ $\mathbb{R}$ nin bir C^∞-atlasıdır.

Bu atlasın belirttiği C^∞-yapı ile birlikte $\mathbb{R}$, 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Örnek 2.3.3: ***(Çarpım Manifoldu)***

M_1 m-boyutlu ve M_2 n-boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold olsun.

M_1 ve M_2 deki C^∞-yapılar sırasıyla A_1 ve A_2 olsun.

$A_1 = \{(U_i, x_i) | i \in I\}$ ve $A_2 = \{(V_j, y_j) | j \in J\}$ olmak üzere

$A_1 \times A_2$ nin $M_1 \times M_2$ de bir C^∞-yapı tanımladığını gösterelim

$$A = A_1 \times A_2 = \left\{ \left(U_i \times V_j \;,\; x_i \times y_j \right) \mid \left(U_i \times x_i \right) \in A_1, \left(V_j \times y_j \right) \in A_2 \right\}$$

$\forall \; \left(U_i \times U_j \;,\; x_i \times x_j \right) \quad M_1 \times M_2$ de bir haritadır.

H_1)

$$x_i : U_i \to \mathbb{R}^m \qquad \text{birebirdir.}$$

$$y_j : V_j \to \mathbb{R}^n \qquad \text{birebirdir.}$$

$$x_i \times y_j : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n} \qquad \text{birebirdir.}$$

H_2)

$$\left(x_i \times y_j \right)\left(U_i \times V_j \right) = \underbrace{x_i\left(U_i \right)}_{açık} \times \underbrace{y_j\left(V_j \right)}_{açık} \underset{açık}{\subset} \mathbb{R}^{n+m}$$

$A = A_1 \times A_2 \qquad M_1 \times M_2$ de bir C^∞-atlastır.

Bunun için;

A_1)

$$\bigcup_{\substack{(U_i, x_i) \in A_1 \\ (V_j, y_j) \in A_2}} U_i \times V_j = \underbrace{\left(\bigcup_{(U_i, x_i) \in A} U_i \right)}_{M_1} \times \underbrace{\left(\bigcup_{(V_j, y_j) \in A_2} V_j \right)}_{M_2} = M_1 \times M_2$$

A_2) $\quad \forall \left(U_i \times V_j \;,\; x_i \times y_j \right), \left(\overline{U_i} \times \overline{V_j} \;,\; \overline{x_i} \times \overline{y_j} \right) \in A_1 \times A_2$

$\ni \left(U_i \times V_j \right) \cap \left(\overline{U_i} \times \overline{V_j} \right) \neq \varnothing$ için

$$\left(\overline{x_i} \times \overline{y_j} \right) \circ \left(x_i \times y_j \right)^{-1} = \left(\overline{x_i} \times \overline{y_j} \right) \circ \left(x_i^{-1} \times y_j^{-1} \right) = \underbrace{\underbrace{\left(\overline{x_i} \circ x_i^{-1} \right)}_{diffeomorfizm} \times \underbrace{\left(\overline{y_j} \circ y_j^{-1} \right)}_{diffeomorfizm}}_{diffeomorfizm}$$

$\Rightarrow A = A_1 \times A_2 \qquad M_1 \times M_2$ de bir C^∞-atlastır.

Bu atlasın belirttiği C^∞-yapıyla birlikte $M_1 \times M_2$, $(m+n)$-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur. Bu diferensiyellenebilir manifolda da M_1 ve M_2 diferensiyellenebilir manifoldlarının *çarpım manifoldu* denir.

Benzer şekilde ikiden fazla manifoldunda çarpımından bahsedilebilir.

Örneğin; $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\tan e} = \mathbb{R}^n$ n-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Bunun bir C^{∞}-atlası $A=\left\{\left(\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n-\tan e},\underbrace{id\times id\times\ldots\times id}_{n-\tan e}\right)\right\}$ dir.

Örnek 2.3.4: S^1 in 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifold yapısı belirttiğini gösterelim.

$M=S^1=\{(\sin 2\pi s,\cos 2\pi s)|\ s\in\mathbb{R}\}$ olmak üzere

$U=\{(\sin 2\pi s,\cos 2\pi s)|\ 0<s<1\}\subset S^1$ olsun.

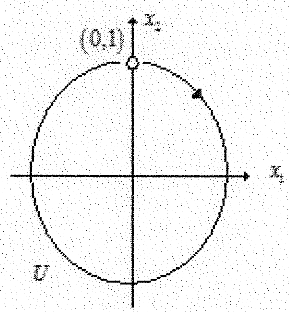
$U=S^1-\{(0,1)\}$

$$x:U\longrightarrow\mathbb{R}$$

olmak üzere $(\sin 2\pi s,\cos 2\pi s)\mapsto s$ şeklinde tanımlı (U,x), S^1 in 1-boyutlu bir haritasıdır. (Şekil 2.3.2)

$H_1)$ x birebirdir.

$H_2)$ $x(U)=(0,1)\underset{açık}{\subset}\mathbb{R}$



(Şekil 2.3.2)

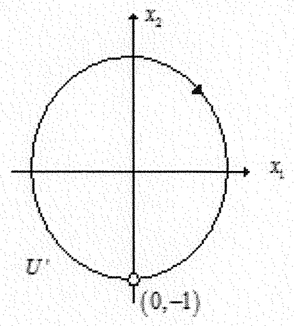
$U'=\left\{(\sin 2\pi s,\cos 2\pi s)|\ \frac{-1}{2}<s<\frac{1}{2}\right\}\subset S^1$ olsun.

$$x':U'\longrightarrow\mathbb{R}$$

olmak üzere $(\sin 2\pi s,\cos 2\pi s)\mapsto s$ şeklinde tanımlı (U',x'), S^1 in 1-boyutlu bir haritasıdır. (Şekil 2.3.3)

$H_1)$ x' birebirdir.

$H_2)$ $x'(U') = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \underset{açık}{\subset} \mathbb{R}$

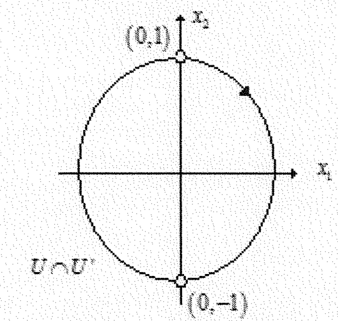


(Şekil 2.3.3)

Şimdi $A_1 = \{(U,x),(U',x')\}$ ailesinin S^1 in bir C^∞-atlası olduğunu göstereceğiz.

$A_1)$ $U \cup U' = S^1$

$A_2)$ $U \cap U' = S^1 - \{(0,1),(0,-1)\}$ (Şekil 2.3.4)



(Şekil 2.3.4)

$$x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') \to x'(U \cap U')$$

olmak üzere $s \mapsto (x' \circ x^{-1})(s)$ $\quad s \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

şeklinde tanımlı dönüşümün diffeomorfizm olduğunu görelim.

$$x'\left(x^{-1}(s)\right)=\begin{Bmatrix} s & s\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \\ s-1 & s\in\left(\frac{1}{2},1\right) \end{Bmatrix}$$

$s\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ için $x'\circ x^{-1}$ bir özdeşlik dönüşümü diffeomorfizmdir.

$s\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ için $\left(x'\cap x^{-1}\right)(s)=s-1$ olduğundan $x'\circ x^{-1}$ de bir diffeomorfizmdir.

$(U,x),(U',x')$ haritaları uyumlu olup $A_1=\{(U,x),(U',x')\}$ koleksiyonu S^1 in bir C^∞-atlasıdır. Bu atlasla birlikte S^1 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Şimdi S^1 üzerinde A_1 atlasından farklı dört haritalı bir C^∞-atlas tanımlayacağız

$V_1=\{(s_1,s_2)\in S^1 \mid s_1\rangle 0\}$ olsun.

$$j:S^1\to\mathbb{R}^2$$

$(s_1,s_2)\mapsto j(s_1,s_2)=(s_1,s_2)$ olmak üzere

$$j|_{V_1}:V_1\mapsto\mathbb{R}^2$$

$(s_1,s_2)\mapsto j|_{V_1}(s_1,s_2)=j(s_1,s_2)=(s_1,s_2)$ olup

$$\pi_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(s_1,s_2)\mapsto\pi_2(s_1,s_2)=s_2$$

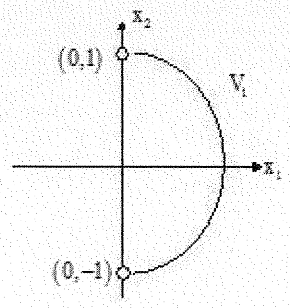
$$x_1=\pi_2\circ j|_{V_1}:V_1\to\mathbb{R}$$

olmak üzere $(s_1,s_2)\mapsto s_2$ şeklinde tanımlı dönüşüm (Şekil 2.3.5) için

H_1) x_1 birebirdir.

H_2) $x_1(V_1)=(-1,1)\underset{açık}{\subset}\mathbb{R}$

olup (V_1,x_1), S^1 in 1-boyutlu haritasıdır.



(Şekil 2.3.5)

$V_2=\{(s_1,s_2)\in S^1 \mid s_1\langle 0\}$ olsun.

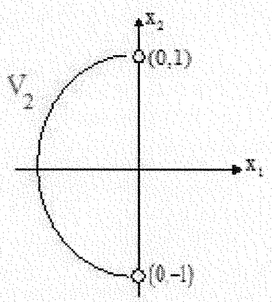
$$x_2=\pi_2\circ j|_{V_2}:V_2\to\mathbb{R}$$

Olmak üzere $(s_1,s_2)\mapsto s_2$ şeklinde tanımlı dönüşüm (Şekil 2.3.6) için

H$_1$) x_2 birebirdir.

H$_2$) $x_2(V_2)=(-1,1)\underset{açık}{\subset}\mathbb{R}$

olup (V_2,x_2) S^1 in 1-boyutlu haritasıdır. $\left(V_1\cup V_2\subsetneq S^1\right)$



(Şekil 2.3.6)

$V_3=\{(s_1,s_2)\in S^1 \mid s_2\rangle 0\}$ olsun.

$$\pi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$(s_1,s_2)\mapsto\pi_1(s_1,s_2)=s_1$$

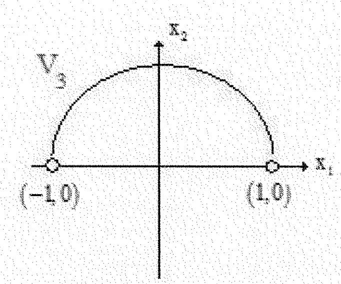
$$X_3 = \pi_1 \circ j|_{V_3} : V_3 \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $(s_1, s_2) \mapsto s_1$ şeklinde tanımlı dönüşüm (Şekil 2.3.7) için

H$_1$) x_3 birebirdir.

H$_2$) $x_3(V_3) = (-1,1) \underset{açık}{\subset} \mathbb{R}$

olup (V_3, x_3) S^1 in 1-boyutlu haritasıdır. $\left(V_1 \cup V_2 \cup V_3 \subsetneq S^1\right)$



(Şekil 2.3.7)

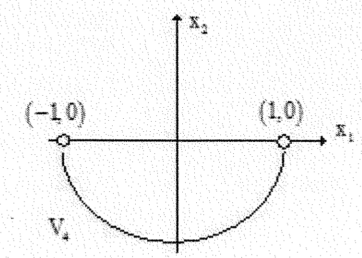
$V_4 = \{(s_1, s_2) \in S^1 \mid s_2 \langle 0\}$ olsun.

$$x_4 = \pi_1 \circ j|_{V_4} : V_4 \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $(s_1, s_2) \mapsto s_1$ şeklinde tanımlı dönüşüm (Şekil 2.3.8) için

H$_1$) x_4 birebirdir.

