KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU ÖKLİD VE 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYLARINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNE

Seda KIZILIRMAK

NİSAN 2010

Matematik Anabilim Dalı Seda KIZILIRMAK tarafından hazırlanan 3-BOYUTLU ÖKLİD VE 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYLARINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNE adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Kazım İLARSLAN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN	____________________
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Kazım İLARSLAN	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	____________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Burak BİRGÖREN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

3-BOYUTLU ÖKLİD VE 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYLARINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNE

KIZILIRMAK, Seda
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Doç. Dr. Kazım İLARSLAN

Nisan 2010, 76 sayfa

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde ilk olarak Öklid ve yarı-Öklidyen uzaylar tanıtılmış daha sonra Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayında yüzeyler ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi için gerekli kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Öklid 3-uzayında Gauss dönüşümü 1-tipli olan dönel yüzeyler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Minkowski 3-uzayında Gauss dönüşümü 1-tipli olan dönel yüzeyler incelenmiştir.

Beşinci bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Öklid uzayı, Minkowski uzayı, Dönel yüzey, Gauss Dönüşümü 1-tipli yüzey

ABSTRACT

ON ROTATION SURFACES WITH 1-TYPE GAUSS MAP IN
EUCLIDEAN 3-SPACE AND MINKOWSKI 3-SPACE

KIZILIRMAK, Seda
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

April 2010, 76 pages

This thesis consist of five sections. The first section is reserved for introduction.

In the second section, Firstly we introduce the notion of Euclidean space and semi-Euclidean space. Then we give some necessary concepts related with the geometry of surfaces in Euclidean 3-space and Minkowski 3-space.

In the third section, the rotation surfaces with 1-type gauss map are investigated in Euclidean 3-space.

In the fourth section, the rotation surfaces with 1-type gauss map are investigated in Minkowski 3-space.

The fifth section is reserved for discussion and conclusion.

Key words: Euclidean space, Minkowski space, Rotation surface, Surface with 1-type Gauss map

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Kazım İLARSLAN'a, yardımlarından dolayı sevgili arkadaşım Ayhatun SEVİL'e ve son olarak bana birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen Ailem'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

α'	α eğrisinin hız vektörü
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_1^n$	n-boyutlu Lorentz uzayı (Minkowski n-uzayı)
$\mathbb{R}_1^3$	3-boyutlu Lorentz uzayı (Minkowski 3-uzayı)
$\mathbb{R}_\nu^n$	n-boyutlı Yarı-Öklidyen uzay
G	Gauss Dönüşümü
H_0^2	Hiperbolik birim küre (Hiperbolik uzay)
Δ	Laplace operatörü
$\langle\ \rangle_L$ (veya $\bullet_L$)	Lorentz anlamında iç çarpım
$\Vert\ \Vert_L$	Lorentz anlamında norm
$\wedge_L$ (veya $\times_L$)	Lorentz anlamında vektörel çarpım
S_1^2	Lorentz birim küresi
$\langle\ \rangle$	Öklid iç çarpım
$\Vert\ \Vert$	Norm
$\times$	Vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Öklid uzayında veya yarı-Öklid uzayında sonlu tip alt manifold kavramı 1970'lerin sonlarında Chen tarafından tanımlanmış ve bu kavram alt manifoldların sınıflandırılmasında ve araştırılmasında önemli ve çok kullanışlı bir yöntem haline gelmiştir. Chen ve Ishikawa (1993) sonlu tip alt manifold kavramını diferensiyellenebilir dönüşümlere özellikle de alt manifoldların Gauss dönüşümlerine genişletmiştir. Böylelikle bir çok yüzey (regle yüzeyler, öteleme yüzeyleri, dönel yüzeyler, helikoid yüzeyler v.b) ve alt manifold geometrik olarak gauss dönüşümü yardımıyla sınıflandırılabilmiştir.

Öklid 3-uzayında tüm sonlu tip yüzeylerin sınıflandırılması problemi Chen tarafından ortaya konulmuştur. Çok iyi bilinmektedir ki Öklid 3-uzayında bir M yüzeyi (M nin her bir koordinat fonksiyonu) üzerinde indirgenmiş metriğe karşılık gelen Laplace operatörünün öz fonksiyonlarının sonlu bir toplamı olarak yazılabiliyorsa M yüzeyine sonlu tiplidir denir.

Minimal yüzeyler bu tip yüzeyler için bilinen en aşikar örnek olup minimal yüzeyler 1-tiplidir. Küreler, minimal yüzeyler ve dairesel silindirler bilinen sonlu tip yüzey örnekleridir. Bu anlamda dönel yüzeylerin sınıflandırılması yine Chen ve Ishikawa (1993) tarafından verilmiştir. Öklid uzayında veya Minkowski 3-uzayında yüzeylerin Gauss dönüşümleri yardımıyla sınıflandırılması son yıllarda yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayında Gauss dönüşümü 1-tipli olan dönel yüzeyler üzerine yapılan çalışmalar ele alınmıştır. Böylece yüzeylerin diferensiyel geometrisindeki önemli bir kavram için iki farklı geometride elde edilen sonuçlar göz önüne alınmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Hacısalihoğlu (2000)'nun "Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II" kitabı, Sabuncuoğlu (2004)'nun "Diferensiyel Geometri" kitabı, O'Neill (2006) adlı yazarın "Elementary Differential Geometry" kitabı, Kuhnel (2006) adlı yazarın "Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds" kitabı ve Carmo (1976) adlı yazarın "Differential Geometry of Curves and Surfaces" kitabı referanslarımız olmuştur. Ayrıca Minkowski 3-uzayı için O'Neill (1983) adlı yazarın "Semi-Riemann Geometry with applications to relativity" kitabı ve Duggal ve Bejancu (1996) adlı yazarların ise "Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications" kitabı referans oluşturmuştur.

Öklid 3-uzayında Gauss dönüşümü 1-tipli olan dönel yüzeyler hakkında bilgi almak için Dillen vd. (1990)'nin "On the Gauss map of surfaces of revolution" adlı makalesi ve Yıldız (2004)'ın "3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeylerin Gauss dönüşümlerinin bir karakterizasyonu" adlı yüksek lisans tezinden faydalanılmıştır. Minkowski 3-uzayında Gauss dönüşümü 1-tipli dönel yüzeyler hakkında bilgi almak için Altın (2000)'nın "On the Gauss map of surfaces of revolution in $\mathbb{R}_1^3$" adlı makalesi temel alınmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışması ile iki farklı metrik geometri olan Öklid 3-uzayında ve Minkowski 3-uzayında Gauss dönüşümü 1-tipli olan dönel yüzeyler ayrıntılı olarak incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid 3-Uzayı

Tanım 2.1.1. (Afin uzay)

$A \neq \varnothing$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\Psi : A \times A \to V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P,Q) \to \left(\overrightarrow{PQ}\right) \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise, A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay adı verilir.

i. $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ dir.

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır

Tanım 2.1.2. (Öklid uzayı)

A bir reel afin uzayı ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\begin{aligned} \langle \, , \rangle &: V \times V \to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\to \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{cases} X = (x_1, \cdots, x_n) \\ Y = (y_1, \cdots, y_n) \end{cases} \end{aligned}$$

Öklid iç çarpım tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır. $A = \mathbb{R}^n$ ve $V = \mathbb{R}^n$ olarak alınır ve $A = \mathbb{R}^n$ Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir. $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu standart Öklid uzayı (Öklid n-uzay) adını alır.

Özel olarak $n = 3$ alınırsa $\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayı veya Öklid 3-uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3. (Kuadratik Hiperyüzey)

$a_{ij} = a_{ji}$ ve $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

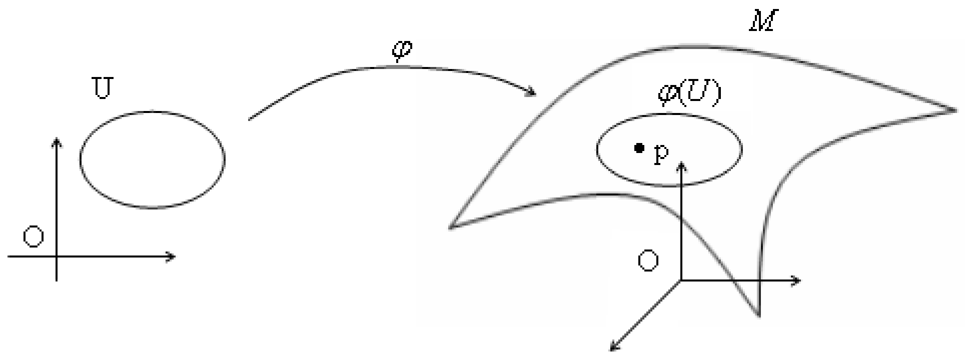
$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X \to g(X) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$$

şeklinde bir g fonksiyonu tanımlayalım. $\varphi = \{X \mid X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, g(X) = 0\}$ kümesine $\mathbb{R}^n$ uzayında bir hiperkuadrik (kuadratik hiperyüzey) denir.

Tanım 2.1.4. (Yüzey)

U, $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \to \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir basit yüzey denir.

M, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir. (Şekil 2.1.)



Şekil 2.1. Yüzey

Tanım 2.1.5. (Dönel Yüzey)

Uzayda bir $\eta : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile bir L doğrusu verilsin. $\eta(I)$ kümesinin her bir $\eta(t)$ noktasının L doğrusu çevresinde döndürülmesiyle elde edilen $C(t)$ çemberlerinin birleşimi bir yüzey oluşturur. Bu yüzeye kısaca η eğrisinin, L doğrusu çevresinde döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey adı verilir. $\eta(t)$ noktasının L doğrusu çevresinde döndürülmesiyle elde edilen çembere dönel yüzeyin $\eta(t)$ noktasından geçen bir paraleli denir. L doğrusuna dönel yüzeyin dönme ekseni denir. Dönme ekseninden geçen bir düzlemle dönel yüzeyin arakesiti olan eğriye, dönel yüzeyin bir meridyeni denir.

Özel olarak ;

i. x-ekseni etrafındaki θ radyanlık bir dönme matrisi,

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

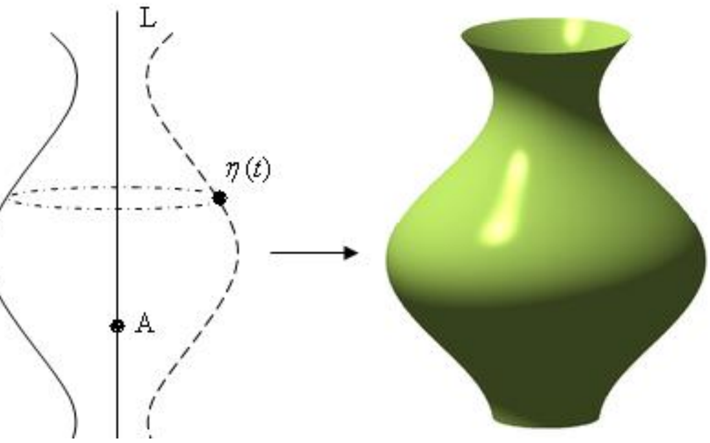
ii. y-ekseni etrafındaki θ radyanlık bir dönme matrisi,

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

iii. z-ekseni etrafındaki θ radyanlık bir dönme matrisi,

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ile verilir. (Şekil 2.2.)



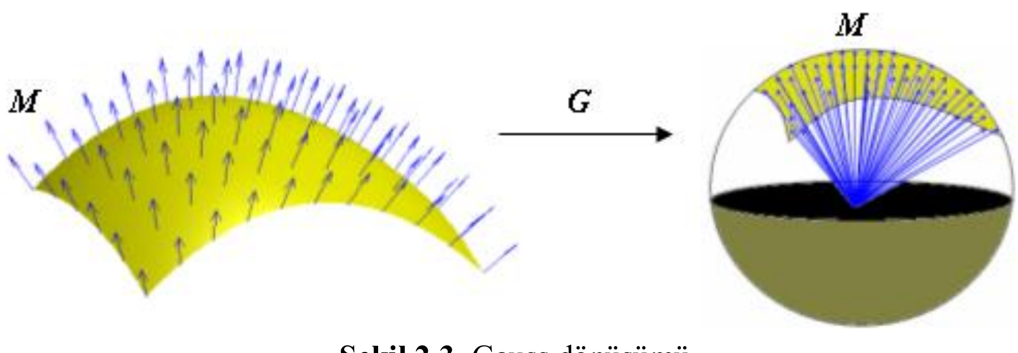
Şekil 2.2. Dönel Yüzey

Tanım 2.1.6. (Gauss Dönüşümü)

M, $\mathbb{E}^3$ 3-boyutlu Öklid uzayında bir yüzey olsun. (S^2, orjin merkezli birim küre olmak üzere) M nin her bir noktasını S^2 nin merkezine birim normal vektör taşıyan

$$G : M \to S^2 \subset \mathbb{E}^3$$
$$p \to G(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

dönüşümü M yüzeyinin Gauss dönüşümü olarak adlandırılır. (Şekil 2.3.)



Şekil 2.3. Gauss dönüşümü

Tanım 2.1.7. (İzometrik İmmersiyon)

M , $\mathbb{E}^3$de bir yüzey olsun. $F : M \to \mathbb{E}^3$ dönüşümünün türev dönüşümü F_* olmak üzere eğer F_* T_pM nin iç çarpımını koruyorsa F ye bir izometrik immersiyon adı verilir.

Tanım 2.1.8. (Laplace operatörü)

$x : M^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu n-boyutlu Riemann manifoldu M den, m-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ ye bir izometrik immersiyon olsun. x_*, x in türev dönüşümü olmak üzere

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle x_*(\alpha), x_*(\beta) \rangle$$

olur. M üzerindeki lokal koordinatlar $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ verildiğinde $\mathbb{R}^m$ den indirgenen metriği

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle, \quad (1 \le i, j \le n)$$

biçiminde tanımlayalım.

Böylece $\mathcal{G} = \det(g_{ij})$ ve $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ olmak üzere M nin $\mathbb{R}^m$ den indirgenmiş metriğe göre Laplace operatörü

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{\mathcal{G}} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \qquad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Minkowski 3-Uzayı

Tanım 2.2.1. (Simetrik bilineer form)

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için,

i. $g(u,v) = g(v,u)$ (Simetri özelliği)

ii. $g(au + bv, w) = a\, g(u, w) + b\, g(v, w)$
$g(u, av + bw) = a\, g(u, v) + b\, g(u, w)$ (Bilineerlik özelliği)

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.2.2.

