KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU ÖKLİD VE 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYLARINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ NOKTASAL 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNE

Ayhatun SEVİL

NİSAN 2010

Matematik Anabilim Dalı Ayhatun SEVİL tarafından hazırlanan 3-BOYUTLU ÖKLİD VE 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYLARINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ NOKTASAL 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNE adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Kazım İLARSLAN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM	________________
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Kazım İLARSLAN	________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN	________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Burak BİRGÖREN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

3-BOYUTLU ÖKLİD VE 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYLARINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ NOKTASAL 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNE

SEVİL , Ayhatun
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Doç. Dr. Kazım İLARSLAN

Nisan 2010, 91 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde Öklid ve yarı-Öklidyen uzaylar tanıtılarak bu uzaylarda yüzeyler ve yüzeylerin geometrisi için gerekli kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Öklid 3-Uzayında Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli olan dönel yüzeyler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Minkowski 3- uzayında Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli olan dönel yüzeyler incelenmiştir.

Beşinci bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Öklid uzayı, Minkowski uzayı, Dönel Yüzey, Gauss Dönüşümü noktasal 1-tipli yüzey

ABSTRACT

ON ROTATION SURFACES WITH POINTWISE 1-TYPE GAUSS MAP IN EUCLIDEAN 3-SPACE AND MINKOWSKI 3-SPACE

SEVİL , Ayhatun
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

April 2010, 91 Pages

This thesis consist of four chapter. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, we introduce the spaces Euclidean and Minkowski.

Then we give some notion related with the geometry of surfaces in Euclidean 3-space as well as in Minkowski 3-space.

In the third chapter, the rotation surfaces with pointwise 1-type Gauss map are investigated in Euclidean 3-space.

In the fourth chapter, the rotation surfaces with pointwise 1-type Gauss map are investigated in Minkowski 3-space.

The fifth chapter is reserved for discussion and conclusion.

Key words: Euclidean space, Minkowski space, rotation surface, surface with pointwise 1-type Gauss map

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Kazım İLARSLAN'a, arkadaşlığından her zaman gurur duyduğum sevgili Seda KIZILIRMAK'a ve canım aileme çok teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET ………………………………………………………………………....i
ABSTRACT……………………………………………………………………..ii
TEŞEKKÜR……………………………………………………………………….iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ ……………………………………………………….....iv
ŞEKİLLER DİZİNİ………………………………………………………….....v
SİMGELER DİZİNİ ……………………………………………………………..vi
1. GİRİŞ ……………………………………………………………………....1
1.1. Kaynak Özetleri…………………………………………………………….....1
1.2. Çalışmanın Amacı…………………………………………………………....2
2. TEMEL KAVRAMLAR ……………………………………………….............3
2.1. Öklid 3-uzayı…………………………………………………………….....3
2.2. Minkowski 3-uzayı……………………………………………………………..10
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ NOKTASAL 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER…………………………………….....24
3.1. Birinci Çeşit Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli dönel yüzeyler……...34
3.2. İkinci Çeşit Gauss dönüşümü noktasal 1.tipli dönel yüzeyler……...41
4. 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ NOKTASAL 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER..……………………….....61
5. TARTIŞMA VE SONUÇ……………………………………………………....89
KAYNAKLAR……………………………………………………………….....90

