KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIRALI KONİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Gonca DURMAZ

HAZİRAN 2010

ÖZET

SIRALI KONİ METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

DURMAZ, Gonca
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN
Haziran 2010, 50 sayfa

Bu tez çalışmasında sıralı koni metrik uzay üzerinde bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. İlk olarak sabit nokta teorisi ile ilgili ön bilgiler, bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci olarak sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teorisi incelenip normal metrik uzayla arasındaki farklar belirtilmiştir. Daha sonra son yıllarda tanımlanan koni metrik uzay kavramı verilerek bununla ilgili temel tanım, teoremler ve bu uzayda sabit nokta teorisi incelenmiştir. Son olarak bu tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturan sıralı koni metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri incelenerek koni metrik uzaylardaki teoremleri ile arasındaki farklar incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Koni Metrik Uzay, Sıralı Cümle

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS ON ORDERED CONE METRIC SPACE

DURMAZ, Gonca
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic, M. Sc. Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. İshak ALTUN
June 2010, 50 pages

In this study, some fixed points theorems on ordered cone metric space have been analyzed. Initially, background information, some essential definitions and theorems were given about fixed point theorem. Secondly, fixed point theorem on ordered cone metric space was investigated, and its differences from usual metric space were determined. After that, recently identified cone metric space term was given, and basic definition, theorems, and fixed point theorem were investigated for this space. Finally, fixed point theorems on ordered cone metric spaces constituting the original part of this study were analyzed, and differences between these theorems and theorems on cone metric spaces are investigated.

Key Words: Fixed Point, Cone Metric Space, Ordered Set

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans döneminde bilgisini, bilimini ve sabrını benden hiçbir zaman esirgemeyen, bu tezin hazırlanmasında ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak her türlü yardımını aldığım danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. İshak Altun'a teşekkür ederim.

Her koşulda bana verdikleri manevi ve maddi destek olmaksızın hiçbir şey yapamayacağım mükemmel aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

X boştan farklı bir küme olmak üzere $f: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $fx_0 = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa bu x_0 noktasına f dönüşümünün bir sabit noktası denir. Örneğin;

$$X = [0, \infty),\ f(x) = \frac{x}{2},\ g(x) = x + 1,\ h(x) = x^2$$

şeklinde tanımlanır ise $x_0 = 0$ noktası f dönüşümünün bir sabit noktası iken h dönüşümünün $x_0 = 0$ ve $x_0 = 1$ gibi iki sabit noktası vardır. Ancak g dönüşümünün bir sabit noktası yoktur. Eğer $X = (0, \infty)$ alınırsa f dönüşümünün de sabit noktası olmadığı açıktır. O halde bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımlandığı kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları, bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Sabit nokta teorisi matematiğin birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin $x^5 - x - 1 = 0$ denklemi

$$f(x) = x^5 - 1, g(x) = \sqrt[5]{x + 1}, h(x) = \frac{4x^5+1}{5x^4-1}$$

olmak üzere $x = f(x)$, $x = g(x)$, $x = h(x)$, şeklinde yazılabilir. Böylece f, g veya h fonksiyonlarının sabit noktasının varlığı yukarıda verilen denklemin kökünün varlığını garanti eder. Yani sabit nokta teoremi yardımıyla bu şekildeki bazı denklemlerin köklerinin var olduğu görülebilir.

Yine $y'(t) = \varphi(t, y(t))$ ve $y(t_0) = y_0$ başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Bu problemin

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, y(s))\, ds$$

şeklinde ikinci tipten bir Volterra integral denklemine dönüştürülebildiği iyi bilinmektedir. Dolayısıyla $F: C[0,1] \to C[0,1]$, $\forall t \in [0,1]$ için

$$Fy(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi(t, y(s))\, ds$$

olarak tanımlanırsa F dönüşümünün sabit noktasının çözümünün varlığı yukarıdaki integral denkleminin ve böylece verilen başlangıç değer probleminin varlığını garanti eder.

Genel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki yönde gelişmiştir. Birincisi normlu lineer uzaylarda sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisi, diğeri ise tam metrik uzaylarda büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları Brouwer ile başlamıştır. Brouwer $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından yine kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün en az bir sabit noktasının varlığını kanıtlamıştır. Daha sonra Schauder, Brouwer'ın teoremini $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir normlu lineer uzay alarak aşağıdaki şekilde ispatlamıştır.

"X bir Banach uzay, C, X in kompakt konveks bir alt kümesi ve $f: C \to C$ sürekli bir dönüşüm ise $fx_0 = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in C$ vardır. Yani f, C de enaz bir sabit noktaya sahiptir."

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teori çalışmaları ise Banach ile başlamıştır.

"(X, d) bir metrik uzay olsun. $\alpha \geq 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa ve $f: X \to X$ dönüşümüne bir Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına f dönüşümünün Lipschitz sabiti denir. Eğer $\alpha < 1$ ise f dönüşümüne büzülme(daralma, contraction) dönüşümü denir. Ayrıca

$\alpha = 1$ ise f dönüşümüne genişlemeyen(nonexpensive) dönüşüm denir. Her Lipschitz dönüşümü aynı zamanda sürekli bir dönüşümdür.

Banach, büzülme dönüşüm prensibi olarak da bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir.

"(X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve bir $\alpha \in [0,1)$ için $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$ şartını sağlıyorsa f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $x_n = f^n x$ şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi z noktasına yakınsar."

Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de göstermektedir. Daha sonra pek çok yazar tarafından bu teorem genişletilmiştir. Örneğin Kannan 1968'de teoremdeki büzülme şartı yerine $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere

$$d(fx, fy) \leq \alpha(d(x, fx) + d(y, fy))$$

eşitsizliğini kullanmıştır. Her büzülme dönüşümünün sürekli olduğu açıktır. Ancak bir Kannan dönüşümü sürekli olmayabilir. Yine Chatterjea 1972'de $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere

$$d(fx, fy) \leq \alpha(d(x, fy) + d(y, fx))$$

eşitsizliğini kullanarak bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Chatterjea dönüşümü de sürekli olmayabilir. Benzer şekilde $\alpha \in [0,1)$ ve

$$m(x, y) = maks\ \left\{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \frac{1}{2}[d(x, fy) + d(y, fx)\ ]\right\}$$

olmak üzere $d(fx, fy) \leq \alpha m(x, y)$ genelleştirilmiş büzülme eşitsizliğini kullanarak, φ bazı şartları sağlamak üzere lineer olmayan büzülme denilen

$d(fx, fy) \leq \varphi(d(x, y))$ ve genelleştirilmiş lineer olmayan büzülme denilen $d(fx, fy) \leq \varphi(m(x, y))$ eşitsizliklerinden sabit nokta teoremleri elde etmiştir.

1.1.Kaynak Özetleri

2004 yılında Hollandalı matematikçiler Ran ve Reurings yaptıkları bir çalışmada, Banach büzülme prensibi olarak bilinen temel sabit nokta teoremini sıralı metrik uzaylarda ele almışlar ve elde ettikleri sonucu matris denklemlerinin çözümlerinin varlığı için kullanmışlardır (1). Yazarlar bu çalışmada büzülme şartının uzayın tüm elemanları için sağlanmasının yerine uzay üzerinde verilen sıralama bağıntısına göre sadece karşılaştırılabilen elemanlar için büzülme şartının sağlanmasını kullanarak sonuca ulaşmışlardır. Ancak elde edilen sonuç sabit noktanın sadece varlığını garanti etmiş, tekliği ve nasıl bulunabileceği hakkında bir bilgi vermemiştir. Daha sonra bu çalışma temel alınarak çeşitli yazarlar tarafından sıralı metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir (2, 3-5). Örneğin Nieto yukarıda bahsedilen çalışmayı daha da genelleştirmiş ve ayrıca ek bir şart ile sabit noktanın tekliğini de garanti etmiştir (3).

Son yıllarda sabit nokta teorisinin gelişmekte olduğu diğer bir kavram ise 2007 yılında Huang ve Zhang tarafından tanımlanan koni metrik uzaydır (6). Bu Çinli matematikçiler, bilinenen reel değerli adi metriği, üzerinde bir koni tarafından sıralama bulunan Banach uzayı değerli olarak ele alıp genelleştirmişlerdir. Banach uzayında bir koni ve bir koni tarafından elde edilebilen sıralama hakkında geniş bilgi Deimling'in kitabında bulunabilir (7). Ayrıca Huang ve Zhang bu çalışmalarında Banach büzülme prensibi, Kannan sabit nokta teoremi (8) ve Chatterja sabit nokta teoremini (9) bu yeni tanımlanan uzay üzerinde ispatlamışlardır. Ardından pek çok yazar bu yeni kavramı kullanarak çalışma yapmışlardır (10- 20).

Bu tez çalışmasının ana fikri, yukarıda bahsedilen sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları ile koni metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmalarının birleştirilerek sıralı koni metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları yapmaktır. Bu düşünce ile yapılan çalışma (21) numaralı kaynakta sıralı koni metrik uzaylarda sabit nokta teorisi olarak belirtilip özgün bir makale olarak basılmıştır. Daha sonra (16) ile (22) numaralı kaynakların ana fikrini oluşturmuştur.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Bazı Temel Tanımlar

2.1.1. Tanım: X boş olmayan bir cümle ve $\preccurlyeq$, X de bir bağıntı olsun. Eğer

a) Her $x \in X$ için $x \preccurlyeq x$ (yansıma özelliği)
b) $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq x$ ise $x = y$ (ters simetri özelliği)
c) $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z$ ise $x \preccurlyeq z$ (geçişme özelliği)

şartları sağlanıyorsa $\preccurlyeq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

X de kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmışsa X'e kısmi sıralı cümle denir. Eğer kısmi sıralı bir cümlede x, y elemanları için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ şartlarından en az biri doğru ise x ve y karşılaştırılabilir denir.

Kısmi sıralı bir cümlenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilirse bu cümleye tam sıralı cümle denir.