V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to \mathbb{R}$ V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

i. g nin nondejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ ve bir $u \in V$ için $g(u,v) = 0$ iken $u = 0$,

ii. g nin dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ ve bir $u \in V$ için $g(u,v) = 0$ iken $u \neq 0$,

olmasıdır.

Tanım 2.2.3.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı ,

ii. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı ,

iii. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı pozitif tanımlı ,

iv. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı negatif tanımlı

denir.

Tanım 2.2.4. (Simetrik bilineer formun indeksi)

g, V üzerinde simetrik bilineer form ve W da V nin bir alt uzayı olsun. g nin W üzerinde kısıtlanışı $g_{|_W}$ olmak üzere

$$g_{|_W} : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir. ν, g nin indeksi olmak üzere $0 \leq \nu \leq boyV$ dir.

Tanım 2.2.5. (Metrik tensör)

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, bilineer nondejenere ve sabit indeksli (0, 2)-tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir.

Tanım 2.2.6. (yarı-Öklidyen metrik, yarı-Öklidyen uzay)

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı üzerinde $X = (x_1, \cdots, x_n), Y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere

$$\langle , \rangle_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(X,Y) \to \langle X,Y \rangle_L = \sum_{i=1}^{n-\nu} x_i y_i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan ν-indeksli metrik tensöre yarı-Öklidyen metrik, bu metriğin tanımlanması ile elde edilen $\left(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_L\right)$ ikilisine yarı-Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir.

Özel olarak $\mathbb{R}^n_\nu$ yarı-Öklidyen uzayında $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}^n_1$, n-boyutlu Lorentz uzayı (Minkowski n-uzay) adını alır.

Özel olarak $n=3$ ve $\nu=1$ olarak alınırsa $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Lorentz uzayı (veya Minkowski 3-uzay) adını alır.

$n=4$ ve $\nu=1$ için $\mathbb{R}_1^4$, Minkowski uzay-zaman (space-time) olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.7. (Spacelike , timelike , lightlike (null) vektör)

$X=\left(x_1,\cdots,x_n\right)\in\mathbb{R}_1^n$ olsun. Eğer

i. $\left\langle X,X\right\rangle_L>0$ veya $X=0$ ise X e spacelike vektör ,

ii. $\left\langle X,X\right\rangle_L<0$ ise X e timelike vektör ,

iii. $\left\langle X,X\right\rangle_L=0$ ve $X\neq 0$ ise X e lightlike (null) vektör denir.

Örnek 2.2.1.

$\mathbb{R}_1^3$ de $x=(1,0,0)$, $y=(0,0,1)$ ve $z=(1,0,1)$ vektörlerini ele alalım.

$\left\langle x,x\right\rangle_L=\left\langle(1,0,0),(1,0,0)\right\rangle_L=1>0$ olduğundan x vektörü spacelike vektör,

$\left\langle y,y\right\rangle_L=\left\langle(0,0,1),(0,0,1)\right\rangle_L=-1<0$ olduğundan y vektörü timelike vektör ,

$\left\langle z,z\right\rangle_L=\left\langle(1,0,1),(1,0,1)\right\rangle_L=0$ olduğundan z vektörü null (lightlike) vektördür.

Tanım 2.2.8.

V yarı-Öklidyen uzay ve $\left\langle ,\right\rangle_L$, yarı-Öklidyen metrik olmak üzere

i. $\Gamma_N=\left\{v\in\left(V-\{0\}\right):\left\langle v,v\right\rangle_L=0\right\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V nin lightlike (null) konisi ,

ii. $\Gamma_S=\left\{v\in V:\left\langle v,v\right\rangle_L\geq 0\right\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V nin spacelike konisi ,

iii. $\Gamma_T = \{ v \in (V - \{0\}) : \langle v, v \rangle_L < 0 \}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine V nin timelike konisi denir.

Örnek 2.2.2.

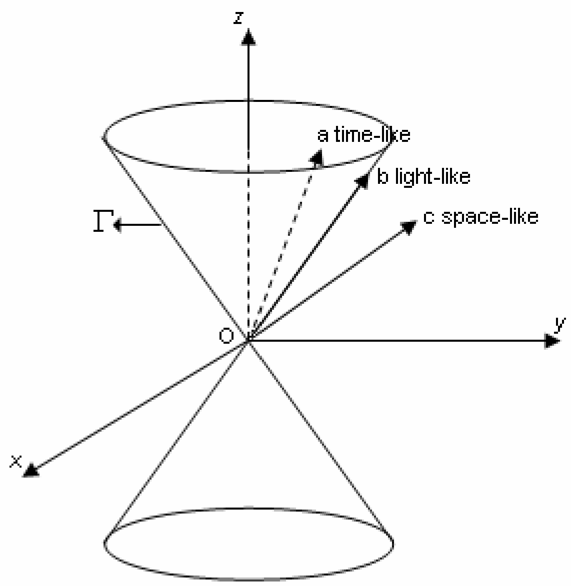
$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-uzayında lightlike, spacelike ve null vektörleri elde edelim.

$\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_L = 0 \}$ cümlesi $\mathbb{R}_1^3$ uzayının null konisi olarak adlandırılır.

Koninin denklemi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle_L &= \langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle_L \\ &= x_1 x_1 + x_2 x_2 - x_3 x_3 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

olup $\langle x, x \rangle_L = 0$ olduğundan $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ olarak elde edilir. Koni yüzeyinde yatan vektörler lightlike (null) vektörler, koninin iç bölgesindeki vektörler timelike vektörler ve koninin dış bölgesindeki vektörler spacelike vektörlerdir. (Şekil 2.4.)



Şekil 2.4. $\mathbb{R}_1^3$ de vektörler

Tanım 2.2.9.

$\mathbb{R}_1^n$, n-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $\forall X, Y \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle X, Y \rangle_L = 0$$

ise X ve Y vektörleri Lorentz anlamda diktirler denir.

Örnek 2.2.3.

$n = 2$ için $X = (1, -1)$ ve $Y = (1,1)$ vektörleri verilsin. Bu vektörler Öklid anlamında dik olmasına rağmen, Lorentz anlamında dik değildirler. Yine $X = (1, -1)$ ve $Y = (-1,1)$ vektörleri de Lorentz anlamında dik iken, Öklid anlamında dik değildirler.

Not 2.2.1. Null vektörlerin dikliği vektörlerin lineer bağımlılığı ile açıklanır.

Tanım 2.2.10.

$X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n$ için X vektörünün normu

$$\|X\|_L = \sqrt{\left|\langle X, X \rangle_L\right|}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.2.1.

$X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n$ olsun. Bu taktirde

i. $\|X\|_L > 0$ dır,

ii. $\|X\|_L = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür,

iii. X bir timelike vektör ise, $\|X\|_L^2 = -\langle X, X \rangle_L$ dir,

iv. X bir spacelike vektör ise, $\|X\|_L^2 = \langle X, X \rangle_L$ dir.

Tanım 2.2.11.

$\alpha \in \mathbb{R}_1^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. Böylece α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere

i. $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L > 0$ ise α spacelike eğri ,

ii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L < 0$ ise α timelike eğri ,

iii. $\langle \alpha', \alpha' \rangle_L = 0$ ise α null eğri

olarak adlandırılır.

Örnek 2.2.4.

$\mathbb{R}_1^3$ de bir $\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh s \right)$ eğrisini alalım. α', α eğrisinin hız vektörü olmak üzere $\alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh s \right)$ bulunur. Buradan

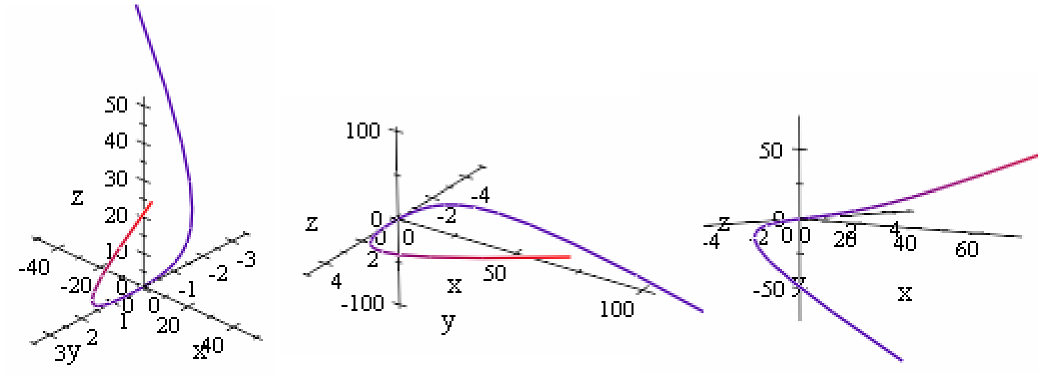
$\langle \alpha', \alpha' \rangle_L = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh s \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh s \right) \right\rangle_L = 1$ olup

$\langle \alpha', \alpha' \rangle_L > 0$ olduğundan α eğrisi bir spacelike eğridir.

Yine $\mathbb{R}_1^3$ de $\beta(s) = \left(s, \sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s \right)$ ve $\gamma(s) = (\cosh s, s, \sinh s)$ eğrilerini göz önüne alalım. β' ve γ' sırasıyla β ve γ eğrilerinin hız vektörleri olsunlar. Bu durumda,

$\langle \beta', \beta' \rangle_L = \left\langle \left(s, \sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s \right), \left(s, \sqrt{2} \cosh s, \sqrt{2} \sinh s \right) \right\rangle_L = -1 < 0$ olduğundan β eğrisi timelike eğri,

$\langle \gamma', \gamma' \rangle_L = \langle (\cosh s, s, \sinh s), (\cosh s, s, \sinh s) \rangle_L = 0$ olduğundan γ eğrisi null (lightlike) eğri olur. (Şekil 2.5.)



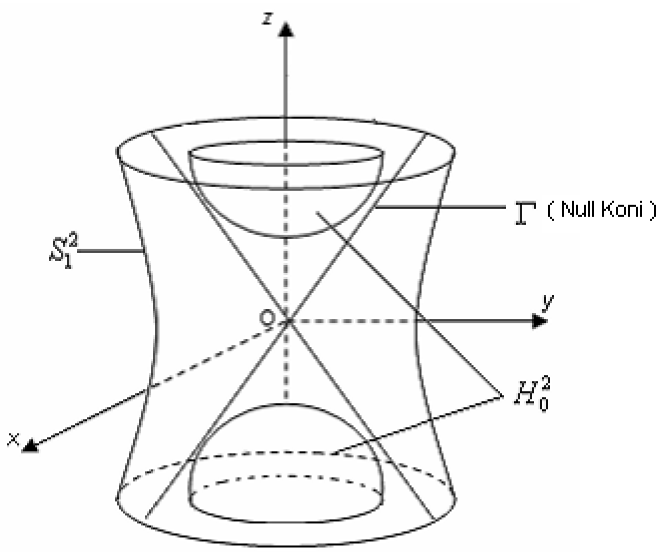
Şekil 2.5. $\mathbb{R}_1^3$ de spcelike, timelike ve null eğri

Tanım 2.2.12.

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında sırasıyla

$$S_1^2=\left\{x\in\mathbb{R}_1^3:\langle x,x\rangle_L=1\right\}\quad \text{ve}\quad H_0^2=\left\{x\in\mathbb{R}_1^3:\langle x,x\rangle_L=-1\right\}$$

cümlelerine Lorentz ve hiperbolik birim küreler denir. (Şekil 2.6.)



Şekil 2.6. $\mathbb{R}_1^3$ de birim küreler

Tanım 2.2.13. (Vektörel Çarpım)

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında iki vektör $v=(v_1,v_2,v_3)$ ve $w=(w_1,w_2,w_3)$ olmak üzere

$$\left(v_3w_2-v_2w_3\,,v_1w_3-v_3w_1\,,v_1w_2-v_2w_1\right) \tag{2.2.1}$$

vektörüne v ve w nin Lorentz anlamında vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $v\times_L w$ veya $v\wedge_L w$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\ , \ i=j\ ise\\ 0\ , \ i\neq j\ ise\end{cases} \qquad \text{ve} \qquad e_i=\left(\delta_{i1},\delta_{i2},\delta_{i3}\right)$$

olmak üzere

$$v\wedge_L w=-\det\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & -e_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}$$

veya

$$v\wedge_L w=\det\begin{bmatrix}-e_1 & -e_2 & e_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada $e_1\wedge_L e_2=e_3\,,e_2\wedge_L e_3=-e_1\,,e_3\wedge_L e_1=-e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman $e_1\wedge_L e_2=-e_3\,,e_2\wedge_L e_3=e_1\,,e_3\wedge_L e_1=e_2$ olur.

Teorem 2.2.2.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında üç vektör $u=\left(u_1,u_2,u_3\right)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$ ve $w=(w_1,w_2,w_3)$ olsun. Bu durumda

i. $\left\langle u\wedge_L v,w\right\rangle_L=-\det\left(u,v,w\right)$

ii. $\left(u\wedge_L v\right)\wedge_L w=-\left\langle u,w\right\rangle_L v+\left\langle v,w\right\rangle_L u$

iii. $\langle u \wedge_L v, u \rangle_L = 0$ ve $\langle u \wedge_L v, v \rangle_L = 0$

iv. $\langle u \wedge_L v, u \wedge_L v \rangle_L = -\langle u, u \rangle_L \langle v, v \rangle_L + \left(\langle u, v \rangle_L \right)^2$ dir.

Tanım 2.2.14. (Spacelike Yüzey)

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M yüzeyine $\mathbb{R}_1^3$ de bir spacelike yüzey denir.

Teorem 2.2.3.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir M yüzeyinin spacelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyinin normalinin timelike bir vektör alanı, yani ;

$$\langle N, N \rangle_L < 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.15. (Timelike yüzey)

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M yüzeyine $\mathbb{R}_1^3$ de bir timelike yüzey denir.

Teorem 2.2.4.