H$_2$) $x_4(V_4) = (-1,1) \underset{açık}{\subset} \mathbb{R}$



(Şekil 2.3.8)

olup (V_4, x_4) S^1 in 1-boyutlu haritasıdır. $\left(V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 = S^1\right)$

$A_2 = \{(V_i, x_i)\}$ $i = 1,2,3,4$ $A_2 = \{(V_1,x_1),(V_2,x_2),(V_3,x_3),(V_4,x_4)\}$

ailesinin S^1 in bir C^∞-atlası olduğunu gösterelim.

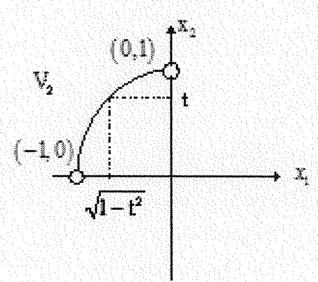
A$_1$) $\bigcup_{i=1}^{4} V_i = S^1$

A$_2$) $V_1 \cap V_3 \neq \varnothing$ $V_1 \cap V_4 \neq \varnothing$ $V_2 \cap V_3 \neq \varnothing$ $V_2 \cap V_4 \neq \varnothing$

olup örneğin $V_2 \cap V_3 \neq \varnothing$ için

$$x_3 \circ x_2^{-1} : \underbrace{x_2(V_2 \cap V_3)}_{(0,1)} \to \underbrace{x_3(V_2 \cap V_3)}_{(-1,0)}$$

$$x_3 \circ x_2^{-1} : (0,1) \to (-1,0)$$



$$t \mapsto x_3\left(x_2^{-1}(t)\right) = x_3\left(\sqrt{1-t^2}, t\right) = \sqrt{1-t^2}$$

$x_3 \circ x_2^{-1}$ diffeomorfizmdir. $(V_2, x_2), (V_3, x_3)$ haritaları uyumludur. Benzer durum $V_1 \cap V_4$, $V_1 \cap V_3$, $V_2 \cap V_4$ içinde ifade edilebilir. Böylece

$A_2 = \{(V_1, x_1), (V_2, x_2), (V_3, x_3), (V_4, x_4)\}$ de S^1 in bir diğer C^∞-atlasıdır.

Bu atlasla birlikte S^1 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Şimdi de A_1 ve A_2 atlaslarının denk olduğunu gösterelim.

A_1) Aşikardır.

A_2) $U \cap V_i \neq \varnothing \quad (1 \leq i \leq 4)$

$U' \cap V_i \neq \varnothing$

$U \cap V_1$ ele alalım $U \cap V_1 = V_1$ dir

$$x_1 \circ x^{-1} : \underbrace{x(U \cap V_1)}_{\left(0, \frac{1}{2}\right)} \rightarrow \underbrace{x_1(U \cap V_1)}_{(-1,1)}$$

$$x_1 \circ x^{-1} : \left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow (-1, 1)$$

$s \mapsto x_1(x^{-1}(s)) = x_1(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) = \cos 2\pi s$ olup bu dönüşüm bir diffeomorfizmdir. O halde $(U, x), (V_1, x_1)$ haritaları uyumludur.

Benzer şekilde (U, x), (V_i, x_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ haritaları uyumludur.

(U', x') , (V_i, x_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ haritaları uyumludur.

$A_1 \cup A_2$, S^1 in bir C^∞-atlasıdır. Dolayısıyla A_1 ve A_2 atlasları denktir.

A_1 ve A_2 atlasları aynı tam atlasta bulunur, yani ikisinin de belirlediği C^∞-yapı aynıdır. Sonuç olarak S^1, 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Örnek 2.3.5 : S^1, 1-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olduğundan çarpım manifoldu tanımından yararlanılarak

$$\underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1}_{n-\tan e} = T^n$$

ifadesi elde edilir. Buna *n-boyutlu Tor* denir.

Tanım 2.3.7 (*Koordinat Temsilcisi*) :

M, M' iki diferensiyellenebilir manifold, $boyM = n$, $boy\,M' = n'$ olsun

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & M' \arrow[d, "x'"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "F = x' \circ f \circ x^{-1}"'] & \mathbb{R}^{n'} \end{tikzcd}$$

$m \in Domf$ olmak üzere $F(m) = (x' \circ f \circ x^{-1})(m)$ fonksiyonuna f nin "*koordinat temsili*" adı verilir.

F fonksiyonu $x(m)$ noktasında C^∞ ise f, m noktasında C^∞ dur denir.

2.4. Bir Manifold Üzerinde Diferensiyellenebilir Yapıdan İndirgenmiş Topoloji ve Bir Manifoldun Topolojisi

Tanım 2.4.1 (*Koordinat Bölgesi*) : M nin bir tam atlası A^+ olsun. A^+ nın bir haritasının tanım bölgesine manifoldun bir *koordinat bölgesi* adı verilir.

Buna göre, koordinat bölgelerinin cümlesi,

$\{U_i \mid (U_i, x_i) \in A^+\}$ dir.

Teorem 2.4.1 : M nin bir tam atlası A^+ olsun. A^+ daki koordinat bölgelerinin cümlesi, M de bir topoloji için bir bazdır.

Tanım 2.4.2 (*C^∞-yapıdan indirgenmiş topoloji*): M nin bir tam atlası A^+ olsun. A^+ tam atlasının koordinat bölgelerinin cümlesini bir baz kabul eden topolojiye M nin A^+ atlasıyla belirli *C^∞-yapıdan indirgenmiş topolojisi* denir ve τ_c ile gösterilir.

Teorem 2.4.2 : A, M de bir atlas ve M nin C^{∞}-yapıdan indirgenmiş topolojisi τ_c olsun. Bu durumda

$$\left(U,x\right)\in A \Rightarrow x:U\to\mathbb{R}^n \;\; \tau_c\text{-homeomorfizmdir.}$$

M bir topolojik uzay olsun. Bu uzay $\left(M,\tau\right)$ ile, M de C^{∞}-yapının indirgediği topoloji de τ_c ile gösterilsin. Buna göre aşağıdaki Teorem 2.4.3 verilebilir.

Teorem 2.4.3 : $\tau=\tau_c$ dir. $\Leftrightarrow \exists\ A$ atlası $\ni \forall\left(U,x\right)\in A$ için $x:U\to\mathbb{R}^n$ bir τ -homeomorfizmdir.

Tanım 2.4.3 (*Açık Altmanifold*):
M n- boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve M', M nin bir açık altcümlesi olsun

$$j:M'\to M$$

$p\mapsto j\left(p\right)=p$ doğal birebir dönüşüm ve $U\cap M'\neq\varnothing$ olacak şekildeki M nin $\forall\left(U,x\right)$ haritası için $\left(\underbrace{U\cap M'}_{V},x\circ j\right)$ M' nün bir haritasıdır.

$$\begin{tikzcd}
(U\cap M')\subset M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "x\circ j"'] & M \arrow[d, "x"] \\
& \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

H_1) x birebirdir.

$x\circ j$ birebirdir.

H_2) $\left(x\circ j\right)\left(U\cap M'\right)=x\left(\underbrace{U\cap M'}_{\in\tau_c}\right)\subset\underbrace{\mathbb{R}^n}_{açık}$

A$_1$) $\bigcup_{(U,X)\in A} U = M \Rightarrow \bigcup_{(U,X)\in A} (U \cap M') = M'$

A$_2$) $(U \cap V) \neq \varnothing \qquad U \cap M' \neq \varnothing \qquad V \cap M' \neq \varnothing$ olacak şekildeki

(U, x) ve (V, y) haritaları için;

$(x \circ j) \circ (y \circ j)^{-1} = (x \circ j) \circ (j^{-1} \circ y^{-1}) = x \circ (j \circ j^{-1}) \circ y^{-1}$ olup, $x \circ y^{-1}$ diffeomorfizmdir.

Buradan da anlaşılmaktadır ki $A' = \{(U \cap M', x \circ j) \mid (U, x) \in A\}$, M' için bir C^∞ yapıdır.

Bu C^∞ yapıyla birlikte M' bir n-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

M' manifolduna M manifoldunun bir *açık altmanifoldu* denir.

Örnek 2.4.1: $M(n \times n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}_n^n = \left\{ [a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i, j \leq n \right\}$

$$x : \mathbb{R}_n^n \to \mathbb{R}^{n^2}$$

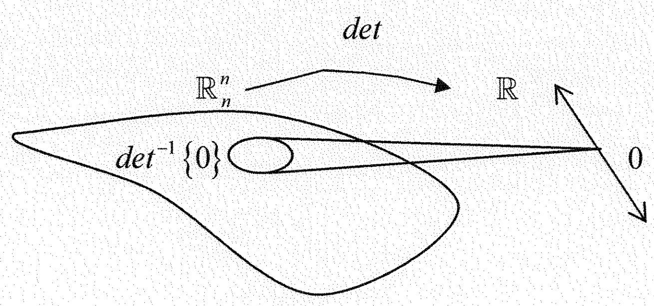
$$A = [a_{ij}] \mapsto x([a_{ij}]) = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22} ... a_{2n}, a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$$

$\underbrace{\{(\mathbb{R}_n^n, x)\}}_{tam \ \ atlas}$, $\mathbb{R}_n^n$ için bir C^∞-yapı tanımlar. $\mathbb{R}_n^n$, n^2-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

$$det : \mathbb{R}_n^n \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto detA$$

fonksiyonu diferensiyellenebilirdir. Bundan dolayı determinant fonksiyonu süreklidir.

$\{0\} \subset \mathbb{R}$ kapalı ve determinant fonksiyonu sürekli olduğundan $det^{-1}\{0\} \subset \mathbb{R}_n^n$ kapalıdır. (Şekil 2.4.1)



(Şekil 2.4.1)

$det^{-1}\{0\} = \{A \in \mathbb{R}^n_n \mid detA = 0\}$

$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^n_n \mid detA \neq 0\}$ cümlesi $det^{-1}\{0\} \subset \mathbb{R}^n_n$ cümlesinin $\mathbb{R}^n_n$ ye göre tümleyenidir. Buna göre $GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n_n$ açıktır. Dolayısıyla $GL(n,\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n_n$ in bir açık altmanifoldudur.

Tanım 2.4.4 (*Regüler Altmanifold*): M bir manifold ve M', M nin bir altmanifoldu olsun. M nin C^∞ -yapının indirgediği topoloji τ_c, M' nün C^∞ -yapının indirgediği topoloji de $\tau_{c'}$ ile gösterilsin. Eğer $\tau_{c'}$ ile M' nün M den alt cümle olarak indirgediği topoloji aynı ise, M' ye M nin *regüler altmanifoldu* denir.

2.5. Tanjant Vektör

M, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve $m \in M$ olsun. Tanım cümleleri m yi kapsayan ve M üzerinde tanımlanan reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi

$\mathscr{T}(m) = \left\{ f \mid f : \mathrm{M} \xrightarrow{\text{diferensiyellenebilir}} \mathbb{R}, \quad m \in Domf \right\}$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.5.1 $\mathscr{T}(m)$ üzerinde tanımlı $\mathbb{R}$ -lineer fonksiyona $\mathscr{T}(m)$ de bir lineer operatör adı verilir.

Buna göre Λ, $\mathscr{T}(m)$de bir lineer operatördür $\Leftrightarrow$ $\Lambda : \mathscr{T}(m) \xrightarrow{\mathbb{R}-\text{lineer}} \mathbb{R}$ dir.

Tanım 2.5.2 ($\mathscr{T}(m)$*nin bir türevi*): $\Lambda : \mathscr{T}(m) \xrightarrow{\mathbb{R}-\text{lineer}} \mathbb{R}$

bir lineer operatör olsun. $\forall f, g \in \mathscr{T}(m)$ için $\underbrace{\Lambda(fg) = \Lambda(f)g + f\Lambda(g)}_{\text{leibnitz kuralı}}$ ise

Λ ya $\mathscr{T}(m)$*nin bir türevi* denir.