2.1.2. Tanım: $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir cümle, $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $u \preccurlyeq x$ olacak şekilde $u \in X$ varsa u ya A nın X deki alt sınırı denir. Benzer şekilde her $x \in A$ için $x \preccurlyeq v$ olacak şekilde $v \in X$ varsa v ya A nın X deki üst sınırı denir. Üst sınıra sahip bir cümleye üstten sınırlı; alt sınıra sahip bir cümleye de alttan sınırlı cümle denir. Alttan ve üstten sınırlı cümleye ise kısaca sınırlı cümle denir.

2.1.3. Tanım: $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir cümle, $A \subseteq X$ olsun. A tam sıralı ise A ya X de bir zincir denir. O halde A, X de bir zincir ise her $x, y \in A$ için ya $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ dir.

2.1.4. Tanım: $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir cümle, $A \subseteq X$ ve A nın alt sınırlarının cümlesi A_1 olsun. $\alpha \in A_1$ olmak üzere her $x \in A_1$ için $x \preccurlyeq \alpha$ ise α ya A nın en büyük alt sınırı (A nın infimumu) denir ve $inf A$ ile gösterilir. A nın üst sınırlarının cümlesi A_2 olsun. $\beta \in A_2$ olmak üzere her $y \in A_2$ için $\beta \preccurlyeq y$ ise β ya A nın en küçük üst sınırı

(A nın supremumu) denir ve $supA$ ile gösterilir. $infA \in A$ olması halinde $infA$ ya A nın minimumu ; $supA \in A$ olması haline ise $supA$ ya A nın maksimumu denir.

2.1.5. Tanım: $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir cümle ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $T(x) \preccurlyeq T(y)$ oluyorsa T ye azalmayan dönüşüm denir.

2.1.6. Tanım: X boş olmayan bir cümle olsun. Eğer $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, x, y, z \in X$ için

a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
b) $d(x, y) = d(y, x)$
c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

2.1.7. Tanım: X boştan farklı bir cümle olsun. Eğer $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, x, y, z \in X$ için

a) $d(x, x) = 0$
b) $d(x, y) = d(y, x)$
c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşulları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir yarı (pseudo) metrik ve (X, d) ikilisine de bir yarı (pseudo) metrik uzay denir.

2.1.8. Tanım: (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. $D(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ cümlesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar, $\overline{D}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$ cümlesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar, $S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$ cümlesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi ve $D'(x_0, r) = \{x \in X \mid 0 < d(x, x_0) r\}$ cümlesine x_0 merkezli r yarıçaplı delik yuvar denir.

2.1.9. Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan alt cümlesi olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $D(x, r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A cümlesine d- açıktır denir.

2.1.10. Tanım: (X, d) metrik uzayının bir A alt cümlesi için $A^c = X - A$ d-açık ise A ya d-kapalı cümle denir.

2.1.1. Önerme: (X, d) bir metrik uzay olsun.

a) (X, d) içindeki her açık yuvar d-açıktır.
b) (X, d) içindeki her kapalı yuvar d-kapalıdır.

2.1.11. Tanım: (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x_0 \in A$ olsun. $D(x_0, r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa A, x_0 ın bir civarı, x_0 sayısına da A nın bir iç noktası denir. A nın bütün iç noktalarının cümlesine ise A nın içi denir ve $intA$ ile gösterilir.

2.1.12. Tanım: (X, d) bir metrik uzay, A ve B de X in boş olmayan iki alt cümlesi olsun. $x \in X$ olmak üzere

$$d(A, B) = inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

sayısına A ve B cümleleri arasındaki uzaklık,

$$d(x, A) = inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

sayısına x noktasının A cümlesine olan uzaklığı,

$$d(A) = sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}$$

sayısına A cümlesinin çapı denir.

Eğer $d(A) < \infty$ ise A cümlesine sınırlı cümle, $d(A) = \infty$ ise A cümlesine sınırsız cümle denir.

2.1.13. Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_ε doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi X içinde x noktasına yakınsar denir. Kısaca $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

2.1.14. Tanım: Bir $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir cümle ve $\{x_n\}$ X de bir dizi olsun.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x_{n+1}$ ise $\{x_n\}$ dizisine artan;
b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \preccurlyeq x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisine azalan;
c) Artan veya azalan bir diziye monoton dizi denir.

2.1.2. Önerme: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın d-kapalı olması için gerek ve yeter şart her $\{x_n\} \subseteq A$ için $x_n \to x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır.

2.1.3. Önerme: Bir (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

2.1.15. Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda herhangi bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon > 0$ doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Eğer (X, d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir.

2.1.16. Tanım: (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. f fonksiyonunun x noktasında sürekli (dizisel sürekli) olması için gerek ve yeter şart X içinde herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi x' e yakınsak iken, Y içindeki $\{f(x_n)\}$ dizisinin $f(x)$' e yakınsak olmasıdır.

2.1.17. Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A cümlesindeki her dizi yine A da yakınsayan bir alt diziyi içeriyorsa A cümlesine dizisel kompakt denir. Eğer X cümlesi içindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa bu uzaya dizisel kompakt metrik uzay denir.

2.1.18. Tanım: X boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için

a) $x + y \in X$

b) $x + (y + z) = (x + y) + z$

c) $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ var.

d) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ var.

e) $x + y = y + x$

f) $\alpha x \in X$

g) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

h) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

i) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

j) $1x = x$ (Burada $1, \mathbb{K}$' nın birim elemanıdır.)

şartları sağlanıyorsa X e $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir Lineer uzay veya Vektör uzayı denir.

2.1.19. Tanım: X ,$\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x \in X$ elemanını bir $\|x\| \in \mathbb{R}$ elemanına eşleyen ve

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

b) $\alpha \in \mathbb{K}$ olmak üzere $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan bir $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir.

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}, d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan d bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik uzaydır.

2.1.20. Tanım: X normlu lineer uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Sıralı Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

3.1.1. Teorem: $(X,\preccurlyeq)$ kısmi sıralı cümle ve d, X üzerinde (X,d) ikilisi tam olacak şekilde bir metrik olsun. $T{:}\,X\to X$ dönüşümü sürekli, azalmayan ve $y\preccurlyeq x$ olacak şekildeki her $x,y\in X$ ve $k\in[0,1)$ için $d(Tx,Ty)\le kd(x,y)$ büzülme şartını sağlasın. Eğer bir $x_0\in X$ için $x_0\preccurlyeq Tx_0$ oluyorsa T bir sabit noktaya sahiptir (5, 9).

İspat: Eğer $x_0=Tx_0$ ise ispat tamamlanır. $x_0\neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $x_0\preccurlyeq Tx_0$ ve T azalmayan olduğundan tümevarım ile

$$x_0\preccurlyeq Tx_0\preccurlyeq T^2x_0\preccurlyeq\cdots\preccurlyeq T^nx_0\preccurlyeq T^{n+1}x_0\preccurlyeq\cdots$$

elde edilir. Şimdi her $n\in\mathbb{N}$ için

$$d(T^{n+1}x_0,T^nx_0)\le k^nd(Tx_0,x_0) \tag{3.1.1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını görelim. Gerçekten; $x_0\preccurlyeq Tx_0$ olduğundan büzülme şartı kullanılırsa

$$d(T^2x_0,Tx_0)\le kd(Tx_0,x_0)$$

elde edilir ki bu $n=1$ için (3.1.1) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. (3.1.1) eşitsizliğinin n için sağlandığını kabul edelim. $T^nx_0\preccurlyeq T^{n+1}x_0$ olduğundan büzülme şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}d(T^{n+2}x_0,T^{n+1}x_0)&=d(TT^{n+1}x_0,TT^nx_0)\\&\le kd(T^{n+1}x_0,T^nx_0)\\&\le kk^nd(Tx_0,x_0)\\&=k^{n+1}d(Tx_0,x_0)\end{aligned}$$

elde edilir, buda (3.1.1) eşitsizliğinin $n+1$ için doğru olduğunu gösterir. $m>n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(T^m x_0, T^n x_0) &\leq d(T^m x_0, T^{m-1} x_0) + \cdots + d(T^{n+1} x_0, T^n x_0) \\ &\leq (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n) d(Tx_0, x_0) \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(Tx_0, x_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\{T^n x_0\}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. T sürekli olduğundan $Ty = y$ dir.

Yukarıdaki teoremde T nin sürekliliği yerine ek bir şart konularak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

3.1.2. Teorem: $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı cümle ve d, X üzerinde (X, d) ikilisi tam olacak şekilde bir metrik olsun. $T: X \to X$ dönüşümü azalmayan ve $y \preccurlyeq x$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $k \in [0,1)$ için $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ büzülme şartını sağlasın. Ayrıca X cümlesinin

$$\{x_n\}, X \text{ içerisinde azalmayan bir dizi ve } x_n \to x \text{ iken her } n \in \mathbb{N} \text{ için } x_n \preccurlyeq x \quad (3.1.2)$$

şartını sağladığını kabul edelim. Eğer bir $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ oluyorsa T bir sabit noktaya sahiptir (9).

İspat: 3.1.1 teoreminin ispatında olduğu gibi $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = y \in X$ olduğu gösterilebilir. Böylece (3.1.2) şartından $n \in \mathbb{N}$ için $T^n x_0 \preccurlyeq y$ dir. Buradan büzülme şartı kullanılırsa

$$d(Ty, y) \leq d(Ty, T^{n+1} x_0) + d(T^{n+1} x_0, y) \leq kd(y, T^n x_0) + d(T^{n+1} x_0, y)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $Ty = y$ bulunur.

Yukarıdaki iki teoremde de T nin sabit noktasının tekliği garanti değildir. Ancak

her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ cümlesi alt ve üst sınıra sahip olsun (3.1.3)

şartı sağlanırsa T nin sabit noktası tektir. Bunu görmek için önce her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = y$ olduğunu görelim.