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir M yüzeyinin timelike yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyinin normalinin spacelike bir vektör alanı, yani ;

$$\langle N, N \rangle_L > 0$$

olmasıdır.

Minkowski 3-Uzayında Dönel Yüzeyler

$e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$ ve $e_3=(0,0,1)$ $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayının standart çatısı olmak üzere, $\mathbb{R}^3_1$ uzayında dönmeler üç gruba ayrılmaktadır. e_1, e_2 spacelike eksenler etrafındaki dönmeler e_3 timelike eksen etrafındaki dönmeler, $e_1 \pm e_3$, $e_2 \pm e_3$ null eksenler etrafındaki dönmeler. Bu dönmeleri aşağıdaki matrislerle karakterize edebiliriz.

i) e_1 spacelike eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh y & \sinh y \\ 0 & \sinh y & \cosh y \end{pmatrix}$$

ii) e_2 spacelike eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} \cosh y & 0 & \sinh y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh y & 0 & \cosh y \end{pmatrix}$$

iii) e_3 timelike eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iv) e_1+e_3 eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{y^2}{2} & y & \frac{y^2}{2} \\ -y & 1 & y \\ -\frac{y^2}{2} & y & 1+\frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

v) $e_1 - e_3$ eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1-\dfrac{y^2}{2} & -y & -\dfrac{y^2}{2} \\ y & 1 & y \\ \dfrac{y^2}{2} & y & 1+\dfrac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

vi) $e_2 + e_3$ eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & -y & y \\ y & 1-\dfrac{y^2}{2} & \dfrac{y^2}{2} \\ y & -\dfrac{y^2}{2} & 1+\dfrac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

vii) $e_2 - e_3$ eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & y & y \\ -y & 1-\dfrac{y^2}{2} & -\dfrac{y^2}{2} \\ y & \dfrac{y^2}{2} & 1+\dfrac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

Tanım 2.2.16. (Gauss Dönüşümü)

M, $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey, $p \in M$ ve $\mathrm{n}(p)$ *M* yüzeyinin *p* noktasındaki birim normal vektörü olsun.

M yüzeyinin Gauss dönüşümü

$$G : M \to S_1^2(1) \; veya \; H_0^2(1)$$
$$G(p) = \mathrm{n}(p)$$

olarak tanımlanır.

Eğer G, M nin değerlerini $S_1^2(1)$ de alırsa M ye Lorentz yüzeyi, $H_0^2(1)$ de alırsa M ye Riemann yüzeyi adı verilir.

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Gauss dönüşümü 1-tipinden olan $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyleri incelenecektir. Öncelikle Gauss dönüşümü 1-tipinden yüzey tanımını verelim.

Tanım 3.1. (Gauss dönüşümü 1-tipli yüzey)

$M^2 \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey ve 3×3 tipinde bir reel matris λ olmak üzere M^2 nin Gauss dönüşümü

$$\Delta G = \lambda G \tag{3.1}$$

şartını sağlıyor ise M^2 ye Gauss dönüşümü 1-tipinden olan yüzey adı verilir.

$f, g : I \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyinin standart parametrelendirmesi

$$x(t,\theta) = \big(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t) \big), \quad t \in I, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{3.2}$$

ile verilir.Dönel yüzeyler regüler olduklarından $f(t) > 0$ alınabilir. Dillen vd. (1990) tarafından Öklid 3-uzayında 1-tipli yüzeylerin sınıflandırılması aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.1. $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ bir dönel yüzey olsun. $\lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ olmak üzere eğer M^2nin Gauss dönüşümü $\Delta G = \lambda G$ şartını sağlıyor ise M^2 düzlem, küre veya dik dairesel silindirin açık bir parçasıdır.

İspat.

M^2 nin dönme ekseninin, koordinat sisteminde z-ekseni olduğunu varsayalım ve profil eğrisini γ ile gösterelim. f ve g , $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı üzerinde reel değerli fonksiyonlar olmak üzere γ eğrisinin

$$\gamma(t) = \left(f(t), 0, g(t) \right) , \ t \in I$$

ile gösterildiğini varsayabiliriz. γ nın yay parametresi ile parametrelendiğini düşünelim. Yani ;

$$\|\gamma'\|^2 = \left(f' \right)^2 + \left(g' \right)^2 = 1$$

olsun. (3.2) denkleminin sırasıyla t ve θ ya göre kısmi türevi alınırsa

$$x_t = \left(f' \cos\theta, f' \sin\theta, g' \right)$$

$$x_\theta = \left(-f \sin\theta, f \cos\theta, 0 \right)$$

elde edilir. Buradan

$$x_t \times x_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f' \cos\theta & f' \sin\theta & g' \\ -f \sin\theta & f \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-g'f \cos\theta, g'f \sin\theta, ff' \right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|x_t \times x_\theta\| = \sqrt{\left(g'f \right)^2 + \left(ff' \right)^2} = \sqrt{f^2} = f$$

bulunur. Buna göre Gauss dönüşümü

$$G(t,\theta) = \frac{x_t \times x_\theta}{\|x_t \times x_\theta\|} = \left(-g' \cos\theta, -g' \sin\theta, f' \right)$$

olarak elde edilir.

$$g_{11} = \langle x_t, x_t \rangle = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle x_t, x_\theta \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = f^2$$

olduğundan

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu durumda

$$P = \det\left(g_{ij}\right) = f^2 \ ,$$

$$\left(g^{ij}\right) = \frac{1}{f^2}\begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{f^2} \end{pmatrix}$$

dir. Böylece (2.1.1) gereği

$$\Delta = -\frac{1}{f}\left[\frac{\partial}{\partial t} f\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta} f\left(\frac{1}{f^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]$$

yani

$$\Delta = -\left[-\frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right]$$

dir. Diğer taraftan

$$\Delta G = -\left[-\frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]\left(-g'\cos\theta, -g'\sin\theta, f'\right)$$

$$= \left(\frac{f'}{f}g''\cos\theta + g'''\cos\theta - \frac{1}{f^2}g'\cos\theta, \frac{f'}{f}g''\sin\theta + g'''\sin\theta - \frac{1}{f^2}g'\sin\theta, -\frac{f'}{f}f'' - f''' \right)$$

ve

$$\lambda = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

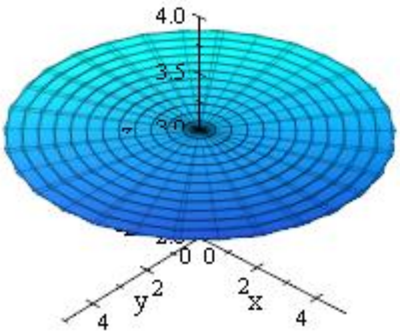
olmak üzere

$$\lambda G = \begin{bmatrix} -a_{11}g'\cos\theta - a_{12}g'\sin\theta + a_{13}f' \\ -a_{21}g'\cos\theta - a_{22}g'\sin\theta + a_{23}f' \\ -a_{31}g'\cos\theta - a_{32}g'\sin\theta + a_{33}f' \end{bmatrix}$$

dir.Böylece hipotez gereği M^2 nin Gauss dönüşümü $\Delta G = \lambda G$ şartını sağladığı kabul edilirse yukarıdaki matrisler yardımıyla

$$\left.\begin{array}{r} \left(\frac{f'}{f}g'' + g''' - \frac{1}{f^2}g'\right)\cos\theta = -a_{11}g'\cos\theta - a_{12}g'\sin\theta + a_{13}f' \\ \left(\frac{f'}{f}g'' + g''' - \frac{1}{f^2}g'\right)\sin\theta = -a_{21}g'\cos\theta - a_{22}g'\sin\theta + a_{23}f' \\ -\frac{f'}{f}f'' - f''' = -a_{31}g'\cos\theta - a_{32}g'\sin\theta + a_{33}f' \end{array}\right\} \quad (3.3)$$

denklem sistemi elde edilir. Eğer $g' = 0$ ise g fonksiyonu sabittir ve M^2 bir düzlemdir. Özel olarak (3.2) denkleminden $g(t) = 3$ ve $f(t) = t$ alınırsa $0 \le \theta \le 2\pi$ olmak üzere $X(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, 3)$ yüzeyi elde edilir.(Şekil 3.1.)



Şekil 3.1. Düzlemin açık bir bölümü

Diğer taraftan eğer $f' = 0$ ise f sabittir. Bu durumda M^2 bir dik dairesel silindirdir. $f' \neq 0$ ve $g' \neq 0$ olduğunu farz edelim. Böylece $\sin\theta$, $\cos\theta$ ve 1, θ nın lineer bağımsız fonksiyonları olduğundan (3.3) den

$$a_{12} = a_{13} = 0$$
$$a_{21} = a_{32} = 0$$
$$a_{31} = a_{32} = 0$$

elde edilir. Yani λ bir köşegen matristir. Böylece (3.3) denklem sistemi aşağıdaki eşitliklere indirgenir.

$$-\frac{f'}{f}g'' - g''' + \frac{g'}{f^2} = a_{11}g' \tag{3.4}$$

$$-\frac{f'}{f}g'' - g''' + \frac{g'}{f^2} = a_{22}g' \tag{3.5}$$

$$-\frac{f'f''}{f} - f''' = a_{33}f' \tag{3.6}$$

(3.4) ve (3.5) denklemleri $a_{11} = a_{22}$ sonucunu verir. $a_{11} = a_{22} = \delta, a_{33} = \mu$ alalım. Böylece (3.4), (3.5) ve (3.6) denklemleri düzenlendiğinde

$$f^2 g''' + ff'g'' + \left(\delta f^2 - 1\right)g' = 0 \tag{3.7}$$

$$\left(f' \right)^2 + \left(g' \right)^2 = 1 \tag{3.8}$$

ve

$$f'f'' + ff''' = -\mu ff' \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinden türev alınarak

$$f'f'' + g'g'' = 0 \tag{3.10}$$

olduğu görülür. (3.10) dan da türev alınırsa

$$\left(f'' \right)^2 + f'f''' + \left(g'' \right)^2 + g'g''' = 0 \tag{3.11}$$

bulunur. (3.10) ve (3.11) den

$$g'' = -\frac{f'f''}{g'} \qquad \text{ve} \qquad g''' = \frac{-(f'')^2 - f'f''' - (g'')^2}{g'}$$

olup bu eşitlikler (3.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$f^2 \left(\frac{-(f'')^2 - f'f''' - \left(-\frac{f'f''}{g'} \right)^2}{g'} \right) + ff' \left(-\frac{f'f''}{g'} \right) + (\delta f^2 - 1) g' = 0 \ ,$$

$$f^2 \left(\frac{-\left(f'' \right)^2 \left(g' \right)^2 - f'f''' \left(g' \right)^2 - \left(f' \right)^2 \left(f'' \right)^2}{\left(g' \right)^3} \right) - \left(-\frac{f \left(f' \right)^2 f'' \left(g' \right)^2}{\left(g' \right)^3} \right) + \frac{\left(\delta f^2 - 1 \right) \left(g' \right)^4}{\left(g' \right)^3} = 0$$

ve

$$\left(\delta f^2 - 1 \right) \left(g' \right)^4 - f \left(g' \right)^2 \left(f \left(f'' \right)^2 + ff'f''' + \left(f' \right)^2 f'' \right) - f^2 \left(f' \right)^2 \left(f'' \right)^2 = 0 \tag{3.12}$$

bulunur. (3.8) denkleminden $(g')^2 = 1 - (f')^2$ olup bu ifade (3.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\delta f^2 - 1\right)\left(1 - (f')^2\right)^2 + f\,(f')^2\left(ff'f''' + (f')^2 f'' - f''\right) - f\left(f\,(f'')^2 + ff'f'''\right) = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.9) eşitliği

$$(ff'')' = \left(-\frac{\mu}{2}\right)(f^2)'$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin integrali alındığında $k \in \mathbb{R}$ için

$$ff'' = \left(-\frac{\mu}{2}\right) f^2 + k \quad (3.14)$$

bulunur. (3.14) ikinci derece denklemi için $P(f) = f'$ denklem dönüşümünü yapalım. Böylece

$$\frac{d(P^2)}{df} = (-\mu)\, f + \frac{2k}{f}$$

veya $c \in \mathbb{R}$ için

$$P^2 = \left(-\frac{\mu}{2}\right) f^2 + 2k \ln|f| + c$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$(f')^2 = \left(-\frac{\mu}{2}\right) f^2 + 2k \ln|f| + c \quad (3.15)$$

bulunur. (3.9) ve (3.14) denklemleri kullanılarak (3.13) eşitliğinden f''' ve f'' yok edilebilir. Böylece

$$\left(\delta f^2-1\right)\left(1-(f')^2\right)^2+(f')^2\mu f^2\left(1-(f')^2\right)-\left(\left(-\frac{\mu}{2}\right)f^2+k\right)^2=0 \qquad (3.16)$$

bulunur. Sonuç olarak (3.15) eşitliği (3.16) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu^2}{4}(\delta-\mu)f^6+\left(-2k\mu(\delta-\mu)\ln|f|-(c-1)\mu(\delta-\mu)\right)f^4\\
&+\left(4k^2(\delta-\mu)\left(\ln|f|\right)^2+4k(\delta-\mu)(c-1)\ln|f|+(c-1)^2(\delta-\mu)+k\mu\right)f^2\\
&+\left(-4k^2\left(\ln|f|\right)^2-4k(c-1)\ln|f|-\left((c-1)^2+k^2\right)\right)=0
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca f^i ve $f^j\left(\ln|x|\right)^k$ $\left(0\le i,j\le 6, 0\le k\le 2\right)$ fonksiyonları lineer bağımsız ve f sabit olmayan sürekli bir fonksiyon olduğundan polinom özdeşliği kullanıldığında

$$\left.\begin{array}{c}
\mu^2(\delta-\mu)=0\\
k\mu(\delta-\mu)=0\\
\mu(c-1)(\delta-\mu)=0\\
k^2(\delta-\mu)=0\\
k(c-1)(\delta-\mu)=0\\
(c-1)^2(\delta-\mu)+k\mu=0\\
k^2=0\\
k(c-1)=0\\
k^2+(c-1)^2=0
\end{array}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem

$$k=0$$
$$c=1$$

$$\mu(\delta-\mu)=0$$

şekline indirgenebilir. Böylece $\mu\neq 0$ elde edilir. Aksi taktirde (3.15) ve (3.8) denklemlerinden $g'=0$ bulunurdu ki bu önceki kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} k&=0\\ c&=1\\ \delta&=\mu \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda (3.15) eşitliği

$$f'=\pm\sqrt{\left(-\frac{\mu}{2}\right)f^2+1}$$

halini alır. Böylece integral alınarak

$$\int\frac{df}{\sqrt{1-\left(\frac{\mu}{2}\right)f^2}}=\pm t \tag{3.17}$$

elde edilir. Buradan iki durum söz konusudur :

1.durum : $\mu>0$ olsun. Bu durumda (3.17) denkleminden $d\in\mathbb{R}$ için

$$\sqrt{\frac{2}{\mu}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}f(t)\right)=\pm(t+d)$$

elde edilir. Böylece

$$f(t)=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}(t+d)\right)$$

bulunur. Son eşitliğin türevi alındığında

$$f'(t) = \pm\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}(t+d)\right)$$

olup bu ifade (3.8) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$(g')^2 = 1 - \cos^2\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}(t+d)\right)$$

ve böylece de

$$g' = \pm\sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}(t+d)\right)$$

elde edilir. Bu taktirde son denklemden integral alınarak $e \in \mathbb{R}$ için

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}}\cos\left(\sqrt{\frac{\mu}{2}}(t+d)\right) + e$$

elde edilir. Bu durumda M^2 yüzeyi kürenin açık bir parçası olur.