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

2.1. Yüzey……………………………………………………………..….4

2.2. Dönel Yüzey (katenoid)……………………………………………......6

2.3. Gauss Dönüşümü……………………………………………….......7

3.1. Katenoid yüzeyi…….……………………………...................................31

3.2. Dik Koni …………………………………………………………...34

3.3. Düzlemin açık bir bölümü……………………………………………….60

3.4. Dik dairesel silindir.………………………………………………...60

4.1. Hiperbolik Silindir ..………………………………………………………83

4.2. Dik Koni ………………………………………….........................86

4.3. Hiperbolik Koni……………………………………………………….88

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{E}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n_v$	n-boyutlu yarı-Öklidyen uzay
$\mathbb{R}^n_1$	n-boyutlu Lorentz uzayı
$\mathbb{R}^3_1$	3-boyutlu Minkowski uzayı
G	Gauss Dönüşümü
K	Gauss eğriliği
H^2_0	Hiperbolik birim küre (Hiperbolik uzay)
Δ	Laplace operatörü
$\wedge_L$ (veya $\times_L$)	Lorentz anlamında vektörel çarpım
$\langle\ \rangle_L$	Lorentz anlamında iç çarpım
S^2_1	Lorentz birim küresi
H	Ortalama eğrilik
$\langle\ \rangle$	Öklid iç çarpımı
S	Şekil operatörü
$\times$	Vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Diferensiyel Geometride önemli çalışma konularından birisi de yüzeyler ve yüzeylerin sınıflandırılması problemidir. Bu problemin güncelliği günümüzde de geçerliliğini korumaktadır. Öklid uzayında verilen bir M yüzeyinin sınıflandırılmasında yüzeyin ortalama eğriliği H ve Gauss eğriliği K önemli rol oynamaktadır. Örneğin; yüzeyin her bir noktasında Gauss eğriliği "0" ise yüzey bir düzlem veya düzlem parçasıdır. Benzer şekilde; yüzeyin her bir noktasında ortalama eğrilik "0" ise yüzey bir minimal yüzeydir. (Minimal yüzeyin Gauss eğriliği $k \leq 0$ dır.)

1970 lerin sonlarına doğru Chen tarafından Öklid ve yarı Öklidyen uzaylarında sonlu tip alt manifold kavramı geliştirilmiş ve bu kavram daha sonra Chen ve Ishikawa (1993) tarafından diferensiyellenenebilir dönüşümlere özellikle de Gauss dönüşümlerine genişletilmiştir.Böylelikle yüzeylerin sınıflandırılmasında çok kullanışlı olan sonlu tipli Gauss dönüşümü kavramı geliştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayında Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli olan dönel yüzeyler incelenmiştir.

1.2. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Hacısalihoğlu (2000)'nun "Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II" kitabı, Sabuncuoğlu (2004)'nun "Diferensiyel Geometri" kitabı, O'Neill (2006) adlı yazarın "Elementary Differential Geometry" kitabı, Kuhnel (2006) adlı yazarın "Differential Geometry Curfes-Surfaces-Manifolds" kitabı ve Carmo (1976) adlı yazarın “Differential Geometry of Curves and Surfaces” adlı kitabı referanslarımız olmuştur. Ayrıca Minkowski 3-uzayı ve bu uzaydaki geometrik kavramlar için O’Neill (1983) adlı yazarın “Semi–Riemann Geometry with applications to relativity” kitabı ve Duggal ve Bejancu (1996) adlı yazarların ise “Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications” kitabından faydalanılmıştır. Ayrıca Dede (2006)’nin “3-boyutlu Minkowski uzayında Minimal regle yüzeyler” yüksek lisans tezinden de faydalanılmıştır.

Ayrıcan Chen vd. (2005) tarafından yayımlanan “Surfaces of Revolution with pointwise 1-type Gauss map” isimli makale, tez çalışmamızdaki “Öklid 3-uzayındaki Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli dönel yüzeyler” konusu için temel olmuştur. Minkowski uzayındaki Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli dönel yüzeyler çalışmamız içinde Niang (2004)’ın “On rotation surfaces in the Minkowski 3-dimensional space with pointwise 1-type Gauss map” makalesi temel alınmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışması ile iki farklı metrik geometri olan Öklid 3-uzayında ve Minkowski 3-uzayında Gauss dönüşümü noktasal 1 tipli olan dönel yüzeyler ayrıntılı olarak incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Öklid 3-uzayı ve Minkowski 3-uzayı tanıtılacak ve bu uzaylarda yüzeylerin diferensiyel geometrisinin çalışılabilmesi için gerekli olan kavramlar sunulacaktır.