$x \in X$ keyfi olsun. Eğer $x \preccurlyeq x_0$ veya $x_0 \preccurlyeq x$ ise $T^n x \preccurlyeq T^n x_0$ veya $T^n x_0 \preccurlyeq T^n x$ elde edilir. Böylece büzülme şartıyla

$$d(T^n x, T^n x_0) \leq k^n d(x, x_0)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = y$$

olur. Eğer x ile x_0 karşılaştırılamıyor ise x_1 ile x_2, $\{x, x_0\}$ cümlesinin sırasıyla bir üst ve alt sınırı olmak üzere

$$x_2 \preccurlyeq x \preccurlyeq x_1 \text{ ve } x_2 \preccurlyeq x_0 \preccurlyeq x_1$$

olur. Böylece T azalmayan olduğundan $T^n x_2 \preccurlyeq T^n x \preccurlyeq T^n x_1$ elde edilir. Ayrıca $x_2 \preccurlyeq x_0 \preccurlyeq x_1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} T^n x_1 = \lim_{n\to\infty} T^n x_2 = y$ bulunur. Buradan $\lim_{n\to\infty} T^n x = y$ olmalıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini görmek için z, T nin başka bir sabit noktası ise $Tz = z$ olup $T^n z = z$ dir. Yani $\{T^n z\}$ dizisi hem y ye hem de z ye yakınsar. Bu durumda $y = z$ olup T bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.1.1. Örnek: $X = \mathbb{R}$ ve $x, y \in X$ için

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \{(x = y) \; veya \; (\, x, y \in [1,4] \; için \; x \leq y \,)\}$$

ile tanımlı $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısını göz önüne alalım. d, X üzerinde alışılmış metrik olsun. $T: X \rightarrow X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 1 \\ \frac{x+5}{3} & , 1 \leq x \leq 4 \\ 2x - 5 \, , & \quad x > 4 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonun Teorem 3.1.1 in bütün şartlarını sağlandığı görülebilir. Bu yüzden T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

3.1.2. Örnek: $X_1 = \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ ve X_1 üzerinde

$$(x,y) \preccurlyeq (z,t) \Leftrightarrow x \leq z \; ve \; y \leq t$$

ile tanımlı $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısını göz önüne alalım. Böylece $(X_1, \preccurlyeq)$ cümlesi farklı elemanları karşılaştırılamayan kısmi sıralı bir cümledir. Diğer yandan d, Öklid metriğiyle (X_1, d) tam metrik uzaydır. Özdeşlik dönüşümü $T(x,y) = (x,y)$ nin sürekli ve azalmayan olduğu; ayrıca

bir $k \in [0,1)$ ve $(z,t) \preccurlyeq (x,y)$ olacak şekildeki her $(x,y),(z,t) \in X_1$için $d(T(x,y),T(z,t)) \leq kd((x,y),(z,t))$

şartını sağladığı aşikârdır. Çünkü X_1 in elemanları sadece kendileriyle karşılaştırılabilir.

Ayrıca $(1,0) \preccurlyeq T(1,0) = (1,0)$ dır. Bu durumda Teorem 3.1.1 in bütün şartları sağlanır. O halde X_1 en az bir sabit noktaya sahiptir. Aynı zamanda Teorem 3.1.2 de uygulanabilir. Çünkü $\{(x_n, y_n)\} \subset X_1$ azalmayan ve $(x,y) \in X_1$ e yakınsayan bir dizi ise $\{(x_n, y_n)\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, y_n) = (x,y)$ şeklinde bir sabit dizi olmalıdır. Böylece (x,y) limiti dizideki bütün terimler için bir üst sınır olur.

Bu örnek Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 nin şartlarının sabit noktanın tekliğini garanti etmediğini göstermektedir.

Aynı şartlar altında $X_2 = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ üzerinde tanımlı birim dönüşüm sonsuz çoklukta sabit noktaya sahiptir. Dikkat edilirse X_2 deki farklı iki nokta karşılaştırılamaz.

Bir kısmi sıralı cümlede (3.1.1) ve (3.1.2) şartları bağımsızdır.

3.1.3. Örnek: $\preccurlyeq$ bağıntısını Örnek 3.1.2 deki gibi olmak üzere $(\mathbb{R}^2, \preccurlyeq)$ uzayını göz önüne alalım. Bu durumda (3.1.1) ve (3.1.2) şartlarının her ikisi de sağlanır.

Gerçekten; $(x,y),(z,t) \in \mathbb{R}^2$ için $(maks\{x,z\}, maks\{y,t\}) \in \mathbb{R}^2$ ve $(min\{x,z\}, min\{y,t\}) \in \mathbb{R}^2$ sırasıyla (x,y) ve (z,t) nin üst ve alt sınırlarıdır. Eğer $\{(x_n,y_n)\}$, $\mathbb{R}^2$ de monoton, azalmayan bir seri ve (x,y) ye yakınsar ise $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ monoton, azalmayan dizileri sırasıyla $\mathbb{R}$ de x ve y ye yakınsar. Bu durumda her n için $x_n \preccurlyeq x$, $y_n \preccurlyeq y$ ve (x,y), $\{(x_n,y_n)\}$ dizisinin bütün elemanlarının bir üst sınırı olur.

3.1.1. Lemma: $(X,\preccurlyeq)$ kısmi sıralı cümle ve d, X üzerinde bir metrik olsun. Eğer X deki her zincir yine X de bir supremuma sahip ise (3.1.3) şartı sağlanır. $Y \subseteq X$ supremuma sahip ise her $\varepsilon > 0$ için $d(y, supY) < \varepsilon$ olacak şekilde $y \in Y$ nin var olduğu açıktır (9).

İspat: $\{x_n\}$ dizisi azalmayan ve $x_n \to x$ olacak şekilde bir dizi olsun. Bu durumda

$$x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq x_3 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq \cdots$$

olduğundan $C = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, X de bir zincirdir. Buradan $z = supC \in X$ vardır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z$ olur. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq x$ olduğunu ispatlamak için $x = z$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. Yakınsaklıktan dolayı her $n \geq N$ için $d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ ve supremum özelliğinden dolayı $m \geq N$ olmak üzere $d(x_m, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $x_m \in C$ vardır. Böylece

$d(x,z) \leq d(x,x_m) + d(x_m,z) < \varepsilon$

elde edilir. Bu ise $x = z$ olduğunu gösterir.

3.1.2. Lemma: $(X,\preccurlyeq)$ tam sıralı cümle ve d, X üzerinde bir metrik olsun. Eğer $a \preccurlyeq b \preccurlyeq c$ için $d(b,c) \leq d(a,c)$ sağlanıyorsa (3.1.2) ve (3.1.3) şartları sağlanır (9).

İspat: $x, y \in X$ verilsin. Bu durumda $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ olur. Buna göre $\{x,y\}$ nin bir üst ve alt sınırı vardır.

$\{x_n\} \subseteq X$ azalmayan ve x e yakınsayan bir dizi olsun. En az bir $m \in \mathbb{N}$ için $x_m \preccurlyeq x$ olmadığını kabul edelim. O halde X tam sıralı olduğundan $x \prec x_m$ olur. $\{x_n\}$, azalmayan olduğundan her $n \geq m$ için

$x \prec x_m \preccurlyeq x_n$ ve $0 < d(x_m,x) \leq d(x_n,x)$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $0 < d(x_m,x) \leq 0$ çelişkisi bulunur.

3.1.4. Örnek: $X_3 = \{(x,x) \,|x \in [-1,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ ve d, X_3 üzerinde Öklid metrik olsun. X_3 üzerinde aşağıdaki sıralamayı göz önüne alalım.

$x \neq 0 \neq y$ ise $(x,x) \preccurlyeq (y,y) \Leftrightarrow x \leq y$,
$(-1,-1) \preccurlyeq (0,0), (0,0) \preccurlyeq (0,0), (0,0) \preccurlyeq (1,1)$

olsun. X_3 deki herhangi iki elemanın bir üst sınırı $(1,1)$ ve bir alt sınırı $(-1,-1)$ olduğundan (3.1.3) şartı sağlanır. Ancak (3.1.2) şartı sağlanmaz.

Örneğin $\{x_n\} = \left\{(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ azalmayan ve $(0,0)$ a yakınsayan bir dizidir. Fakat dizinin sadece ilk terimi bu limitle karşılaştırılabilir.

3.1.5. Örnek: $X_4 = \{(x,x) \,|x \in [-1,0]\} \subset \mathbb{R}^2$ ve d, X_4 üzerinde Öklid metrik olsun. X_4 üzerinde aşağıdaki sıralamayı göz önüne alalım.

$(0,0) \preccurlyeq (0,0)$ ve $x \neq 0 \neq y$ için$(x,x) \preccurlyeq (y,y) \Leftrightarrow x \leq y$

dir. Burada $(-1,-1)$ ve $(0,0)$ için ne üst nede alt sınır vardır. Bundan dolayı (3.1.3) şartı sağlanmaz aynı zamanda bir önceki örnekteki dizi göz önüne alındığında (3.1.2) şartının da sağlanmağı görülür.

3.2. Koni Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

3.2.1. Tanım: E bir reel Banach uzayı, $P \subset E$ olsun. θ ile E' nin sıfır elemanını gösterelim ve $intP$, P'nin içi olsun. Eğer

a) $P \neq \emptyset,\ P$ kapalı ve $P \neq \{\theta\}$

b) $a, b \in \mathbb{R}^+, x, y \in P \Rightarrow ax + by \in P$

c) $x, -x \in P \Rightarrow x = \theta$

şartları sağlanıyor ise P ye E de bir koni denir (7).

Verilen bir $P \subset E$ konisi ile E Banach uzayı üzerinde $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y - x \in P$ şeklinde bir $\preccurlyeq$ kısmi sıralaması tanımlanabilir.

Örneğin; $P = \{(x, y)|x, y \geq 0\}$, $\mathbb{R}^2$ de bir konidir. Bu koni yardımıyla $\mathbb{R}^2$ üzerinde $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$ için $(x, y) \preccurlyeq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z\ ve\ y \leq t$ bağıntısı elde edilir.

$x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ ise bu durum $x \prec y$, $y - x \in intP$ ise bu durum $x \ll y$ ile gösterilir.

3.2.2. Tanım: E bir reel Banach uzayı, $P \subset E$ olsun. Eğer

i. $inf\{\|x + y\|: x, y \in P\ ve\ \|x\| = \|y\| = 1\} > 0$ yada

ii. Her $x, y \in E$ için $\theta \preccurlyeq x \preccurlyeq y$ iken $\|x\| \leq K\|y\|$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı varsa P'ye normal koni denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük K sayısına P'nin normal sabiti denir (7).

Eğer her azalmayan ve üstten sınırlı dizi yakınsak ise P'ye regüler koni adı verilir. Yani $\{x_n\}$ dizisi $x_1 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq y$ özelliğine sahip iken $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ olacak şekilde $x \in E$ varsa P ye regüler koni denir.