2.durum : $\mu < 0$ olsun. Bu durumda (3.17) denkleminden $d \in \mathbb{R}$ için

$$\sqrt{-\frac{2}{\mu}}\arcsin h\left(\sqrt{-\frac{\mu}{2}}f(t)\right) = \pm(t+d)$$

elde edilir. Böylece

$$f(t) = \pm\sqrt{-\frac{2}{\mu}}\sinh\left(\sqrt{-\frac{\mu}{2}}(t+d)\right)$$

bulunur. Bu taktirde (3.8) denkleminden

$$\left(g'\right)^2 = -\sinh^2\left(\sqrt{-\frac{\mu}{2}}(t+d)\right)$$

elde edilir. Bu ise çözümü olmayan bir denklemdir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.1.1. $\mathbb{R}^3$ de

$$x(u,v) = \left(r\cos u\cos v, r\cos u\sin v, r\sin u\right) \tag{3.18}$$

parametrelendirilmesi ile tanımlanan $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$ küre yüzeyinin Gauss dönüşümünün 1-tipinde olduğunu gösterelim.

Çözüm:

(3.18) eşitliğinin u ve v ye göre ayrı ayrı türevleri alındığında

$$\left.\begin{aligned} x_u &= \left(-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u\right) \\ x_v &= \left(-r\cos u\sin v, r\cos u\cos v, 0\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

bulunur. Böylece

$$x_u \times x_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r\sin u\cos v & -r\sin u\sin v & r\cos u \\ -r\cos u\sin v & r\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-r^2\cos^2 u\cos v, -r^2\cos^2 u\sin v, -r^2\sin u\cos u\right)$$

ve

$$\left\| x_u \times x_v \right\| = r^2\cos u$$

olup buradan Gauss dönüşümü

$$G(u,v)=\left(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u\right) \tag{3.20}$$

olarak elde edilir. (3.20) denkleminden kısmi türevler alınarak

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial u}&=\left(\sin u\cos v,\sin u\sin v,-\cos u\right)\\
\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}&=\left(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u\right)\\
\frac{\partial G}{\partial v}&=\left(\cos u\sin v,-\cos u\cos v,0\right)\\
\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}&=\left(\cos u\cos v,\cos u\sin v,0\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.19) eşitlikleri yardımıyla

$$g_{11}=\left\langle\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial u}\right\rangle=r^2$$

$$g_{12}=g_{21}=\left\langle\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v}\right\rangle=0$$

$$g_{22}=\left\langle\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial x}{\partial v}\right\rangle=r^2\cos^2 u$$

ve buradan da

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r^2 & 0\\ 0 & r^2\cos^2 u\end{pmatrix}$$

olup böylece

$$P=\det\left(g_{ij}\right)=r^4\cos^2 u$$

$$\left(g^{ij}\right)=(g_{ij})^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{r^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{r^2\cos^2 u}\end{pmatrix}$$

bulunur. Bu bulunan ifadeler (2.1.1) denkleminde yerine yazılarak

$$\Delta=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{1}{\cos^2 u}\frac{\partial^2}{\partial v^2}-\tan u\frac{\partial}{\partial u}\right] \tag{3.22}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{1}{\cos^2 u}\frac{\partial^2}{\partial v^2}-\tan u\frac{\partial}{\partial u}\right]\left(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u\right)$$

olup (3.21) kısmi türevleri kullanılarak

$$\Delta G=\left(-\frac{2}{r^2}\cos u\cos v,-\frac{2}{r^2}\cos u\sin v,-\frac{2}{r^2}\sin u\right) \tag{3.23}$$

bulunur. Diğer taraftan ,

$$\begin{aligned}\lambda G&=\begin{bmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos u\cos v\\ -\cos u\sin v\\ -\sin u\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-\lambda_{11}\cos u\cos v-\lambda_{12}\cos u\sin v-\lambda_{13}\sin u\\ -\lambda_{21}\cos u\cos v-\lambda_{22}\cos u\sin v-\lambda_{23}\sin u\\ -\lambda_{31}\cos u\cos v-\lambda_{32}\cos u\sin v-\lambda_{33}\sin u\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.24}$$

olduğundan (3.23) ve (3.24) denklemleri yardımıyla (3.1) ifadesinden

$$\left.\begin{array}{r}-\dfrac{2}{r^2}\cos u\cos v=-\lambda_{11}\cos u\cos v-\lambda_{12}\cos u\sin v-\lambda_{13}\sin u\\ -\dfrac{2}{r^2}\cos u\sin v=-\lambda_{21}\cos u\cos v-\lambda_{22}\cos u\sin v-\lambda_{23}\sin u\\ -\dfrac{2}{r^2}\sin u=-\lambda_{31}\cos u\cos v-\lambda_{32}\cos u\sin v-\lambda_{33}\sin u\end{array}\right\} \tag{3.25}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu ifade

$$\left.\begin{array}{l}0=-\left(\lambda_{11}-\dfrac{2}{r^2}\right)\cos u\cos v-\lambda_{12}\cos u\sin v-\lambda_{13}\sin u\\ 0=-\lambda_{21}\cos u\cos v-\left(\lambda_{22}-\dfrac{2}{r^2}\right)\cos u\sin v-\lambda_{23}\sin u\\ 0=-\lambda_{31}\cos u\cos v-\lambda_{32}\cos u\sin v-\left(\lambda_{33}-\dfrac{2}{r^2}\right)\sin u\end{array}\right\}$$

şeklinde yazılabilir. $\cos u\cos v$, $\cos u\sin v$ ve $\sin u$ fonksiyonları lineer bağımsız oldukları için

$$\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{33}=\frac{2}{r^2}$$

$$\lambda_{12}=\lambda_{13}=0$$

$$\lambda_{21}=\lambda_{23}=0$$

$$\lambda_{31}=\lambda_{32}=0$$

olur. Böylece λ matrisi

$$\lambda=\begin{bmatrix}2/r^2 & 0 & 0\\ 0 & 2/r^2 & 0\\ 0 & 0 & 2/r^2\end{bmatrix}$$

biçimindedir. Sonuç olarak $\Delta G=\lambda G$, $\lambda\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ olduğundan $S^2(r)\subset\mathbb{R}^3$ küre yüzeyinin G Gauss dönüşümünün 1-tipli olduğu gösterilmiş olur.

4. 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^3 = \left(\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 - dz^2\right)$ yarı-Öklidyen uzayında $\Delta G = \lambda G$ şartını sağlayan dönel yüzeyler incelenecektir. Bu bölüm için Altın (2000) tarafından yapılmış olan çalışmalar temel referansımız olacaktır.

$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1^3$ ile tanımlı yarı-Riemann yüzeyinin bir
$\varphi(t,\theta) = \left(\varphi_1(t,\theta), \varphi_2(t,\theta), \varphi_3(t,\theta)\right)$ parametrelendirmesi verilsin.

$$E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle_L \ , \ F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle_L \ , \ G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle_L$$

olduğunu hatırlayalım.

Teorem 4.1.
$\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki dönel yüzeyler arasında, Gauss dönüşümü $\Delta G = \lambda G$ eşitliğini sağlayan yüzeyler delinmiş düzlemler, dairesel silindirler ve hiperkuadriklerden sadece birisidir.

İspat.

1. M nin dönme ekseni koordinat sisteminin z-ekseni olsun. M nin profil eğrisi α ile gösterilsin. f ve g I açık aralığı üzerinde reel değerli fonksiyonlar olmak üzere α nın

$$\alpha(t) = \left(f(t), 0, g(t) \right) \ , \ t \in I$$

ile gösterildiğini varsayabiliriz. M yüzeyinin bir parametrelendirmesi

$$\varphi(t,\theta) = \left(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t) \right) \ , \ t \in I \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \qquad (4.1)$$

ile verilsin.

α nın yay parametresi ile parametrelendiğini düşünelim.

i. α, spacelike ise α', α eğrisinin hız vektörü olmak üzere $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L > 0$ olmalıdır. Ayrıca α, spacelike olduğu için $\|\alpha'(t)\|_L^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L$ olur. Buradan ,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\|_L^2 &= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_L \\ &= \langle (f(t), 0, g(t)), (f(t), 0, g(t)) \rangle_L \\ &= f'^2(t) - g'^2(t) \end{aligned}$$

dir. α yay parametreli bir eğri olduğundan birim hızlı bir eğridir. Yani, $\|\alpha'(t)\|_L = 1$ dir. O halde $(f')^2 - (g')^2 = 1$ bulunur. Bu yüzden $f' \neq 0$ dır.

$N = \varphi_t \times_L \varphi_\theta$ M nin normal vektörü olsun. (4.1) denkleminin sırasıyla t ve θ ya göre kısmi türevleri

$$\varphi_t(t,\theta) = (f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t)) \ , \ \varphi_\theta(t,\theta) = (-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0)$$

olup

$$\varphi_t \times_L \varphi_\theta = (f(t)g'(t)\cos\theta, f(t)g'(t)\sin\theta, f(t)f'(t))$$

olarak elde edilir. Buradan M nin normal vektörü

$$\begin{aligned} \langle N, N \rangle_L &= \langle \varphi_t \times_L \varphi_\theta, \varphi_t \times_L \varphi_\theta \rangle_L \\ &= f^2(t)g'^2(t)\cos^2\theta + f^2(t)g'^2(t)\sin^2\theta - f^2(t)f'^2(t) \\ &= f^2(t)g'^2(t) - f^2(t)f'^2(t) \\ &= -f^2(t) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\langle N, N \rangle_L = -f^2(t) < 0$ olduğundan M, $f(t) \neq 0$ için spacelike olur.

$$\varphi_t \times_L \varphi_\theta = \left(f(t)g'(t)\cos\theta, f(t)g'(t)\sin\theta, f(t)f'(t) \right) \quad \text{ve} \quad \left\| \varphi_t \times_L \varphi_\theta \right\|_L = f(t)$$

olup M üzerindeki Gauss dönüşümü ,

$$\begin{aligned} G(t,\theta) &= \frac{\varphi_t \times_L \varphi_\theta}{\left\| \varphi_t \times_L \varphi_\theta \right\|_L} \\ &= \frac{1}{f(t)} \left(f(t)g'(t)\cos\theta, f(t)g'(t)\sin\theta, f(t)f'(t) \right) \\ &= \left(g'(t)\cos\theta, g'(t)\sin\theta, f'(t) \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle_L$, $F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle_L$, $G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle_L$ olduğuna göre

$$\begin{aligned} E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle_L &= \left\langle \left(f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t) \right), \left(f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t) \right) \right\rangle_L \\ &= f'^2(t)\cos^2\theta + f'^2(t)\sin^2\theta - g'^2(t) \\ &= f'^2(t)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta \right) - g'^2(t) \\ &= f'^2(t) - g'^2(t) \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle_L &= \left\langle \left(f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t) \right), \left(-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0 \right) \right\rangle_L \\ &= -f'(t)f(t)\sin\theta\cos\theta + f'(t)f(t)\sin\theta\cos\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle_L &= \left\langle \left(-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0 \right), \left(-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0 \right) \right\rangle_L \\ &= f^2(t)\sin^2\theta + f^2(t)\cos^2\theta \\ &= f^2(t)\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta \right) \\ &= f^2(t) \end{aligned}$$

elde edilir. $q = \left| \langle N, N \rangle_L \right|$ diyelim. $\langle N, N \rangle_L = -f^2(t)$ olduğuna göre $q = f^2(t)$ olacaktır. O halde M nin Laplace operatörü ,

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{q}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{q}}{E}\frac{\partial}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sqrt{q}}{G}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right\}$$
$$= -\frac{1}{f(t)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(f(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{f(t)}{f^2(t)}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right\}$$
$$= -\frac{1}{f(t)}\left\{f'(t)\frac{\partial}{\partial t}+f(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{f(t)}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right\}$$

olur. G Gauss dönüşümüne Laplace operatörünü uygulayalım.

$G=(G_1,G_2,G_3)=(g'\cos\theta, g'\sin\theta, f')$ olmak üzere $\Delta G=(\Delta G_1,\Delta G_2,\Delta G_3)$ diyelim.