Tanım 2.5.3 (*Tanjant Uzayı, Tanjant Vektör*) M bir diferensiyellenebilir manifold ve $m \in M$ olsun $\mathscr{T}(m)$ nin türevlerinin cümlesini $T_m M$ ile gösterelim.

$T_m M = \left\{ \Lambda \mid \Lambda : \mathscr{T}(m) \xrightarrow{\text{lineer, leibnitz}} \mathbb{R} \right\}$ bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına M manifoldunun m noktasındaki *tanjant uzayı* denir.

$T_m M$ uzayının her bir elemanına da M nin m noktasındaki bir *tanjant vektör* adı verilir.

Tanım 2.5.4 *(Tanjant Demeti)*:

$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$ cümlesine M nin *tanjant demeti* denir.

2.6. Türev Dönüşümü

M ve M' iki diferensiyellenebilir manifold ve

$$\phi : \underset{m}{M} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{\phi(m)=m'}{M'}$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

$\forall f \in \mathscr{F}(m')$ için $f \circ \phi \in \mathscr{F}(m)$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \phi_{*m} : T_m M &\longrightarrow T_{m'} M' \\ \Lambda &\mapsto \phi_{*m}(\Lambda) : \mathscr{F}(m') \rightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad f \mapsto (\phi_{*m}(\Lambda))(f) = \Lambda(f \circ \phi) \end{aligned}$$

dönüşümü gözönüne alınırsa bu dönüşümün iyi tanımlı olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca,

$\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall f,g \in \mathscr{F}(m')$ için

$$\begin{aligned} (\phi_{*m}(\Lambda))(af+bg) &= \Lambda((af+bg)\circ\phi) = \Lambda(a(f\circ\phi)+b(g\circ\phi)) \\ &= a\Lambda(f\circ\phi)+b\Lambda(g\circ\phi) \quad (\Lambda \in T_m M \quad lineerdir) \\ &= a(\phi_{*m}(\Lambda))(f)+b(\phi_{*m}(\Lambda))(g) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi_{*m}(\Lambda)$ dönüşümü lineerdir.

$$\begin{aligned} (\phi_{*m}(\Lambda))(f.g) &= \Lambda((f.g)\circ\phi) \\ &= \Lambda((f\circ\phi).(g\circ\phi)) \\ &= (\Lambda(f\circ\phi)).(g\circ\phi)|_m + (f\circ\phi)|_m.(\Lambda(g\circ\phi)) \\ &= (\phi_{*m}(\Lambda))(f).g|_{m'} + f|_{m'}.(\phi_{*m}(\Lambda))(g) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi_{*m}(\Lambda)$ dönüşümü Leibnitz kuralını sağlar. Bu da $\phi_{*m}(\Lambda) \in T_{m'}M'$ anlamına gelir.

Bu şekilde tanımlı $\phi_{*m} : T_m M \longrightarrow T_{m'} M'$ dönüşümüne $T_m M$ üzerinde *Türev Dönüşümü* denir.

2.7. Topolojik Grup

Tanım 2.7.1 (*Topolojik Grup*) : G bir grup ve aynı zamanda bir topolojik uzay olsun. Eğer bir fonksiyon olarak grup işlemi sürekli ise G ye bir *topolojik grup* adı verilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Lie Grupları ve Lie Grup Etkileri

Tanım 3.1.1 (*Lie Grubu*) : G bir grup ve diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer,

$$\begin{aligned}\theta : G\times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2\end{aligned}$$

grup işlemi diferensiyellenebilir ise G grubuna bir *Lie Grubu* denir.
Bir Lie grubunun etkisiz elemanı e ile gösterilecektir.

Örnek 3.1.1: $(\mathbb{R}^n, +)$ grubu ile $\mathbb{R}^n$ manifoldu bir Lie grubu tanımlar.
$\mathbb{R}^n$ bir grup ve diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir.

$$\oplus : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dönüşümü $\forall a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le n$ için

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a_i, b_i) &\mapsto a_i + b_i\end{aligned}$$

olmak üzere

$$(a,b) \mapsto (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

olarak tanımlanır.
"+" diferensiyellenebilir olduğundan $\oplus$ fonksiyonu da diferensiyellenebilirdir.

Örnek 3.1.2: $GL(n,\mathbb{R})$ bir Lie grubudur. Gerçekten

$GL(n,\mathbb{R}) \subset M(n \times n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}_n^n$

$GL(n,\mathbb{R}) = \{A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_n^n \mid detA \neq 0\}$

$\forall A, B \in GL(n,\mathbb{R})$ için $\det(A.B) = \det A.\det B \neq 0$ olduğundan $A.B \in GL(n,\mathbb{R})$ dir.

$\forall A \in GL(n,\mathbb{R})$ için $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} \neq 0$ olduğundan $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$ dir.

Buna göre $GL(n,\mathbb{R})$, $(\mathbb{R}_n^n,.)$ grubunun bir altgrubudur. Grup işlemi diferensiyellenebilirdir. Gerçekten;

$$\begin{array}{ccccc}
GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) & & \xrightarrow{\theta} & & GL(n,\mathbb{R}) \\
x\downarrow \qquad\quad x\downarrow & & & & x\downarrow \\
\mathbb{R}^{n^2} \quad \times \quad \mathbb{R}^{n^2} & & \xrightarrow{\Theta} & & \mathbb{R}^{n^2}
\end{array}$$

$\Theta = x \circ \theta \circ (x \times x)^{-1}$ dir. $\forall\ A, B \in GL(n,\mathbb{R})$ için $x(A) = \mathscr{A}$, $x(B) = \mathscr{B}$ olsun.

$\Theta(\mathscr{A}.\mathscr{B}) = x(A.B)$ dir.

Θ, Öklid koordinat fonksiyonlarının bir polinomu olarak yazılabileceğinden diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla θ diferensiyellenebilirdir. Buna göre $GL(n,\mathbb{R})$ matrislerin çarpma işlemine göre bir Lie grubudur.

Örnek 3.1.3 : S^1 birim çemberi bir Lie grubudur. Gerçekten;

$$S^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
S^1 \times S^1 & \to & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\
(x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)) & \mapsto & (x,y) & \mapsto & (x_1+ix_2, y_1+iy_2) & \mapsto & (x_1y_1 - x_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)) & \mapsto & (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^2 & \to & S^1 \\
(x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) & \mapsto & (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)
\end{array}$$

$$\theta : \underset{(x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2))}{S^1 \times S^1} \xrightarrow{\quad} \underset{\theta(x,y)=(x_1y_1-x_2y_2,\,x_1y_2+x_2y_1)}{S^1}$$
$$\mapsto$$

$$\|\theta(x,y)\| = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = 1$$

dir.

Dolayısıyla S^1 üzerinde bir işlemdir. Bu işlemi "." ile gösterelim. $\mathbb{C}$ çarpma işlemine göre bir grup olduğundan $|z_1| = |z_2| = 1$ iken $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = 1$ olduğundan ve $|z| = 1$ iken $|z^{-1}| = 1$ olduğundan $(S^1,.)$ da bir gruptur.

$p,q \in S^1$ için;

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \times & S^1 & \xrightarrow{\theta} & S^1 \\ \downarrow x_i & & \downarrow x_j & & \downarrow x_k \\ \mathbb{R} & \times & \mathbb{R} & \xrightarrow{\Theta} & \mathbb{R} \end{array}$$

$\Theta = x_k \circ \theta \circ (x_i \times x_j)^{-1}$

Θ, $(x_i(p), x_j(q))$ noktasında diferensiyellenebilirdir

Örneğin;

$1 \le i,j,k \le 4$ için x_i, x_j, x_k haritaları Örnek 2.3.4 deki gibi alınırsa $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ve $i=2$, $j=3$, $k=2$ için $p = \left(\sqrt{1-t_1^2}, t_1\right)$, $q = \left(t_2, \sqrt{1-t_2^2}\right)$, $(p,q) \in S^1 \times S^1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Theta(t_1,t_2) &= \left(x_2 \circ \theta \circ (x_2 \times x_3)^{-1}\right)(t_1,t_2) \\
&= x_2\left(\theta\left(\left(\sqrt{1-t_1^2}, t_1\right), \left(t_2, \sqrt{1-t_2^2}\right)\right)\right) \\
&= x_2\left(t_2\sqrt{1-t_1^2} - t_1\sqrt{1-t_2^2}, \sqrt{1-t_1^2}.\sqrt{1-t_2^2} + t_1.t_2\right) \\
&= \sqrt{1-t_1^2}.\sqrt{1-t_2^2} + t_1.t_2
\end{aligned}$$

$\Theta(t_1,t_2)=\sqrt{1-t_1^{\,2}}.\sqrt{1-t_2^{\,2}}+t_1.t_2$ olur. Bu dönüşüm diferensiyellenebilir olduğundan $\theta(p,q)$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir.

Sonuç olarak; S^1 birim çemberi bir Lie grubudur.

Örnek 3.1.4 : G ve H birer Lie grubu olsun, $G\times H$ de bir Lie grubudur.
Bu gruba *Çarpım Lie grubu* adı verilir.
G ve H birer Lie grubu ise birer diferensiyellenebilir manifolddur. Gerçekten; iki diferensiyellenebilir manifoldun çarpımı da bir diferensiyellenebilir manifold olduğundan $G\times H$ bir diferensiyellenebilir manifolddur.
G ve H birer grup olduğundan $G\times H$ de bir gruptur. Burada grup işlemi

$$(G\times H)\times(G\times H)\longrightarrow(G\times H)$$

$$\big((a_1,a_2)\ ,\ (b_1,b_2)\big)\mapsto(a_1b_1,a_2b_2)$$

şeklindedir. Buna göre $G\times H$ de bir Lie grubudur.
Bunun bir sonucu olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.1.5 : S^1 birim çemberi bir Lie grubu olduğundan $S^1\times S^1=T^2$ de bir Lie grubudur.
$T^n=\underbrace{S^1\times S^1\times\ldots\times S^1}_{n\ \text{tane}}$ çarpımı da bir Lie grubudur.

Tanım 3.1.2 (*sol öteleme* ve *sağ öteleme*) : G bir Lie grubu ve $a\in G$ (sabit) olsun.

$$L_a:\underset{g\ \mapsto\ ag}{G\to G}\qquad g\mapsto ag$$

$$R_a:\underset{g\ \mapsto\ ga}{G\to G}\qquad g\mapsto ga$$

dönüşümlerine sırasıyla G Lie grubu üstünde *sol öteleme* ve *sağ öteleme* adı verilir.

$(G,\bullet)$ bir grup ve $a\in G$ (sabit) olsun.

$$L_a(g) = ag$$

- $\bullet : G \times G \to G$ olup G bir Lie grubu olduğundan

$$\bullet\big|_{\{a\}\times G} : \{a\} \times G \to G$$

$(a,g) \mapsto \bullet\big|_{\{a\}\times G}(a,g) = L_a(g) = ag$ olup $\bullet\big|_{\{a\}\times G}$ kısıtlanışı diferensiyellenebilirdir.

L_a diferensiyellenebilir olup $g \mapsto ag$ şeklinde olduğundan

$\left(L_{a^{-1}} \circ L_a\right)(g) = L_{a^{-1}}(ag) = a^{-1}(ag) = \left(a^{-1}a\right)g = eg = g$ olup $L_{a^{-1}} = \left(L_a\right)^{-1}$ dir.

$\forall a \in G$ için L_a diferensiyellenebilir. O halde $a^{-1} \in G$ için $L_{a^{-1}}$ diferensiyellenebilir.

L_a ve $L_{a^{-1}}$ diferensiyellenebilir olduğundan L_a diffeomorfizmdir.

Benzer şekilde $\forall a \in G$ için R_a dönüşümü de bir diffeomorfizmdir.

Örnek 3.1.6 : $\mathscr{G}$ bir topolojik grup olsun $U \underbrace{\subseteq}_{açık} \mathscr{G} \Rightarrow L_a U = \{L_a(g) \mid g \in U\} = aU$

L_a diffeomorfizm ve U açık olduğundan $L_a U = aU$ cümlesi açıktır.

