KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH SABİT NOKTA TEOREMİ VE BAZI UZAYLARDA UYGULAMASI

FİGEN AYNI

OCAK 2010

Matematik Anabilim Dalı FİGEN AYNI tarafından hazırlanan BANACH SABİT NOKTA TEOREMİ VE BAZI UZAYLARDA UYGULAMASI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim Koca

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye (Danışman)	: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN	____________________

02 / 02 / 2010

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç.Dr. Burak BİRGÖREN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BANACH SABİT NOKTA TEOREMİ VE BAZI UZAYLARDA UYGULAMASI

AYNI, Figen
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hakan Şimşek

Ocak 2010, 43 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş ve çalışmanın amacı ve kullanılan kaynaklar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde ise temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Kısmi Metrik uzay ve Dualistik Kısmi Metrik uzay kavramları tanıtılmış ve bu uzaylarda Banach Sabit Nokta teoremi ve bazı uygulamalarına yer verilmiştir. Dördüncü bölüm de ise tartışma ve sonuca yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Banach sabit nokta, Dualistik metrik uzay, Kısmi metrik uzay, Sabit nokta, Quasi metrik uzay.

ABSTRACT

BANACH FIXED POINT THEOREM AND APPLICATIONS FOR SPECIAL SPACES

AYNI, Figen
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hakan Şimşek
January 2010, 43 pages

This study consist of four parts. In the first part, the aim of the the study and information about used sources have given. In the second part some basic definations and theorems have been given. In the thirth part, Partial Metric spaces and Dualistic partially metric spaces structure and Banach theorems and its applications were given to partially and dualistic spaces. The final part is deserved for discussion and conclusion

Key Words: Banach fixed points, Dualistic partially metric spaces, Fixed points, Partial metric spaces, Quasi metric spaces.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımını ve ilgisini esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Dr. Doç. Hakan ŞİMŞEK'e ve tezimin birçok aşamasında yardım gördüğüm Sayın Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN'a, manevi olarak beni destekleyen canım arkadaşlarıma ve son olarak bana birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımlarını esirgemeyen öncelikle abim Arif AYNI'ya ve gösterdikleri sabır için sevgili ailem'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Kısmi Metrik uzay kavramı Mathews tarafından 1994 de, Genel Topoloji ve Uygulamaları 8.Yaz Konferansında tanıtıldı. 4 aksiyomla verilen kısmi metrik uzay kavramı, kendisine uzaklığı sıfırdan farklı olan cümleler kavramını da içermekte olup bu manada metrik kavramından daha geniş bir kavramdır. Bu aksiyomlar ikinci bölümde verilmiştir.

Kısmi metrik uzay kavramına en belirgin örnek $p(a,b) = maks(a,b), a,b \in \mathbb{R}^+$ ile tanımlanan bağıntıdır. a ve b yi negatif olmayan reel sayılar cümlesinden seçersek kısmi metrik $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ cümlesi üzerinde değerler alır.

Bir başka örnek ise $\mathbb{R}$ de tanımlı boş olmayan kapalı sınırlı aralıkların bir ailesi $\tau = \{[a,b]: a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ olsun. $[a,b],[c,d] \in \tau$ iken $p([a,b],[c,d]) = mak(b,d) - \min(a,c)$ ile tanımlanırsa p reel sayılar cümlesi üzerinde kısmi metrik uzaydır. Bu kavram reel sayılar cümlesi üzerinde ki alışılmış metrikle de yakından alakalıdır. Kısmi metrik kavramıyla $[a,b]$ nin kendisine uzaklığı $b-a$ dır. Bu yolla her $a \in \mathbb{R}$ elemanını $[a,a]$ ifadesine taşırız. Böylece alışılmış metrik kavramı kısmi metrik başlığına taşınmış olur (12).

1996 Yılında Genel Topoloji ve Uygulamaları 11.Yaz Konferansında S.J. O'Neill, S.Mathews' in tanıttığı kısmi metrik uzay kavramını $\mathbb{R}$ ye taşıdı ve Dualistik kısmi metrik uzay olarak adlandırdı. Bu yolla kısmi metrik uzay kavramı O'Neill tarafından yeniden oluşturuldu. Yukarıda verilen maksimumla tanımlanan örnek dualistik kısmi metrik uzay kavramının en belirgin örneğidir. Bu örnekte değer cümlesi $\mathbb{R}^+$ dan $\mathbb{R}$ ye taşındığı için kısmi metrik uzay olamayacak fakat dualistik kısmi metrik uzay şartlarını sağladığı için dualistik kısmi metrik uzay olacaktır.

Dualistik kısmi metrik uzay ve kısmi metrik uzay kavramları

$$\{B_p(x,\varepsilon): x \epsilon X, \varepsilon > 0\}$$

p-açık yuvarları ailesini taban kabul eden bir T_0 topolojisini üretirler (13).

1.1.Kaynak Özetleri

O'Neill ve Mathews in tanıttığı kavramlar üzerine son yıllarda pek çok makale yazılmıştır. Referanslar arasında da yer alan M.Schellekens, S. Romaguera, S.Oltra ve O.Valero gibi pek çok matematikçinin ilgisini çeken bu kavramların Banach teoremine uygulaması hakkında çok sayıda makale yazılmıştır (1, 15-16, 29, 31-32). Son zamanlarda bilgisayar yoluyla Banach sabit nokta teoreminin bazı genellemeleri quasi metrik ve kısmi metrik uzaylar için kısmen de olsa ifade edilmiştir (4-5, 9, 20-26).

Bu makalelerden S. Oltra ve O. Valero tarafından " Kısmi metrik Uzayda Banach Sabit Nokta Teoremi" (Rend. İstit. Mat. Univ. Trieste 2004 ve O. Valero tarafından "Kısmi metrik Uzay üzerinde Banach Sabit Nokta Teoremleri" App. Gen. Topology 2005 adlı makaleler temel alınarak, Banach teoreminin Kısmi metrik uzaylarda geçerli Banach Sabit Nokta teoremine ve onun bazı genişlemelerine taşınması durumu araştırılacaktır.

Temel kavramlarda R.P. Agarwal, M.Meehan, D.O'Regan,ın Fixed Point Theory and Applications, ve Y. Soykan'ın ve M.Bayraktar' Fonksiyonel Analiz, J.Dugundji, A. Granas, Fixed point Theory ve B. Yurtsever'in Matematik Analiz Dersleri kitaplarından faydalanılmıştır. Kısmi metrik kavramında, dualistik kısmi metrik ve quasi metrik kavramlarında ise S. Mathews ve O Neill'in makalelerinden faydalanılmıştır.

1.2.Çalışmanın Amacı

Bizim bu tezde amacımız S.J. O'Neill ve S.G. Mathews e ait tanımlar ışığında Kısmi Metrik uzaylar için Banach Teoremi hakkında, S. Oltra ve S. Oltra – O. Valero tarafından yazılan makaleleri incelemektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilerde kullanacağımız temel tanım ve kavramlar verilecektir**.**

2.1. Temel Tanımlar ve Kavramlar

2.1.1.Tanım: X boştan farklı bir cümle olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(x, y)$ (simetri)

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlar ise d ye X üzerinde bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir, (X, d) veya X_d ile gösterilir (2).

2.1.2.Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X de yakınsak dizi ve x e bu dizinin limiti denir (2, 30).

2.1.3.Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_o$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_o = n_o(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi (esas dizi) denir (30).

2.1.4.Tanım: (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \to x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir (2).

2.1.5.Uyarı: (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki bir (x_n) Cauchy dizisinin alt dizisi yakınsak ise yani $x_{n_k} \to x$ ise bu taktirde Cauchy dizisinin kendisi de bu noktaya yakınsar (30).

2.1.6.Uyarı: (X,d) bir metrik uzay olsun. X deki her yakınsak dizi Cauchy dizisidir (30).

2.1.7.Uyarı: (X,d) bir metrik uzay olsun. X deki bir (x_n) dizisi yakınsak ise bu değer tektir (2).

2.1.8.Tanım: (X,d) bir metrik uzay olsun. $r>0$ bir reel sayı ve $a \in X$ olmak üzere

$$B_d(a,r) = \{y \in X: d(x,a) < r\}$$

şeklinde tanımlı yuvara, a merkezli r yarıçaplı yuvar denir (2).

2.1.9.Tanım: N normlu lineer uzay olsun. N norm metriğine göre tam ise N 'ye Banach uzay denir. N'nin normlu veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayına reel veya kompleks Banach uzayı denir (2).

2.1.10.Tanım: X boş olmayan bir cümle ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun**.**

$$Tx = x$$

eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına T nin bir sabit noktası denir (28).

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi$T: X \to X$ ile tanımlanan bir T fonksiyonunun herhangi bir sabit noktası olmayabilir , bir sabit noktası olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

2.1.11.Örnek: X=$\mathbb{R}^2$ yi göz önüne alalım. $a \neq 0$ olmak üzere $Tx = a + x$ ile tanımlanan gibi $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ öteleme fonksiyonunun sabit noktası yoktur (27).

2.1.12.Örnek: $0<\theta < 2\pi$ için

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ile verilen $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunun yalnız bir sabit noktası vardır. Bu nokta

(0,0) noktasıdır (27).

2.1.13.Örnek:$\{(x,0): x \in R\}$ kümesinin her bir elemanı

$$T(x, y) = (x, -y)$$

ile tanımlı $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yansıma fonksiyonunun sabit noktasıdır. Yani T fonksiyonunun sonsuz sayıda sabit noktası vardır (27).