Buradan

$G_1 = g'\cos\theta$ için,

$$\Delta G_1 = -\frac{1}{f}\left\{f'\frac{\partial}{\partial t}(g'\cos\theta)+f\frac{\partial^2}{\partial t^2}(g'\cos\theta)+\frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(g'\cos\theta)\right\}$$
$$= -\frac{1}{f}\left\{f'g''\cos\theta+fg'''\cos\theta-\frac{1}{f}g'\cos\theta\right\}$$
$$= -\frac{f'}{f}g''\cos\theta-g'''\cos\theta+\frac{1}{f^2}g'\cos\theta$$

$G_2 = g'\sin\theta$ için,

$$\Delta G_2 = -\frac{1}{f}\left\{f'\frac{\partial}{\partial t}(g'\sin\theta)+f\frac{\partial^2}{\partial t^2}(g'\sin\theta)+\frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(g'\sin\theta)\right\}$$
$$= -\frac{1}{f}\left\{f'g''\sin\theta+fg'''\sin\theta-\frac{1}{f}g'\sin\theta\right\}$$
$$= -\frac{f'}{f}g''\sin\theta-g'''\sin\theta+\frac{1}{f^2}g'\sin\theta$$

ve $G_3 = f'$ için,

$$\Delta G_3 = -\frac{1}{f}\left\{ f'\frac{\partial}{\partial t}(f') + f\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f') + \frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(f') \right\}$$

$$= -\frac{1}{f}\{ f'f'' + ff''' \}$$

$$= -\frac{f'f''}{f} - f'''$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\Delta G = \left(\left(-\frac{f'}{f}g'' - g''' + \frac{1}{f^2}g' \right)\cos\theta, \left(-\frac{f'}{f}g'' - g''' + \frac{1}{f^2}g' \right)\sin\theta, -\frac{f'f''}{f} - f''' \right)$$

olacaktır.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{için}$$

$$\lambda \cdot G = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \bullet_L \begin{bmatrix} g'\cos\theta \\ g'\sin\theta \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}g'\cos\theta + \lambda_{12}g'\sin\theta - \lambda_{13}f' \\ \lambda_{21}g'\cos\theta + \lambda_{22}g'\sin\theta - \lambda_{23}f' \\ \lambda_{31}g'\cos\theta + \lambda_{32}g'\sin\theta - \lambda_{33}f' \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot G = (\lambda_{11}g'\cos\theta + \lambda_{12}g'\sin\theta - \lambda_{13}f', \lambda_{21}g'\cos\theta + \lambda_{22}g'\sin\theta - \lambda_{23}f',$$
$$\lambda_{31}g'\cos\theta + \lambda_{32}g'\sin\theta - \lambda_{33}f')$$

ve

$$\Delta G = \left(\left(-\frac{f'}{f}g'' - g''' + \frac{1}{f^2}g' \right)\cos\theta, \left(-\frac{f'}{f}g'' - g''' + \frac{1}{f^2}g' \right)\sin\theta, -\frac{f'f''}{f} - f''' \right)$$

olmak üzere $\Delta G = \lambda G$ ifadesinden

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{f'}{f}g''\cos\theta+g'''\cos\theta+\dfrac{1}{f^2}(-g'\cos\theta)\right)=\lambda_{11}g'\cos\theta+\lambda_{12}g'\sin\theta-\lambda_{13}f' \\ -\left(\dfrac{f'}{f}g''\sin\theta+g'''\sin\theta+\dfrac{1}{f^2}(-g'\sin\theta)\right)=\lambda_{21}g'\cos\theta+\lambda_{22}g'\sin\theta-\lambda_{23}f' \\ -\left(\dfrac{f'f''}{f}+f'''\right)=\lambda_{31}g'\cos\theta+\lambda_{32}g'\sin\theta-\lambda_{33}f' \end{cases} \qquad (4.2)$$

denklem sistemi elde edilir. Eğer $g'=0$ ise yani her $t\in I$ için $g'(t)=0$ ise g bir sabit ve M delinmiş spacelike düzlem olur. $f'\neq 0$ idi. O halde $g'\neq 0$ olduğunu varsayalım. $\sin\theta$, $\cos\theta$ ve 1 θ nın lineer bağımsız fonksiyonları olduğundan $\lambda_{12}=\lambda_{13}=0$, $\lambda_{21}=\lambda_{23}=0$ $\lambda_{31}=\lambda_{32}=0$ sonucu (4.2) sisteminden elde edilir. Yani Λ bir köşegen matrisidir. (4.2) sistemi aşağıdaki denklem sistemine indirgenir.

$$-\frac{f'g''}{f}-g'''+\frac{g'}{f^2}=\lambda_{11}g' \qquad (4.3)$$

$$-\frac{f'g''}{f}-g'''+\frac{g'}{f^2}=\lambda_{22}g' \qquad (4.4)$$

$$\frac{f'f''}{f}+f'''=\lambda_{33}f' \qquad (4.5)$$

(4.3) ve (4.4) denklemlerinden $\lambda_{11}=\lambda_{22}$ sonucunu elde ederiz. $\lambda_{11}=\lambda_{22}=a$, $\lambda_{33}=b$ yazılırsa denklem sistemi

$$-\frac{f'g''}{f}-g'''+\frac{g'}{f^2}=ag'$$

$$\frac{f'f''}{f}+f'''=bf'$$

haline gelir ve bu denklemler

$$-\frac{f'g''}{f}-g'''+\frac{g'}{f^2}=ag' \Rightarrow -ff'g''-f^2g'''+g'=af^2g'$$

$$\Rightarrow -ff'g''-f^2g'''+g'-af^2g'=0$$

$$\Rightarrow ff'g''+f^2g'''-g'+af^2g'=0$$

$$\Rightarrow ff'g''+f^2g'''+\left(af^2-1\right)g'=0$$

$$\frac{ff'f''}{f}+f'''=bf' \Rightarrow f'f''+ff'''=bff'$$

olarak yazılabilir. Yeni denklem sistemi

$$ff'g''+f^2g'''+\left(af^2-1\right)g'=0 \tag{4.6}$$

$$f'^2-g'^2=1 \tag{4.7}$$

$$f'f''+ff'''=bff' \tag{4.8}$$

olur. (4.7) eşitliğinden türev alındığında

$$f'f''=g'g'' \tag{4.9}$$

bulunur. (4.9) dan da türev alınırsa

$$(f'')^2+f'f'''=(g'')^2+g'g''' \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) denklemlerinden

$$g''=\frac{f'f''}{g'} \qquad \text{ve} \qquad g'''=\frac{(g')^2(f'')^2+f'f'''(g')^2-(f')^2(f'')^2}{(g')^3}$$

olup bu eşitlikler (4.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$ff'g''+f^2g'''+\left(af^2-1\right)g'=0$$

$$ff'\frac{ff''}{g'}+f^2\left[\frac{(g')^2(f'')^2+ff'''(g')^2-(f')^2(f'')^2}{(g')^3}\right]+\left(af^2-1\right)g'=0,$$

$$f(f')^2f''(g')^2+f^2(g')^2(f'')^2+f^2ff'''(g')^2-f^2(f')^2(f'')^2+\left(af^2-1\right)(g')^4=0,$$

ve

$$\left(af^2-1\right)(g')^4+f(g')^2\left[(f')^2f''+f(f'')^2+fff'''\right]-(fff'')^2=0 \qquad (4.11)$$

elde edilir. (4.7) denkleminden $(g')^2=(f')^2-1$ olup bu ifade (4.11) denkleminde yerine yazılırsa ,

$$\left(af^2-1\right)\left((f')^2-1\right)^2+f\left[(f')^2f''+fff'''-f''\right](f')^2-f^2\left[(f'')^2+ff'''\right]=0 \qquad (4.12)$$

elde edilir. (4.8) denklemi

$$(ff'')'=\frac{b}{2}\left(f^2\right)'$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin integrali alındığında $k\in\mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$ff''=\frac{b}{2}f^2+k \qquad (4.13)$$

bulunur. Bu denklem

$$2f''=bf+\frac{2k}{f}$$

olarak yazılabilir.

(4.13) ikinci derece denklemi için $P(f)=f'$ denklem dönüşümünü uygulayalım. Buradan

$$f''=\frac{dP}{df}\frac{df}{dt}=\frac{dP}{df}f'=P\frac{dP}{df}$$

$$2f''=f''+f''=P\frac{dP}{df}+P\frac{dP}{df}=\frac{dP}{df}\frac{df}{dt}+\frac{dP}{df}\frac{df}{dt}=\frac{dP^2}{df}$$

olup

$$2f''=bf+\frac{2k}{f}$$

denklemi

$$\frac{dP^2}{df}=bf+\frac{2k}{f}$$

halini alır. Bu denklemin integrali alınırsa $c\in\mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$P^2=\frac{b}{2}f^2+2k\ln|f|+c$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $P(f)=f'$ olduğu için

$$(f')^2=\frac{1}{2}bf^2+2k\ln|f|+c \tag{4.14}$$

olarak yazılır. (4.8) ve (4.13) denklemleri kullanılarak (4.12) eşitliğinden f'' ve f''' türevleri yok edilebilir. O halde

$$f''=\frac{b}{2}f+\frac{k}{f} \quad \text{ve} \quad f'''=\frac{b}{2}f'-k\frac{f'}{f^2}$$

türevleri (4.12) eşitliğinde kullanıldığında

$$\left(af^{2}-1\right)\left(\left(f'\right)^{2}-1\right)^{2}+bf^{2}\left(f'\right)^{2}\left(\left(f'\right)^{2}-1\right)-\left(\frac{1}{2}bf^{2}+k\right)^{2}=0 \tag{4.15}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.14) eşitliği (4.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{b^{2}}{4}(a+b)f^{6}+\left[2kb\left(a+b\right)\ln|f|+b\left(a+b\right)\left(c-1\right)\right]f^{4}\\&+\left[4k^{2}(a+b)\left(\ln|f|\right)^{2}+4k(a+b)(c-1)\ln|f|+(a+b)\left(c-1\right)^{2}-bk\right]f^{2}\\&-\left[4k\left(c-1\right)\ln|f|+4k^{2}\left(\ln|f|\right)^{2}+\left(c-1\right)^{2}+k^{2}\right]=0\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. f fonksiyonunun bu denklemi sağlamak zorunda olduğunu buluruz. f^{i} ve $f^{j}\left(\ln|f|\right)^{\ell}\left(0\le i,j\le 6,0\le \ell\le 2\right)$ fonksiyonları lineer bağımsız ve f sabit olmayan sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\left.\begin{array}{c}b^{2}\left(a+b\right)=0\\kb\left(a+b\right)=0\\b\left(a+b\right)\left(c-1\right)=0\\k^{2}\left(a+b\right)=0\\k\left(a+b\right)\left(c-1\right)=0\\\left(a+b\right)\left(c-1\right)^{2}-bk=0\\k^{2}=0\\k\left(c-1\right)=0\\\left(c-1\right)^{2}+k^{2}=0\end{array}\right\}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemi

$$\begin{aligned}&k=0\\&c=1\\&b\left(a+b\right)=0\end{aligned}$$

şekline indirgenebilir. Böylece $b \neq 0$ elde edilir. Aksi taktirde (4.7) ve (4.14) denklemlerinden $g' = 0$ bulunurdu ki bu önceki kabulümüzle çelişir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} k &= 0 \\ c &= 1 \\ b &= -a \end{aligned}$$

bulunur. O halde (4.14) denklemi $k = 0$, $c = 1$ olduğu için

$$(f')^2 = \frac{b}{2} f^2 + 1$$

ve

$$f' = \pm\sqrt{1 + \frac{b}{2} f^2}$$

halini alır. Böylece $f = f(t)$ nin

$$\int \frac{df}{\sqrt{1 + \frac{b}{2} f^2}} = \pm \int dt \tag{4.16}$$

denklemini sağladığını elde ederiz. Buradan iki durum söz konusudur.

1.durum : $b > 0$ olsun. (4.16) denkleminden $d \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$\sqrt{\frac{2}{b}} \operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{b}{2}} f(t) \right) = \pm (t + d)$$

elde edilir. Böylece

$$f(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{b}} \sinh\left(\sqrt{\frac{b}{2}} (t + d) \right)$$

bulunur. Son eşitliğin türevi alındığında

$$f'(t) = \pm\cosh\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right)$$

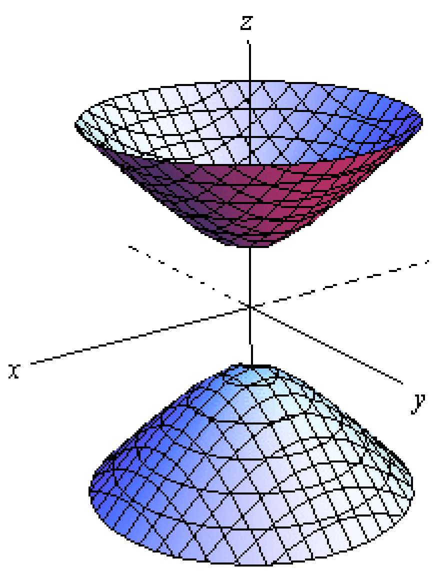
olup bu ifade (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$g'(t) = \pm\sinh\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right)$$

elde edilir. Bu taktirde son denklemden integral alarak $e \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{b}}\cosh\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right) + e$$

elde edilir. Bu durum, α nın yarıçapı $r = \sqrt{\frac{2}{b}}$ ve merkezi z-ekseni üzerinde olan bir çember olduğunu gösterir. Bundan dolayı M, bir $H_0^2(r)$ hiberbolik birim küresidir. (Şekil 3.2.)