2.1. Öklid 3-Uzayı

Tanım 2.1.1. (Öklid uzayı)

Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle : V \times V \to R$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \begin{cases} x = (x_1, \cdots, x_n) \\ y = (y_1, \cdots, y_n) \end{cases}$$

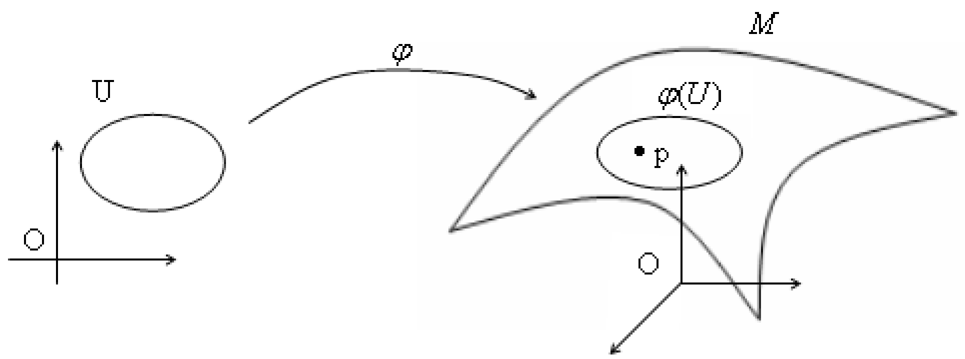
Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi kavramlar tanımlanabilir. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak Öklid uzayı adını alır. Özel olarak $A = \mathbb{R}^n$ ve $V = \mathbb{R}^n$ olarak alınırsa $A = \mathbb{R}^n$ Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir. $\mathbb{E}^n$, n-boyutlu standart Öklid uzayı adını alır.

Tanım 2.1.2. (Yüzey)

U, $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere, $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \to \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$

kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir basit yüzey denir. M, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir.

(Şekil 2.1.)



Şekil 2.1. Yüzey

Tanım 2.1.3. (Dönel yüzey)

$I \subset \mathbb{R}$ açık alt aralığı için, $\mathbb{R}^3$ deki bir Π düzleminin içindeki bir eğri $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Pi$ ve bu düzlemde γ eğrisini kesmeyen bir doğru ℓ olsun. γ eğrisinin ℓ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan yüzeye dönel yüzey denir. ℓ doğrusuna dönel yüzeyin ekseni, γ eğrisine de üreteç eğrisi denir. Yani, bir düzlem eğrisinin, kendini kesmeyen bir doğru (dönme ekseni) etrafında kaymadan dönmesi ile oluşan yüzeye dönel yüzey denir.

Dönme ekseni z olarak alınırsa, u eksenden uzaklığı, v boylamı verilen nokta ve eksenden geçen düzlemle xoz düzlemi arasındaki açıyı göstermek üzere, yüzeyin bir noktasının koordinatları,

$$x = u\cos v\ ,\quad y = u\sin v\ ,\ z = \varphi(u)$$

olur.

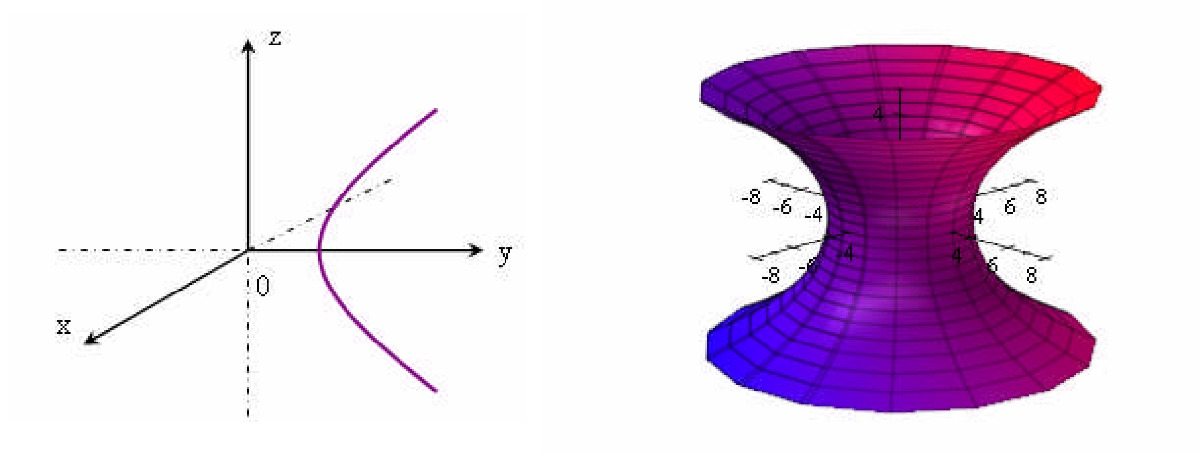
Örnek 2.1.1. $y = b\cosh\left(\dfrac{z}{b}\right)$ katenary eğrisinin, z ekseni etrafında dönmesi ile oluşan dönel yüzeye, katenoid yüzeyi denir. Buradaki b sabiti, katenary eğrisinin herhangi bir noktasının z eksenine olan uzaklığıdır. O halde, katenoid yüzeyinin parametrik denklemi;