3.2.1. Lemma: Her regüler koni normal konidir (1, 6).

İspat: P bir regüler koni fakat normal olmasın. Her $n \geq 1$ için $t_n, s_n \in P$ dizilerini $t_n - s_n \in P$ ve $n^2\|t_n\| < \|s_n\|$ olacak şekilde seçelim. $y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ ve $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}$ diyelim. Bu durumda

$n \geq 1$ için $x_n, y_n, x_n - y_n \in P, \|y_n\| = 1$ ve $n^2 < \|x_n\|$

dir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|y_n\|$ yakınsak ve Banach uzayında normlu yakınsak her seri yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$ olacak şekilde $y \in E$ vardır. P kapalı olduğundan $y \in P$ dir.

Diğer taraftan $x_n - y_n \in P \Leftrightarrow x_n \preccurlyeq y_n$ olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n \preccurlyeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$

dir.

Şimdi $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} x_k$ dizisini göz önüne alırsak

$\theta \preccurlyeq v_1 \preccurlyeq v_2 \preccurlyeq v_3 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq y$

olur. P regüler olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$ serisi yakınsaktır. Buradan

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \|x_n\| = 0$

olur ki bu bir çelişkidir. Çünkü $n^2 < \|x_n\| \Rightarrow 1 < \left\|\frac{x_n}{n^2}\right\|$ dır.

3.2.2. Lemma: Normal sabiti $K < 1$ olacak şekilde bir normal koni yoktur (1).

İspat: P, normal sabiti $K < 1$ olacak şekilde bir normal koni olsun. $x \in P$, $x \neq \theta$ ve $0 < \varepsilon < 1$ sayısını $K < 1 - \epsilon$ olacak şekilde seçelim. O halde $(1 - \varepsilon)\|x\| > K\|x\|$

olur. Diğer taraftan $(1-\epsilon)x \preccurlyeq x$ olduğundan $(1-\varepsilon)\|x\| \leq K\|x\|$ olur. Bu bir çelişkidir. Bu durum $K<1$ kabul edilmesi ile oluştuğundan $K<1$ olacak şekilde normal bir koni yoktur.

Aşağıdaki örnek normal koninin regüler olması gerekmediğini göstermektedir.

3.2.1. Örnek: $E = C_{\mathbb{R}}[0,1]$ uzayını supremumum normu ile birlikte göz önüne alalım. Ayrıca $P = \{f \in E \mid f(t) \geq 0\}$ olsun. Bu durumda P'nin normal sabiti 1 olur.

Gerçekten; $\theta \preccurlyeq f \preccurlyeq g \Leftrightarrow$ Her $t \in [0,1]$ için $0 \leq f(t) \leq g(t)$

$$\Leftrightarrow \sup_{t\in[0,1]}|f(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]}|g(t)|$$

$$\Leftrightarrow \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$$

olur. O halde $K=1$ dir.

Şimdi E içerisinde aşağıdaki şekilde tanımlanan $\{f_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) = t^n$ olsun. $\{f_n\}$ dizisinin azalan ve alttan sınırlı olduğu açıktır. Fakat bu dizi $C_{\mathbb{R}}[0,1]$ içerisinde yakınsak değildir. Dolayısıyla P regüler değildir.

3.2.1. Önerme: $m>1$ için $K>m$ olacak şekilde bir normal koni vardır (1).

İspat: $m>1$ olsun. Supremumum normuyla

$$E = \left\{ax+b \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R}\,; x \in \left[1-\frac{1}{m},1\right]\right\}$$

reel vektör uzayını göz önüne alalım. $P = \{ax+b \in \mathbb{R} \mid a \leq 0, b \geq 0\}$, E de bir konidir. İlk olarak P'nin normal olduğunu görelim. $\{a_nx+b_n\}$ azalmayan ve üstten sınırlı bir dizi olsun. O halde

her $x \in \left[1-\frac{1}{m},1\right]$ için $a_1x+b_1 \leq a_2x+b_2 \leq \cdots \leq a_nx+b_n \leq \cdots \leq cx+d$

olacak şekilde $cx+d \in E$ vardır. Bu durumda $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ $\mathbb{R}$ de $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq d$ ve $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq c$ olacak şekilde iki dizidir. Böylece$\{a_n\}$, $\{b_n\}$yakınsaktır. Yani $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $ax+b \in P$ ve $a_n x + b_n \to ax+b$ dir. Buradan P regülerdir. Dolayısıyla normaldir. Yani her $f, g \in E$ için $\theta \leq g \leq f$ için $\|g\|_\infty \leq K\|f\|_\infty$ olacak şekilde $K \geq 1$ vardır.

Şimdi $K > m$ olduğunu görelim. İlk olarak $f(x) = -mx + m \in P$, $g(x) = m \in P$ olarak alınırsa $f - g \in P$ olup $\theta \leq g \leq f$ dir. Böylece $m = \|g\|_\infty \leq K\|f\|_\infty = K$ dır.

Diğer taraftan eğer $f(x) = -\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$ ve $g(x) = m$ alınırsa $f \in P, g \in P$ ve $f - g \in P$ olur. Ayrıca $\|g\|_\infty = m$ ve $\|f\|_\infty = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$ olduğu açıktır. Bu yüzden $\|g\|_\infty = m > m + \frac{1}{m} - 1 = m\|f\|$ bulunur ki bu $K > m$ olduğunu gösterir.

3.2.2. Örnek: $E = C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ uzayı üzerinde $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ normunu göz önüne alalım ve $P = \{f \in E \,|f(t) \geq 0\}$ olsun. Her $m \geq 1$ için $f(t) = t$ ve $g(t) = t^{2m}$ olsun. O halde

$0 \preccurlyeq g \preccurlyeq f$,$\|f\| = 2$ ve $\|g\| = 2m + 1$

olur. Böylece $m\|f\| < \|g\|$ olup m, P'nin normal sabiti değildir. Bu durumda P normal koni değildir.

3.2.3. Tanım: X boş olmayan bir cümle, E bir Banach uzayı ve P, E de bir koni olsun. $d: X \times X \to E$ dönüşümü

a) Her $x, y \in X$ için $\theta \preccurlyeq d(x,y)$ ve $d(x,y) = \theta \Leftrightarrow x = y$
b) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$
c) Her $x, y, z \in X$ için $d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(y,z)$

şartlarını sağlarsa d dönüşümüne X de bir koni metrik, (X, d) ikilisine de koni metrik uzay denir (6).

3.2.4. Tanım: (X, d) bir koni metrik uzay, $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\theta \ll c$ için $n > N$ olduğunda $d(x_n, x) \ll c$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsar ve $\{x_n\}$ dizisinin limiti x dir denir. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $n \to \infty$ için $x_n \to x$ şeklinde gösterilir (6).

3.2.3. Örnek: $E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \in E \mid x, y \geq 0\}$ ve $X = \mathbb{R}$ olsun. $d: X \times X \to E$ ve $\alpha \geq 0$ bir sabit olmak üzere

$$d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda d, X üzerinde bir koni metriktir.

3.2.4. Örnek: $q \geq 1, b > 1, E = l^q = \left\{\{x_n\} \mid x_n \in \mathbb{R}\ ve\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q < \infty\right\}$ ve $P = \left\{\{x_n\} \in E \mid her\ n\ için\ x_n \geq 0\right\}$ olsun. Eğer (X, ρ) bir metrik uzay ise $d: X \times X \to E$,

$$d(x, y) = (\rho\,(x, y)/b^n)^{1/q}$$

şeklinde tanımlanan d, X üzerinde bir koni metriktir.

3.2.5. Örnek: $E = (C_{\mathbb{R}}[0, \infty), \|.\|_\infty)$ ve $P = \{f \in E \mid f(t) \geq 0\}$ olsun. Eğer (X, ρ) bir metrik uzay ise $d: X \times X \to E$, $f_{x,y}(t) = (|x - y|t)$ olmak üzere $d(x, y) = f_{x,y}$ şeklinde tanımlanan d, X üzerinde bir koni metriktir.

3.2.3. Lemma: (X, d) bir koni metrik uzay, P, K normal sabiti ile bir koni ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $d(x_n, x) \to \theta$ olmasıdır (6).

İspat: Kabul edelim ki $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak olsun. Her reel $\varepsilon > 0$ sayısı için $\theta \ll c$ ve $K\|c\| < \varepsilon$ şartını sağlayan bir $c \in E$ seçelim. $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak olduğundan $n > N$ olduğunda $d(x_n, x) \ll c$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. O halde

$n > N$ için $\|d(x_n, x)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$ olur. Buradan $n \to \infty$ için $d(x_n, x) \to \theta$ bulunur.

Tersine $n \to \infty$ için $d(x_n, x) \to \theta$ olduğunu kabul edelim. $n > N$ olduğunda $\|d(x_n, x)\| < \delta$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $\theta \ll c$ keyfi olsun. O halde $c \in intP$ dir. Yani $N_\delta(\theta) = \{y \in E \mid \|y\| < \delta\}$ olmak üzere $c + N_\delta(\theta) \subseteq intP$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Böylece $n > N$ için $-d(x_n, x) \in N_\delta(\theta)$ olduğundan

$$c - d(x_n, x) \in intP$$

olur. Buradan $n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin x e yakınsadığını gösterir.

3.2.4. Lemma: (X, d) bir koni metrik uzay olsun. P, K normal sabiti ile bir koni ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$, x ve y ye yakınsıyor ise $x = y$ dir. Yani $\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir (6).

İspat: $\theta \ll c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için $n > N$ olduğunda $d(x_n, x) \ll c$ ve $d(x_n, y) \ll c$ olacak şekilde N sayısı vardır. Bu durumda $n > N$ için

$$d(x, y) \preccurlyeq d(x_n, x) + d(x_n, y) \preccurlyeq 2c$$

elde edilir. Böylece $\|d(x, y)\| \leq 2K\|c\|$ olur. c keyfi olduğundan $d(x, y) = \theta$ ve buradan $x = y$ olur.

3.2.5. Tanım: (X, d) bir koni metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\theta \ll c$ şartını sağlayan her $c \in E$ için $n, m > N$ iken $d(x_n, x_m) \ll c$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine X de bir Cauchy dizisi denir (6).