Şekil 3.2. $\mathbb{R}_1^3$ de hiperbolik küre

2.durum: $b<0$ olsun. Bu durumda (4.16) denkleminden $d \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$f(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{-b}}\sin\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right)$$

elde edilir. Son eşitliğin türevi alındığında

$$f'(t) = \pm\cos\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right)$$

olup bu ifade (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(g'(t)\right)^2 = -\sin^2\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right)$$

elde edilir. Bu ifade çözümü olmayan bir denklemdir.

ii. α, timelike ise α', α eğrisinin hız vektörü olmak üzere $\left\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\right\rangle_L < 0$ olur. α timelike olduğu için $\left\|\alpha'(t)\right\|_L^2 = -\left\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\right\rangle_L$ dır. Buradan ,

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha'(t)\right\|_L^2 &= -\left\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\right\rangle_L \\
&= -\left\langle \left(f(t), 0, g(t)\right), \left(f(t), 0, g(t)\right)\right\rangle_L \\
&= -\left(f'^2(t) - g'^2(t)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. α yay parametreli bir eğri olduğundan birim hızlı bir eğridir. Yani $\left\|\alpha'(t)\right\|_L = 1$ dir. O halde $f'^2(t) - g'^2(t) = -1$ bulunur. Bu yüzden $g'(t) \neq 0$ olur. $N = \varphi_t \times_L \varphi_\theta$, M nin normal vektörü olsun. (4.1) eşitliğinin sırasıyla t ve θ ya göre kısmi türevleri

$$\varphi_t(t,\theta) = \left(f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t)\right) \quad , \quad \varphi_\theta(t,\theta) = \left(-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta, 0\right)$$

olup

$$\varphi_t \times_L \varphi_\theta = \left(f(t)g'(t)\cos\theta,\, f(t)g'(t)\sin\theta,\, f(t)f'(t) \right)$$

dir. Buradan M nin normal vektörü ,

$$\begin{aligned}
\langle N, N \rangle_L &= \langle \varphi_t \times_L \varphi_\theta, \varphi_t \times_L \varphi_\theta \rangle_L \\
&= f^2(t)g'^2(t)\cos^2\theta + f^2(t)g'^2(t)\sin^2\theta - f^2(t)f'^2(t) \\
&= f^2(t)g'^2(t) - f^2(t)f'^2(t) \\
&= f^2(t)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\langle N, N \rangle_L = f^2(t) > 0$ olduğundan $f(t) \neq 0$ için M timelike'dır.

$$\varphi_t \times_L \varphi_\theta = \left(f(t)g'(t)\cos\theta,\, f(t)g'(t)\sin\theta,\, f(t)f'(t) \right) \text{ ve } \left\| \varphi_t \times_L \varphi_\theta \right\|_L = f(t)$$

olup M üzerindeki Gauss dönüşümü

$$\begin{aligned}
G(t,\theta) &= \frac{\varphi_t \times_L \varphi_\theta}{\left\| \varphi_t \times_L \varphi_\theta \right\|_L} \\
&= \frac{1}{f(t)} \left(f(t)g'(t)\cos\theta,\, f(t)g'(t)\sin\theta,\, f(t)f'(t) \right) \\
&= \left(g'(t)\cos\theta, g'(t)\sin\theta, f'(t) \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle_L$, $F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle_L$, $G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle_L$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
E = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle_L &= \left\langle \left(f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t) \right), \left(f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t) \right) \right\rangle_L \\
&= f'^2(t)\cos^2\theta + g'^2(t)\sin^2\theta - g'^2(t) \\
&= f'^2(t) - g'^2(t) \\
&= -1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F=\langle \varphi_t,\varphi_\theta\rangle_L &= \langle (f'(t)\cos\theta, f'(t)\sin\theta, g'(t)),(-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta,0)\rangle_L \\
&= -f(t)f'(t)\cos\theta\sin\theta+f(t)f'(t)\cos\theta\sin\theta \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G=\langle \varphi_\theta,\varphi_\theta\rangle_L &= \langle (-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta,0),(-f(t)\sin\theta, f(t)\cos\theta,0)\rangle_L \\
&= f^2(t)\sin^2\theta+f^2(t)\cos^2\theta \\
&= f^2(t)
\end{aligned}
$$

ve $q=\left|\langle N,N\rangle_L\right|=f^2(t)$ olup M nin Laplace operatörü ,

$$
\begin{aligned}
\Delta &= -\frac{1}{\sqrt{q}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{q}}{E}\frac{\partial}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sqrt{q}}{G}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{f}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(-f\frac{\partial}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{f}\left\{-f'\frac{\partial}{\partial t}-f\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{f}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\} \\
&= -\left\{-\frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}
\end{aligned}
$$

olur. G Gauss dönüşümüne Laplace operatörünü uygulayalım.

$G=(G_1,G_2,G_3)=(g'\cos\theta, g'\sin\theta, f')$ olmak üzere $\Delta G=(\Delta G_1,\Delta G_2,\Delta G_3)$ olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
\Delta G_1 &= -\left\{-\frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial t}(g'\cos\theta)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(g'\cos\theta)+\frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(g'\cos\theta)\right\} \\
&= \frac{f'}{f}g''\cos\theta+g'''\cos\theta+\frac{g'}{f^2}\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta G_2 &= -\left\{-\frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial t}(g'\sin\theta)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(g'\sin\theta)+\frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(g'\sin\theta)\right\} \\
&= \frac{f'}{f}g''\sin\theta+g'''\sin\theta+\frac{g'}{f^2}\sin\theta
\end{aligned}
$$

ve

$$\Delta G_3 = -\left\{ -\frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial t}\left(f'\right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(f'\right) + \frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left(f'\right) \right\}$$
$$= \frac{f f''}{f} + f'''$$

olup

$$\Delta G = \left(\Delta G_1, \Delta G_2, \Delta G_3\right)$$
$$\Delta G = \left(\left(\frac{f'}{f} g'' + g''' + \frac{g'}{f^2} \right)\cos\theta, \left(\frac{f'}{f} g'' + g''' + \frac{g'}{f^2} \right)\sin\theta, \frac{f f''}{f} + f''' \right)$$

olarak elde edilir.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{için}$$

$$\lambda \cdot G = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \bullet_L \begin{bmatrix} g'\cos\theta \\ g'\sin\theta \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} g'\cos\theta + \lambda_{12} g'\sin\theta - \lambda_{13} f' \\ \lambda_{21} g'\cos\theta + \lambda_{22} g'\sin\theta - \lambda_{23} f' \\ \lambda_{31} g'\cos\theta + \lambda_{32} g'\sin\theta - \lambda_{33} f' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot G = (&\lambda_{11} g'\cos\theta + \lambda_{12} g'\sin\theta - \lambda_{13} f', \lambda_{21} g'\cos\theta + \lambda_{22} g'\sin\theta - \lambda_{23} f', \\ &\lambda_{31} g'\cos\theta + \lambda_{32} g'\sin\theta - \lambda_{33} f') \end{aligned}$$

ve

$$\Delta G = \left(\left(\frac{f'}{f} g'' + g''' + \frac{g'}{f^2} \right)\cos\theta, \left(\frac{f'}{f} g'' + g''' + \frac{g'}{f^2} \right)\sin\theta, \frac{f f''}{f} + f''' \right)$$

olmak üzere $\Delta G = \Lambda G$ ifadesinden

$$\begin{cases} \dfrac{f'}{f}g''\cos\theta + g'''\cos\theta + \dfrac{g'}{f^2}\cos\theta = \lambda_{11}g'\cos\theta + \lambda_{12}g'\sin\theta - \lambda_{13}f' \\ \dfrac{f'}{f}g''\sin\theta + g'''\sin\theta + \dfrac{g'}{f^2}\sin\theta = \lambda_{21}g'\cos\theta + \lambda_{22}g'\sin\theta - \lambda_{23}f' \\ \qquad\qquad \dfrac{f'f''}{f} + f''' = \lambda_{31}g'\cos\theta + \lambda_{32}g'\sin\theta - \lambda_{33}f' \end{cases} \tag{4.17}$$

denklem sistemi elde edilir. Eğer $f' = 0$ ise o zaman M bir dairesel silindirdir. Silindirik yüzeyin bu çeşidi birinci tip silindirik yüzey olarak adlandırılır. $g' \neq 0$ idi. O halde $f' \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (4.17) sisteminden $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$ $\lambda_{21} = \lambda_{23} = 0$, $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$ olur ve

$$\frac{f'g''}{f} + g''' + \frac{g'}{f^2} = \lambda_{11}g' \tag{4.18}$$

$$\frac{f'g''}{f} + g''' + \frac{g'}{f^2} = \lambda_{22}g' \tag{4.19}$$

$$\frac{f'f''}{f} + f''' = -\lambda_{33}f' \tag{4.20}$$

denklem sistemine indirgenir. (4.18) ve (4.19) denklemleri $\lambda_{11} = \lambda_{22}$ sonucunu verir. $\lambda_{11} = \lambda_{22} = a$ ve $\lambda_{33} = b$ olsun. Böylece (4.18), (4.19) ve (4.20) denklemleri düzenlendiğinde

$$ff'g'' + f^2g''' + \left(1 - af^2\right)g' = 0 \tag{4.21}$$

$$f'^2 - g'^2 = -1 \tag{4.22}$$

$$f'f'' + ff''' = -bff' \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.22) denkleminden türev alınırsa

$$f'f'' = g'g'' \tag{4.24}$$

olduğu görülür. (4.24) eşitliğinden de türev alınırsa

$$\left(f''\right)^2 + f'f''' = \left(g''\right)^2 + g'g''' \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.24) ve (4.25) den

$$g'' = \frac{f'f''}{g'} \quad \text{ve} \quad g''' = \frac{\left(f''\right)^2 + f'f''' - \left(g''\right)^2}{g'}$$

olup bu eşitlikler (4.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1 - af^2\right)\left(g'\right)^4 + f\left(g'\right)^2\left(f\left(f''\right)^2 + \left(f'\right)^2 f'' + ff'f'''\right) - f^2\left(f'\right)^2\left(f''\right)^2 = 0 \tag{4.26}$$

elde edilir. (4.22) denkleminden $\left(g'\right)^2 = 1 + \left(f'\right)^2$ olup bu ifade (4.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\left(1 - af^2\right)\left(1 + \left(f'\right)^2\right)^2 + f\left(f'\right)^2\left[\left(f'\right)^2 f'' + ff'f''' + f''\right] \\ &+ \left[f^2\left(f''\right)^2 + f^2 f'f'''\right] = 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

denklemi elde edilir. (4.23) denklemi

$$\left(ff''\right)' = -\frac{1}{2} b\left(f^2\right)'$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $k \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$ff'' = -\frac{1}{2} bf^2 + k \tag{4.28}$$

olup bu denklem

$$2f'' = -bf + \frac{2k}{f}$$

şeklinde yazılabilir. (4.28) denklemi için $P(f) = f'$ dönüşümünü uygulayalım. Buradan

$$2f'' = -bf + \frac{2k}{f}$$

denklemi

$$\frac{dP^2}{df} = -bf + \frac{2k}{f}$$

halini alır. Bu ifadenin integrali alındığında $c \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$P^2 = -\frac{b}{2} f^2 + 2k \ln|f| + c$$

olarak bulunur. $P(f) = f'$ olduğundan bu ifade

$$(f')^2 = -\frac{b}{2} f^2 + 2k \ln|f| + c \tag{4.29}$$

şeklinde yazılır. (4.28) ve (4.23) denklemleri kullanılarak (4.27) eşitliğinden f'' ve f''' türevleri yok edilebilir. Buradan

$$f'' = -\frac{b}{2} f + \frac{k}{f} \quad \text{ve} \quad f''' = -\frac{b}{2} f' - k \frac{f'}{f^2}$$

türevleri (4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1 - af^2\right)\left(1 + (f')^2\right)^2 - bf^2 (f')^2 \left((f')^2 + 1\right) + \left(\frac{b}{2} f^2 - k\right)^2 = 0 \tag{4.30}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.29) eşitliği (4.30) denkleminde yerine yazılırsa ,

$$
\begin{aligned}
&\frac{b^2}{4}(a+b)f^6-\left[2kb(a+b)\ln|f|+b(a+b)(c+1)\right]f^4\\
&+\left[4k^2(a+b)\left(\ln|f|\right)^2+4k(a+b)(c+1)\ln|f|+(a+b)(c+1)^2+bk\right]f^2\\
&-\left[4k^2\left(\ln|f|\right)^2+4k(c+1)\ln|f|+\left(c+1\right)^2+k^2\right]=0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ifadeden elde edilen

$$
\left.\begin{array}{c}
b^2(a+b)=0\\
kb(a+b)=0\\
b(a+b)(c+1)=0\\
k(a+b)(c+1)=0\\
k^2(a+b)=0\\
(a+b)(c+1)^2+kb=0\\
k^2=0\\
k(c+1)=0\\
(c+1)^2+k^2=0
\end{array}\right\}
$$

denklem sistemi ,

$$
\begin{aligned}
&k=0\\
&c=-1\\
&b(a+b)=0
\end{aligned}
$$

şekline indirgenebilir. Benzer şekilde $b\neq 0$ olup $b=-a$ olur. O halde $k=0$ ve $c=-1$ olduğundan (4.29) eşitliği

$$
f'=\pm\sqrt{\frac{-b}{2}f^2-1}
$$

olarak yazılır. Bu ifadeden integral alınırsa

$$\int \frac{df}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}f\right)^2 - 1}} = \pm \int dt \tag{4.31}$$

elde edilir. Bu (4.31) eşitliğinin sonucu $d \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$f(t) = \pm\sqrt{\frac{-2}{b}}\cosh\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right)$$

olarak bulunur. Bu eşitliğin türevi alındığı taktirde

$$f'(t) = \pm\sinh\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right)$$

olup bu ifade (4.22) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$g'(t) = \pm\cosh\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right)$$

olarak bulunur. Bu ifadenin integrali alınırsa $e \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

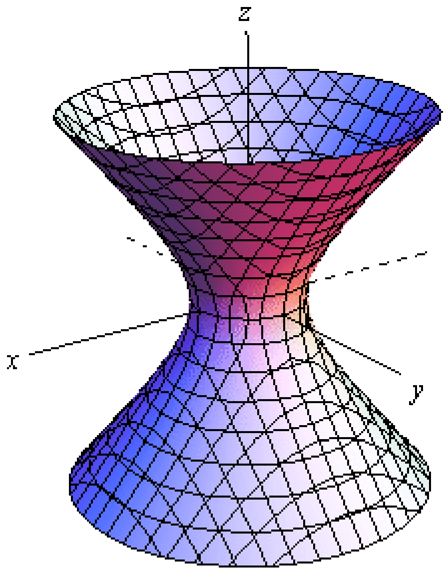
$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{-2}{b}}\sinh\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right) + e$$

elde edilir. $d, e \in \mathbb{R}$ bir sabit ve $b < 0$ olmak üzere

$$f(t) = \pm\sqrt{\frac{-2}{b}}\cosh\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right) \quad \text{ve} \quad g(t) = \pm\sqrt{\frac{-2}{b}}\sinh\left(\sqrt{\frac{-b}{2}}(t+d)\right) + e$$

yazılabilir.

Bu α nın yarıçapı $r=\sqrt{\dfrac{2}{-b}}$ ve merkezi z-ekseni üzerinde olan bir çember olduğunu gösterir. Bundan dolayı M, bir $S_1^2(r)$ Lorentz birim küresidir. (Şekil 3.3.)