$U \underbrace{\subseteq}_{açık} \mathscr{G}$ ve $V \underbrace{\subseteq}_{açık} \mathscr{G}$ olsun. Öyleyse $UV = \{gh \mid g \in U, h \in V\}$ cümlesi de açıktır.

Çünkü; $UV = \bigcup_{g \in U} \underbrace{gV}_{açık}$ olup açıkların birleşimi de açıktır.

$$\theta : G \times G \to G$$
$$(g,h) \mapsto \theta(g,h) = gh$$

$U \in \vartheta(e)$ için $W \in \vartheta(e)$ vardır. $W \subset U$ olup $W \times W \subset U \times U$ dur.

θ grup işlemi sürekli olduğundan $W^2 = WW \subset U$ olacak şekilde e nin bir W komşuluğu vardır.

Teorem 3.1.1: G bir Lie grubu olsun

$$\psi : G \to G$$
$$g \mapsto \psi(g) = g^{-1}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir diffeomorfizmdir.

İspat : Bir grupta her elemanın tersinin var ve tek olduğu bilinmektedir.
Birebirlik:

$\forall g_1, g_2 \in G$ için $g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1^{-1} \neq g_2^{-1}$ olup ψ birebirdir.

Örtenlik:

$\forall b \in G$ için $b^{-1} \in G$ dir. $\psi(b^{-1}) = (b^{-1})^{-1} = b$

$\forall b \in G$ için $b = \psi(b^{-1})$ şeklinde yazılabileceğinden ψ örtendir.

Ayrıca $\psi^{-1} = \psi$ dir. $\forall g \in G$ için

$$\psi(g) = \psi_g = g^{-1}$$
$$\psi g^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g$$
$$\psi^{-1} g^{-1} = g$$
$$\psi = \psi^{-1}$$

dir.

Buna göre ψ nin bir diffeomorfizm olduğunu göstermek için ψ nin bir diferensiyellenebilir fonksiyon olduğunu göstermek yeterlidir.

$\psi = R_{g^{-1}} \circ \psi \circ L_{g^{-1}}$ olduğunu görelim.

$\forall g \in G$ için

$$\begin{aligned}\left(R_{g^{-1}}\circ\psi\circ L_{g^{-1}}\right)(g) &= R_{g^{-1}}\left(\psi\left(L_{g^{-1}}(g)\right)\right)\\ &= R_{g^{-1}}\left(\psi\left(g^{-1}g\right)\right)\\ &= R_{g^{-1}}\left(\psi(e)\right)\\ &= R_{g^{-1}}(e)\\ &= eg^{-1}\\ &= g^{-1}\\ &= \psi(g)\end{aligned}$$

olup $\psi = R_{g^{-1}}\circ\psi\circ L_{g^{-1}}$ dir.

$\psi(g) = \left(R_{g^{-1}}\circ\psi\right)(e)$ olduğundan ψ, $e\in G$ de diferensiyellenebilir ise ψ, G nin her bir g noktasında diferensiyellenebilirdir. Buna göre ψ nin G de diferensiyellenebilirliğini görmek için $e\in G$ de diferensiyellenebilir olduğunu göstermek yeterlidir.

G diferensiyellenebilir manifold olduğundan $e\in U$ olacak şekilde G nin bir (U,x) haritası vardır. $V\subset U$ ve $V^2\subset U$ dur.

$X(e)=0$ olacak şekide seçilebilir. $x|_V = y$ dersek;

$$y : V\subset G\to\mathbb{R}^n$$

$y(a)=w$ $y(e)=0$. Şimdi aşağıdaki diyagram göz önüne alınsın.

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "\theta"', "(a,e)\mapsto ae=a"] \arrow[d, "y\times y"'] & G \arrow[d, "x"] \\ \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Bu diyagrama göre θ nın koordinat temsilini $f = x\circ\theta\circ(y\times y)^{-1}$ fonksiyonudur.

$f(w,0)=w$ olduğundan

$$f(w,0)=\left(x\left(\theta(y\times y)^{-1}\right)(w,0)\right)=x\left(\theta\left(\underbrace{\left(\underbrace{y^{-1}(w)}_{a},\underbrace{y^{-1}(0)}_{e}\right)}_{a.e}\right)\right)=x(a)=w$$

dır. Buradan $f_i(w,0)=w_i=x_i(w)$ elde edilir. Kısmi türevler hesaplanırsa,

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w,0)=\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\Big|_w=\delta_{ij}(w)=\delta_{ij}$ olup jakobien matris birim matristir.

$det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(w,0)\right]\neq 0$ dır. $w=e$ alınırsa,

$$\begin{cases}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0,0)=\delta_{ij}\\ f(0,0)=0\end{cases}\qquad (1\leq i,j\leq n) \text{ dir.}$$

Kapalı fonksiyon teoreminden 0 ın $\mathbb{R}^n$ de U' ve V' komşulukları vardır öyle ki her bir $w\in U'$ için bir tek $v\in V'$ vardır. Yani,

$$\alpha : U'\subset\mathbb{R}^n\rightarrow V'\subset\mathbb{R}^n$$

$w\mapsto\alpha(w)=v$ dönüşümü iyi tanımlı olup, diferensiyellenebilirdir.

$$f(v,w)==\left(y\left(\theta(y\times y)^{-1}\right)(v,w)\right)=y\left(\theta\left(\underbrace{\left(\underbrace{y^{-1}(v)}_{g^{-1}},\underbrace{y^{-1}(w)}_{g}\right)}_{g^{-1}g}\right)\right)=y(e)=0$$

dır.

Buna göre,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & G \\ & g\mapsto g^{-1} & \\ y\big\downarrow & & \big\downarrow y \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^n \\ & w\mapsto v & \end{array}$$

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "y \times y"'] & G \arrow[d, "x"] \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

$$\left(g^{-1}, g\right) \mapsto g^{-1} g = e$$

$$(v, w) \mapsto 0$$

diyagramları gözönüne alınırsa,

i) α, ψ nin koordinat temsilcisidir.

ii) α, $U' \in \vartheta(\underbrace{0}_{y(e)})$ de diferensiyellenebilirdir.

iii) ψ, e nin bir komşuluğunda diferensiyellenebilirdir.

iv) ψ, e de diferensiyellenebilirdir.

v) ψ, G nin her bir g noktasında diferensiyellenebilirdir.

Sonuç 3.1.1: Bir Lie grubu G olsun $\forall a, b \in G$ için

$$
\begin{aligned}
G \times G &\to G \\
(a, b) &\mapsto ab^{-1}
\end{aligned}
$$

dönüşümü diferensiyellenebilirdir.

Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
G \times G &\xrightarrow{id \times \psi} G \times G \xrightarrow{\theta} G \\
(a, b) &\mapsto \left(a, b^{-1}\right) \mapsto ab^{-1}
\end{aligned}
$$

olmak üzere $\theta \circ (id \times \psi)$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir.

3.2. Lie Grubunun Topolojik Özellikleri

$\mathcal{G}$ bir topolojik grup olsun. Grup fonksiyonu;

$$\theta : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

olup süreklidir.

$$\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$
$$g \mapsto g^{-1}$$

$\mathcal{G}$ Lie grubunun ψ fonksiyonu diffeomorfizm olduğundan Lie grubu diferensiyellenebilir topolojik bir gruptur. Sağ ve sol ötelemeler topolojik grup üzerinde birer homeomorfizmdir.

Örnek 3.2.1 : $\mathcal{G}$ bir topolojik grup olsun

$\underbrace{U \subseteq \mathcal{G}}_{açık}$ ise $\quad \forall g \in U \quad \psi U = U^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in U \subset \mathcal{G}\}$ cümlesi açık bir cümledir. $e = e^{-1}$ olduğundan $U \in \vartheta(e)$ ve $W \in \vartheta(e)$ için $U^{-1} \in \vartheta(e)$ ve $W^{-1} \in \vartheta(e)$ yazılabilir.

$W \subset U$ Örnek 3.1.6 dan $W^2 \subset U$ olup $V = (W \cap W^{-1}) \in \vartheta(e)$ olur.

$\psi W = W^{-1}$ ve $\psi W^{-1} = W$ ise $\psi W \cap \psi W^{-1} = W^{-1} \cap W = V$ (ψ birebir ve sürekli)

$(W \cap W^{-1})^{-1} = W^{-1} \cap W \Rightarrow V^{-1} = V$

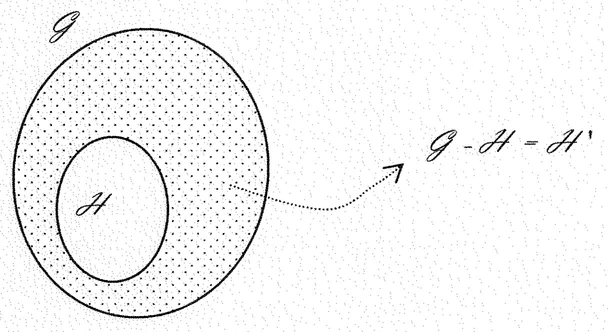
$VV^{-1} \subset U$ dir.

Tanım 3.2.1: Topolojik grup olan $\mathcal{G}$ nin bir açık altcümlesi $\mathcal{G}$ nin açık bir altgrubudur.

Kapalı grupta benzer bir şekilde tanımlanabilir.

Teorem 3.2.1: $\mathcal{G}$ nin $\mathcal{H}$ açık altgrubu kapalıdır.

İspat: $\mathcal{G}$ nin açık bir altgrubu $\mathcal{H}$ olsun. (Şekil 3.2.1)



(Şekil 3.2.1)

$\bigcup_{g\in\mathcal{H}'} g\mathcal{H} \cap \mathcal{H} = \varnothing$ ise $\bigcup_{g\in\mathcal{H}'} g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ dir.

Kabul edelim ki $\bigcup_{g\in\mathcal{H}'} g\mathcal{H} \cap \mathcal{H} \neq \varnothing$ olsun. Buna göre

$\bigcup_{g\in\mathcal{H}'} g\mathcal{H} \cap \mathcal{H}$ cümlesinde en az bir z elemanı vardır. İki cümlenin kesişimi

tanımından $z \in \bigcup_{g\in\mathcal{H}'} g\mathcal{H}$ ve $z \in \mathcal{H}$ elde edilir. Buradan $g\mathcal{H}$ nin tanımı göz önüne

alınırsa, $\exists g \in \mathcal{G}$ ve $\exists h \in \mathcal{H}$ için $gh = z$ yazılabilir.

$\mathcal{H}$ bir altgrup olduğundan $h^{-1} \in \mathcal{H}$ dir. $(gh)h^{-1} = zh^{-1}$ eşitliğinden

$g = zh^{-1} \in \mathcal{H}$ elde edilir ki bu $g \in \mathcal{H}'$ kabulüyle çelişir. Bu çelişkiden dolayı

$\bigcup_{g\in\mathcal{H}'} g\mathcal{H} \cap \mathcal{H} = \varnothing$ olmak zorundadır.

Bu da $\bigcup_{g\in\mathcal{H}'} g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ olması demektir.

$L_g : \mathcal{H} \mapsto L_g(\mathcal{H}) = g\mathcal{H}$ açıktır.

Açıkların birleşimi açık olduğundan $\bigcup_{g\in\mathcal{H}'} g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ açıktır. Tümleyeni açık olan

cümlenin kendisi kapalı olduğundan $\mathcal{H}$ kapalıdır.

Teorem 3.2.2: Bir $\mathscr{G}$ topolojik grubunun herhangi bir $\mathscr{H}$ altgrubu altcümle topolojisine göre bir topolojik gruptur.

İspat: $\mathscr{G}$ nin bir altgrubu $\mathscr{H}$ olsun.

Teorem 3.2.1 den $\mathscr{H}$ hem açık hem de kapalıdır.