2.1.14.Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 < a < 1$ varsa T ye bir daralma (veya büzülme) fonksiyonu denir (28).

2.1.15.Teorem: (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $T: X \to X$ bir daralma fonksiyonu ise o zaman;

1) T nin bir ve yalnız bir sabit $x \in X$ noktası vardır.
2) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $(T^n x)$ iterasyon dizisi, T nin bu sabit noktasına yakınsar (yani her $n \in N$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı (x_n) iterasyon dizisi T nin bu sabit x noktasına yakınsar (28).

İspat: Önce sabit bir noktanın varlığını ispatlayalım. $x_o \in X$ başlangıç noktasını seçelim.

$$x_o, \;\; x_1 = Tx_0\,, \; x_2 = Tx_1 = T^2 x_0\,, \cdots, x_n = T_{n-1} = \cdots = T^n x_0$$

İterasyon dizisini göz önüne alalım. $n < m$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(T^n x_o, T^m x_o) = d(T^n x_o, T^n T^{m-n} x_o) \\
&\leq a^n d(x_o, T^{m-n} x_o) = a^n d(x_o, x_{m-n}) \\
&\leq a^n \{d(x_o, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \\
&\leq a^n d(x_o, x_1)\{1 + a + a^2 + \ldots + a^{m-n-1}\} \\
&\leq a^n d(x_o, x_1) \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a^j \\
&\leq \frac{a^n}{1-a} d(x_o, x_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. $0 < a < 1$ olduğundan (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna ulaşırız. Fakat (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir $x \in X$ vardır öyle ki (x_n) dizisi x e yakınsar. Şimdi x elemanının T nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz.

$$d(T_x, x) \leq d(\ T_x, T^n x_o) + d(T^n x_o, x)$$

$$\leq ad(x, x_{n-1}) + d(x_n, x)$$

olduğundan ve (x_n) dizisi $x\,e$ yakınsadığından $d(Tx, x) = 0$ elde edilir ve buradan

$$Tx = x$$

sonucuna ulaşılır (veya alternatif olarak x in T nin bir sabit noktası olduğu, T nin sürekliğinden ve

$$Tx = T\,(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

eşitliğinden elde edilir.

Şimdi T nin sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. Herhangi bir $y \in X$ için

$$Ty = y$$

olsun. O zaman

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$$

olur. $0 < a < 1$ olduğundan $d(x, y) = 0$ bulunur ki bu bize $x = y$ olduğunu verir (28).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Dualistik Metrik Uzay

3.1.1.Tanım: X boştan farklı bir cümle olmak üzere $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ aşağıda verilen şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

1) $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$
2) $p(x,x) \leq p(x,y)$
3) $p(x,y) = p(y,x)$
4) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$

Bu taktirde p ye X üzerinde kısmi metrik denir ve (X,p) ikilisine kısmi metrik uzay adı verilir (13).

3.1.2.Tanım: X boştan farklı bir cümle olmak üzere $p: X \times X \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

1) $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$
2) $p(x,x) \leq p(x,y)$
3) $p(x,y) = p(y,x)$
4) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$

Bu taktirde p ye X üzerinde dualistik kısmi metrik denir ve (X,d) ikilisine dualistik kısmi metrik uzay denir (14).

3.1.3.Örnek: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$p(x,y) = x \vee y = maks\{x,y\}$$

olmak üzere $(\mathbb{R},p)$ ikilisi kısmi metrik olmayan dualistik kısmi metrik uzaya basit bir örnektir (14).

Çözüm: $x = -1$ ve $y = -2$ alalım.

$$p(x,y) = x \vee y = \text{maks}\{x,y\}$$

tanımında yerine yazılacak olursa

$$p(-1,-2) = -1 \vee -2 = \text{maks}\{-1,-2\} = -1$$

olur. -1$\notin \mathbb{R}^+$ olduğundan p kısmi metrik tanımını gerçekleştirmez. Ancak -1$\in \mathbb{R}$ olduğundan dualistik kısmi metrik tanımı sağlanır.

3.1.4.Teorem: (X,p) bir kısmi metrik uzay olsun.

$$d(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

olarak tanımlansın. Buradan (X,d) bir metrik uzaydır (3).

İspat: $x,y,z \in X$ alalım.

1) ***a***) $d(x,y) = 0$ olsun. $x = y$ olduğunu gösterelim.

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0$$

$$\Rightarrow 2p(x,y) = p(x,x) + p(y,y)$$

$$\Rightarrow 2p(x,y) = p(x,x) + p(x,x) \vee 2p(x,y) = p(y,y) + p(y,y)$$

$$\Rightarrow 2p(x,y) = 2p(x,x) \vee 2p(x,y) = 2p(y,y)$$

$$\Rightarrow p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$$

$$\Rightarrow x = y$$

b) $x = y$ olsun . $d(x,y) = 0$ olduğunu gösterelim .

$$d(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

$$= 2p(x,y) - p(x,y) - p(x,y)$$

$$= 2p(x,y) - 2p(x,y) = 0$$

2) $d(x,y) = d(y,x)$ olduğunu gösterelim.

$$d(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

$$= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x)$$

$$= d(y,x)$$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ olduğunu gösterelim.

$$d(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

$$\leq 2[p(x,z)+p(z,y)-p(z,z)]-p(x,x)-p(y,y)$$
$$\leq 2p(x,z)+2p(z,y)-p(z,z)-p(z,z)-p(x,x)-p(y,y)$$
$$=[2p(x,z)-p(x,x)-p(z,z)]+[2p(z,y)-p(z,z)-p(y,y)]$$
$$=d(x,z)+d(z,y)$$

O halde $\forall\, x,y,z \in X$ için 1,2,3 şartları sağlandığından (X,d) bir metrik uzaydır.

3.1.5.Tanım: $d, X \times X$ üzerinde negatif olmayan reel değerli bir fonksiyon olsun. d fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlasın. $\forall x,y,z \in X$ için

1) $d(x,y)=d(y,x)=0 \Leftrightarrow x=y$
2) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$

Bu taktirde d ye X üzerinde quasi metrik ve (X,d) ye quasi metrik uzay adı verilir (13).

3.1.6.Teorem: (X,p) bir kısmi metrik uzay olsun.

$$q(x,y)=p(x,y)-p(x,x)$$

olarak tanımlansın. Buradan (X,q) bir quasi metrik uzaydır (15, 26).

İspat:

1) $\boldsymbol{a}$) $q(x,y)=q(y,x)=0$ olsun. $x=y$ olduğunu gösterelim.

$$q(x,y)=q(y,x)=0 \Rightarrow p(x,y)-p(x,x)=p(y,x)-p(y,y)=0$$
$$\Rightarrow p(x,x)=p(x,y) \wedge p(y,x)=p(y,y)$$
$$\Rightarrow p(x,x)=p(x,y)=p(y,y)$$
$$\Rightarrow x=y$$

$\boldsymbol{b}$) $x=y$ olsun. $q(x,y)=q(y,x)=0$ olduğunu gösterelim.

$x=y$ iken $q(x,y)=p(x,y)-p(x,x)$
$$=p(y,x)-p(y,y)$$
$$=q(y,x)$$

Ayrıca $\quad q(x,y)=p(x,y)-p(x,x)=p(x,y)-p(x,y)=0$

$$q(x,y) = q(y,x) = 0$$

olur.

2) $q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} q(x,y) &= p(x,y) - p(x,x) \\ &\leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z) - p(x,x) \\ &= p(x,z) - p(x,x) + p(z,y) - p(z,z) \\ &= q(x,z) + q(z,y) \end{aligned}$$

3.1.7.Tanım: : (X,q) bir quasi metrik uzay olsun.

$$B_q(x,\varepsilon) = \{y \epsilon X : q(x,y) < \varepsilon\} \ , \ \ \forall x \in X \text{ ve } \varepsilon > 0$$

şeklinde tanımlı olan açık yuvarlar ailesine quasi metrik uzayda taban denir (10), (12).

3.1.8.Uyarı : X üzerinde her quasi d metriği X üzerinde $\tau(p), T_0$ topolojisini oluşturur (13).

3.1.9.Teorem: X üzerinde her dualistik p metriği X üzerinde $\tau(p), T_0$ topolojisini doğurur. Bu topolojinin bazı

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \epsilon X : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon, \forall x \epsilon X, \varepsilon > 0\}$$

şeklindeki p açık yuvarlarının ailesidir (13) .

İspat: Kabul edelim ki $p: X \times X \to \mathbb{R}$ bir dualistik metrik olsun. Ayrıca $x, y \epsilon X$ olmak üzere $x \neq y$ olsun. Buradan p dualistik metrik olduğundan

$$p(x,x) < p(x,y)$$

olur ve böylece

$$\varepsilon \coloneqq (\, p(x,x) - p(x,y))/2$$

olduğunda

$$x \in B_p(x,\varepsilon) \text{ ve } y \notin B_p(x,\varepsilon)$$

olur. Yani bu uzay T_0 uzayıdır.

3.1.10.Teorem: Bir p kısmi metriği için açık yuvar $B_p(a,\varepsilon)$ ve $x \in B_p(a,\varepsilon)$ olsun. O halde

$$x \in B_p(x,\delta) \subseteq B_p(a,\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcuttur (13) .