Şekil 3.3. $\mathbb{R}_1^3$ de Lorentz küresi

2. M nin dönme ekseni koordinat sisteminin x ekseni olsun.

$$\alpha(t)=\big(f(t),0,g(t)\big),t\in I$$

ile ifade edilen M nin profil eğrisini α ile gösterelim. M yüzeyinin bir parametrelendirmesi

$$\varphi(t,\theta)=\big(f(t),g(t)\sinh\theta,g(t)\cosh\theta\big) \tag{4.32}$$

ile verilsin.

i. α, spacelike ise $f'^2(t)-g'^2(t)=1$ bulunur. Bu yüzden $f'\neq 0$ dır. M nin normal vektörü $N=\varphi_t\times_L\varphi_\theta$ olmak üzere $\langle N,N\rangle_L=-g^2(t)$ olarak bulunur. $\langle N,N\rangle_L<0$ olduğundan $g(t)\neq 0$ için M spacelike dır. M üzerindeki Gauss dönüşümü

$$G = \left(g'(t),\, f'(t)\sinh\theta,\, f'(t)\cosh\theta\right)$$

dir. $q = \langle N, N \rangle_L$ diyelim. (1) durumundaki benzer hesaplamalar yapıldığında $E = 1$ $F = 0$, $G = g^2(t)$ ve $q = g^2(t)$ olmak üzere M nin Laplace operatörü

$$\begin{aligned}\Delta &= -\frac{1}{\sqrt{q}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sqrt{q}}{E}\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sqrt{q}}{G}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\} \\ &= -\left\{\frac{g'}{g}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{g^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gauss dönüşümüne Laplace operatörü uygulandığında ,

$$\Delta G = \left(-\frac{g'g''}{g} - g''', \left(-\frac{g'f''}{g} - f''' - \frac{f'}{g^2}\right)\sinh\theta, \left(-\frac{g'f''}{g} - f''' - \frac{f'}{g^2}\right)\cosh\theta\right)$$

elde edilir.

$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ olmak üzere $\Delta G = \Lambda G$ ifadesinden

$$\begin{cases} -\dfrac{g'g''}{g} - g''' = \lambda_{11}g' + \lambda_{12}f'\sinh\theta - \lambda_{13}f'\cosh\theta \\ \left(-\dfrac{g'f''}{g} - f''' - \dfrac{f'}{g^2}\right)\sinh\theta = \lambda_{21}g' + \lambda_{22}f'\sinh\theta - \lambda_{23}f'\cosh\theta \\ \left(-\dfrac{g'f''}{g} - f''' - \dfrac{f'}{g^2}\right)\cosh\theta = \lambda_{31}g' + \lambda_{32}f'\sinh\theta - \lambda_{33}f'\cosh\theta \end{cases} \tag{4.33}$$

denklem sistemi elde edilir. Eğer $g' = 0$ ise M nin bir dairesel silindir olduğunu elde ederiz. Silindirik yüzeyin bu çeşidi üçüncü tip silindirik yüzey olarak adlandırılır.

$f' \neq 0$ idi. $g' \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (4.33) denklem sistemi $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$ $\lambda_{21} = \lambda_{23} = 0$, $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$ sonucunu verir. O halde (4.33) denklem sistemi

$$-\frac{g'g''}{g} - g''' = \lambda_{11} g' \tag{4.34}$$

$$-\frac{g'f''}{g} - f''' - \frac{f'}{g^2} = \lambda_{22} f' \tag{4.35}$$

$$-\frac{g'f''}{g} - f''' - \frac{f'}{g^2} = -\lambda_{33} f' \tag{4.36}$$

şeklinde yazılır. (4.35) ve (4.36) denklemlerinden $\lambda_{22} = -\lambda_{33}$ elde edilir. $\lambda_{11} = a$ $\lambda_{22} = -\lambda_{33} = b$ olsun. O halde denklem sistemi

$$gg'f'' + g^2 f''' + \left(1 + bg^2\right) f' = 0 \tag{4.37}$$

$$(f')^2 - (g')^2 = 1 \tag{4.38}$$

$$g'g'' + gg''' = -agg' \tag{4.39}$$

şeklinde yazılabilir. (4.38) denkleminden türev alınırsa

$$f'f'' = g'g'' \tag{4.40}$$

olduğu görülür. (4.40) denkleminden de türev alınırsa

$$(f'')^2 + f'f''' = (g'')^2 + g'g''' \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.40) ve (4.41) eşitliklerinden

$$f'' = \frac{g'g''}{f'} \quad \text{ve} \quad f''' = \frac{(g'')^2 + g'g''' - (f'')^2}{f'}$$

olup bu eşitlikler (4.37) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1+bg^2\right)\left(f'\right)^4+g\left(f'\right)^2\left(g\left(g''\right)^2+\left(g'\right)^2g''+gg'g'''\right)-g^2\left(g'\right)^2\left(g''\right)^2=0 \tag{4.42}$$

bulunur. (4.38) denkleminden $\left(f'\right)^2=1+\left(g'\right)^2$ olup bu eşitlik (4.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\left(1+bg^2\right)\left(1+\left(g'\right)^2\right)^2+g\left(g'\right)^2\left[\left(g'\right)^2g''+g''+gg'g'''\right]\\&+\left[g^2\left(g''\right)^2+g^2g'g'''\right]=0\end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.39) eşitliği

$$\left(gg''\right)'=\frac{-a}{2}\left(g^2\right)'$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $k\in\mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$gg''=\frac{-a}{2}g^2+k \tag{4.44}$$

olur ve ifade

$$2g''=-ag+\frac{2k}{g}$$

olarak yazılabilir. (4.44) denklemi için $P(g)=g'$ dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{dP^2}{dg}=-ag+\frac{2k}{g}$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $c\in\mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$\left(g'\right)^2=\frac{-a}{2}g^2+2k\ln\left|g\right|+c \tag{4.45}$$

olarak bulunur. (4.39) ve (4.44) denklemleri kullanılarak (4.43) denkleminden g'' ve g''' türevleri yok edilebilir. Buradan

$$g''=\frac{-a}{2}g+\frac{k}{g} \quad \text{ve} \quad g'''=\frac{-a}{2}g'-k\frac{g'}{g^2}$$

türevleri (4.43) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1+bg^2\right)\left(1+\left(g'\right)^2\right)^2-ag^2\left(g'\right)^2\left(1+\left(g'\right)^2\right)+\left(\frac{a}{2}g^2-k\right)^2=0 \qquad (4.46)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.46) denkleminden g' türevini yok etmek için (4.45) eşitliği kullanıldığı taktirde

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{4}(a-b)g^6-\left[2ka(a-b)\ln|g|+a(a-b)(c+1)\right]g^4\\&+\left[4k(a-b)(c+1)\ln|g|+4k^2(a-b)\left(\ln|g|\right)^2+(a-b)(c+1)^2+ak\right]g^2\\&-\left[4k^2\left(\ln|g|\right)^2+4k(c+1)\ln|g|+(c+1)^2+k^2\right]=0\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu ifadeden elde edilen

$$\left.\begin{array}{c}a^2(a-b)=0\\ ka(a-b)=0\\ a(a-b)(c+1)=0\\ k(a-b)(c+1)=0\\ k^2(a-b)=0\\ (a-b)(c+1)^2+ak=0\\ k^2=0\\ k(c+1)=0\\ (c+1)^2+k^2=0\end{array}\right\}$$

denklem sistemi ,

$$
\begin{aligned}
&k = 0 \\
&c = -1 \\
&a(a-b) = 0
\end{aligned}
$$

şekline indirgenebilir. $a \neq 0$ olup $a = b$ dir. O halde $k = 0$ ve $c = -1$ olduğundan (4.45) eşitliği

$$g' = \pm\sqrt{\frac{-a}{2}g^2 - 1}$$

halini alır.

$$g' = \pm\sqrt{\frac{-a}{2}g^2 - 1}$$

ifadesinin integrali

$$\int \frac{dg}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{-a}{2}}g\right)^2 - 1}} = \pm\int dt \tag{4.47}$$

olarak elde edilir. (4.47) integralinin sonucu $a < 0$ ve $d \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{-a}}\cosh\left(\sqrt{\frac{-a}{2}}(t+d)\right)$$

olarak bulunur.

$$(g')^2 = \sinh^2\left(\sqrt{\frac{-a}{2}}(t+d)\right)$$

olmak üzere (4.38) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$f' = \pm\cosh\left(\sqrt{\frac{-a}{2}}(t+d)\right)$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $a<0$ ve $e\in\mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$f(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{-a}}\sinh\left(\sqrt{\frac{-a}{2}}(t+d)\right)+e$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{-a}}\cosh\left(\sqrt{\frac{-a}{2}}(t+d)\right) \quad \text{ve} \quad f(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{-a}}\sinh\left(\sqrt{\frac{-a}{2}}(t+d)\right)+e$$

elde edilir.

Bu α nın yarıçapı $r=\sqrt{\frac{2}{-a}}$ ve merkezi x-ekseni üzerinde olan bir çember olduğunu gösterir. Bundan dolayı *M* bir $H_0^2(r)$ hiperbolik birim küresidir.

ii. α timelike ise o zaman $(f')^2-(g')^2=-1$ bulunur. Bu yüzden $f'\neq 0$ dır. *M* nin normal vektörü $N=\varphi_t \times_L \varphi_\theta$ olmak üzere $\langle N,N\rangle_L = g^2(t)$ olarak bulunur. $\langle N,N\rangle_L>0$ olduğundan *M*, $g\neq 0$ için timelike olur. *M* üzerindeki Gauss dönüşümü

$$G=\left(g'(t), f'(t)\sinh\theta, f'(t)\cosh\theta\right)$$

dir. $q=\langle N,N\rangle_L$ diyelim. Benzer hesaplamalar yapıldığında $E=-1$, $F=0$ $G=g^2(t)$ ve $q=g^2(t)$ olmak üzere *M* nin Laplace operatörü

$$\Delta = -\left\{-\frac{g'}{g}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{g^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}$$

olarak elde edilir. Gauss dönüşümüne Laplace operatörü uygulandığında

$$\Delta G = \left(\frac{g'g''}{g} + g''', \left(\frac{g'f''}{g} + f''' - \frac{f'}{g^2} \right) \sinh\theta, \left(\frac{g'f''}{g} + f''' - \frac{f'}{g^2} \right) \cosh\theta \right)$$

elde edilir.

$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ olmak üzere $\Delta G = \lambda G$ ifadesinden

$$\begin{cases} \dfrac{g'g''}{g} + g''' = \lambda_{11} g' + \lambda_{12} f' \sinh\theta - \lambda_{13} f' \cosh\theta \\ \left(\dfrac{g'f''}{g} + f''' - \dfrac{f'}{g^2} \right) \sinh\theta = \lambda_{21} g' + \lambda_{22} f' \sinh\theta - \lambda_{23} f' \cosh\theta \\ \left(\dfrac{g'f''}{g} + f''' - \dfrac{f'}{g^2} \right) \cosh\theta = \lambda_{31} g' + \lambda_{32} f' \sinh\theta - \lambda_{33} f' \cosh\theta \end{cases} \tag{4.48}$$

denklem sistemi elde edilir. $f' \neq 0$ ise o zaman M bir delinmiş timelike düzlem olur. $f' \neq 0$ idi. $g' \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (4.48) sisteminden $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$, $\lambda_{21} = \lambda_{23} = 0$ ve $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$ olur. O halde (4.48) denklem sistemi

$$\frac{g'g''}{g} + g''' = \lambda_{11} g' \tag{4.49}$$

$$\left(\frac{g'f''}{g} + f''' - \frac{f'}{g^2} \right) = \lambda_{22} f' \tag{4.50}$$

$$\left(\frac{g'f''}{g} + f''' - \frac{f'}{g^2} \right) = -\lambda_{33} f' \tag{4.51}$$

şeklinde yazılabilir. (4.50) ve (4.51) denklemleri $\lambda_{22} = -\lambda_{33}$ sonucunu verir. $\lambda_{11} = a$ $\lambda_{22} = -\lambda_{33} = b$ olsun. Buradan (4.49), (4.50), (4.51) denklemleri düzenlendiğinde

$$gg'f'' + g^2 f''' - \left(1 + bg^2\right) f' = 0 \tag{4.52}$$

$$\left(f'\right)^2 - \left(g'\right)^2 = -1 \tag{4.53}$$

$$g'g'' + gg''' = agg' \tag{4.54}$$

haline gelir. (4.53) denkleminin türevi alınırsa

$$f'f'' = g'g'' \tag{4.55}$$

olur. (4.55) eşitliğinden de türev alınırsa

$$\left(f''\right)^2 + f'f''' = \left(g''\right)^2 + g'g''' \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.55) ve (4.56) dan

$$f'' = \frac{g'g''}{f'} \quad \text{ve} \quad f''' = \frac{\left(g''\right)^2 + g'g''' - \left(f''\right)^2}{f'}$$

olup bu eşitlikler (4.52) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\left(1 + bg^2\right)\left(f'\right)^4 + g\left(f'\right)^2\left[\left(g'\right)^2 g'' + g\left(g''\right)^2 + gg'g'''\right] - \left(gg'g''\right)^2 = 0 \tag{4.57}$$

denklemi elde edilir. (4.53) denkleminden $\left(f'\right)^2 = \left(g'\right)^2 - 1$ olup bu eşitlik (4.57) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\left(1 + bg^2\right)\left(1 - \left(g'\right)^2\right)^2 - g\left(g'\right)^2\left[-\left(g'\right)^2 g'' - gg'g''' + g''\right] \\ &+\left[g^2\left(g''\right)^2 + g^2 g'g'''\right] = 0\end{aligned} \tag{4.58}$$

elde edilir. (4.54) eşitliği

$$\left(gg''\right)' = \frac{a}{2}\left(g^2\right)'$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $k \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$gg'' = \frac{a}{2}g^2 + k \tag{4.59}$$

olur ve bu ifade

$$2g'' = ag + \frac{2k}{g}$$

olarak yazılabilir. (4.59) denklemi için $P(g) = g'$ dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{dP^2}{dg} = ag + \frac{2k}{g}$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $c \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$\left(g'\right)^2 = \frac{a}{2}g^2 + 2k\ln|g| + c \tag{4.60}$$

olarak bulunur. (4.54) ve (4.59) denklemleri kullanılarak (4.58) denkleminden g'' ve g''' türevleri yok edilebilir. Buradan

$$g'' = \frac{a}{2}g + \frac{k}{g} \quad \text{ve} \quad g''' = \frac{a}{2}g' - k\frac{g'}{g^2}$$

türevleri (4.58) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1+bg^2\right)\left(1-\left(g'\right)^2\right)^2 + ag^2\left(g'\right)^2\left(1-\left(g'\right)^2\right) + \left(\frac{a}{2}g^2 + k\right)^2 = 0 \tag{4.61}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.61) denkleminden g' türevini yok etmek için (4.60) eşitliği kullanıldığı taktirde