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b\cosh(u/b) \\ 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\cosh\left(u/b\right)\cos v \\ b\cosh(u/b)\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece;

$$x = b\cosh(u/b)\cos v,\qquad y = b\cosh(u/b)\sin v\ ,\qquad z = u$$

olduğu görülür. (Şekil 2.2.)



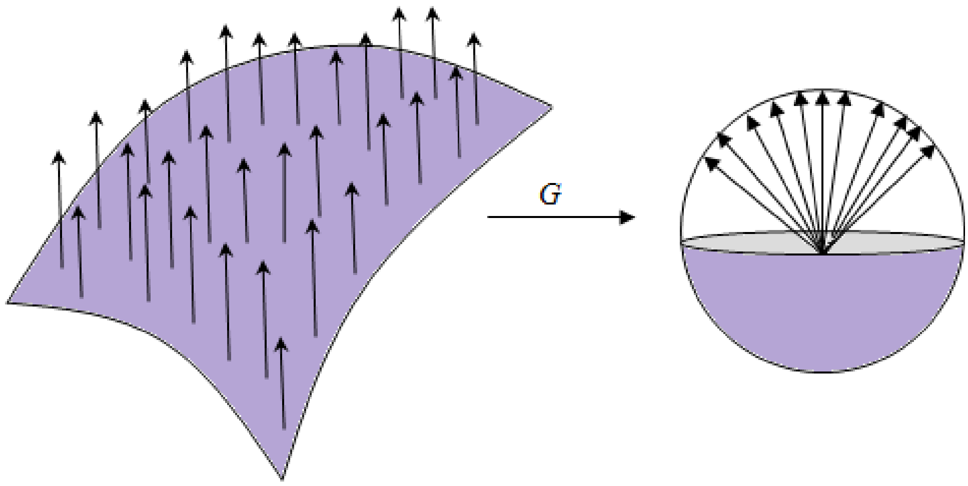
Şekil 2.2. Dönel Yüzey (Katenoid)

Tanım 2.1.4. (Gauss dönüşümü)

M **,** 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey olsun. S^2 orjin merkezli birim küre olmak üzere M nin her bir noktasını S^2 nin merkezine birim normal vektör taşıyan

$$G : M \to S^2 \subset E^3$$
$$p \to G(p) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$$

dönüşümü M yüzeyinin Gauss dönüşümü olarak adlandırılır. (Şekil 2.3.)



Şekil 2.3. Gauss dönüşümü

Tanım 2.1.5. (İzometrik immersiyon)

M, $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey olsun. $F : M \to \mathbb{E}^3$ dönüşümünün türev dönüşümü F_* olmak üzere eğer F_*, T_pM deki iç çarpımı koruyorsa F ye bir izometrik immersiyon adı verilir.