θ, ψ grup fonksiyonu olmak üzere

$\theta : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ sürekli $\Rightarrow \theta|_{\mathscr{H} \times \mathscr{H}} : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ süreklidir.

$\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ sürekli $\Rightarrow \psi|_{\mathscr{H}} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ süreklidir.

$\mathscr{H}$ altgrubu altcümle topolojisine göre bir topolojik gruptur.

Teorem 3.2.3: $\mathscr{G}$ irtibatlı bir topolojik grup, e birim elemanın keyfi bir komşuluğu tarafından oluşturulur.

İspat : $\mathscr{G}$ nin $\mathscr{H}$ altgrubunu $U \in \vartheta(e)$ oluşturur. $\mathscr{H}$, $\mathscr{G}$ nin açık altcümlesidir. Çünkü; $h \in \mathscr{H}$ ve $hU \in \vartheta(h)$ olup $hU \subset \mathscr{H}$ dir. Buradan $\mathscr{H}$, $\mathscr{G}$ de kapalıdır. $\mathscr{G}$ irtibatlı olduğundan dolayı $\mathscr{G}$ nin boştan farklı hem açık hem de kapalı alt cümleleri $\mathscr{G}$ ye eşit olmak zorundadır. Teorem 2.1.1 den $\mathscr{G} = \mathscr{H}$ olup $\mathscr{G} = \bigcup hU$ dir.

Teorem 3.2.4: Bir topolojik grubun topolojisi T_1 aksiyomunu sağlıyor ise T_2 aksiyomunu da sağlar.

İspat : $g \in \mathscr{G}$ olsun $g \neq e$ ve $\mathscr{G}$, T_1 olduğundan e nin g yi içermeyen bir U komşuluğu vardır. e nin bir V komşuluğu için $VV^{-1} \subset U$ olduğunu Örnek 3.2.1 den biliyoruz.

Vg ve V sırasıyla g ve e nin ayrık iki komşuluğudur. Gerçekten;

$h \in Vg \cap V$ olsun. Bir $k \in V$ vardır öyle ki $kg = h$ dir. Fakat;

$k^{-1}kg = g = k^{-1}h$ olup $g = k^{-1}h \in V^{-1}V \subset U \quad \left(V^{-1} = V\right)$

olur ki bu bir çelişkidir, çünkü kabulumüz $g \notin U$ idi.

Varsayalım ki g ve g' , $\mathscr{G}$ nin farklı iki elemanı olsun $e = g^{-1}g$ ve $g^{-1}g'$ nün ayrık komşulukları W ve W' olsun. $gW \in \vartheta(g)$ ve $gW' \in \vartheta(g')$ olduğundan gW ve gW' ayrıktır.

Sonuç 3.2.1: Bir Lie grubunun manifold yapısı bir *Hausdorff* manifolddur.

3.3. Lie Altgrupları

Tanım 3.3.1 (*Lie altgrubu*): G bir Lie grubu olsun. H, G nin hem altgrubu hem de altmanifoldu ise H ye G nin *Lie altgrubu* denir.

Teorem 3.3.1: Bir Lie grubunun regüler altmanifold olan bir altgrubu G nin bir Lie altgrubudur.

İspat : G nin bir Lie grubu ve H, G nin bir altgrubu olsun.

H regüler altmanifold olduğundan

$$j : H \longrightarrow G$$
$$h \mapsto j(h) = h$$

doğal birebir dönüşümü diferensiyellenebilir ve "θ" grup fonksiyonu olduğundan

$$\begin{tikzcd} G & \times & G \arrow[r, "\theta"] & G \arrow[d, "id"] \\ H \arrow[u, "j"] & \times & H \arrow[u, "j"] \arrow[r, "\theta\circ(j\times j)"] & G \end{tikzcd}$$

$$\theta|_H : H \times H \to H$$

$\theta|_H$ diferensiyellenebilirdir.

Buna göre H, G nin bir Lie altgrubudur.

3.4. Bir Lie Grubunun Lie Cebiri

Tanım 3.4.1 *(Lie Cebiri)* :

V bir reel vektör uzayı ve $\omega : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanırsa V ye ω ile birlikte bir Lie Cebiri denir.

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y, z \in \mathrm{V}$ için;

   $\omega(ax + by, z) = a\omega(x,z) + b\omega(y,z)$

   $\omega(x, ay + bz) = a\omega(x,y) + b\omega(x,z)$ dir.

2) $\omega(x,y) = -\omega(y,x)$ dir.

3) $\omega(\omega(x,y),z) + \omega(\omega(y,z),x) + \omega(\omega(z,x),y) = 0$ dır.

Tanım 3.4.2 *(Bir Manifold Üstünde Vektör Alanı)* :

M manifoldunun her bir m noktasına, m noktasında bir tanjant vektör karşılık getiren bir fonksiyona, M üstünde bir vektör alanı denir.

V, M üstünde bir vektör alanı ve $f \in \mathscr{T}(m)$ olsun.

$$Vf : M \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu

$$(Vf)(m) = (V(m))(f)$$

eşitliği ile tanımlanır. Her $f \in \mathscr{T}(m)$ için, Vf fonksiyonu diferensiyellenebilir ise, V vektör alanına, diferensiyellenebilir *vektör alanı* denir. M üstündeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının cümlesini, $\chi(M)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.4.1 $V, W \in \chi(M)$ olsun. M manifoldunun her bir m noktası için,

$$[V,W]_m(f) = V_m(Wf) - W_m(Vf)$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$[V,W]_m : \mathscr{F}(m) \to \mathbb{R}$$

dönüşümü, m noktasında bir tanjant vektördür.

İspat : $[V,W]_m : \mathscr{F}(m) \to \mathbb{R}$ dönüşümü lineerdir ve Leibniz kuralını sağlar.

Böylece, M manifoldunun her bir m noktası için, m noktasına, $[V,W]_m$ tanjant vektörünü karşılık getiren $m \mapsto [V,W]_m$ vektör alanı elde edilir.

$$[V,W]_m(f) = V_m(Wf) - W_m(Vf)$$

olduğu görülür. $Vf \in \mathscr{F}(m)$ ve $Wf \in \mathscr{F}(m)$ olur. Bu iki fonksiyonun farkı da diferensiyellenebilir olduğundan, $[V,W]_m \in \chi(M)$ dir.

Tanım 3.4.3 *(Lie çarpımı)* : $V,W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$[V,W]_m(f) = V_m(Wf) - W_m(Vf)$$

eşitliğiyle tanımlanan, $[V,W]$ vektör alanına, V ile W vektör alanının *Lie çarpımı* denir.

Teorem 3.4.2 $V,W,Y \in \chi(M)$ ve $f,g \in \mathscr{F}(m)$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

- $[V,W] = -[W,V]$
- $[V,[W,Y]] + [W,[Y,V]] + [Y,[V,W]] = 0$
- $[V,W](fg) = f[V,W](g) + g[V,W](f)$

Tanım 3.4.4 *(ϕ – bağlı Vektör Alanı)* : M ve M' iki diferensiyellenebilir manifold olsun

$$\phi : M \xrightarrow{\text{diferensiyellenebilir}} M'$$

$X \in \chi(M)$ ve $X' \in \chi(M')$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "X"'] & M' \arrow[d, "X'"] \\
TM \arrow[r, "\phi_*"] & TM'
\end{tikzcd}$$

$\phi_* \circ X = X' \circ \phi$ ise X ve X' vektör alanları ϕ-bağlıdır denir.

Özel olarak $M = M'$ olmak üzere X ve X' vektör alanları ϕ-bağlı ve $X = X' \Rightarrow X$, ϕ ye göre invaryanttır denir.

Teorem 3.4.3 $\phi : M \to M'$ dönüşümü M üstünde diferensiyellenebilir olsun. $X, Y \in \chi(M)$ ve $X', Y' \in \chi(M')$ olmak üzere X ve X' vektör alanları ϕ-bağlı, Y ve Y' vektör alanları ϕ-bağlı ise $[X, Y]$ ve $[X', Y']$ vektör alanları ϕ-bağlıdır.

Tanım 3.4.5 *(Sol İnvaryant Vektör Alanı)* : G bir Lie grubu olsun, G üzerindeki bir X vektör alanı sol ötelemeler altında invaryant kalıyorsa, X vektör alanına, G üzerindeki bir *sol invaryant vektör alanı* denir.

$$X : G \to TG$$

bir vektör alanı olsun. Bir $a \in G$ için

$$L_a : G \to G$$
$$g \mapsto L_a g = ag$$

$$(L_a)_* = a_* : TG \to TG$$
$$\mathrm{X} \mapsto a_*(\mathrm{X})$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "L_a"', "g \mapsto ag"'] \arrow[d, "\mathrm{X}"'] & G \arrow[d, "\mathrm{X}"] \\ TG \arrow[r, "a_*", "\mathrm{X}(g)\mapsto \mathrm{X}(ag)"'] & TG \end{tikzcd}$$

$$(a_* \circ \mathrm{X})(g) = (\mathrm{X} \circ L_a)(g)$$
$$a_*(\mathrm{X}g) = \mathrm{X}(ag)$$

$g = e$ alınırsa $\mathrm{X}(a) = a_*(\mathrm{X}e)$ ve $a = e$ alınırsa $\mathrm{X}(g) = e_*(\mathrm{X}g)$ elde edilir.

G üzerindeki bütün sol invaryant vektör alanlarının cümlesini $\mathscr{L}G$ ile gösterelim.

Teorem 3.4.3'ten dolayı $[,]: \mathscr{L}G \times \mathscr{L}G \to \mathscr{L}G$ dir. Buna göre $[,]$ operatörüyle birlikte $\mathscr{L}G$, G üzerinde bir Lie Cebiridir.

Benzer işlemler sol öteleme yerine sağ öteleme alınarakta yapılabilir. Sağ invaryant vektör alanlarının cümlesini $\mathscr{R}G$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.4.4 $\mathscr{L}G$ ile T_eG uzayları izomorfiktirler.

İspat :

$$\xi : \mathscr{L}G \longrightarrow T_eG$$
$$\mathrm{X} \mapsto \xi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}e$$

ξ bir vektör uzayı izomorfizmidir. Gerçekten

$\forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{L}G \quad \xi(\mathrm{X}) = \xi(\mathrm{Y}) \Rightarrow \mathrm{X}e = \mathrm{Y}e$

$\forall g \in G$ için

$$g_* Xe = g_* Ye$$
$$Xge = Yge$$
$$Xg = Yg$$
$$X = Y$$

olduğundan ξ birebirdir.

$\forall X, Y \in \mathscr{L}G$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$\xi(\lambda X + Y) = (\lambda X + Y)e = (\lambda X)e + Ye = \lambda Xe + Ye = \lambda\xi(X) + \xi(Y)$ olup

ξ lineerdir. ξ, $\mathscr{L}G$ den T_eG nin bir altcümlesine lineer izomorfizmdir.

Ayrıca,

$$T(G \times G) \cong TG \times TG$$
$$\eta : G \longrightarrow T(G \times G)$$
$$g \mapsto (0g, v) \qquad 0g = (0,0,...,0)g$$

$$\mathscr{L}G \xrightarrow[X \mapsto Xe]{} T_eG$$

olduğundan $v \in T_eG$ için, bir X sol invaryant vektör alanı, $Xe = v$ olacak şekilde vardır. O halde ξ örtendir.

Leibnitz Formulünü hatırlarsak ;

$\phi : M \times M' \xrightarrow{diferensiyellenebilir} L$ dönüşümü göz önüne alınırsa $(a, a') \in Dom\phi$ olmak üzere $\phi_a : M' \xrightarrow{diferensiyellenebilir} L$, $m' \mapsto \phi(a, m') = \phi_a(m')$ elde edilir. Benzer şekilde $\phi_{a'} : M \xrightarrow{diferensiyellenebilir} L$, $m \mapsto \phi(m, a') = \phi_{a'}(m)$ olduğu görülür.