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{4}(a-b)g^6+\left[2ka(a-b)\ln|g|+a(a-b)(c-1)\right]g^4\\
&+\left[4k(a-b)(c-1)\ln|g|+4k^2(a-b)(\ln|g|)^2+(a-b)(c-1)^2+ak\right]g^2\\
&-\left[4k^2(\ln|g|)^2+4k(c-1)\ln|g|+(c-1)^2+k^2\right]=0
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu ifadeden elde edilen

$$\left.\begin{array}{c}
a^2(a-b)=0\\
ka(a-b)=0\\
a(a-b)(c-1)=0\\
k(a-b)(c-1)=0\\
k^2(a-b)=0\\
(a-b)(c-1)^2+ak=0\\
k^2=0\\
k(c-1)=0\\
(c-1)^2+k^2=0
\end{array}\right\}$$

denklem sistemi ,

$$\begin{aligned}
&k=0\\
&c=1\\
&a(a-b)=0
\end{aligned}$$

şekline indirgenebilir. $a\neq 0$ olup $a=b$ elde edilir. O halde (4.60) denklemi $k=0$ $c=1$ olduğu için

$$g'=\mp\sqrt{\frac{a}{2}g^2+1}$$

halini alır.

$$g' = \pm\sqrt{\frac{a}{2}g^2 + 1}$$

ifadesinin integrali

$$\int \frac{dg}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{2}}g\right)^2 + 1}} = \pm\int dt \tag{4.62}$$

olarak elde edilir. (4.62) integralinin sonucu $a > 0$ ve $d \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}\sinh\left(\sqrt{\frac{a}{2}}(t+d)\right)$$

olarak bulunur.

$$\left(g'\right)^2 = \cosh^2\left(\sqrt{\frac{a}{2}}(t+d)\right)$$

olmak üzere (4.53) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$f' = \pm\sinh\left(\sqrt{\frac{a}{2}}(t+d)\right)$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $a > 0$ ve $e \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$f(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}\cosh\left(\sqrt{\frac{a}{2}}(t+d)\right) + e$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}\sinh\left(\sqrt{\frac{a}{2}}(t+d)\right) \quad \text{ve} \quad f(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}\cosh\left(\sqrt{\frac{a}{2}}(t+d)\right) + e$$

elde edilir.

Bu α nın merkezi x-ekseni üzerinde ve yarıçapı $r = \sqrt{\frac{2}{a}}$ olan bir çember olduğunu gösterir. Bundan dolayı *M* bir $S_1^2(r)$ Lorentz birim küresidir.

3. *M* nin dönme ekseni koordinat sisteminin y-ekseni olsun. *M* nin profil eğrisini α ile gösterelim o zaman α nın

$$\alpha(t) = \big(f(t), g(t), 0\big)\ ,\ t \in I$$

ile gösterildiğini kabul edebiliriz. Bu yüzden α, spacelike'dır. *M* yüzeyinin bir parametrelendirmesi

$$\varphi(t,\theta) = \big(f(t)\cosh\theta, g(t), f(t)\sinh\theta\big) \tag{4.63}$$

ile verilir. α spacelike olduğu için $(f')^2 + (g')^2 = 1$ bulunur. $\langle N, N\rangle_L = f^2(t)$ olduğundan, *M* $f(t) \neq 0$ için timelike'dır. *M* nin Laplace operatörü

$$\Delta = -\left(\frac{f'}{f}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$$

ile verilir. *M* üzerindeki Gauss dönüşümü

$$G = \left(-g'\cosh\theta, f', -g'\sinh\theta\right)$$

ile verilir.

Gauss dönüşümüne Laplace operatörü uygulandığında

$$\Delta G = \left(\left(\frac{f'g''}{f} + g''' - \frac{g'}{f^2} \right) \cosh\theta, -\left(\frac{f'f''}{f} + f''' \right), \left(\frac{f'g''}{f} + g''' - \frac{g'}{f^2} \right) \sinh\theta \right)$$

elde edilir.

$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ olmak üzere $\Delta G = \lambda G$ ifadesinden

$$\begin{cases} \left(\frac{f'g''}{f} + g''' - \frac{g'}{f^2} \right) \cosh\theta = -\lambda_{11} g' \cosh\theta + \lambda_{12} f' + \lambda_{13} g' \sinh\theta \\ -\left(\frac{f'f''}{f} + f''' \right) = -\lambda_{21} g' \cosh\theta + \lambda_{22} f' + \lambda_{23} g' \sinh\theta \\ \left(\frac{f'g''}{f} + g''' - \frac{g'}{f^2} \right) \sinh\theta = -\lambda_{31} g' \cosh\theta + \lambda_{32} f' + \lambda_{33} g' \sinh\theta \end{cases} \tag{4.64}$$

denklem sistemi elde edilir. $g' = 0$ ise o zaman M delinmiş timelike düzlemdir. Eğer $f' = 0$ ise o zaman M dairesel silindirdir. Silindirik yüzeyin bu çeşidine bir ikinci tip silindirik yüzey adı verilir. $f' \neq 0$ ve $g' \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (4.64) sisteminden $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 0$, $\lambda_{21} = \lambda_{23} = 0$ ve $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$ olur. O halde (4.64) denklem sistemi

$$\frac{f'g''}{f} + g''' - \frac{g'}{f^2} = -\lambda_{11} g' \tag{4.65}$$

$$-\frac{f'f''}{f} - f''' = \lambda_{22} f' \tag{4.66}$$

$$\frac{f'g''}{f} + g''' - \frac{g'}{f^2} = \lambda_{33} g' \tag{4.67}$$

şeklinde yazılabilir. (4.65) ve (4.67) denklemleri $\lambda_{33}=-\lambda_{11}$ sonucunu verir. $\lambda_{11}=a$ $\lambda_{33}=-a$ ve $\lambda_{22}=b$ olsun. Buradan (4.65), (4.66), (4.67) denklemleri düzenlendiğinde

$$ff'g''+f^2g'''-\left(1-af^2\right)g'=0 \tag{4.68}$$

$$\left(f'\right)^2+\left(g'\right)^2=1 \tag{4.69}$$

$$f'f''+ff'''=-bff' \tag{4.70}$$

haline gelir. (4.69) denkleminin türevi alınırsa

$$f'f''=-g'g'' \tag{4.71}$$

olur. (4.71) eşitliğinden de türev alınırsa

$$\left(f''\right)^2+f'f'''=-\left(g''\right)^2-g'g''' \tag{4.72}$$

elde edilir. (4.71) ve (4.72) den

$$g''=-\frac{f'f''}{g'} \quad \text{ve} \quad g'''=-\frac{\left(f''\right)^2+f'f'''+\left(g''\right)^2}{g'}$$

olup bu eşitlikler (4.68) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1-af^2\right)\left(g'\right)^4+f\left(g'\right)^2\left[\left(f'\right)^2f''+f\left(f''\right)^2+ff'f'''\right]+\left(ff'f''\right)^2=0 \tag{4.73}$$

denklemi elde edilir. (4.69) denkleminden $\left(g'\right)^2=1-\left(f'\right)^2$ olup bu eşitlik (4.73) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\left(1-af^2\right)\left(1-\left(f'\right)^2\right)^2+f\left(f'\right)^2\left[f''-\left(f'\right)^2f''-fff'''\right]\\&+\left[f^2\left(f''\right)^2+f^2ff'''\right]=0\end{aligned} \tag{4.74}$$

elde edilir. (4.70) eşitliği

$$\left(ff''\right)'=-\frac{b}{2}\left(f^2\right)'$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $k\in\mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$ff''=-\frac{b}{2}f^2+k \tag{4.75}$$

olur ve bu ifade

$$2f''=-bf+\frac{2k}{f}$$

olarak yazılabilir. (4.75) denklemi için $P(f)=f'$ dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{dP^2}{df}=-bf+\frac{2k}{f}$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $c\in\mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$\left(f'\right)^2=-\frac{b}{2}f^2+2k\ln\left|f\right|+c \tag{4.76}$$

olarak bulunur. (4.70) ve (4.75) denklemleri kullanılarak (4.74) denkleminden f'' ve f''' türevleri yok edilebilir. Buradan

$$f'' = -\frac{b}{2} f + \frac{k}{f} \quad \text{ve} \quad f''' = -\frac{b}{2} f' - k \frac{f'}{f^2}$$

türevleri (4.74) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(1 - af^2\right)\left(1 - (f')^2\right)^2 - bf^2 (f')^2 \left(1 - (f')^2\right) + \left(\frac{b}{2} f^2 - k\right)^2 = 0 \tag{4.77}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.77) denkleminden f' türevini yok etmek için (4.76) eşitliği kullanıldığı taktirde

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2}{4}(a-b) f^6 - \left[2kb(a-b)\ln|f| + b(a-b)(c-1)\right] f^4 \\
&+ \left[4k(a-b)(c-1)\ln|f| + 4k^2(a-b)\left(\ln|f|\right)^2 + (a-b)(c-1)^2 + bk\right] f^2 \\
&- \left[4k^2\left(\ln|f|\right)^2 + 4k(c-1)\ln|f| + (c-1)^2 + k^2\right] = 0
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Bu ifadeden elde edilen

$$\left.\begin{array}{c}
b^2(a-b) = 0 \\
kb(a-b) = 0 \\
b(a-b)(c-1) = 0 \\
k(a-b)(c-1) = 0 \\
k^2(a-b) = 0 \\
(a-b)(c-1)^2 + bk = 0 \\
k^2 = 0 \\
k(c-1) = 0 \\
(c-1)^2 + k^2 = 0
\end{array}\right\}$$

denklem sistemi ,

$$\begin{aligned}
k &= 0 \\
c &= 1
\end{aligned}$$

$$b(a-b)=0$$

şekline indirgenebilir. $b \neq 0$ olup $b=a$ elde edilir. O halde (4.76) denklemi $k=0$ $c=1$ olduğu için

$$f' = \mp\sqrt{\frac{-b}{2} f^2 + 1}$$

halini alır.

$$f' = \mp\sqrt{\frac{-b}{2} f^2 + 1}$$

ifadesinin integrali

$$\int \frac{df}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{b}{2}}f\right)^2}} = \pm \int dt \tag{4.78}$$

olarak elde edilir. (4.78) integralinin sonucu $b>0$ ve $d \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$f(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right)$$

olarak bulunur.

$$(f')^2 = \cos^2\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right)$$

olmak üzere bu ifade (4.69) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$g' = \pm \sin\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right)$$

elde edilir. Bu ifadenin integrali alınırsa $b > 0$ ve $e \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{b}}\cos\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right) + e$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak

$$f(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right) \quad \text{ve} \quad g(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{b}}\cos\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(t+d)\right) + e$$

elde edilir.

Bu α nın merkezi y-ekseni üzerinde ve yarıçapı $r = \sqrt{\frac{2}{b}}$ olan bir çember olduğunu gösterir. Bundan dolayı M bir $S_1^2(r)$ Lorentz birim küresidir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Dillen vd. (1990) ve Altın (2000) tarafından elde edilen sonuçlar detaylı bir şekilde incelenmiştir. Üçüncü bölümde $\mathbb{R}^3$ de Gauss dönüşümü 1-tipli olan dönel yüzeyler incelenerek bu tür yüzeylerin bir düzlem, bir küre veya bir dik dairsel silindir yüzeyi olduğu Teorem 3.1. de gösterilmiştir. Dördüncü bölümde $\mathbb{R}^3_1$ de Gauss dönüşümü 1-tipli olan dönel yüzeyler incelenerek bu tür yüzeylerin delinmiş düzlem, dairesel silindir veya hiperkuadrik yüzeyi olduğu Teorem 4.1. de gösterilmiştir.

İleri çalışmalar için Dillen vd. (1990) ve Altın (2000) tarafından elde edilen sonuçlara benzer olarak hiperyüzeyler içinde yeni sonuçlar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

A. Yıldız, 3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeylerin Gauss dönüşümlerinin bir karakterizasyonu, Yüksek Lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, 2004.

Altın, A., On the Gauss map of Surfaces of Revolution in $\mathbb{R}_1^3$, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 28 (2): 131-140, 2000.

Carmo, M. P. do, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall Inc., Brazil, 1976.

Chen, B. Y., Ishikawa S., On Classification of Some Surfaces of Revolution of Finite Type , Tsukuba J. Math., Vol.17, No.1, 287-298, 1993.

Dillen, F., Pas, J., Verstraelen, L., On the Gauss map of surfaces of revolution, Bull. Ins. Math. Acad. Sinica.,18: 239-246, 1990.

Duggal, K.L., Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications, Klower Academic Publishers , London, 1996.

Duggal, K.L., Jin, D.H, Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds, World Scientific Publishing, Singapore, 2007.

Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 2000.

Kuhnel, W., Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds , Student Mathematical Library Volume 16, American Mathematical Society, 2006.

Lipschutz, M. M., Theory and problems of Differential Geometry, Schaum's Outline Series , New York, 1969.

Liu, H. and Liu, G., On the Rotation Surfaces in 3-dimensional Minkowski space, Kyushu J. of Math., 48(2): 347-356, 1994.

M.A. Güngör, Lorentz uzayında 1-parametreli dual hareketler, Doktora tezi, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, 2006.

M. Dede, 3-boyutlu Minkowski uzayında Minimal regle yüzeyler, Yüksek Lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2006.

Milman, R. S., Elements of Differential Geometry , California State University Prentice-Hall Inc. , California, 1977.

Niang, A., On Rotation surfaces in the Minkowski 3-dimensional space with pointwise 1-type Gauss map, J.Korean Math. Soc. , 41: 1007-1021, 2004.

O'Neill, B., Elementary Differential Geometry , Elsevier Inc., New York, 2006.

O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity Academic Press , New York, 1983.

Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri , Nobel yayın dağıtım , Ankara, 2004.