3.2.6. Tanım: (X, d) bir koni metrik uzay olsun. Eğer her Cauchy dizisi X de yakınsak ise X e tam koni metrik uzay denir (6).

3.2.5. Lemma: (X,d) bir koni metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise bir Cauchy dizisidir (6).

İspat: $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak olsun. O halde $\theta \ll c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için $n, m > N$ olduğunda

$d(x_n, x) \ll \frac{c}{2}$ ve $d(x_m, x) \ll \frac{c}{2}$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $n, m > N$ için

$d(x_n, x_m) \preccurlyeq d(x_n, x) + d(x_m, x) \ll c$

olur. Böylece $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

3.2.6. Lemma: (X,d) bir koni metrik uzay, P, K normal sabiti ile bir koni ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to \theta$ olmasıdır (6).

İspat: $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\theta \ll c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için $n, m > N$ olduğunda $d(x_n, x_m) \ll c$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $K\|c\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. Bundan dolayı $n, m > N$ olduğunda

$\|d(x_n, x_m)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$

olur. Bu ise $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to \theta$ olması demektir.

Diğer taraftan $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to \theta$ olduğunu kabul edelim. $n > N$ olduğunda $\|d(x_n, x_m)\| < \delta$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $\theta \ll c$ ve $c \in E$ olacak şekilde keyfi bir sabit olsun. O halde $c \in intP$ dir. Yani $N_\delta(\theta) = \{y \in E \mid \|y\| < \delta\}$ olmak üzere $c + N_\delta(\theta) \subseteq intP$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Böylece $n, m > N$ için $-d(x_n, x_m) \in N_\delta(\theta)$ olduğundan

$c - d(x_n, x_m) \in intP$

olur. Buradan $n, m > N$ için $d(x_n, x_m) \ll c$ olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

3.2.7. Lemma: (X, d) bir koni metrik uzay ve P, K normal sabiti ile bir koni olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri $n \to \infty$ için $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olacak şekilde X de birer dizi ise bu durumda $n \to \infty$ için $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ olur (6).

İspat: Her $\varepsilon > 0$ için $\theta \ll c$ ve $\|c\| < \frac{\varepsilon}{4K+2}$ şartlarını sağlayan $c \in E$ seçelim. $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olduğundan her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ ve $d(y_n, y) \ll c$ olacak şekilde bir N sayısı vardır. Buradan

$$d(x_n, y_n) \preccurlyeq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \preccurlyeq d(x, y) + 2c,$$
$$d(x, y) \preccurlyeq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \preccurlyeq d(x_n, y_n) + 2c$$

olur. Bu durumda

$$\theta \preccurlyeq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) \preccurlyeq 4c$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| &\leq \|d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)\| + \|2c\| \\ &\leq 4K + 2\|c\| < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $n \to \infty$ için $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ elde edilir.

3.2.7. Tanım: (X, d) bir koni metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ in X içerisinde yakınsak bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi varsa X cümlesine dizisel kompakt koni metrik uzay denir (6).

3.2.1. Teorem: (X, d) bir tam koni metrik uzay ve P, K normal sabiti ile bir koni olsun. $T: X \to X$ dönüşümü için $k \in [0,1)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq kd(x, y)$ şartı sağlansın. Bu durumda T bir tek $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar (6).

İspat: $x_0 \in X$ seçelim. $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$ şeklinde $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım.

Bu durumda $n = 0,1,2, \dots$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \preccurlyeq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\preccurlyeq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq k^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Böylece $n = 0,1,2, \dots$ ve $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\preccurlyeq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\preccurlyeq (k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^m) d(x_1, x_0) \\ &\preccurlyeq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{k^m}{1-k} K \|d(x_1, x_0)\|$$

bulunur. Bu ise $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to \theta$ olması demektir. Böylece $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Yani $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. Buradan

$$d(Tx^*, x^*) \preccurlyeq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \preccurlyeq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)$$

ve böylece

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0$$

elde edilir. Bundan dolayı $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ olur. Buradan $Tx^* = x^*$ elde edilir ki bu x^* ın T'nin bir sabit noktası olduğunu gösterir.

Tekliğini göstermek için T'nin x^* ve y^* gibi iki sabit noktası olsun. Bu durumda $Tx^* = x^*$ ve $Ty^* = y^*$ olur. Buradan

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \preccurlyeq kd(x^*, y^*)$$

olur. Böylece $\|d(x^*, y^*)\| = 0$ ve $x^* = y^*$ olur. Bu ise T'nin sabit noktasın tekliğini gösterir.

3.2.1. Sonuç: (X, d) bir tam koni metrik uzay ve P, K normal sabiti ile bir koni olsun. $x_0 \in X$ ve $\theta \ll c$ olmak üzere $B(x_0, c) = \{x \in X \mid d(x_0, x) \preccurlyeq c\}$ olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $d(Tx_0, x_0) \preccurlyeq (1-k)c$ ile birlikte bir büzülme dönüşümü olsun. Yani $k \in [0,1)$ ve her $x, y \in B(x_0, c)$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq kd(x, y)$ olsun. Bu durumda T, $B(x_0, c)$ içinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Her $x \in B(x_0, c)$ için $Tx \in B(x_0, c)$ ve $B(x_0, c)$ nin tam olduğunu göstermeliyiz. $\{x_n\}$, $B(x_0, c)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından $n \to \infty$ için $x_n \to x \in X$ olur. Şimdi

$$d(x_0, x) \preccurlyeq d(x_n, x_0) + d(x_n, x) \preccurlyeq d(x_n, x) + c$$

elde edilir. Buradan $x_n \to x$ olduğundan $d(x_0, x) \preccurlyeq c$ ve dolayısıyla $x \in B(x_0, c)$ bulunur. Bu durumda $B(x_0, c)$ tamdır.

Her $x \in B(x_0, c)$ için

$$d(x_0, Tx) \preccurlyeq d(Tx_0, x_0) + d(Tx_0, Tx)$$

$$d(x_0, Tx) \preccurlyeq (1-k)c + kd(x_0, x)$$
$$\preccurlyeq (1-k)c + kc = c$$

olur. Böylece $Tx \in B(x_0, c)$ elde edilir.

3.2.2. Sonuç: (X, d) bir tam koni metrik uzay ve P, K normal sabiti ile bir koni olsun. $T: X \to X$ dönüşümü her n pozitif tam sayısı ve $k \in [0,1)$ olduğunda

her $x, y \in X$ için $d(T^n x, T^n y) \preccurlyeq kd(x, y)$

şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.2.1 den T^n, x^* gibi bir tek sabit noktaya sahiptir. Fakat

$$T^n(Tx^*) = T(T^n x^*) = Tx^*$$

olur. Bu durumda Tx^* da T^n nin bir sabit noktasıdır. Buradan $Tx^* = x^*$ olup x^*, T nin bir sabit noktası olur.

Diğer taraftan T nin sabit noktası aynı zamanda T^n nin de bir sabit noktası olacağından T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.2.2. Teorem: (X, d) dizisel kompakt koni metrik uzay ve P bir regüler koni olsun. $T: X \to X$ büzülebilir dönüşüm, yani $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \prec d(x, y)$ olsun. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir (6).

İspat: $x_0 \in X$ seçilsin ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0, \dots$$

şeklinde $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım. Eğer bazı n ler için $x_{n+1} = x_n$ sağlanıyorsa x_n, T nin bir sabit noktası olur. Biz bütün n ler için $x_{n+1} \neq x_n$ olduğunu kabul edelim ve $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ diyelim. Buradan

$d_{n+1} = d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(Tx_n, Tx_{n+1}) \prec d(x_n, x_{n+1}) = d_n$

elde edilir. Bu durumda d_n, θ ile alttan sınırlı ve azalan bir dizidir. P regüler olduğundan $n \to \infty$ için $d_n \to d^*$ olacak şekilde $d^* \in E$ vardır. X in dizisel kompaktlığından, $i \to \infty$ için $x_{n_i} \to x^* \in X$ olacak şekilde $\{x_n\}$ in bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. Buradan

$d(Tx_{n_i}, Tx^*) \preccurlyeq d(x_{n_i}, x^*)$, $i = 1,2, \dots$

ve böylece

$i \to \infty$ için $\|d(Tx_{n_i}, Tx^*)\| \leq K\|d(x_{n_i}, x^*)\| \to 0$ olur.

Bu durumda $i \to \infty$ için $Tx_{n_i} \to Tx^*$ olur. Benzer olarak $i \to \infty$ için $T^2x_{n_i} \to T^2x^*$ dır. O halde $i \to \infty$ için

$d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) \to d(Tx^*, x^*)$ ve $d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) \to d(T^2x^*, Tx^*)$

elde edilir. Buradan $d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) = d_{n_i} \to d^* = d(Tx^*, x^*)$ olduğu açıktır. Şimdi $Tx^* = x^*$ olduğunu gösterelim. Eğer $Tx^* \neq x^*$ ise $d^* \neq \theta$ dır. Böylece

$d^* = \lim_{i\to\infty} d_{n_i+1} = \lim_{i\to\infty} d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) = d(T^2x^*, Tx^*) \prec d(Tx^*, x^*) = d^*$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $Tx^* = x^*$ ve x^*, T nin bir sabit noktası olur. Sabit noktanın tekliği de açıktır.

3.2.3. Teorem: (X, d) bir tam koni metrik uzay ve P, K normal sabiti ile bir koni olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0, \frac{1}{2})$ olduğunda her $x, y \in X$ için

$d(Tx, Ty) \preccurlyeq k(d(Tx, x) + d(Ty, y))$

şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar (6).

İspat: $x_0 \in X$ seçilsin ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots , x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0, \dots$$

şeklinde $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \preccurlyeq k\big(d(Tx_n, x_n) + d(Tx_{n-1}, x_{n-1})\big) \\ &= k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})) \end{aligned}$$

elde edilir. $h = \frac{k}{1-k} < 1$ denilirse $d(x_{n+1}, x_n) \preccurlyeq h\, d(x_n, x_{n-1})$ bulunur.