Tanım 2.1.6. (Laplace operatörü)

$x : M^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu, n-boyutlu Riemann manifoldu M den, m-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ ye bir izometrik immersiyon olsun. Bir diğer ifadeyle

$$\left[\langle \alpha, \beta \rangle = \langle x_*(\alpha), x_*(\beta) \rangle \right]$$

dir. M üzerindeki lokal koordinatlar $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ verildiğinde $\mathbb{R}^m$ den indirgenen metriği,

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle, \quad (1 \le i, j \le n)$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $\mathcal{G} = \det(g_{ij})$ ve $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ olmak üzere M nin $\mathbb{R}^m$ den indirgenmiş metriğe göre Laplace operatörü;

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\sqrt{\mathcal{G}} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.7. (Gauss dönüşümü 1-tipli olan yüzeyler)

Öklid veya yarı-Öklidyen uzayının bir M alt manifoldu varsa; Δ, M üzerinde indirgenen metriğe karşılık gelen Laplace operatörü olmak üzere bazı $\lambda \in \mathbb{R}$ ve bazı C sabit vektörleri için G ,

$$\Delta G = \lambda (G + C)$$

eşitliğini sağlar.

Tanım 2.1.8. (Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli olan yüzeyler)

Öklid veya yarı-Öklidyen uzaylarının bir M alt manifoldu varsa ; Δ, M üzerinde indirgenen metriğe karşılık gelen Laplace operatörü olmak üzere, bazı sabit olmayan f fonksiyonu ve bazı C sabit vektörü için ;

$$\Delta G = f (G + C) \tag{2.1.1}$$

dir. Eğer M alt manifoldu yukarıdaki eşitliği sağlarsa Gauss dönüşümü noktasal 1-tiplidir denir. Eğer yukarıda tanımlanan C vektörü sıfır vektörü ise Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli olan alt manifold birinci çeşitten, sıfırdan farklı ise ikinci çeşittendir denir.

2.2. Minkowski 3-Uzayı

Minkowski Uzayı Alman matematikçi Herman Minkowski (1864-1909) tarafından 1907 yılında tanımlanmıştır. Matematiksel fizikte, 1905 yılında Einstein tarafından ortaya konan izafiyet teorisi için en uygun matematiksel model Minkowski uzay-zamandır. Minkowski uzay zaman (4-boyutlu Minkowski uzayı) modeli uzayın genel 3 boyutu ile zamanın bir boyutunun birleşmesiyle elde edilen 4 boyutlu bir manifold olarak düşünülebilir.

Bu bölümde Minkowski uzayı ve bu uzayda yüzeyler ve yüzeylerin geometrisi için gerekli kavramlar verilecektir.

Tanım 2.2.1. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \to R$$

dönüşümü bilineer ve simetrik ise g ye V üzerinde simetrik bilineer form denir. Bu dönüşüm aynı zamanda nondejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu durumda V vektör uzayına da bir skalar çarpım uzayı denir.

Ayrıca ,

(i) Her $\vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v},\vec{v}) > 0$ ise, g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

(ii) Her $\vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v},\vec{v}) < 0$ ise , g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

(iii) Her $\vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v},\vec{v}) \geq 0$ ise bu durumda g simetrik bilineer formuna yarı-pozitif tanımlı,

(iv) Her $\vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise bu durumda g simetrik bilineer formuna yarı-negatif tanımlıdır denir.

Tanım 2.2.2. V bir skalar çarpım uzayı , W da üzerindeki skalar çarpım negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skalar çarpımın indeksi denir. g skalar çarpımının indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.3. V skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir.

Tanım 2.2.4. V bir Lorentz uzayı olsun. $\vec{v} \in V$ için,

$i)$ $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,

$ii)$ $g(v,v) < 0$ ise v ye timelike vektör,

$iii)$ $g(v,v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v ye null (ligtlike) vektör ve $\|v\| = |g(v,v)|^{\frac{1}{2}}$ reel sayısına v vektörünün normu denir.

Tanım 2.2.5. V bir Lorentz uzayı ve W, V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda

$i)$ $g|_W$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike altuzay,

$ii)$ $g|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike altuzay,

$iii)$ $g|_W$ dejenere ise W ya lightlike alt uzay denir.

Tanım 2.2.6. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik nondejenere ve sabit indeksli (0,2) tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir.

Başka bir deyişle g, M manifoldunun her p noktasına T_pM tanjant uzayı üzerinde bir g_p skalar çarpımı karşılık getirir ve g skalar çarpımının indeksi her $p \in M$ için aynıdır.