İspat: Kabul edelim ki $x \in B_p(a,\varepsilon)$. Buradan

$$p(x,a) < \varepsilon + p(a,a)$$

Olur.

$$\delta := \varepsilon + p(a,a) - p(x,a)$$

olsun.

$$\delta > 0 \quad \text{iken} \quad \varepsilon > p(x,a) - p(a,a)$$

Ayrıca

$$p(x,x) < \delta \ \text{ iken } \ \varepsilon > p(x,a)$$

olur. Bu yüzden

$$x \in B_p(x,\delta).$$

Şimdi

$$B_p(x,\delta) \subseteq B_p(a,\varepsilon)$$

olduğunu iddia ediyoruz. Kabul edelim ki $y \in B_p(x,\delta)$ olsun.

$$\Rightarrow p(x,y) < \delta + p(x,x)$$

$$\Rightarrow p(x,y) < \varepsilon + p(a,a) - p(x,a) + p(x,x)$$

$$\Rightarrow p(x,y) + p(x,a) - p(x,x) < \varepsilon + p(a,a)$$

$$\Rightarrow p(y,a) < \varepsilon + p(a,a)$$

$$\Rightarrow y \in B_p(a,\varepsilon)$$

olur. Bu yüzden

$$B_p(x,\delta) \ \subseteq B_p(a,\varepsilon)$$

olur.

O halde sonuç olarak; dualistik bir metrik uzayda (x_n) dizisinin bir a noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$p(a,a) = \lim_{n\to\infty} p(\,x_n, a)$$

olmasıdır denilebilir (29).

3.1.11.Tanım: Dualistik metrik uzayda (x_n) dizisini göz önüne alalım, eğer

$$\lim_{n,m\to\infty} p(\,x_n, x_m)$$

limiti varsa dualistik metrik uzayda bir Cauchy dizisi denir (13,29).

3.1.12.Tanım: (X,p) dualistik metrik uzayında eğer X içerisindeki her (x_n) Cauchy dizisi

$$p(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(\,x_n, x_m)$$

şartını sağlayacak şekilde bir $x\epsilon X$ noktasına ($\tau(p)$ topolojisine göre) yakınsar ise bu uzaya tamdır denir (15, 29).

3.2. Tam Dualistik Kısmi Metrik Uzayda Banach Sabit Nokta Teoremi

Dualistik kısmi metrik ile quasi metrik uzay arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

3.2.1.Teorem: Eğer X üzerinde d quasi metrik ise

$$d^s(x,y) = \text{maks}\,\{d(x,y), d(y,x)\}$$

şeklinde tanımlanan d^s fonksiyonu X üzerinde bir metriktir (8, 17).

İspat: $x, y, z \in X$ alalım.

1) ***a***) $d^s(x,y) = 0$ olsun. $x = y$ olduğunu gösterelim.

$$d^s(x,y) = 0 \Rightarrow maks\{d(x,y), d(y,x)\} = 0$$
$$\Rightarrow d(x,y) = \ d(y,x)$$

$$\Rightarrow x = y$$

b) $x = y$ olsun. $d^s(x,y) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$x = y \Rightarrow d(x,y) = d(y,x) = 0$$
$$\Rightarrow maks\{d(x,y), d(y,x)\} = 0$$
$$\Rightarrow d^s(x,y) = 0$$

2) $d^s(x,y) = d^s(y,x)$ olduğunu gösterelim.

$$d^s(x,y) = \ maks\{d(x,y), d(y,x)\}$$

$$= \ maks\{d(y,x), d(x,y)\}$$

$$= d^s(y,x)$$

3) $d^s(x,y) \leq \ d^s(x,z) + d^s(z,y)$ olduğunu gösterelim.

$$d^s(x,y) = \ maks\ \{d(x,y), d(y,x)\}$$

$$\leq \ maks\ \{d(x,z) + d(z,y), d(y,z) + d(z,x)\}$$

$$\leq \ maks\ \{d(x,z), d(z,x)\} + \text{maks}\ \{d(z,y), d(y,z)\}$$

$$\leq \ d^s(x,z) + d^s(z,y)$$

1,2,3 şartları $\forall x, y, z \in X$ için sağlandığından d^s, X üzerinde bir metriktir.

3.2.2.Teorem: (X,p) dualistik metrik uzay ise $d_p: X \times X \to \mathbb{R}^+$

$$d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$$

ile tanımlı fonksiyon X üzerinde bir quasi metrik olup

$$\tau(p) = \ \tau(d_p)$$

şeklindedir (13, 15-16) .

İspat: $x, y \in X$ ise

$$d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$$

ifadesi $p(x,x) \leq p(x,y)$ olduğundan daima pozitiftir.

Şimdi d_p nin X de quasi metrik olduğunu göstermeliyiz. $x, y, z \in X$ alalım. Açık olarak $x = y$ iken

$$d_p(x,y) = d_p(y,x) = 0$$

olur. Üstelik

$$d_p(x,y) = d_p(y,x) = 0$$

ise

$$p(x,y) - p(x,x) = p(y,x) - p(y,y) = 0$$

olacaktır. Buradan

$$p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$$

olur ki bu ise $x = y$ olmasıdır. Üstelik

$$d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z) - p(x,x)$$

$$\leq d_p(x,z) + d_p(z,y)$$

Şimdi $\tau(p)$= $\tau(d_p)$ olduğunu gösterelim. $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $y \in B_{d_p}(x,\varepsilon)$ yi göz önüne alalım.

$$d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x) < \varepsilon \quad \text{ise} \quad p(x,y) < \varepsilon + p(x,x)$$

Sonuç olarak

$$y \in B_p(x,\varepsilon) \quad \text{ve} \quad \tau(p) \subseteq \tau(d_p)$$

dir. Tersine olarak

$$\text{eğer } y \in B_p(x,\varepsilon) \quad \text{ise} \quad p(x,y) < \varepsilon + p(x,x)$$

o halde

$$d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x) < \varepsilon$$

olduğundan

$$y \in B_{d_p}(x,\varepsilon)$$

ve buradan

$$\tau(d_p) \subseteq \tau(p)$$

olacaktır. Bu ise ispatı tamamlar.

3.2.3.Teorem : (X,p) dualistik kısmi metrik uzayın tam olması için gerek ve yeter şart $(X,(d_p)^S)$ metrik uzayının tam olmasıdır. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \left(d_p\right)^S (a,x_n) = 0 \Leftrightarrow p(a,a) = \lim_{n\to\infty} p(a,x_n)$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$$

(15-16, 29).

İspat: İlk olarak (X,p) de verilen her Cauchy dizisinin $(X,(d_p)^S)$ de Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için (x_n), (X,p) de Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde $a \in R$ vardır öyleki verilen $\varepsilon > 0$ için

$$|\, p(x_n,x_m) - a| < \varepsilon/2$$

iken $\forall n,m \geq n_\varepsilon$ şartını sağlayan bir $n_\varepsilon \in N$ vardır. Böylece $n,m \geq n_\varepsilon$ için

$$d_p(x_n,x_m) = p(x_n,x_m) - p(x_n,x_n)$$

$$= |\, p(x_n,x_m) - a + a - p(x_n,x_n)|$$

$$\leq |p(x_n,x_m) - a| + |a - p(x_n,x_n)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Benzer şekilde $n,m \geq n_\varepsilon$ için

$$d_p(x_{m,}x_n) = p(x_{m,}x_n) - p(x_{m,}x_m)$$

$$= |\, p(x_{m,}x_n) - a + a - p(x_{m,}x_m)|$$

$$\leq\ |p(x_m, x_m) - a| + |a - p(x_m\ , x_m)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =\ \varepsilon$$

olur. Buradan

$$(d_p)^S(x_{m,}x_n) < \varepsilon.$$

Sonuç olarak (x_n) dizisi $(X, (d_p)^S)$ de Cauchy dizisidir.

Şimdi $(X, (d_p)^S)$ in tamlığının (X, p) nin tamlığını gerektirdiğini gösterelim.

$(X, (d_p)^S)$ metrik uzayının tam olması gerektiğini gösterelim.

$$\lim_{n\to\infty} d_p(y, x_n) = \lim_{n\to\infty} \text{maks}\{d_p(y, x_n), d_p(x_n, y)\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (d_p)^S(y, x_n) = 0$$

olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Teorem 3.2.2 den (x_n) dizisi, (X, p) de yakınsak dizi olduğu görülür. Şimdi de

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_{n,}x_m) = p(y, y)$$

olduğunu ispatlayalım. (x_n) dizisi, (X, p) de Cauchy dizisi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(x_{n,}x_n) = p(y, y)$$

olduğunu görmek yeterlidir. Bunun için

$\varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_o$ olacak şekilde $\exists n_o \in N$ vardır ki $(d_p)^S(y, x_n) <\ \varepsilon/2$. Şu halde

$$|p(y, y) - p(x_{n,}x_n)| \leq |p(y, y) - p(y, x_n)| + |p((y, x_n) - p(x_{n,}x_n)|$$

$$=\ d_p(y, x_n) + d_p(x_n, y)$$

$$< 2\left(d_p\right)^S (y, x_n) < \ \varepsilon$$

$\forall n \geq n_o$ için bu (X, p) nin tam olduğunu gösterir.