$n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\preccurlyeq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\preccurlyeq (h^{n-1} + h^{n-2} + \cdots + h^m) d(x_1, x_0) \\ &\preccurlyeq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{h^m}{1-h} K \|d(x_1, x_0)\|$ olur.

$n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to \theta$ bulunur. Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından $n \to \infty$ için $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. Şimdi

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\preccurlyeq d(Tx_n, T x^*) + d(Tx_n, x^*) \\ &\preccurlyeq k\big(d(Tx_n, x_n) + d(Tx^*, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\preccurlyeq \frac{1}{1-k} \big(kd(Tx_n, x_n) + d(x_{n+1}, x^*)\big) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K \frac{1}{1-k} (k\|d(x_{n+1}, x_n)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0$$

elde edilir. Böylece $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ olur. Bu $Tx^* = x^*$ demektir. Bu durumda x^*, T nin sabit noktasıdır.

Eğer y^*, T nin diğer bir sabit noktası ise

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \preccurlyeq k\big(d(Tx^*, x^*) + d(Ty^*, y^*)\big) = \theta$$

bulunur. Bu durumda $x^* = y^*$ elde edilir ki bu T nin sabit noktasını tekliğini gösterir.

3.2.4. Teorem: (X, d) bir tam koni metrik uzay ve P, K normal sabiti ile bir koni olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0, \frac{1}{2})$ olduğunda her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq k\big(d(Tx, y) + d(Ty, x)\big)$ şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar (6).

İspat: $x_0 \in X$ seçilsin ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \dots , x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1} x_0, \dots$$

şeklinde $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) &\preccurlyeq k\big(d(Tx_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)\big) \\ &\preccurlyeq k\big(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})\big) \end{aligned}$$

elde edilir. $h = \frac{k}{1-k} < 1$ olsun. O halde $d(x_{n+1}, x_n) \preccurlyeq hd(x_n, x_{n-1})$ bulunur.

$n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\preccurlyeq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\preccurlyeq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$d(x_n, x_m) \preccurlyeq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0)$

elde edilir. Buradan

$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{h^m}{1-h} K \|d(x_1, x_0)\|$

olur. $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to \theta$ bulunur. Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından $n \to \infty$ için $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. Şimdi

$$
\begin{aligned}
d(Tx^*, x^*) &\preccurlyeq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \\
&\preccurlyeq k\big(d(Tx^*, x_n) + d(Tx_n, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*) \\
&\preccurlyeq k\big(d(Tx^*, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*) \\
&\preccurlyeq \frac{1}{1-k}\Big(k\big(d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)\big) + d(x_{n+1}, x^*)\Big)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K \frac{1}{1-k} (k(\|d(x_n, x^*)\| + \|(x_{n+1}, x^*)\|) + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0$

elde edilir. Böylece $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ bulunur. Bu $Tx^* = x^*$ demektir. Bu durumda x^*, T nin sabit noktasıdır.

Diğer taraftan y^* da T nin bir sabit noktası ise

$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \preccurlyeq \; k\big(d(Tx^*, y^*) + d(Ty^*, x^*)\big) = 2kd(x^*, y^*)$

bulunur. Böylece $d(x^*, y^*) = \theta,\; x^* = y^*$ elde edilir ki bu T nin sabit noktasının tekliğini gösterir.

Yukarıdaki teoremlerdeki normallik şartı kaldırılabilir. Bu durumda aşağıdaki teoremler elde edilebilir.

3.2.5. Teorem: (X,d) bir tam koni metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0,1)$ olduğunda her $x, y \in X$ için $d(Tx,Ty) \preccurlyeq kd(x,y)$ büzülme şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar (1).

İspat: Teorem 3.2.1. in ispatından $n > m$ için

$$d(x_n, x_m) \preccurlyeq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0)$$

olduğu görülebilir.

$\theta \ll c$ alınsın. Bu durumda $c \in intP$ dir. Yani θ nın bir komşuluğunda $N_\delta(\theta) = \{y \in E \,|\|y\| < \delta\}$ olmak üzere $c + N_\delta(\theta) \subseteq P$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçilebilir.

Her $m \geq N_1$ için $\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \in N_\delta(\theta)$ şartını sağlayan bir $N_1 \in \mathbb{N}$ seçilsin. Buradan her $m \geq N_1$ için

$$\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c$$

olur. Böylece her $n > N_1$ için

$$d(x_n, x_m) \preccurlyeq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c$$

elde edilir. Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından $n \to \infty$ için $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır.

Her $n \geq N_2$ için $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{2}$ şartını sağlayan bir $N_2 \in \mathbb{N}$ seçilsin. Buradan her $n \geq N_2$ için

$$d(Tx^*, x^*) \preccurlyeq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*)$$

$d(Tx^*, x^*) \preccurlyeq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)$

$\preccurlyeq d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$

olur. Böylece her $m \geq 1$ için $d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$ olur. Bu durumda her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P$ olur. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to \theta$ ve P kapalı olduğundan $-d(Tx^*, x^*) \in P$ dir. Fakat $d(Tx^*, x^*) \in P$ dir. Bu yüzden $d(Tx^*, x^*) = \theta$ ve $Tx^* = x^*$ olur.

3.2.3. Sonuç: (X, d) bir tam koni metrik uzay olsun. $x_0 \in X$ ve $0 \ll c$ olmak üzere $B(x_0, c) = \{x \in X \,|d(x_0, x) \ll c\}$ olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $d(Tx_0, x_0) \preccurlyeq (1-k)c$ ile birlikte bir büzülme dönüşümü olsun. Yani $k \in [0,1)$ ve her $x, y \in B(x_0, c)$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq kd(x, y)$ olsun. Bu durumda T, $B(x_0, c)$ içinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.2.4. Sonuç: (X, d) bir tam koni metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşümü her n pozitif tam sayısı için $k \in [0,1)$ olduğunda

her $x, y \in X$ için $d(T^n x, T^n y) \preccurlyeq kd(x, y)$

şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahip olur.

3.2.6. Teorem: (X, d) bir tam koni metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0, \frac{1}{2})$ olduğunda her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq k(d(Tx, x) + d(Ty, y))$ şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar (1).

3.2.7. Teorem: (X, d) bir tam koni metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0, \frac{1}{2})$ olduğunda her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq k\big(d(Tx, y) + d(Ty, x)\big)$ şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar (1).

3.2.8. Teorem: (X,d) bir tam koni metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $k, l \in [0,1)$ olduğunda her $x, y \in X$ için $d(Tx,Ty) \preccurlyeq kd(x,y) + ld(y,Tx)$ şartını sağlasın. Bu durumda T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $k + l < 1$ olduğunda T nin sabit noktası tektir (1).

İspat: $x_0 \in X$ seçilsin ve

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0, \dots$$

şeklinde $\{x_n\}$ dizisini oluşturalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\preccurlyeq k\big(d(x_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)\big) \\ &= kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\preccurlyeq k^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Her $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\preccurlyeq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\preccurlyeq (k^{n-1} + k^{n-2} + \cdots + k^m) d(x_1, x_0) \\ &\preccurlyeq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\theta \ll c$ alınsın. Buradan her $m \geq N_1$ için $\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \ll c$ şartını sağlayan bir $N_1 \in \mathbb{N}$ seçilsin. Böylece her $n > m \geq N_1$ için $d(x_n, x_m) \ll c$ elde edilir. Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından $n \to \infty$ için $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır.

Her $n \geq N_2$ için $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{3}$ şartını sağlayan bir $N_2 \in \mathbb{N}$ seçilsin. Bu durumda $n > N_2$ için

$$
\begin{aligned}
d(Tx^*, x^*) &\preccurlyeq d(x_n, Tx^*) + d(x_n, x^*) \\
&= d(Tx_{n-1}, Tx^*) + d(x_n, x^*), \\
&\preccurlyeq kd(x_{n-1}, x^*) + ld(Tx_{n-1}, x^*) + d(x_n, x^*) \\
&\preccurlyeq d(x_{n-1}, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_n, x^*)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c$$

olur. Böylece her $m \geq 1$ için $d(Tx^*, x^*) \ll \frac{c}{m}$ olur. Dolayısıyla her $m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(Tx^*, x^*) \in P$ olur. $m \to \infty$ için $\frac{c}{m} \to \theta$ ve P kapalı olduğundan $-d(Tx^*, x^*) \in P$ dir. Fakat $d(Tx^*, x^*) \in P$ dir. Bu yüzden $d(Tx^*, x^*) = \theta$ ve böylece $Tx^* = x^*$ olur.

y^*, T nin diğer bir sabit noktası ve $k + l < 1$ olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
&d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \preccurlyeq kd(x^*, y^*) + ld(Tx^*, y^*) \\
&d(x^*, y^*) = (k + l)d(x^*, y^*)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu bir çelişki olacağından $d(x^*, y^*) = \theta$ olup $x^* = y^*$ olmalıdır. Bundan dolayı $k + l < 1$ olduğunda T nin sabit noktası tektir.

3.3. Sıralı Koni Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

3.3.1. Teorem: $(X, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı cümle, d, X üzerinde (X, d) ikilisi tam olacak şekilde bir koni metrik ve P, K normal sabiti ile bir koni olsun. $T: X \to X$ dönüşümü sürekli ve $\sqsubseteq$ sıralamasına göre azalmayan olsun. Eğer

i. $y \sqsubseteq x$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq kd(x, y)$ şartını sağlayan $k \in [0,1)$ var ve
ii. Bir $x_0 \in X$ için $x_0 \sqsubseteq Tx_0$

ise T bir $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir (21).

İspat: Eğer $x_0 = Tx_0$ ise ispat tamamlanır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $x_0 \sqsubseteq Tx_0$ ve T azalmayan olduğundan tümevarım ile

$$x_0 \sqsubseteq Tx_0 \sqsubseteq T^2x_0 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq T^nx_0 \sqsubseteq T^{n+1}x_0 \sqsubseteq \cdots$$

elde edilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^{n+1}x_0, T^nx_0) \preccurlyeq k^n d(Tx_0, x_0) \tag{3.3.1}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten; $x_0 \sqsubseteq Tx_0$ olduğundan büzülme şartı kullanılırsa

$$d(T^2x_0, Tx_0) \preccurlyeq kd(Tx_0, x_0)$$

elde edilir ki bu $n = 1$ için (3.3.1) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. (3.3.1) eşitsizliğinin n için sağlandığını kabul edelim. $T^nx_0 \sqsubseteq T^{n+1}x_0$ olduğundan büzülme şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(T^{n+2}x_0, T^{n+1}x_0) &= d(TT^{n+1}x_0, TT^nx_0) \\ &\preccurlyeq kd(T^{n+1}x_0, T^nx_0) \\ &\preccurlyeq kk^nd(Tx_0, x_0) \\ &= k^{n+1}d(Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu (3.3.1) eşitsizliğinin $n+1$ için doğru olduğunu gösterir.