$T_{(a,a')}(M \times M') \cong T_aM \oplus T_{a'}M'$ olduğundan $w = (u, u') \in T_{(a,a')}(M \times M')$ olmak üzere $\phi_* w = \phi_{a'_*} u + \phi_{a_*} u'$ olduğunu biliyoruz.

Bu formül gereğince,

$$\theta : G \times G \longrightarrow G$$
$$(g_1, g_2) \mapsto \theta(g_1, g_2) = g_1 . g_2$$

$\theta_{g_1} : G \longrightarrow G$

$$g_2 \mapsto \theta_{g_1}(g_2) = \theta(g_1, g_2) = g_1.g_2 = L_{g_1}(g_2)$$

$\theta_{g_2} : G \longrightarrow G$

$$g_1 \mapsto \theta_{g_2}(g_1) = \theta(g_1, g_2) = g_1.g_2 = R_{g_2}(g_1)$$

$\theta(g_1 g, g_2) = \theta(g_1, g g_2) = \left(L_{g_1} \circ R_{g_2}\right) g$

ve böylece

$\theta_* : T(G \times G) \longrightarrow TG$

$(u,v) \in T(G \times G)$ için (g_1, g_2) yerine (g, g) alınırsa

$\theta_*(u,v) = L_{g_*} v + R_{g_*} u$ bulunur.

$$\begin{tikzcd}
T(G \times G) \arrow[r, "\theta_*"] & TG \\
G \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "X"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{X} = \theta_* \circ \eta$

θ_* ve η diferensiyellenebilir olduğundan X diferensiyellenebilirdir.

$\Rightarrow$ X bir vektör alanıdır.

$$\begin{aligned}
\forall g \in G \text{ için } \mathrm{X}(g) &= (\theta_* \circ \eta)(g) \\
&= \theta_*(\eta(g)) \\
&= \theta_*(0g, v) \\
&= L_{g_*} v + \underbrace{R_{g_*}(0g)}_{0} \quad (R_{g*} \text{ 1:1 ve lineer olduğundan } R_{g*}(0g) = 0 \text{ dır})
\end{aligned}$$

$$\mathrm{X}(g) = L_{g_*}(v) = g_* v$$

dir. Şimdi, X in sol invaryant olduğunu gösterelim:

$\forall a \in G$ için $a_*(\mathrm{X}g) = a_*(g_*v) = (ag)_* v = \mathrm{X}ag$ olduğu bilinmektedir. Buna göre X bir sol invaryant vektör alanıdır. O halde,

$$\mathrm{X}e = e_* v = v \in T_e G$$

olup ξ örtendir. Yukarıdaki açıklamalardan dolayı ξ bir lineer izomorfizmdir.

$\mathscr{L}\,G$ ile T_eG izomorfik olması T_eG üzerinde bir Lie Cebiri yapısı tanımlamak için kullanılacaktır. Buna göre,
$v, w \in T_eG$ ve $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{L}\,G$ $\quad \mathrm{X}e = v$, $\mathrm{Y}e = w$ olmak üzere,
$[v, w] = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]_e$ şeklinde tanımlayalım buradan $(T_eG, [,])$ bir Lie Cebiridir.

Sonuç 3.4.1: *boy* $\mathscr{L}\,G$ = *boy* T_eG = *boy* G dir.

Tanım 3.4.6 *(G nin Lie Cebiri)* : $(T_eG, [,])$ Lie Cebiri ne *G nin Lie cebiri* denir ve LG ile gösterilir.

$$T_eG \times T_eG \longrightarrow T_eG$$
$$(u, v) \mapsto [u, v] = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]_e$$

Böylece tanjant uzaylar üzerinde Lie çarpımı tanımlanmış oldu
T_eG nin bir bazı $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ olsun.

$\mathrm{X}_i : g \to \mathrm{X}_i(g) = L_{g_*}(v_i) = g_* v_i \quad (\mathrm{X}g = g_* v \quad v \in T_eG)$

ile tanımlı X_i vektör alanları G üzerinde sol invaryant vektör alanları olup,

$\{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n\}$ sistemi $\mathscr{L}\,G$ için bir bazdır.

$\mathscr{L}\,G \xrightarrow{\ \xi\ } T_eG$

$\mathrm{X}_i \mapsto \xi(\mathrm{X}_i) = \mathrm{X}_{ie} = v_i$

$$\mathscr{L}G \xrightarrow{\xi} T_eG$$

$$\mathrm{X}_i(g) \mapsto \xi(\mathrm{X}_i(g)) = \mathrm{X}_{ie}g = g_*\mathrm{X}_{ie} = g_*v_i$$

Tersine; $\mathscr{L}G$ nin bir bazı verilmişse $\{\mathrm{X}_{1e}, \mathrm{X}_{2e}, ..., \mathrm{X}_{ne}\} \subset T_eG$ için bir bazdır.

$\mathscr{L}G$ üzerindeki çarpımı,

$[\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j] = \sum c_{ij}^h \mathrm{X}_h$ ile verelim c_{ij}^h katsayılarına $\mathscr{L}G$ nin yapı sabitleri adı verilir.

$$[v_i, v_j] = \sum c_{ij}^h v_h \qquad (h, i, j = 1, 2, ..., n)$$

$$[\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j]_e = \sum c_{ij}^h \mathrm{X}_{he} \qquad (h, i, j = 1, 2, ..., n)$$

Örnek 3.4.1: $\mathbb{R}_n^n$ cümlesi için $[,](A, B) = AB - BA$ ise $\mathbb{R}_n^n$ bir Lie cebiridir.

$(GL(n, \mathbb{R}), [,])$ de bir Lie cebiridir.

$GL(n, \mathbb{R})$ Lie grubunun Lie cebiri $(\mathbb{R}_n^n, [,])$ Lie cebirine izomorftur.

Bunu gösterelim:

$GL(n, \mathbb{R})$deki haritayı x ile gösterelim.

$1 \le i, j \le n^2$ için $\left\{ e_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right)_e \right\}$ bir baz sistemidir.

$\left\{ e_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right)_e \right\} \subset T_eGL(n, \mathbb{R})$ için bir bazdır.

$$\mathrm{X}_{ij} : g \mapsto \mathrm{X}_{ij}(g) = g_*\left(\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right)_e = \sum_{h,r,s} \left(\frac{\partial}{\partial x^{ij}} g_{rh} x^{hs} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{rs}} \right)_g = \sum_r g_{ri} \left(\frac{\partial}{\partial x^{rj}} \right)_g$$

$$\mathrm{X}_{ij} = \sum_r x^{ri} \left(\frac{\partial}{\partial x^{rj}} \right)$$

$$[\mathrm{X}_{ij}, \mathrm{X}_{kl}] = \delta_{kj}\mathrm{X}_{il} - \delta_{il}\mathrm{X}_{kj}$$

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{kj}e_{il} - \delta_{il}e_{kj}$$

$\left\{ E_{ij} \middle| E_{ij} \ \textit{nin} \ (i, j) \ \textit{bileşeni} \ 1, \ \textit{diğer bileşenler} \ 0 \right\} \subset \mathbb{R}_n^n$ için bir bazdır.

$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{kj}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}$ işlemine göre $(\mathbb{R}_n^n, [,])$ bir Lie cebiridir.

$$T_e GL(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n_n$$
$$e_{ij} \xrightarrow{\text{lie cebiri izomorfizmi}} E_{ij}$$

olup bu bir vektör uzayı izomorfizmidir.

$GL(n,\mathbb{R})$ Lie grubunun Lie cebiri $(\mathbb{R}^n_n,[,])$ Lie cebirine izomorftur.

3.5. Lie Grup Etkileri

Tanım 3.5.1 *(Bir G Lie grubunun bir M manifoldu üzerinde bir dönüşüm grubu olarak etkisi)*: G bir Lie grubu ve M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere

$$\Phi : G \times M \to M$$

dönüşümü örten ve global olsun.

$\forall g,h \in G$ ve $m \in M$ için

i) Φ dönüşümü diferensiyellenebilirdir.

ii) $\Phi(g,\Phi(h,m)) = \Phi(gh,m)$ dir.

özellikleri sağlanıyorsa *G, M üzerinde bir dönüşüm grubu olarak etki ediyor* denir.

Özellik1: $\forall g \in G$ için

$$\phi_g : M \to M$$
$$m \mapsto \phi_g(m) = \Phi(g,m)$$

dönüşümü diferensiyellenebilirdir.

Özellik 2: $\forall g,h \in G$ için $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$ dir.

$\phi_g(\phi_h(m)) = \phi(g,\phi(h,m)) = \phi(gh,m) = \phi_{gh}$

Özellik 3: $g = e$ için $\phi_e : M \to M$ dönüşümü özdeşlik dönüşümüdür.

Özellik 4: $\forall g \in G$ için $\phi_g : M \to M$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir.

Özel olarak $G = M$ ise ϕ_g yi sol öteleme olarak düşünebiliriz.

$\phi_{g^{-1}} = (\phi_g)^{-1}$ olup ϕ_g diffeomorfizmdir.

$$M \xrightarrow{\quad \phi_g \quad} M \xrightarrow{\quad \phi_{g^{-1}} \quad} M$$

$$\begin{aligned} m \mapsto \phi_g m = \Phi(g,m) \mapsto \phi_{g^{-1}}\left(\Phi(g,m)\right) &= \Phi\left(g^{-1},\Phi(g,m)\right) \\ &= \Phi\left(g^{-1}.g,m\right) \\ &= \Phi(e,m) \end{aligned}$$

$$\left(\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g\right)(m) = (\phi_e)m = \phi_e$$

$\Rightarrow \phi_{g^{-1}} = (\phi_g)^{-1}$ dir

ϕ_g diferensiyellenebilir ve $\phi_{g^{-1}}$ diferensiyellenebilir olduğundan ϕ_g diffeomorfizmdir.

Teorem 3.5.1 *G* Lie grubu *M* üstünde bir Lie dönüşüm grubu olarak etki ediyorsa, *G* nin her $H \subset G$ Lie altgrubu da *M* üzerinde bir Lie dönüşüm grubu olarak etki eder.

İspat :

$$\Phi : G \times M \to M$$

Φ dönüşüm grubu ve *H*, *G* nin bir Lie altgrubu ise

$$\begin{tikzcd} \Phi_H : H \times M \arrow[r] \arrow[d, shift right=2, "j"'] \arrow[d, shift left=2, "id"] & M \\ G \times M \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

$\Phi_H = \Phi \circ (j \times id)$ şeklinde tanımlı dönüşümün H nin M üzerinde bir etki tanımladığını görelim. Bunun için;

i) Φ, j ve id diferensiyellenebilir olduğundan $\Phi_H = \Phi \circ (j \times id)$ diferensiyellenebilirdir.

ii) $\forall g, h \in G$ ve $\forall m \in M$ için $\Phi_H (g, \Phi_H (h, m)) = \Phi_H (gh, m)$ dir.

Dolayısıyla $H \subset G$ nin M üzerinde bir etkisi tanımlanmış olur.

Örnek 3.5.1: $G = GL(n, \mathbb{R})$ ve $M = \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\Phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(A, z) \mapsto \Phi(A, z) = A.z$$

şeklinde tanımlı dönüşüm, G nin $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir dönüşüm grubu olarak etkisini tanımlar

Φ global ve örtendir.

i) Φ diferensiyellenebilirdir.

$G = GL(n, \mathbb{R}) \qquad A = [a_{ij}] \in GL(n, \mathbb{R})$

$z = (z_1, z_2, ..., z_n) \quad A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ olmak üzere

$$A_i.z = a_{i1}.z_1 + a_{i2}.z_2 + ... + a_{in}.z_n = \langle A_i, z \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.z_j$$

elde edilir. Buna göre

$$A.z = \begin{bmatrix} a_{11}.z_1 + a_{12}.z_2 + ... + a_{1n}.z_n \\ a_{21}.z_1 + a_{22}.z_2 + ... + a_{2n}.z_n \\ \vdots \\ a_{n1}.z_1 + a_{n2}.z_2 + ... + a_{nn}.z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1.z \\ A_2.z \\ \vdots \\ A_n.z \end{bmatrix}$$

ve $[a_{ij}] z = (\langle A_1, z \rangle, \langle A_2, z \rangle, ..., \langle A_n, z \rangle)$ şeklide yazılabilir. Φ nin koordinat temsili

$$\begin{array}{ccc} \Phi : GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x \downarrow \quad \downarrow id & & \downarrow id \\ \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

diyagramından da görüldüğü gibi $\left(x\left[a_{ij}\right], z\right) \mapsto z\left[a_{ij}\right]$ şeklindedir.