Şimdi $(X, \left(d_p\right)^S)$ de her (x_n) Cauchy dizisinin (X, p) de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon = 1/2$ olsun. Bu taktirde bir $n_o \in N$ vardır ki $\forall n, m \geq n_o$ için

$$d_p\left(x_{n,} x_m\right) < 1/2$$

sağlanır.

$$d_p\left(x_n, x_{n_o}\right) + p\left(x_{n,} x_n\right) = d_p\left(x_{n_o}, x_n\right) + p(x_{n_o}, x_{n_o})$$

olduğundan

$$|\ p(x_{n,} x_n)| = |\ d_p\left(x_{n_o}, x_n\right) + p\left(x_{n_o}, x_{n_o}\right) - d_p\left(x_n, x_{n_o}\right)\ |$$

$$\leq \ d_p\left(x_{n_o}, x_n\right) + |\ p\left(x_{n_o}, x_{n_o}\right)| + d_p\left(x_n, x_{n_o}\right)$$

$$\leq 2\left(d_p\right)^S \left(x_n, x_{n_o}\right) + |\ p\left(x_{n_o}, x_{n_o}\right)|$$

$$< 1 + |\ p\left(x_{n_o}, x_{n_o}\right)|$$

Sonuç olarak $(p(x_{n,} x_n)\ )$ dizisi $\mathbb{R}$ de sınırlı olup bu nedenle $a \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsayan bir $p\left(x_{n_k}, x_{n_k}\right)$ alt dizisine sahip olup

$$\lim_{k \to \infty} p\left(x_{n_k}, x_{n_k}\right) = a$$

olur. Böylece $(p(x_{n,} x_n)\ )$ dizisinin de $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olduğunu göstermek kalır. $(X, \left(d_p\right)^S)$ de (x_n) Cauchy dizisi olduğundan $\forall\ \varepsilon > 0$ verilen değeri için

$$\left(d_p\right)^S (\ x_n, x_m) < \ \varepsilon/2 \ \ , \forall n, m \geq n_{\ \varepsilon}$$

için $n_{\ \varepsilon} \in N$ vardır. Şu halde $\forall n, m \geq n_{\ \varepsilon}$ için

$$|\ p\left(x_{n,} x_n\right) - p(x_m, x_m)| = |\ d_p(x_m, x_n) - d_p(x_n, x_m)|$$

$$\leq 2\left(d_p\right)^S (\ x_m, x_n) < \ \varepsilon$$

olması nedeniyle

$$p(x_{n,}x_n) = d_p(x_m, x_n) + p(x_m, x_m) - d_p(x_n, x_m)$$

olur. Göstermeliyiz ki

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = a.$$

Diğer taraftan $\forall n, m \geq n_{\varepsilon}$ için

$$|p(x_n, x_m) - a| = |p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) + p(x_n, x_n) - a|$$

$$\leq d_p(x_n, x_m) + |p(x_n, x_n) - a| < \varepsilon$$

Buradan

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = a$$

ve (x_n) dizisi (X, p) de Cauchy dizisidir.

Eğer $(X, (d_p)^S)$ nin tam olması durumunda (X, p) nin de tam olduğunu ispatlarsak teoremin inşaası tamamlanır. $(X, (d_p)^S)$ de bir (x_n) Cauchy dizisi alalım. (X, p) de bir Cauchy dizisi (x_n) olur ve bu dizi $y \in X$ noktasına yakınsadığı için

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} p(y, x_n) = p(y, y)$$

sağlanır. Bu taktirde $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n \geq n_\varepsilon$ için

$$p(y, x_n) = p(y, y) < \varepsilon \quad \text{ve} \quad p(y, y) - p(x_n, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in N$ vardır. Bunun sonucu olarak

$$d_p(y, x_n) = p(y, x_n) - p(y, y) < \varepsilon \;\; ve \;\; n \geq n_\varepsilon$$

olduğunda

$$d_p(x_n, y) = p(y, x_n) - p(x_n, x_n)$$

$$\leq | p(y, x_n) - p(y, y)| + | p(y, y) - p(x_n, x_n)|$$

$$< 2\,\varepsilon$$

olur. Buradan $(X, (d_p)^S)$ tamdır. Son olarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\lim_{n\to\infty}(d_p)^S(a,x_n) = 0 \Leftrightarrow p(a,a) = \lim_{n\to\infty} p(a,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$$

3.3. Banach Sabit Nokta Teoremi

3.3.1 .Teorem : Banach Sabit Nokta Teoremi

$f,\ (X,p)$ tam dualistik kısmi metrik uzaydan kendisine tanımlı bir dönüşüm ve

$$|p(f(x),f(y))| \leq c|p(x,y)| \qquad \forall x,y \in X \quad \text{için} \qquad (1)$$

şartını sağlayan bir $(0 \leq c < 1)$ c reel sayısı mevcut olsun. Bu taktirde f, bir tek sabit noktaya sahiptir (15).

İspat: $x \in X$ seçelim. Bu taktirde her bir $n \in N$ için

$|p(f^n(x), f^n(x))| \leq c^n|p(x,x)|$ …* ve $|p(f^n(x), f^{n+1}(x))| \leq c^n|p(x,f(x))|$ …**

yazılır. Teorem.3.2.2 den

$$d_p(f^n(x), f^{n+1}(x)) = p(f^n(x), f^{n+1}(x)) - p(f^n(x), f^n(x))$$

dır. Buradan

$$d_p(f^n(x), f^{n+1}(x)) + p(f^n(x), f^n(x)) = p(f^n(x), f^{n+1}(x))$$

ve **dolayı

$$d_p(f^n(x), f^{n+1}(x)) + p(f^n(x), f^n(x)) \leq c^n|p(x,f(x))|$$

sonucu elde edilir. Buradan $*$ dolayısı ile

$$\begin{aligned} d_p(f^n(x), f^{n+1}(x)) &\leq c^n|p(x,f(x))| - p(f^n(x), f^n(x)) \\ &\leq c^n|p(x,f(x))| + |p(f^n(x), f^n(x))| \\ &\leq c^n[|p(x,f(x))| + |p(x,x)|] \end{aligned}$$

$n, k \in N$ ise bu taktirde

$$d_p(f^n(x), f^{n+k}(x)) \leq d_p(f^n(x), f^{n+1}(x)) + \cdots + d_p(f^{n+k-1}(x), f^{n+k}(x))$$

$$\leq (c^n + \cdots + c^{n+k-1})(\left|p\big(x, f(x)\big)\right| + |p(x,x)|)$$

$$\leq c^n(1 + c + c^2 + \cdots + c^{k-1})(\left|p\big(x, f(x)\big)\right| + |p(x,x)|)$$

$$\leq \frac{c^n}{1-c}(\left|p\big(x, f(x)\big)\right| + |p(x,x)|).$$

Benzer olarak $x \in X$ seçelim. Bu taktirde her bir $n \in N$ için

$|p(f^{n+1}\big(x), f^{n+1}(x)\big)| \leq c^n |p(x,x)|$ …* ve $p(f^{n+1}\big(x), f^n(x)\big)| \leq c^n |p(f(x), x)|$ …**

yazılır. Teorem.3.2.2 den

$$d_p(f^{n+1}\big(x), f^n(x)\big) = p(f^{n+1}\big(x), f^n(x)\big) - p(f^{n+1}\big(x), f^{n+1}(x)\big)$$

dır. Buradan

$$d_p(f^{n+1}\big(x), f^n(x)\big) + p(f^{n+1}\big(x), f^{n+1}(x)\big) = p(f^{n+1}\big(x), f^n(x)\big)$$

ve

$$d_p(f^{n+1}\big(x), f^n(x)\big) + p(f^{n+1}\big(x), f^{n+1}(x)\big) \leq c^n |p(f(x), x)|$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$d_p(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq c^n |p(f(x), x)| - p(f^{n+1}(x), f^{n+1}(x))$$

$$\leq c^n |p(f(x), x)| + |p(f^{n+1}(x), f^{n+1}(x))|$$

$$\leq c^n [|p(f(x), x)| + |p(f(x), f(x))|]$$

$$\leq c^n [|p(f(x), x)| + |p(x,x)|]$$

$$\leq c^n \left[\left|p\big(x, f(x)\big)\right| + |p(x,x)|\right]$$

$n, k \in N$ ise bu taktirde

$$d_p(f^{n+k}(x), f^n(x)) \le d_p(f^{n+k}(x), f^{n+k-1}(x)) + \cdots + d_p(f^{n-1}(x), f^n(x))$$

$$\le (c^n + \cdots + c^{n+k-1})(\,|p(x, f(x))| + |p(x,x)|)$$

$$\le c^n(1 + c + c^2 + \cdots + c^{k-1})(|p(x, f(x))| + |p(x,x)|)$$

$$\le \frac{c^n}{1-c}(|p(x, f(x))| + |p(x,x)|)$$

$$d_p\left(f^{n+k}(x), f^n(x)\right) \le \frac{c^n}{1-c}(|p(x, f(x))| + |p(x,x)|)$$

Sonuç olarak $(f^n(x))$ dizisi $(X, (d_p)^S)$ metrik uzayda Cauchy dizisi olup Teorem.3.2.3 ten bu uzay tamdır. Böylece $\lim_{n\to\infty} (d_p)^S(a, x_n) = 0$ olacak şekilde bir $a \in X$ vardır. a nın f fonksiyonunun bir tek sabit nokta olduğunu göstermek istiyoruz. İlk olarak Teorem.3.2.3 ten

$$p(a,a) = \lim_{n\to\infty} p(a, f^n(x)) = \lim_{n,m\to\infty} p\,(f^n(x),\ f^m(x))$$

olduğunu elde ederiz. Üstelik

$$\lim_{n,m\to\infty} d_p(f^n(x), f^m(x)) = \lim_{n\to\infty} p\,(f^n(x),\ f^n(x)) = 0$$

olduğundan Teorem 3.2.2 nin sonucu olarak

$$\lim_{n,m\to\infty} p\,(f^n(x),\ f^m(x)) = 0$$

olur. Ayrıca

$$p(a,a) = \lim_{n\to\infty} p(a, f^n(x)) = 0$$

dır.

$$|p(f(a), f(a))| \le c|p(a,a)|$$

olduğundan

$$p(f(a), f(a)) = 0$$

olduğu anlaşılır. Diğer taraftan

$$|p(f(a), f^{n+1}(a))| \leq c|p(a, f^n(x))|$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(f(a), f^n(x)) = 0$$

yazarız.