$m > n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(T^m x_0, T^n x_0) &\preccurlyeq d(T^m x_0, T^{m-1} x_0) + \cdots + d(T^{n+1} x_0, T^n x_0) \\ &\preccurlyeq (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n) d(T x_0, x_0) \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(T x_0, x_0) \\ &\preccurlyeq \frac{k^n}{1-k} d(T x_0, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|d(T^m x_0, T^n x_0)\| \leq \frac{k^n}{1-k} K \|d(T x_0, x_0)\|$$

bulunur. $n, m \to \infty$ için $d(T^m x_0, T^n x_0) \to \theta$ olur. Bu durumda $\{T^n x_0\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından $n \to \infty$ için $T^n x_0 \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. Sonuçta $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$ olur. T nin sürekliliğinden ise

$$x^* = \lim_{n\to\infty} T^{n+1} x_0 = \lim_{n\to\infty} T T^n x_0 = T \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = T x^*$$

elde edilir. Böylece x^*, T nin bir sabit noktasıdır. Şimdi aşağıdaki örneği inceleyelim.

3.3.1. Örnek: $E = \mathbb{R}^2$ Öklid uzayı ve $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ olsun. P, E de normal bir konidir. $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cup \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ olmak üzere X üzerinde

her $(x, y), (z, w) \in X$ için $(x, y) \sqsubseteq (z, w) \Leftrightarrow \{x \lesssim z \text{ ve } y \lesssim w\}$

şeklinde tanımlanan $\sqsubseteq$ bağıntısını göz önüne alalım.

Burada $\mathbb{R}$ deki $\lesssim$ bağıntısı

$$x \lesssim y \Leftrightarrow \{(x = y) veya \ (x, y \in [0,1] \ için \ x \leq y) \}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $\sqsubseteq$ ve $\lesssim$ bağıntılarının birer kısmi sıralama bağıntısı olduğu gösterilebilir. $d: X \times X \to E$ dönüşümü

$$d\big((x,0),(y,0)\big) = (\tfrac{4}{3}|x-y|, |x-y|),$$
$$d\big((0,x),(0,y)\big) = (|x-y|, \tfrac{2}{3}|x-y|),$$
$$d\big((x,0),(0,y)\big) = d\big((0,y),(x,0)\big) = (\tfrac{4}{3}x + y, x + \tfrac{2}{3}y)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,d) bir tam koni metrik uzaydır. $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(x,0) = (0,x) \text{ ve } f(0,x) = \begin{cases} \left(2x - \frac{3}{2}, 0\right), & x > 1 \\ \left(\frac{x}{2}, 0\right), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada f dönüşümün sürekli ve $\sqsubseteq$ sıralamasına göre azalmayan olduğu görülebilir. Şimdi f nin $k = \frac{3}{4}$ için Teorem 3.3.1 in (i) şartını sağladığını gösterelim. $\sqsubseteq$ bağıntısının tanımı göz önüne alınırsa $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow y = x \ veya \ \{x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1] \ için \ y_1 \leq x_1 \ ve \ y_2 \leq x_2\}$$

olduğu açıktır. $y = x$ ise Teorem 3.3.1 in (i) şartı her $k > 0$ için sağlanır.

Şimdi $x, y \in X$ olduğundan $x = (x_1, 0)$ veya $x = (0, x_2)$ ve $y = (y_1, 0)$ veya $y = (0, y_2)$ şeklindedir. O halde $y \neq x$ ve $y \sqsubseteq x$ ise aşağıdaki dört durumdan biri gerçekleşir.

Durum 1: $x = (x_1, 0)$ ve $y = (y_1, 0)$ ise $y_1 \leq x_1$ ve $x_1, y_1 \in [0,1]$ dir. O halde

$$
\begin{aligned}
d(fx,fy) &= d\big(f(y_1,0),f(x_1,0)\big)\\
&= d\big((0,y_1),(0,x_1)\big)\\
&= \left(|y_1-x_1|,\tfrac{2}{3}|y_1-x_1|\right)\\
&= \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{4}{3}|y_1-x_1|,\tfrac{8}{9}|y_1-x_1|\right)\\
&\preccurlyeq \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{4}{3}|y_1-x_1|,|y_1-x_1|\right)\\
&\preccurlyeq \tfrac{3}{4}d\big((y_1,0),(x_1,0)\big)\\
&= \tfrac{3}{4}d(x,y)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Durum 2: $x=(0,x_2)$ ve $y=(0,y_2)$ ise $y_2 \le x_2$ ve $x_2,y_2 \in [0,1]$ dir. O halde

$$
\begin{aligned}
d(fx,fy) &= d\big(f(0,y_2),f(0,x_2)\big)\\
&= d\left(\left(\tfrac{x_2}{2},0\right),(\tfrac{y_2}{2},0)\right)\\
&= \left(\tfrac{4}{3}\left|\tfrac{y_2}{2}-\tfrac{x_2}{2}\right|,\left|\tfrac{y_2}{2}-\tfrac{x_2}{2}\right|\right)\\
&= \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{8}{9}|y_2-x_2|,\tfrac{2}{3}|y_2-x_2|\right)\\
&\preccurlyeq \tfrac{3}{4}\left(|y_2-x_2|,\tfrac{2}{3}|y_2-x_2|\right)\\
&= \tfrac{3}{4}d\big((0,y_2),(0,x_2)\big)\\
&= \tfrac{3}{4}d(x,y)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Durum 3: $x=(x_1,0)$ ve $y=(0,y_2)$ ise $y_2=0$ ve $x_1 \in [0,1]$ dir. O halde

$$
\begin{aligned}
d(fx,fy) &= d\big(f(0,0),f(x_1,0)\big)\\
&= d\big((0,0),(0,x_1)\big)\\
&= \left(x_1,\tfrac{2}{3}x_1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(fx,fy) &= \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{4}{3}x_1, \tfrac{8}{9}x_1\right) \\
&\preccurlyeq \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{4}{3}x_1, x_1\right) \\
&= \tfrac{3}{4}d\big((0,0),(x_1,0)\big) \\
&= \tfrac{3}{4}d(x,y)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Durum 4: $x = (0, x_2)$ ve $y = (y_1, 0)$ ise $y_1 = 0$ ve $x_2 \in [0,1]$ dir. O halde

$$
\begin{aligned}
d(fx,fy) &= d\big(f(0,0), f(0,x_2)\big) \\
&= d\left((0,0), (\tfrac{x_2}{2}, 0)\right) \\
&= \left(\tfrac{2}{3}x_2, \tfrac{x_2}{2}\right) \\
&= \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{8}{9}x_2, \tfrac{2}{3}x_2\right) \\
&\preccurlyeq \tfrac{3}{4}\left(x_2, \tfrac{2}{3}x_2\right) \\
&= \tfrac{3}{4}d\big((0,0),(0,x_2)\big) = \tfrac{3}{4}d(x,y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç olarak Teorem 3.3.1 in (i) şartı $k = \frac{3}{4}$ için sağlanır.

$(0,0) \sqsubseteq f(0,0)$ olduğundan (ii) şartı da sağlanır. Bu durumda Teorem 3.3.1 in bütün koşulları sağlanır. Yani Teorem 3.3.1 bu örneğe uygulanabilir. Ancak d, X üzerinde Öklid metriği ise Teorem 3.1.1 in büzülme şartı sağlanmaz.

Gerçekten; $x = (1,0)$ ve $y = (0,0)$ için $d(fx,fy) = 1 = d(x,y)$ olur. Yine d burada tanımlı koni metrik olsa bile Teorem 3.2.1 in büzülme şartı sağlanmaz. Çünkü $x = (0,2)$ ve $y = (0,0)$ için

$$
\begin{aligned}
d(fx,fy) &= d\big(f(0,2), f(0,0)\big) \\
&= d\left(\left(\tfrac{5}{2}, 0\right), (0,0)\right)
\end{aligned}
$$

$$d(fx, fy) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{2}\right)$$
$$\preccurlyeq k\left(2, \frac{4}{3}\right)$$
$$= kd\big((0,2), (0,0)\big)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ yoktur.

3.3.2. Teorem: $(X, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı cümle olsun. d, X üzerinde (X, d) tam olacak şekilde bir koni metrik ve P, K normal sabiti ile bir normal koni olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $\sqsubseteq$ sıralamasına göre azalmayan olsun. Eğer

i. $y \sqsubseteq x$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq kd(x, y)$ şartını sağlayan $k \in [0,1)$ var,
ii. $x_0 \sqsubseteq Tx_0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in X$ var ve
iii. $\{x_n\}$ artan ve $x \in X$e yakınsayan bir dizi iken her n için $x_n \sqsubseteq x$

şartları sağlanıyorsa T bir $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir (21).

İspat: Teorem 3.3.1 in ispatında olduğu gibi $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$ olduğu gösterilebilir. Böylece teoremin (iii) şartından her n için $T^n x_0 \sqsubseteq x^*$ dir. O halde büzülme şartı kullanılırsa

$$d(Tx^*, x^*) \preccurlyeq d(Tx^*, T^{n+1}x_0) + d(T^{n+1}x_0, x^*)$$
$$\preccurlyeq kd(x^*, T^n x_0) + d(T^{n+1}x_0, x^*)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $Tx^* = x^*$ olarak bulunur.

Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 deki büzülme şartları daha da genişletilerek aşağıdaki teoremler elde edilebilir. Bu teoremlerde normallik şartının da kaldırıldığına dikkat edilmelidir.