Buradan da

$$\left(x\left[a_{ij}\right], z\right) = \left(\left(a_{11},...,a_{1n},...,a_{nn}\right), z\right) \mapsto \left(\underbrace{z.\left(a_{11},...,a_{1n}\right)}_{\langle A_1,z\rangle = A_1.z}, \underbrace{z.\left(a_{21},...,a_{2n}\right)}_{\langle A_2,z\rangle = A_2.z}, ..., \underbrace{z.\left(a_{n1},...,a_{nn}\right)}_{\langle A_n,z\rangle = A_n.z} \right)$$

$$\left(x_i\left[a_{ij}\right], z\right) \underset{differensiyellenebilirdir}{\overset{\theta}{\mapsto}} \langle A_i, z\rangle$$

elde edilir ki bu θ nın diferensiyellenebilir olması anlamına gelir. Tanım gereğince $\Phi = id \circ \theta \circ \left(x \times id\right)^{-1}$ diferensiyellenebilirdir.

$ii)\ \Phi\left(A, \Phi\left(B, z\right)\right) = A\left(Bz\right) = \left(AB\right)z = \Phi\left(AB, z\right)$

Bu gösterir ki ϕ, G nin $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir dönüşüm grubu olarak etkisini tanımlar.

Tanım 3.5.2 : *G, M* üzerinde bir dönüşüm grubu olarak etki etsin $A \subset M$ bir altcümle olmak üzere $\Phi\left(G \times A\right) \subset A$ ise *A,* Φ altında *invaryanttır* denir.

Teorem 3.5.2 Bir $M' \subset M$ regüler altmanifoldu $\Phi : G \times M \to M$ etkisi altında invaryant ise,

$$\Phi' : G \times M' \to M'$$

dönüşümü G nin M' üstünde bir dönüşüm grubu olarak etkisini tanımlar.

İspat:

$$\Phi : G\times M' \xrightarrow{id\times j} G\times M \xrightarrow{\Phi} M$$

M', Φ altında invaryant olduğundan $\left(\Phi\circ(id\times j)\right)(G\times M')\subset M'$ dir.

$$\Phi' : G\times M' \to M'$$

$$(g,m')\mapsto \Phi'(g,m')=\Phi(g,m')$$

olarak tanımlı dönüşüm G nin M' üstünde bir dönüşüm grubu olarak etkisini tanımlar.

Örnek 3.5.2: $G=O(n,\mathbb{R})=\left\{A \middle| A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}^n_n, A^{-1}=A^T\right\}$

$M=\mathbb{R}^n$ ve $M'=S^{n-1}$ alınırsa M', $\mathbb{R}^n$ in bir regüler altmanifoldudur.

Teorem 3.5.1 den $O(n,\mathbb{R})\subset GL(n,\mathbb{R})$ Lie altgrubu M üzerinde bir Lie dönüşüm grubu olarak etkidir. Aşağıdaki diyagram incelenirse,

$$\begin{array}{c}
\Phi : GL(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
\Phi_{O(n,\mathbb{R})} : O(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n
\end{array}$$

$S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ regüler altmanifold olup, Teorem 3.5.2 den dolayı

$$\Phi' : O(n,\mathbb{R})\times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

$$(A,s)\mapsto \Phi'(A,s)=\Phi_{O(n,\mathbb{R})}(A,s)=\Phi(A,s)=A.s$$

dönüşümü $O(n,\mathbb{R})$ nin M' üstünde bir dönüşüm grubu olarak etkisini tanımlar.

3.6. Vektör Alanlarının Lie Cebiri

Teorem 3.4.4 ve Sonuç 3.4.1 göz önüne alınırsa benzer şekilde $\mathcal{R}$ G sağ invaryant vektör alanlarının cümlesi G ile aynı boyuta sahip bir Lie cebiri tanımladığı görülebilir.

Teorem 3.6.1 $\mathcal{L}G$ ve $\mathcal{R}G$ Lie Cebirleri izomorfiktirler.

İspat:

$$\psi : G \to G$$
$$g \mapsto g^{-1}$$

şeklinde tanımlanan ψ dönüşümü teorem 3.1.1 den diffeomorfizm idi.

$X \in \mathcal{L}G$ için $Y = \psi_* \circ X \circ \psi$ olsun

$\psi = \psi^{-1}$ olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki diyagram göz önüne alınırsa

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\overleftarrow{\psi}", "\psi"'] \arrow[d, "X"'] & G \arrow[d, "Y"] \\ TG \arrow[r, "\psi_*"'] & TG \end{tikzcd}$$

Y, G üzerinde bir vektör alanıdır.

Y nin sağ invaryant olduğunu gösterelim:

$$G \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{L_g} G \qquad\qquad G \xrightarrow{R_{g^{-1}}} G \xrightarrow{\psi} G$$
$$g \mapsto g^{-1} \mapsto gg^{-1} \qquad\qquad g \mapsto gg^{-1} \mapsto g^{-1}g$$

$$\Rightarrow L_g \circ \psi = \psi \circ R_{g^{-1}}$$

$$G \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{R_g} G \qquad\qquad G \xrightarrow{L_{g^{-1}}} G \xrightarrow{\psi} G$$
$$g \mapsto g^{-1} \mapsto g^{-1}g \qquad\qquad g \mapsto g^{-1}g \mapsto gg^{-1}$$

$$\Rightarrow R_g \circ \psi = \psi \circ L_{g^{-1}}$$

$$R_{g_*} \circ \mathrm{Y} \circ R_{g^{-1}} = R_{g_*} \circ \left(\psi_* \circ \mathrm{X} \circ \psi\right) \circ R_{g^{-1}}$$

$= \left(R_{g_*} \circ \psi_*\right) \circ \mathrm{X} \circ \left(\psi \circ R_{g^{-1}}\right)$ burada $\left(R_{g_*} \circ \psi_*\right) = \left(R_g \circ \psi\right)_*$ olduğundan

$$= \left(R_g \circ \psi\right)_* \circ \mathrm{X} \circ \left(\psi \circ R_{g^{-1}}\right)$$

$$= \left(\psi \circ L_{g^{-1}}\right)_* \circ \mathrm{X} \circ \left(\psi \circ R_{g^{-1}}\right)$$

$= \psi_* \circ \underbrace{L_{g_*^{-1}} \circ \mathrm{X}}_{\mathrm{X} \circ L_{g^{-1}}} \circ \left(\psi \circ R_{g^{-1}}\right)$ burada $\mathrm{X} \circ L_g = L_{g_*} \circ \mathrm{X} \Rightarrow L_{g_*^{-1}} \circ \mathrm{X} = \mathrm{X} \circ L_{g^{-1}}$

olup

$= \psi_* \circ \mathrm{X} \circ \underbrace{L_{g^{-1}} \circ L_g}_{\text{özdeşlik}} \circ \psi$ dir.

$$R_{g_*} \circ \mathrm{Y} \circ R_{g^{-1}} = \psi_* \circ \mathrm{X} \circ \psi = \mathrm{Y}$$

$$R_{g_*} \circ \mathrm{Y} = \mathrm{Y} \circ R_g$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow[g \mapsto ga]{R_a} & G \\ \Big\downarrow \mathrm{Y} & & \Big\downarrow \mathrm{Y} \\ TG & \xrightarrow{R_{a_*}} & TG \end{array}$$

$$\mathrm{Y}(g) \mapsto R_{a_*}\left(\mathrm{Y}(g)\right) = \mathrm{Y}(ga)$$

$$R_{a_*}\left(\mathrm{Y}(g)\right) = \mathrm{Y}(ga)$$

$$\left(R_{a_*} \circ \mathrm{Y}\right)(g) = \left(\mathrm{Y} \circ R_a\right)(g)$$

$R_{a_*} \circ \mathrm{Y} = \mathrm{Y} \circ R_a$ burada $a = g$ alınırsa;

$R_{g_*} \circ \mathrm{Y} = \mathrm{Y} \circ R_g$ bulunur.

Bu notasyon ve kabuller ile $f : \mathscr{L}G \to \mathscr{R}G$ şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir.

Bu dönüşümün izomorfizm olduğunu gösterelim.

Dönüşüm lineerdir:

$$f : \mathscr{L}G \to \mathscr{R}G$$
$$\mathrm{X} \mapsto f(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$$

$$\begin{aligned}(a\mathrm{X}+\mathrm{Z}) \mapsto \psi_* \circ (a\mathrm{X}+\mathrm{Z}) \circ \psi &= (\psi_* \circ a\mathrm{X} \circ \psi) + (\psi_* \circ \mathrm{Z} \circ \psi) \\ &= a(\psi_* \circ \mathrm{X} \circ \psi) + (\psi_* \circ \mathrm{Z} \circ \psi)\end{aligned}$$

$$f(a\mathrm{X}+\mathrm{Z}) = af(\mathrm{X}) + f(\mathrm{Z})$$

f nin tersi:

$$\mathrm{X} \mapsto f(\mathrm{X}) = \psi_* \circ \mathrm{X} \circ \psi = \mathrm{Y}$$

$$f^{-1}(\mathrm{Y}) = \mathrm{X} = \psi_*^{-1} \circ \mathrm{Y} \circ \psi^{-1} \qquad (\ \psi_*^{-1} = \psi_* \ \text{ ve } \ \psi^{-1} = \psi \ \text{ olduğundan}\ )$$
$$= \psi_* \circ \mathrm{Y} \circ \psi$$

dır.

O halde f dönüşümü birebir ve örtendir. Böylece f bir izomorfizmdir.

f Lie Bracket operatörünü korur

$$\mathrm{Y} = \psi_* \circ \mathrm{X} \circ \psi$$
$$\mathrm{Y} \circ \psi^{-1} = \psi_* \circ \mathrm{X}$$
$$\mathrm{Y} \circ \psi = \psi_* \circ \mathrm{X}$$

$\Rightarrow$ X ve Y, ψ -bağlıdır.

Benzer şekilde X' ve Y' alınırsa X' ve Y', ψ -bağlıdır.

$$\psi_* \circ [\mathrm{X}, \mathrm{X}'] = [\mathrm{Y}, \mathrm{Y}'] \circ \psi$$

$[\mathrm{X}, \mathrm{X}']$ ile $[\mathrm{Y}, \mathrm{Y}']$ ψ -bağlıdır. f Lie Bracket operatörünü korur.

Sonuç olarak f bir Lie Cebiri izomorfizmidir. Dolayısıyla $\mathscr{L}G$ ve $\mathscr{R}G$ Lie Cebirleri izomorfiktirler.

Teorem 3.6.2 $\mathscr{R}G$ ile T_eG vektör uzayları izomorfiktirler.

İspat: $\mathscr{L}G \xrightarrow{izomorf} \mathscr{R}G \xrightarrow{izomorf} T_eG$

$\mathscr{L}G$ ile $\mathscr{R}G$ nin izomorfik ve $\mathscr{L}G$ ile T_eG nin izomorfik olduğunu biliyoruz. Buna göre $\mathscr{R}G$ ile T_eG vektör uzayları izomorfiktirler.

Sonuç olarak $\mathscr{R}G$, G üzerinde bir Lie Cebiri tanımlar.