Dualistik metrik uzaydan kendisine tanımlı olan ve (1) şartını sağlayan dönüşüme, sabit c sayısına bağlı büzülme dönüşümü diye adlandırılır .

3.3.2.Sonuç: f, (X, p) tam kısmi metrik uzaydan kendisine tanımlı bir dönüşüm ve

$$p(f(x), f(y)) \leq cp(x, y), \forall x, y \in X$$

için şartını sağlayan bir ($0 \leq c \leq 1$) c reel sayısı mevcut olsun. O halde f, bir tek sabit noktaya sahiptir (13).

İspat: $x \in X$ alalım.

$\forall n, k \in N$ için $p\left(f^{n+k+1}(x), f^n(x)\right)$

$$\leq p\left(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(x)\right) + p\left(f^{n+k}(x), f^n(x)\right) - p\left(f^{n+k}(x), f^{n+k}(x)\right)$$

$$\leq c^{n+k}(p(f(x), x) + p\left(f^{n+k}(x), f^n(x)\right)$$

Buradan $\forall n, k \in N$ için

$$p\left(f^{n+k+1}(x), f^n(x)\right) \leq (c^{n+k} + \cdots + c^n)p(f(x), x) + p(f^n(x), f^n(x))$$

$$\leq c^n(1 - c^{k+1})/(1 - c)p(f(x), x) + c^n p(x, x)$$

$$\leq c^n((p(f(x), x)/(1 - c)) + p(x, x))$$

Bu yüzden

$$\forall x \in p(f^n(x), f^n(x)) \leq c^n p(x, x)$$

olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} p(f^n(x), f^m(x)) = 0$$

olacak şekilde $(f^n(x))$ bir Cauchy dizisi olduğunu görüyoruz. p tam olduğundan bir $a \in X$ seçebilir ki bu Cauchy dizisi $X,\ a$ ya yakınsar ve $p(a,a) = 0$ dır.

Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty} p(f^n(x), a) = 0$$

Ancak $p(f(a), a) = 0$ iken $\forall n \in N$ için

$$p(f(a),a) \le p\big(f(a), f^{n+1}(x)\big) + p(f^{n+1}(x), a) - p\big(f^{n+1}(x), f^{n+1}(x)\big)$$

$$\le cp\big(a, f^n(x)\big) + p(f^{n+1}(x), a).$$

Bu yüzden $a = f(a)$ ve $p(a,a) = 0$ olur.

Bu noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $b = f(b)$ olacak şekilde bir $b \in X$ mevcut olsun. Bu taktirde

$$p(a,b) = p\big(f(a), f(b)\big) \le cp(a,b)$$

yazarız. $c < 1$ olduğundan $p(a,b) = 0$ olmalıdır. Buradan $a = b$.

Bu yüzden f in sabit noktası tektir (13).

Banach Sabit Nokta teoreminin bir yerel versiyonunu aşağıda verilecektir. Ayrıca bu teorem Dirichlet problemlerinin ((8),(18)) pratik çözümüne de uygulanır. Biz bu sonucu dualistik kısmi metrik durumuna genişleteceğiz.

3.3.3.Teorem: (X,d) bir tam metrik uzay ve $x_o \in X$ ve $r > 0$ olsun. Kabul edelim ki

$$f : B_d(x_o, r) \to X \ , d(f(x_o), x_o) < (1-l)r$$

şartı sağlanacak şekilde l sabitine bağlı bir büzülme fonksiyonu f olsun. Bu taktirde $f,\ B_d(x_o, r)$ içinde bir tek sabit noktaya sahiptir (28).

3.3.4.Uyarı: (X,d) bir quasi metrik olsun. Bundan sonraki kısımlarda Y^{-d} sembolünü $Y \subseteq X$ in $\tau(d)$ ye göre kapanışını işaret edeceğiz .

3.3.5.Uyarı: Görülüyor ki

$$\overline{B_p}(x,\varepsilon) = \{y\epsilon X : p(x,y) \leq p(x,x) + \varepsilon\}$$

yuvarı $\tau(p)$ ye göre kapalı değildir. Gerçekten

$$p(x,y) = x \vee y$$

şeklinde tanımlanan dualistik kısmi metrik p, $\mathbb{R}$ ile birlikte dualistik kısmi metrik uzay ($\mathbb{R}, p$) olur. Bu açık olarak

$$\overline{B_p}(0,1) = (-\infty, 1]\ ve\ \ R \backslash \overline{B_p}(0,1) = (1, \infty)$$

Böylece $\overline{B_p}(0,1)$, $(\mathbb{R}, p)$ de kapalı bir yuvar değildir (29).

3.3.6.Teorem: (X,p) bir tam metrik uzay, $x_o \in X$ ve $r > 0$ olsun. Kabul edelim ki $\forall x, y \in B_p(x_o, r)$ için

$$|p(f(x_o), x_o)| < (1-c)r - 2|p(x_o, x_o)| - |p(f(x_o), f(x_o)|$$

koşulunu sağlayan c sabitine göre büzülmüş $f: B_p(x_o, r) \to X$ fonksiyonu bir büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde f, $B_p(x_o, r)$ içerisinde bir tek sabit noktaya sahiptir (29).

İspat: Açık olarak $0 \leq r_o < r$ olmak üzere

$$|p(f(x_o), x_o)| < (1-c)r_o - 2|p(x_o, x_o)| - |p(f(x_o), f(x_o)|$$

koşulunu sağlayan bir r_o vardır. Göstereceğiz ki

$$\overline{\overline{B_p}(x_o, r_o)}^{(d_p)^S} = \overline{B_p}(x_o, r_o)$$

olur.

$$x \in \overline{\overline{B_p}(x_o, r_o)}^{(d_p)^S} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \left(d_p\right)^S(x, x_n) = 0$$

olacak şekilde $(x_n)_{n \in N} \subset \overline{B_p}(x_o, r_o)$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon > 0$ iken $n \geq n_o$ olduğunda

$d_p(x_o, x_n) = p(x_o, x_n) - p(x_o, x_o) \leq r_o$ ve $d_p(x_n, x) = p(x_n, x) - p(x_n, x) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan $n_o \in N$ vardır. Bu durumda yalnızca

$$d_p(x_o, x) = p(x, x_o) - p(x_o, x_o)$$

$$\leq r_o$$

olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} d_p(x, x_o) &\leq d_p(x, x_n) + d_p(x_n, x_o) \\ &\leq d_p(x_n, x) + d_p(x_o, x_n) \\ &\leq p(x_n, x) - p(x_n, x_n) + p(x_o, x_n) - p(x_o, x_o) \\ &< \varepsilon + r_o \end{aligned}$$

ve sonuç olara$k$

$$p(x, x_o) - p(x_o, x_o) \leq r_o \quad \text{ve} \quad \overline{\overline{B_p}(x_o, r_o)}^{(d_p)^S} \subseteq \overline{B_p}(x_o, r_o)$$

olur. $x \in \overline{B_p}(x_o, r_o)$ alalım. O halde $d_p(x, x_o) \leq r_o$, yani

$$d_p(x, x_o) = p(x, x_o) - p(x_o, x_o) \leq r_o$$

ve

$$p(x_n, x) - p(x_n, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde $(x_n)_{n \in N} \subset B_p(x_o, r_o)$ var olup $d_p(x, x_n) = 0$ olur ki

$$\overline{B_p}(x_o, r_o) \subseteq \overline{\overline{B_p}(x_o, r_o)}^{(d_p)^S}$$

olmasıdır. Buradan

$$\overline{\overline{B_p}(x_o, r_o)}^{(d_p)^S} = \overline{B_p}(x_o, r_o)$$

olur. f fonksiyonunun

$$f: \overline{B_p}(x_o, r_o) \to \overline{B_p}(x_o, r_o)$$

olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $\forall x \in \overline{B_p}(x_o, r_o)$ olduğunda

$$|p(f(x), f(x_o))| - |p(x_o, x_o)| \leq |p(f(x), f(x_o))| - c|p(x_o, x_o)|$$
$$\leq \mathrm{c}(|p(x, x_o)| - |p(x_o, x_o)|)$$
$$\leq \mathrm{c}(p(x, x_o) - p(x_o, x_o))$$
$$\leq \mathrm{c}r_o$$

Bundan dolayı $\forall x \in \overline{B_p}(x_o, r_o)$ için

$$d_p(f(x), x_o) \leq d_p(x_o, f(x_o)) + d_p(f(x_o), f(\mathrm{x}))$$
$$\leq p\big(x_o, f(x_o)\big) - p(x_o, x_o) + p(f(x_o), f(x)) - p(f(x_o), f(x_o))$$
$$\leq |p(f(x), f(x_o))| + |\, p(f(x), x_o)| + |p(f(x_o), f(x_o)| + |p(x_o, x_o)|$$
$$\leq \mathrm{c}r_o + (1 - c)r_o$$
$$= r_o$$

Buradan

$$f(\overline{B_p}(x_o, r_o)) \subseteq \overline{B_p}(x_o, r_o)$$

elde edilir.