3.3.3. Teorem: $(X, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı cümle, d, X üzerinde (X, d) ikilisi tam olacak şekilde bir koni metrik olsun. $T: X \to X$ dönüşümü sürekli ve $\sqsubseteq$ sıralamasına göre azalmayan olsun. Eğer

i. $y \sqsubseteq x$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq \alpha d(x, y) + \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$ şartını sağlayan $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ var ve

ii. Bir $x_0 \in X$ için $x_0 \sqsubseteq Tx_0$

ise T bir $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir (22).

İspat: Eğer $x_0 = Tx_0$ ise ispat tamamlanır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $x_0 \sqsubseteq Tx_0$ ve T azalmayan olduğundan tümevarım ile

$$x_0 \sqsubseteq Tx_0 \sqsubseteq T^2x_0 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq T^n x_0 \sqsubseteq T^{n+1}x_0 \sqsubseteq \cdots$$

elde edilir. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \preccurlyeq \alpha d(T^n x_0, T^{n-1}x_0) + \beta[d(T^n x_0, T^{n+1}x_0) + d(T^{n-1}x_0, T^n x_0)] + \gamma d(T^{n-1}x_0, T^{n+1}x_0)$$

$$d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \preccurlyeq \alpha d(T^n x_0, T^{n-1}x_0) + \beta[d(T^n x_0, T^{n+1}x_0) + d(T^{n-1}x_0, T^n x_0)] + \gamma[d(T^{n-1}x_0, T^n x_0), d(T^n x_0, T^{n+1}x_0)]$$

bulunur. Buradan her $n \geq 1$ için

$$d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \preccurlyeq \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}\right) d(T^n x_0, T^{n-1}x_0)$$

dır. Bu bağıntının tekrarlanmasıyla $\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}\right) = k$ denirse

$$d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \preccurlyeq k^n d(Tx_0, x_0)$$

elde edilir. $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(T^m x_0, T^n x_0) &\preccurlyeq d(T^m x_0, T^{m-1}x_0) + d(T^{m-1}x_0, T^{m-2}x_0) + \cdots + d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \\ &\preccurlyeq (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n) d(Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

$$d(T^m x_0, T^n x_0) \preccurlyeq \frac{k^n}{1-k} d(Tx_0, x_0)$$

bulunur. Böylece

$$d(T^m x_0, T^n x_0) \preccurlyeq \frac{k^n}{1-k} d(Tx_0, x_0)$$

bulunur.

$\{T^n x_0\}$ dizisinin (X, d) uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\theta \ll c$ alınsın. Bu durumda $c \in intP$ dir. Böylece θ nın bir komşuluğunda $N_\delta(\theta) = \{y \in E \,|\, \|y\| < \delta\}$ olmak üzere $c + N_\delta(\theta) \subseteq int\,P$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçilebilir. N_1 doğal sayısını

$$\left\| -\frac{k^{N_1}}{1-k} d(Tx_0, x_0) \right\| < \delta$$

olarak seçilsin. Buradan her $n \geq N_1$ için $-\frac{k^{N_1}}{1-k} d(Tx_0, x_0) \in N_\delta(\theta)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$c - \frac{k^{N_1}}{1-k} d(Tx_0, x_0) \in c + N_\delta(\theta) \subseteq int\,P$$

bulunur. Bu ise her $n \geq N_1$ için $\frac{k^n}{1-k} d(Tx_0, x_0) \ll c$ elde edilebileceğini gösterir. Bu nedenle her $m > n \geq N_1$ için

$$d(T^m x_0, T^n x_0) \preccurlyeq \frac{k^n}{1-k} d(Tx_0, x_0) \ll c$$

ve böylece $d(T^m x_0, T^n x_0) \ll c$ bulunur. Bu durumda $\{T^n x_0\}$ dizisi (X, d) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam bir koni metrik uzay olduğundan $n \to \infty$ için $T^n x_0 \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır.

Son olarak T nin sürekliliğinden $T(T^n x_0) = T^{n+1} x_0 \to x^*$ elde edilir. Buradan $Tx^* = x^*$ elde edilir.

Bu teoremlerdeki süreklilik şartının yerine bir şart eklenirse aşağıdaki teorem ortaya çıkar.

3.3.4. Teorem: $(X, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı cümle, d, X üzerinde (X, d) ikilisi tam olacak şekilde bir koni metrik olsun. $T: X \to X$ dönüşümü $\sqsubseteq$ sıralamasına göre azalmayan olsun. Eğer

i. $y \sqsubseteq x$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ için $d(Tx, Ty) \preccurlyeq \alpha d(x, y) + \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)] + \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$ şartını sağlayan $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ var,
ii. Bir $x_0 \in X$ için $x_0 \sqsubseteq Tx_0$ ve
iii. Eğer $\{x_n\}$ artan ve $x \in X$e yakınsayan bir dizi iken her n için $x_n \sqsubseteq x$

şartları sağlanıyorsa T bir $x^* \in X$ sabit noktasına sahiptir (22).

İspat: Eğer Teorem 3.3.3 ün ispatında $x_n = T^n x_0$ alınırsa

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq x_{n+1} \sqsubseteq \cdots$$

şeklinde $\{x_n\}$ artan dizisi elde edilir. Ayrıca $x_n \to x^*$ elde edilir. (iii) şartının kullanılmasıyla her n için $x_n \sqsubseteq x^*$ sağlanır. Böylece (i) şartı kullanılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
d(x_n, Tx_n) &= d(x_n, x_{n+1}) \preccurlyeq d(x_n, x^*) + d(x^*, x_{n+1}) \\
d(x^*, Tx^*) &\preccurlyeq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) \\
&= d(x^*, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx^*) \\
d(x_n, Tx^*) &\preccurlyeq d(x_n, x^*) + d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) \\
&= d(x_n, x^*) + d(x^*, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx^*)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $d(x^*, Tx_n) = d(x^*, x_{n+1})$ bulunur. Bu durumda

$$(1-\beta-\gamma)d(Tx_n, Tx^*) \preccurlyeq (\alpha+\beta+\gamma)d(x_n, x^*) + (2\beta+2\gamma)d(x_{n+1}, x^*)$$

$$d(Tx_n, Tx^*) \preccurlyeq \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\beta-\gamma)}d(x_n, x^*) + \frac{(2\beta+2\gamma)}{(1-\beta-\gamma)}d(x_{n+1}, x^*)$$

olur. $\theta \ll c$ alınsın. Böylece $n \to \infty$ için $x_n \to x^*$ ve her $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{2}\frac{(1-\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)} \text{ ve } d(x_{n+1}, x^*) \ll \frac{c}{2}\frac{(1-\beta-\gamma)}{(2\beta+2\gamma)}$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için $d(Tx_n, Tx^*) \ll c$ elde edilir. Böylece $Tx_n \to Tx^*$bulunur. O halde $x_{n+1} \to Tx^*$ olup $Tx^* = x^*$ olur.

4. SONUÇLAR

Sıralı metrik uzayı üzerinde (5) de elde edilen sabit nokta sonuçları ile (6) daki koni metrik uzay üzerinde elde edilen sabit nokta sonuçlarının ana fikirleri kullanılarak sıralı koni metrik uzay üzerinde bazı orijinal sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar (16) ve (22) de olduğu gibi bazı ileri çalışmalar için kullanılabilmektedir.

KAYNAKLAR

(1) Rezapour, Sh., Hamlbarani, R., Some notes on the paper cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 345, 719–724, 2008.

(2) Agarwal, R.P., El-Gebeily, M.A., O’Regan, D., Generalized contractions in partially ordered metric spaces, Appl. Anal., 87, 109–116, 2008.

(3) Nieto, J.J., Lopez, R.R., Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Acta Math. Sinica Eng. Series, 23, 2205–2212, 2007.

(4) O’Regan, D., Petrusel, A., Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 341, 1241–1252, 2008.

(5) Ran, A.C.M., Reurings, M.C.B, A fixed point theorem in partially ordered sets and some application to matrix equations, Proc. Amer. Math. Soc., 132, 1435–1443, 2004.

(6) Huang, L.G., Zhang,H., Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 332, 1468–1476, 2007.

(7) Deimling, K., Nonlinear Functional Analysis. 217-253. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.

(8) Chatterjea, S.K., Fixed point theorems, C.R. Acad Bulgare Sci., 25, 727-730, 1972.

(9) Nieto, J.J., Lopez, R.R., Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equation, Order, 22, 223–239, 2005.

(10) Abbas, M., Jungck, G., Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces. J. Math. Anal. Appl., 341, 416-420, 2008.

(11) Abbas, M., Rhoades, B.E., Fixed and periodic point results in cone metric spaces. Appl. Math. Lett., 22, 511–515, 2008.

(12) Azam, A., Arshad, M., Beg, I., Common fixed points of two maps in cone metric spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo, 57, 433–441, 2008.

(13) Di Bari, C., Vetro, P.,ϕ-pairs and common fixed points in cone metric spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo, 57, 279–285, 2008.

(14) Ilić, D., Rakočević, V., Common fixed points for maps on conemetric space, J.Math.Anal. Appl., 341, 876–882, 2008.

(15) Ilić, D., Rakočević, V., Quasi-conraction on cone metric spaces, Appl. Math. Lett., 22, 728–731, 2009.

(16) Kadelburg, Z. , Pavlovic, M, Radenovic, S. , Common fixed point theorems for ordered contractions and quasicontractions in ordered cone metric spaces, Comput. Math. Applications,59, 3148-3159, 2010.

(17) Turkoglu, D., Abuloha, M., Abdeljawad, T., KKM mappings in cone metric spaces and some fixed point theorems, Nonlinear Anal. 72, 348-353, 2010.

(18) Turkoglu, D., M, Abuloha, Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings, Acta Math. Sinica Eng Series, 26, 489-496, 2010

(19) Vetro, P., Common fixed points in cone metric spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo, 56, 464–468, 2007.

(20) Wardowski, D., Endpoints and fixed points of set-valued contractions in conemetric spaces, Nonlinear Anal., 71, 512–516, 2009.

(21) Altun, İ. and Durmaz, G., Some fixed point theorems on ordered cone metric spaces, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 58, 319-325, 2009.

(22) Altun, İ., Damjanovic, B. and Djoric, D., Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces, Appl. Math. Lett., 23, 310-316, 2010.

(23) Kannan, R., Some results on fixed points, Bull Calcutta Math. Soc., 10, 71-76, 1968.