3.7. Bir Lie Grup Etkisi Altında Yörüngeler

$\phi : G \times M \to M$ dönüşümü bir etki olsun. $m_1, m_2 \in M$ için bir $\sim$ bağıntısı,

$m_1 \sim m_2 \Leftrightarrow m_2 = gm_1, \exists g \in G$ olarak tanımlansın. "$\sim$" bir denklik bağıntısıdır.

Gerçekten;

Yansıma: $\forall m \in M$ için $g = e$ alınırsa $m = em$ dir.

Simetri: $\forall\ m_1, m_2 \in M$ için $m_2 = gm_1 \Rightarrow g^{-1}m_2 = m_1$ dir.

Geçişme: $\forall m_1, m_2, m_3 \in M$ için $m_1 \sim m_2$ ve $m_2 \sim m_3$ ise $m_2 = g_1m_1$, $m_3 = g_2m_2$ ise $m_3 = g_2g_1m_1$ dir. Dolayısıyla $m_1 \sim m_3$ dir.

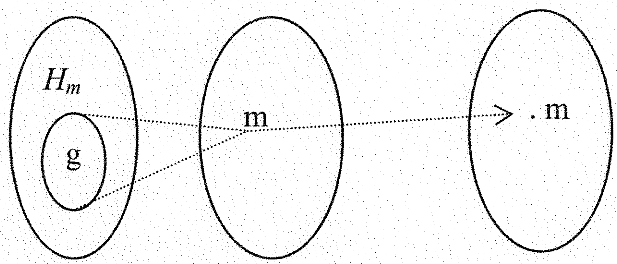
$\forall m \in M$ nin denklik sınıfı $\overline{m} = \{m' \in M \mid m' = gm, \exists g \in G\} = \phi_m(G)$ dir.

Burada $\phi_m : G \to M$

$$g \mapsto \phi_m(g) = gm = \Phi(g, m) \text{ dir.}$$

Tanım 3.7.1 (*Yörünge*) : $\phi_m(G)$ cümlesine (m nin denklik sınıfına) m nin $\Phi : G \times M \to M$ etkisi altındaki yörüngesi adı verilir. (Şekil 3.7.1)

$$G \times M \xrightarrow{\Phi} M$$



(Şekil 3.7.1)

Şimdi $H_m = \{ g | gm = m \} \subset G$ cümlesi gözönüne alınırsa $\phi_m^{-1} m = H_m$ olup

H_m altcümlesi G nin altgrubudur. Buna m noktasındaki *izotropi* grubu denir.

H_m nin bir grup olduğu aşağıdaki şekilde ispatlanabilir.

1-) $g_1, g_2 \in H_m \Rightarrow g_1 m = m$, $g_2 m = m$ dir.

$$g_1 \underbrace{m}_{g_2 m} = m$$

$g_1 . g_2 m = m$ olup $g_1 . g_2 \in H_m$ dir.

Kapalılık özelliği sağlanmış olur.

2-) $e \in G$ olmak üzere $em = m$ olup $e \in H_m$ dir.

3-) $g_1, g_2, g_3 \in H_m$ için $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ olup

Birleşme özelliği sağlanır.

4-) $\forall g \in H_m$ için

$$em = m$$

$$g^{-1} \underbrace{gm}_{m} = m$$

$$g^{-1} m = m$$

$\Rightarrow g^{-1} \in H_m$ dir.

H_m, G nin bir altgrubudur.

Tanım 3.7.2 (*Etkili Etki, Serbest Etki*): G, M üzerinde bir dönüşüm grubu olarak etki etsin.

1. $\forall m \in M$ için $\phi_g(m) = m$ eşitliği sadece $g = e$ için sağlanıyorsa G, M üzerinde *etkili olarak etki* ediyor denir.

2. $\exists m \in M$ için $\phi_g(m) = m$ iken yalnızca $g = e$ ise G, M üzerinde *serbest olarak etki* ediyor denir.

Örnek3.7.1:
$$\phi : SO(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(T,Z) \mapsto \phi(T,Z) = T.Z$$

Bu dönüşüm bir etkidir. Gerçekten;

$SO(2,\mathbb{R}) = \left\{ A \middle| A \in \mathbb{R}_2^2, \det A = 1 \right\}$

$\forall T \in SO(2,\mathbb{R})$ ve $Z \in \mathbb{R}^2$ için

$$SO(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(T,Z) \mapsto \phi(T,Z) = T.Z$$

$$\phi_T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$Z \mapsto \phi_T(Z) = T.Z$$

i) $\forall T \in SO(2,\mathbb{R})$ için ϕ_T diferensiyellenebilirdir.

ii) $\forall T \in SO(2,\mathbb{R})$ ve $Z \in \mathbb{R}^2$ için $(\phi_T \circ \phi_K)(Z) = T(KZ) = (TK)Z = \phi_{TK}(Z)$

$\phi_T \circ \phi_K = \phi_{TK}$ dır.

Bu etkinin etkili mi yoksa serbest mi olduğunu görelim.

$\forall Z \in \mathbb{R}^2$ için $\phi_T Z = Z \Rightarrow T.Z = Z \Rightarrow T = I_2 = e$ o halde tanımlanan etki etkilidir.

$\exists Z \in \mathbb{R}^2$ için $\phi_T Z = Z \Rightarrow T.Z = Z$ olup $Z = (0,0)$ olmak üzere $T = I_2$ olmak zorunda değildir. Buna göre serbest etki değildir.

Örnek 3.7.2 : $\Phi : GL(n,\mathbb{R}) \times S(n,\mathbb{R}) \to S(n,\mathbb{R})$

$$(T,A) \mapsto \Phi(T,A) = T.A.T^T$$

Bir etkidir.

$S(n,\mathbb{R}) = \left\{ A \middle| A \in \mathbb{R}_n^n, A^T = A \right\}$

$$x : S(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\left[a_{ij}\right] \mapsto \left(a_{11},\dots,a_{1n},a_{22},\dots,a_{2n},\dots,a_{nn}\right)$$

$(S(n,\mathbb{R}),x)$ bir haritadır. $\left\{(S(n,\mathbb{R}),x)\right\}$ bir atlastır.

$GL(n,\mathbb{R})$ matrislerin çarpma işlemine göre bir gruptur.

$$\left(T.A.T^T\right)^T = \left(T^T\right)^T . \underbrace{A^T}_{A\in S(n,\mathbb{R})} .T^T = T.A.T^T$$

$\left(T.A.T^T\right)^T = T.A.T^T$ olup işlem tanımlıdır.

Bu dönüşüm diferensiyellenebilirdir.

$\phi_T : S(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{diferensiyellenebilir} S(n,\mathbb{R})$

$A \mapsto \phi_T(A) = T.A.T^T = \Phi(T,A)$

$$\phi_T(A) = \phi_T(B) \Rightarrow A = B$$

$$T.A.T^T = T.B.T^T \Rightarrow T^{-1}.\left(T.A.T^T\right) = T^{-1}.\left(T.B.T^T\right)$$

$$\Rightarrow A.T^T = B.T^T$$

$$\Rightarrow \left(A.T^T\right).\left(T^T\right)^{-1} = \left(B.T^T\right).\left(T^T\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow A = B$$

ϕ_T birebirdir.

$$
\begin{tikzcd}
GL(n,\mathbb{R}) \arrow[d, "x"'] & \times & S(n,\mathbb{R}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\psi"'] & S(n,\mathbb{R}) \arrow[d, "\psi"'] \\
\mathbb{R}^{n^2} & \times & \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \arrow[r, "\Theta", "\psi\circ\Phi\circ(x\times\psi)^{-1}"'] & \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{tikzcd}
$$

$\Theta = \psi \circ \Phi \circ (x \times \psi)^{-1}$ diferensiyellenebilir olduğundan Φ diferensiyellenebilirdir.

$\Phi(T, A) = \phi_T A$ olduğu hesaba katılırsa, $(\phi_T)^{-1} = \phi_{T^{-1}}$ olup $(\phi_T)^{-1}$ diferensiyellenebilirdir. Böylece ϕ_T diffeomorfizmdir.

Ayrıca,

$$\phi_T(\phi_K)(A) = \phi_T\left(\underbrace{K.A.K^T}_{\in S(n,\mathbb{R})}\right) = T\left(K.A.K^T\right)T^T = (T.K).A.(T.K)^T = \phi_{TK}(A)$$

$$(\phi_T \circ \phi_K)(A) = (\phi_{TK})(A) = \Phi(T.K, A)$$

ϕ_T bir etkidir.

Bu etki etkili midir?

$\forall A \in S(n,\mathbb{R})$ için $\phi_T A = A \Rightarrow T = I$ olur mu?

$$\phi_T A = A \Rightarrow T.A.T^T = A$$
$$\Rightarrow T = -I$$

$\Rightarrow \phi_T$ bir etkili etki değildir.

Bu etki serbest midir?

$\exists A \in S(n,\mathbb{R})$ için $\phi_T A = A \Rightarrow T = I$ olur mu?

$T.A.T^T = A$, $A = 0$ alınırsa $T \neq I$ olduğu durumda da sağlanır.

$\Rightarrow \phi_T$ bir serbest etki değildir.

Örnek 3.7.3: $G=\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \middle| a\rangle 0, b\in\mathbb{R} \right\}$ olsun

$$\phi : G\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

dönüşümü $\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}\right)=a\mathrm{x}+b$ şeklinde tanımlansın.

i) ϕ dönüşümü diferensiyellenebilirdir.

$$ii)\,\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \underbrace{\phi\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}\right)}_{c\mathrm{x}+d}\right)=\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, c\mathrm{x}+d\right)=ac\mathrm{x}+ad+b$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}\right)=\phi\left(\begin{bmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}\right)=ac\mathrm{x}+ad+b$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \phi\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}\right)\right)=\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{x}\right) \text{dir.}$$

$\Rightarrow \phi$ dönüşümü bir etkidir.

Tanım 3.7.3 (*Geçişli Etki*): *G, M* üzerinde bir etki olsun. Herhangi $m_1, m_2 \in M$ için $m_2 = gm_1$ olacak şekilde bir $g\in G$ varsa *G, M üzerinde geçişli olarak etki ediyor* denir.

Örnek 3.7.4: $G=GL(n,\mathbb{R})$ ve $M=\mathbb{R}^n-\{0\}$ olsun

$$\phi : G\times M\longrightarrow M$$
$$(A,Z)\mapsto\phi(A,Z)=A.Z$$

bir etkidir. Gerçekten;

$\forall Z_1, Z_2\in M$ için $A.Z_1=Z_2$ olacak şekilde $A\in G$ vardır. Çünkü $\det A\neq 0$ olduğundan bu denklem sisteminin bir çözümü vardır. Dolayısıyla bu etki geçişli bir etkidir.

Örnek 3.7.5:

$$\phi : O(n,\mathbb{R}) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

$$(T,Z) \mapsto TZ$$

bir etkidir.

S^{n-1} bir a elemanını alalım $T \in O(n,\mathbb{R})$ olmak üzere T matrisinin birinci kolonu a olsun $1 = (1,0,...,0)$ $\quad T.1 = a$

S^{n-1} , $O(n,\mathbb{R})$ etkisi altında 1'e denktir.

Dolayısıyla tanımlanan etki geçişlidir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde bir Lie grubu cebirsel, topolojik ve geometrik özellikleriyle ele alınarak incelenmiş ve bir manifold üzerindeki etkisi örneklendirilerek çalışılmıştır.

Bir ileri aşama ve araştırma konusu olarak bir manifold üzerinde birinci mertebeden diferensiyel denklemler, maksimal integral eğrileri ele alınarak bir Lie grubu için üstel dönüşümler incelenebilir. Bir Lie grubunun 1-parametreli altgrupları ele alınabilir. Lie grubu etkileriyle ilgili olarak özellikle yörüngeler ele alınarak geometrik özellikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. R. S. Clark, F.Brickell, Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.
2. William M. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Pres, New York, San Francisco, London, .1975
3. H. H. Hacısalihoğlu, Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Yayınları, 1980.
4. H. H. Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 1982.
5. A. Sabuncuoğlu, Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, 2006.