Teorem.3.3.1 den f nin $\overline{B_p}(x_o, r_o) \subset B_p(x_o, r)$ içinde sabit bir noktaya sahip olduğu sonucuna varırız.

Son olarak tek olduğunu göstermek istiyoruz. Kabul edelim ki $x \neq y \ ve \ f(x) = x$, $f(y) = y$ olacak şekilde $x, y \in B_p(x_o, r)$ mevcut olsun. f, $B_p(x_o, r)$ üzerinde bir büzülme olduğu için

$$p(x, y) = p(x, x) = p(y, y) = 0$$

elde edilir. Çünkü $\forall a, b \in \{x, y\}$ iken

$$|p(a, b)| = \big|p\big(f(a), f(b)\big)\big| \leq c|p(a, b)|$$

sağlanır. Bu durum sadece $x = y$ için sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Açık bir şekilde Teorem 3.3.3 ten, dualistik kısmi metrik de aynı zamanda bir metrik olduğu için

$$|p(x_o, x_o)| = |p(f(x_o), f(x_o)| = 0$$

olduğundan dolayı Teorem 3.3.6 nın özel bir durumudur.

3.4. Tam Dualistik Kısmi Metrik Uzaylar İçin Genelleştirilmiş Banach Sabit Nokta Teoremleri

Bu başlıkta bizim amacımız büzülme şartını daha da zayıflatacak şekilde Banach sabit nokta teoremleri tipinde iki teorem vermektir.

Banach teoremini genişletmenin doğal yolu, yakınsama problemlerinden ortaya çıkar. Bu tip problemlerde büzülme reel değerli bir fonksiyon yoluyla verilir (3, 6-7, 11, 17, 19).

Banach sabit nokta teoreminde genişlemelerin bir başka yolu da $p(f(x), f(y))$ ve $p(x, y)$ mesafesine bağlı olduğu kadar doğurulan yarı metriğin davranışına da bağlıdır (29).

3.4.1.Önerme: (X,d) bir tam metrik uzay ve her bir sabit $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(t)=0$$

şartını sağlayan

$$\Phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$$

monoton azalmayan fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \Phi(d(x, y))$$

olur. Bu durumda f, sabit bir noktaya sahiptir (8).

3.4.2.Teorem: Her sabit $t > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(t) = 0$$

şartını sağlayan

$$\Phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$$

keyfi azalmayan fonksiyonu olmak üzere f, dönüşümü $\forall x, y \in X$ için

$$|p(f(x), f(y)| \leq \Phi(|p(x, y)|)$$

olacak şekilde tam dualistik kısmi metrik uzaydan kendisine bir dönüşüm olsun. Bu taktirde f bir sabit noktaya sahiptir (29).

İspat: Eğer $t > 0$ ise bu taktirde $\Phi(t) < t$ dir. Çünkü $t \leq \Phi(t)$ ise

$\Phi(t) \leq \Phi(\Phi(t))$ ve buradan $t \leq \Phi^2(\mathrm{t})$ dir. Böylece tümevarımla $n \geq 1$ için $t \leq \Phi^n(\mathrm{t})$ elde edilir. Buradan

$$t \leq \lim_{n \to \infty} \Phi^n(\mathrm{t}) = 0$$

olur. Bu bir çelişkidir.

$x \in X$ seçelim. Her bir $n \in N$ için

$|p(f^n(x), f^n(x))| \leq \Phi^n(|p(x, x)|)$ ve $|p(f^n(x), f^{n+1}(x))| \leq \Phi^n(|p(x, f(x))|)$

elde edilir.

$$a := \text{maks}\,\{|p(x, x)|, |p(x, f(x))|\}$$

olsun. Teorem 3.2.2.den

$$d_p\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) = p(f^n(x), f^{n+1}(x))\_\, p(f^n(x), f^n(x)).$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} d_p\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) &\leq |\, p(f^n(x), f^{n+1}(x))| + |p(f^n(x), f^n(x))| \\ &\leq \Phi^n(|p(x, f(x))|) + \Phi^n(|p(x, x)| \\ &\leq 2\Phi^n(a + 1) \end{aligned}$$

Şimdi $n, k \in N$ olduğunda

$$d_p\left(f^n(x), f^{n+k}(x)\right) \leq d_p\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) + \cdots + d_p\ (f^{n+k-1}(x), f^{n+k}(x))$$

$$\leq\ \Phi^n(|p(x, f(x))|) + \Phi^n(|p(x,x)|) + \cdots +$$

$$+\ \Phi^{n+k-1}(|p(x, f(x))|) + \Phi^{n+k-1}(|p(x,x)|)$$

Böylece

$$d_p\left(f^n(x), f^{n+k}(x)\right) \leq 2\Phi^n(a+1) + \cdots + 2\Phi^{n+k-1}(a+1)$$

Benzer şekilde gösterebiliriz ki

$$d_p\left(f^{n+1}(x), f^n(x)\right) \leq 2\Phi^n(a+1)$$

ve buradan

$$d_p\left(f^{n+k}(x), f^n(x)\right) \leq 2\Phi^{n+k-1}(a+1) + \cdots + 2\Phi^n(a+1)$$

O halde $(f^n(x)$) dizisi, $(X,(d_p)^S)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Teorem3.2.3. ten bu uzay tamdır. Buradan bir $a \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left(d_p\right)^S\left(a, f^n(x)\right) = 0 \ \text{ ve } \ p(a,a) = \lim_{n\to\infty} p\left(a, f^n(x)\right)$$
$$= \lim_{n,m\to\infty} p\left(f^n(x), f^m(x)\right)$$

olur.

Şimdi a, f in bir tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Açık olarak

$$\lim_{n,m\to\infty}\left(d_p\right)^S\left(f^n(x), f^m(x)\right) = 0$$

ve

$$\left|p\left(f^n(x), f^n(x)\right)\right| \leq \Phi^n(|p(x,x)|)$$

$$\leq\ \Phi^n(\ |p(x,x)| + 1)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\Phi^n(\ |p(x,x)| + 1) = 0 \text{ olduğunda } \lim_{n\to\infty} p\left(f^n(x), f^n(x)\right) = 0$$

sağlanır. Buradan

$$\lim_{n,m\to\infty} p\big(f^n(x), f^m(x)\big) = 0$$

sonucuna varılır. Teorem3.2.3. ün sonucu olarak $p(a,a) = 0$ olur. Buradan

$$|p(f(a), f(a))| \leq \Phi(|p(a,a)|) = \Phi(0) \leq \Phi(\varepsilon) < \varepsilon$$

Dolayısıyla $|p(f(a), f(a))| = 0$ dır. Çünkü son eşitsizlik $\forall\varepsilon > 0$ için geçerli. Diğer bir ifadeyle

$$\lim_{n\to\infty} p\big(a, f^n(x)\big) = p(a,a) = 0$$

olduğundan

$$|\, p(f^{n+1}(x), f(a))| \leq \Phi(|p(f^n(x), a)|) \leq \Phi(\varepsilon) < \varepsilon$$

elde edilir. Bu yüzden Teorem3.2.3 gereği $f(a)$, $(X, (d_p)^S)$ uzayında $(f^n(x))$ dizisinin bir limit noktasıdır. Buradan $a = f(a)$.

Sonuç olarak göstermeliyiz ki a, f nın bir tek sabit noktasıdır. Bunun için $f(b) = b$ ve $b \neq a$ olmak üzere $b \in X$ de f nin sabit noktası olsun. Bu taktirde

$$p(a,a) = p(b,b) = p(a,b) = 0$$

olur, olmadığı durumda

$\forall x, y \in \{a,b\}$ için $|p(x,y)| = |p(f(x), f(y))| \leq \Phi(|p(x,y)| < |p(x,y)|$

olur .

3.4.3.Uyarı: Eğer biz $\Phi(t) = ct,\ 0 \leq c < 1$ seçilirse, gözleyebiliriz ki bir önceki sonuç Teorem 3.3.1 in özel bir durumunu ifade eder (29).

3.4.4.Tanım: Eğer

$$|p(x,y)| < k \quad, \forall x, y \in X$$

koşulunu sağlayan bir $k > 0$ var ise, dualistik kısmi metrik uzay (X,p) sınırlıdır denir. Üstelik $Y \subseteq X$ cümlesinin çapı

$$\delta_p(Y) = \sup\{|p(x,y)|: x, y \in Y\}$$

olarak tanımlanır, eğer sup değeri varsa $\delta_p(Y)$ ye sonlu aksi halde $\delta_p(Y) = +\infty$ olur. Bu kavramlar metrik uzayların çap kavramlarıyla çakışır. Üstelik

$$\delta_p(Y) \leq \delta_{(d_p)^s}(Y) + \delta_{w_p}(Y)$$

dir. Eğer sup değeri varsa

$$\delta_{w_p}(Y) = \sup\{|p(x,x)|: x \in Y\}$$

yoksa

$$\delta_{w_p}(Y) = +\infty$$

olur (29).

3.4.5.Teorem: (X,p) bir dualistik kısmi metrik uzay ve Y⊆X olsun. Buradan

$$\delta_{(d_p)^s}(Y) \leq 4\delta_p(Y)$$

sağlanır (29).

İspat: $\delta_{w_p}(Y) \leq \delta_p(Y)$

olduğu kolayca görülüyor. Üstelik

$$\left(d_p\right)^s(x,y) \leq d_p(x,y) + d_p(y,x) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

olduğunda

$$\left(d_p\right)^s(x,y) \leq 2|p(x,y)| + |p(x,x)| + |p(y,y)|$$

Buradan

$$\delta_{(d_p)^s}(Y) \leq 4\delta_p(Y).$$

3.4.6.Teorem: (X,p) bir tam dualistik kısmi metrik olsun. $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ keyfi negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$\inf\{\varphi(x)+\varphi(y): |p(x,y)|+|p(x,x)|+|p(y,y)| \geq a\} = \mu(a) > 0, \forall a > 0$$

olduğunu kabul edelim. Buradan X de olduğu gibi

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n) = 0$$

şartını sağlayan her bir $(x_n)_{n\in N}$ dizisi $\tau((d_p)^s)$ uzayında yakınsar (29).

İspat: A_n=$\{x \in X\colon\ \varphi(x) \leq \varphi(\ x_n)\}$ olsun. Aşikar olarak A_n, boş olmayan bir cümledir ve sonlu arakesit özelliğine sahip bir ailedir. Göstereceğiz ki

$$\lim_{n\to\infty}\delta_{(d_p)^s}(A_n) = 0$$

dır. Burada $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$\varphi(x_n)$<1/2 $\mu(\varepsilon)$, $\forall n \geq n_o$ için $n_o \in N$ var olsun. Buradan $\forall x, y \in A_n$ ve $n \geq n_o$ olduğunda

$$\varphi(x)+\varphi(y) < \mu(\varepsilon)$$

olur. Buradan hipotezden dolayı $|p(x,y)| < \varepsilon$ olur. Bu yüzden

$$\delta_p(A_n) < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_o$$

olur. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty}\ \delta_p(A_n) = 0$$

dir. Teorem.3.4.5 ten

$$\lim_{n\to\infty}\delta_{(d_p)^s}(A_n) = 0$$

elde ederiz. Bu ise

$$\delta_{(d_p)^s}(\overline{A_n}^{(d_p)^s}) = \delta_{(d_p)^s}(A_n)$$

olduğunda

$$\lim_{n\to\infty}\delta_{(d_p)^s}\left(\overline{A_n}^{(d_p)^s}\right) = 0$$

olması gerektiğini verir. Biz Cantor teoreminden

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}^{(d_p)^s}$$

olacak şekilde bir tek nokta olduğunu çıkarırız. Üstelik $\forall n \in N$ olduğunda $x_n \in \overline{A_n}^{(d_p)^s}$ iken

$$\lim_{n\to\infty} \left(d_p\right)^s (x, x_n) = 0$$

olur. Buradan

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$$

olduğu çıkar. $\tau(\left(d_p\right)^s)$ uzayında

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$$

olacak şekilde herhangi bir (x_n) dizisi için bir $x \in X$ limit noktasının olduğunu ispatlamalıyız. (y_n),

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = 0$$

şartını sağlayan bir başka dizi ve $y \in X$ bu dizinin limit noktası olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = 0$$

olduğunda $\varepsilon > 0$ için $\forall n \geq n_1$ olduğunda

$$\varphi(x_n) < 1/2\, \mu(\varepsilon) \quad , \quad \varphi(y_n) < 1/2\, \mu(\varepsilon)$$

şartını sağlayacak şekilde bir $n \in N$ olsun. Buradan $n \geq n_1$ olduğunda

$$|p(x_n, y_n)| + |p(x_n, x_n)| + |p(y_n, y_n)| < \varepsilon$$

olur. Böyle devam edilirse

$$\mu(\varepsilon) = \inf\{\ \varphi(x) + \varphi(y) \colon |p(x,y)| + |p(x,x)| + |p(y,y)| \geq \varepsilon\}$$

$$\leq \varphi(x_n) + \varphi(y_n)$$

$< \mu(\varepsilon)$

elde edilir. Bu da bir çelişkidir.

Gösterelim ki $x = y$ dir. Gerçekten

$$(d_p)^s(x,y) \leq (d_p)^s(x, x_n) + (d_p)^s(x_n, y_n) + (d_p)^s(y_n, y)$$

$$\leq 2\varepsilon + (d_p)^s(x_n, y_n)$$

$$\leq 2\varepsilon + 2|p(x_n, y_n)| + |p(x_n, x_n)| + |p(y_n, y_n)|$$

$$< 4\varepsilon$$

Yukarıdaki eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ için sağlandığından $x = y$ dir .

3.4.7.Teorem: (X,p) tam dualistik kısmi metrik uzay olsun. $(X, (d_p)^s)$ den $(X, (d_p)^s)$ ye

$$\varphi(x) = d_p(x, f(x)) \ \ ve \ \ \psi(x) = d_p(f(x), x)$$

şartını sağlayan $f: X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Buna ilave olarak φ, ψ aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

1) $\inf\{\varphi(x) + \varphi(y) + \psi(x) + \psi(y) \colon |p(x,y)| + |p(x,x)| + |p(y,y)| \geq a\} = \mu(a) > 0, \quad \forall a > 0$
2) $inf_{x \in X} (\varphi(x) + \psi(x)) = 0$

Buradan f, bir tek sabit noktaya sahiptir (29).

İspat: İlk olarak

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) + \psi(y_n) = 0$$

olacak şekilde bir $(x_n)_{n\in N} \subset X$ dizisini oluşturalım. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\varphi(x_\varepsilon) + \psi(y_\varepsilon) < \varepsilon$$

şartını sağlayan $x_\varepsilon \in X$ varolsun. $\forall n \in N$ için $x_n = x_{1/n}$ seçelim. Bu taktirde $(x_n)_{n\in N}$ dizisi şunları sağlar:

Her $\varepsilon \geq 1$ için $n > 2$ olduğunda $\varphi(x_n) + \psi(x_n) < 1 < \varepsilon$

Her $\varepsilon \geq 1$ için $\forall n \geq n_o$ iken $\varphi(x_n) + \psi(x_n) < \frac{1}{n_o} < \varepsilon$

koşulunu sağlayan bir $n_o \in N$ vardır. İddia ediyoruz ki

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) + \psi(x_n) = 0$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) + \psi(x_n) = 0$$

olduğunda Teorem 3.4.6 dan

$$\lim_{n\to\infty} \left(d_p\right)^s (x, x_n) = 0$$

olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(x_n) &= p(x, f(x)) - p(x, x) - p(x_n, f(x_n)) + p(x_n, x_n) \\
&< \varepsilon + p(x, f(x)) - p(x_n, f(x_n)) \\
&< 2\,\varepsilon + p\big(x_n, f(x)\big) - p(x_n, f(x_n)) \\
&\leq 2\varepsilon + p\big(f(x_n), f(x)\big) - p(f(x_n), f(x_n)) \\
&< 3\,\varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\varphi(x_n) - \varphi(x) < 3\varepsilon$$

sonucu çıkar. Buradan

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$$

olur. Diğer bir taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \big(\varphi(x_n) + \psi(x_n)\big) = 0$$

Böylece biz $\varphi(x) = 0$ ve $p\big(x, f(x)\big) = p(x, x)$

elde edilir. Ayrıca

$$\psi(x) - \psi(x_n) = p\big(x, f(x)\big) - p\big(f(x), f(x)\big) - p(x_n, f(x_n)) + p(f(x_n), f(x_n))$$

$$< \varepsilon + p(x, f(x)) - p(x_n, f(x_n))$$

$$< 2\varepsilon + p\big(x_n, f(x)\big) - p(x_n, f(x_n))$$

$$\leq 2\varepsilon + p\big(f(x_n), f(x)\big) - p(f(x_n), f(x_n))$$

$$< 3\,\varepsilon$$

Benzer olarak $\psi(x_n) - \psi(x) < 3\,\varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz. Böylece

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi\,(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \big(\,\varphi(x_n) + \psi(x_n)\big) = 0$$

Sonuç olarak

$$p\big(x, f(x)\big) = p\big(f(x), f(x)\big) = p(x, x)$$

olur. Dualistik kısmi metrik tanımından ve (i) şartından $x = f(x)$ ve f sabit bir noktaya sahiptir. İkinci olarak tekliğini göstermeliyiz. Bunun için $y \neq x$ ve $f(y) = y$ olacak şekilde $y \in X$ seçelim. Bu taktirde

$$a := |p(x, y)| + |p(x, x)| + |p(y, y)| \neq 0$$

elde edilir. Aksi halde

$$p(x, y) = p(x, x) = p(y, y) = 0 \quad \text{ve} \quad x = y$$

olur. Buradan

$0 < \mu(a)=$

$= \inf\{\, \varphi(x) + \varphi(y) + \psi(x) + \psi(y) \colon\ |p(x, y)| + |p(x, x)| + |p(y, y)| \geq a\}$

$\leq \varphi(x) + \varphi(y) + \psi(x) + \psi(y) = 0$

Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x = y$ dir. Sonuç olarak elde edilen bu sonucu (8) de bulabiliriz (29).

3.4.8.Sonuç: *f*, (*X*,*d*) tam metrik uzaydan kendine bir dönüşüm ve $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$

$$\varphi(x) = d(x, f(x))$$

şeklinde tanımlanan negatif olmayan bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki

$$\inf\{\varphi(x) + \varphi(y):\ d(x,y) \geq\ a\} =\ \mu(a) > 0\ ,$$
$$\forall a > 0 \text{ için ve } \ inf_{x\in X} d(x, f(x)) = 0$$

olsun. Bu taktirde f, tek bir sabit noktaya sahiptir (29).

3.4.9.Uyarı: Kolayca görülüyor ki Teorem.3.4.7 ve Teorem.3.3.1 den

$$p(x,y) - p\big(f(x), f(y)\big) \leq\ d_p(f(x), x)\ + d_p(f(y), y)$$
$$=\ \psi(x) + \psi(y)$$

ve

$$p\big(f(x), f(y)\big) - p(x,y) \leq\ d_p\big(x, f(x)\big)\ + d_p\big(y, f(y)\big)$$
$$=\ \varphi(x) + \varphi(y)$$

Böylece

$$\big|p(x,y) - p\big(f(x), f(y)\big)\big| \leq \varphi(x) + \varphi(y) +\ \psi(x) + \psi(y)$$

Üstelik

$$\big|p(x,x)| - |p\big(f(x), f(x)\big)\big| \leq |p(x,x) - p(f(x), f(x))|$$
$$\leq\ d_p\big(x, f(x)\big) + d_p(f(x), x)$$
$$=\ \varphi(x) +\ \psi(x)$$

ve

$$\big|p(y,y)| - |p\big(f(y), f(y)\big)\big| \leq |p(y,y) - p(f(y), f(y))|$$
$$\leq d_p\big(y, f(y)\big) + d_p(f(y), y)$$
$$=\ \varphi(y) +\ \psi(y)$$

Eğer $\forall\ 0 \leq c < 1$ için

$$|p(f(x), f(y))| \leq c|p(x, y)|$$

ise bir önceki eşitsizliği aklımızda tutarak

$$(1-c)(|p(x,y)| + |p(x,x)| + |p(y,y)|) \leq 2(\varphi(x) + \varphi(y) + \psi(x) + \psi(y))$$

elde edilir ki Teorem.3.4.7.nin (1) şartı sağlanmış olur. Sonuç olarak büzülme şartından $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} (d_p)^s (f^n(x), f^{n+1}(x)) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$inf_{x\in X}(\varphi(x) + \psi(x)) = 0$$

dır. Çünkü

$$inf_{x\in X}(\varphi(x) + \psi(x)) \leq \varphi(f^n(x)) + \psi(f^n(x))$$

$$= d_p(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d_p(f^{n+1}(x), f^n(x))$$

$$\leq 2(d_p)^s(f^n(x), f^{n+1}(x))$$

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Banach sabit nokta teoreminin bir çok uygulama alanı ve birçok genellemesi vardır. Biz de bu genellemelerin bazılarını O.Valero ve S.Oltra'nın makalelerini esas alarak inceledik. Şimdi bunlardan 3.3.1 Teoremi ve 3.3.2 sonucunu inceleyelim.

Hatırlatma: 3.3.1.Teorem : Banach Sabit Nokta Teoremi

f, (X,p) tam dualistik kısmi metrik uzaydan kendisine tanımlı bir dönüşüm ve

$$|p(f(x),f(y))| \leq c|p(x,y)| \qquad \forall x,y \in X \text{ için} \qquad (1)$$

şartını sağlayan bir $(0 \leq c < 1)$ c reel sayısı mevcut olsun. Bu taktirde f, bir tek sabit noktaya sahiptir (15).

Hatırlatma: 3.3.2.Sonuç: f, (X,p) tam kısmi metrik uzaydan kendisine tanımlı bir dönüşüm ve

$$p\big(f(x),f(y)\big) \leq cp(x,y), \qquad \forall x,y \in X$$

için şartını sağlayan bir $(0 \leq c \leq 1)$ c reel sayısı mevcut olsun. O halde f, bir tek sabit noktaya sahiptir (13).

Teorem 3.3.1 ifadesi içindeki mutlak değere bağlı büzülme durumu ile Sonuç 3.3.2 de yer alan büzülme şartının yer değiştirilemeyeceğini S. Oltra, O. Valero ya ait (15) makalesi gösterir.

4.1.Örnek: $X = (-\infty, 2]$ olmak üzere $\forall x,y \in X$ için

$$p(x,y) = x \vee y = maks\{x,y\}$$

şeklinde tanımlanan p, X üzerinde dualistik kısmi metrik iken (X,p) tam dualistik kısmi metrik uzaydır. Ancak (X,p) kısmi metrik olmadığı için Teorem 3.3.1 uygulanamaz. Eğer f, $\forall x \in (-\infty, 2]$ için $f(x) = x - 1$ olacak şekilde X den kendisine tanımlı bir fonksiyon olarak alınırsa Teorem 3.3.2 de $\forall x,y \in X$ için

$$p(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} p(x, y)$$

olur ancak fonksiyon öteleme fonksiyonu olduğu için f in sabit noktası yoktur .

KAYNAKLAR

1. Altun, İ., Şimşek, H., Some fixed point theorem on dualistic partial metric spaces, J. Adv. Math. Studies, Vol. I, No:1-2, 01-08, 2008.

2. Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitapevi, Ankara, 2006.

3. Boyd, D.W., Wong, J.S., On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 20, 458-464, 1969.

4. Bukatin, M.A., Shorina, S.Y., Partial metrics and co-continuous valutions, in:Foundations of Software Science and Computation Structures, Lecture Notes in Computer Science (ED.M.Nivat), vol. 1333, 43-78, Springer, Berlin, 1998.

5. Bukatin, M.A., Scott, J.S., Towards computing distances between programs via Scott domains, in. Logical Foundations of Computer Sicence, Lecture Notes in Computer Science (eds. S. Adian and A. Nerode), vol. 1234, Springer, 33-43, Berlin, 1997.

6. Chatterjee, S.K., Fixed point theorems, Rend. Acad. Bulgare Sc. 25, 727-730, 1972.

7. Ciric, L.B., Generalized contractions and fixed point theorem, Publ. Inst. Math. 12, 20-26, 1971.

8. Dugundji, J., Granas, A., Fixed point Theory, Monografie Matematyezne, Vol.61, Polish Scientific Publishers, 1982.

9. Escardo, M.H., PCF extended with real numbers, Theoretical Computer Science 162, 79-115, 1996.

10. Fletcher, P., Lindgren, W.F., Quasi-Uniform Spaces, Marcel Dekker, 1-76, New York, 1982.

11. Kannan R.,Some results on fixed points on fixed points, Bull. Calcuta Maths. Soc. 60, 71-76, 1968.

12. Künzi, H.P.A., Nonsymmetric distances and their associated topologies: About the orijins of basic ideas in the area of asymmetric topology, in: Handbook of the History of General Topology (eds.C.E. Aull and R.Lowen), vol.3, Kluwer Acad. Publ., 853-968, Dordrecht, 2001.

13. Mathews, S.G., Partial metric topology, in: Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications. Ann. New York Acad. Sci. 728, 183-197, 1994.

14. O'Neill, S.J., Partical metrics, valuations and domain theory, in: Proc. 11th Summer Conference on General Topology and Applications. Ann. New York Acad. Sci. 806 , 304-315, 1996.

15. Oltra, S., Valero, O., Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 36, 17-26, 2004.

16. Oltra, S.G., Romaguera, S., Sanchez-Peres, E.A., Bicompleting weightable quasi metric spaces and partial metric spaces, Rend. Circolo Mat. Palermo, 50, 151-162, 2002.

17. Rakotch, E., A note on conractive mappings, Proc. Amer, Math. Soc. 13, 559-465, 1962.

18. Ravi P. Agarwal, Maria Meehan, Donal O'Regan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

19. Reich, S., Kannan's fixed point theorem, Boll. U.M.I.4, 1-11, 1971.

20. Romaguera, S., and Schellekens, M., Quasi metric propertics of complexity spaces, Topology Appl. 98, 311-322, 1999.

21. Romaguera, S., Schellekens, M., Partial metric monoids and semivaluatin spaces, Topology Appl., to appear.

22. Romaguera, S., Schellekens, M., Weigtable quasi metric semigroups and semilattices, In: Proc. MFCSIT2000, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 40, 12, (2003).

23. Schellekens, M., A characterization of partial metrizability: domains are quantifiable, Theorant. Comput. Sci. 305, 409-432, 2003.

24. Schellekens, M., The correpondence between partial metrics and semivaluations, Theoret. Comput. Sci. 315, 135-149, 2004.

25. Schellekens, M., The smyth completion: a common foundation for denonational semantics and complexity analysis, Proc. MFPS 11, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, vol. 1, 211-232, 1995.

26. Seda, A.K., Quasi metrics and fixed point in computing, Bull. EATCS 60, 154-163, 1996.

27. Soykan, Y., Çözümlü Fonksiyonel Analiz Alıştırmaları, Nobel Yayınları, 2008.

28. Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz. Nobel Yayınları, 2008.

29. Volero, O., On Banach fixed point theorems for partial metric spaces. Applied Gen.Topology, Vol 6, no. 2, 229-240, 2005.

30. Yurtsever, B., Matematik Analiz Dersleri, Diyarbakır Ün.Yay.,1978.

31. Waszkierwicz, P. The local triangle axiom in topology and domain theory, Apply. Gen. Topology 4, 47-70, 2003.

32. Waszkierwiez, P., Quantitative continuous domains, Appl. Categor. Struct. 11, 41- 67, 2003.