Tanım 2.2.7. $\mathbb{R}^n$**,** n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde her $p \in \mathbb{R}^n$ ve $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\langle v_p, w_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-\nu} v_i w_i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n} v_i w_i$$

eşitliğiyle verilen ν-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya yarı Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir. Burada $1 \le i \le n$ olmak üzere, sırasıyla v_i ve w_i ler v_p ve w_p tanjant vektörlerin bileşenleridir.

Tanım 2.2.8. $\mathbb{R}^n_\nu$ yarı öklidyen uzayında $\nu = 1$ ve $n \ge 2$ ise $\mathbb{R}^n_1$ yarı- Öklidyen uzayına n-boyutlu Lorentz uzayı denir.

Tanım 2.2.9. n**-**boyutlu, ν indeksli $\mathbb{R}^n_\nu$ yarı-Öklidyen uzayının, boyutunu 3 ve indeksini 1 olarak alalım. Böylece $\mathbb{R}^3$ üzerinde her $p \in \mathbb{R}^3$ ve $v_p, w_p \in T_p\mathbb{R}^3$ için,

$$\langle v_p, w_p \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3$$

eşitliğiyle verilen 1-indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen uzaya 3-boyutlu Minkowski Uzayı denir ve $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.10. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında iki vektör v ve w olsun. $v=(v_1, v_2, v_3)$ ve $w=(w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere,

$$\left(v_3w_2 - v_2w_3, v_1w_3 - v_3w_1, v_1w_2 - v_2w_1\right)$$

vektörüne v ve w nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir. $v \times_L w$ veya $v \wedge_L w$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \quad ise \\ 0, & i \neq j \quad ise \end{cases} \qquad ve \qquad e_i = \left(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}\right)$$

olmak üzere

$$u \wedge_L w = -\det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$u \wedge_L w = \det\begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Burada $e_1 \wedge_L e_2 = e_3$, $e_2 \wedge_L e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge_L e_1 = -e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır. Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilecek olursa o zaman $e_1 \wedge_L e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge_L e_3 = e_1$, $e_3 \wedge_L e_1 = e_2$ olur. Bu durumda,

$$u \wedge_L w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Minkowski 3-Uzayında Dönel Yüzeyler

$\mathbb{R}_1^3 = \left(\mathbb{R}^3, -dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$ Minkowski 3-uzayı olsun. $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ ve $e_3 = (0,0,1)$ Minkowski uzayının standart çatısı olmak üzere, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında dönmeler üç gruba ayrılmaktadır. e_2, e_3 spacelike eksenler etrafındaki dönmeler, e_1 timelike eksen etrafındaki dönmeler, $e_1 \pm e_2$, $e_1 \pm e_3$ null eksenler etrafındaki dönmeler. Bu dönmeleri aşağıdaki matrislerle karakterize edebiliriz.

i) e_2 spacelike eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} \cosh y & 0 & \sinh y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh y & 0 & \cosh y \end{pmatrix}$$

ii) e_3 spacelike eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} \cosh y & \sinh y & 0 \\ \sinh y & \cosh y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) e_1 timelike eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y & -\sin y \\ 0 & \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

iv) $e_1 + e_2$ eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{2} & -\frac{y^2}{2} & y \\ \frac{y^2}{2} & 1-\frac{y^2}{2} & y \\ y & -y & 1 \end{pmatrix}$$

v) $e_1 - e_2$ eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{2} & \frac{y^2}{2} & -y \\ -\frac{y^2}{2} & 1-\frac{y^2}{2} & y \\ -y & -y & 1 \end{pmatrix}$$

vi) $e_1 + e_3$ eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{2} & y & -\frac{y^2}{2} \\ y & 1 & -y \\ \frac{y^2}{2} & y & 1-\frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

vii) $e_1 - e_3$ eksen etrafındaki dönmeye karşılık gelen dönme matrisi

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{y^2}{2} & -y & \frac{y^2}{2} \\ -y & 1 & -y \\ -\frac{y^2}{2} & y & 1-\frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 2.2.11. (Gauss Dönüşümü)

M, $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey, $p \in M$ ve $\mathsf{n}(p)$ M yüzeyinin p noktasındaki birim normal vektörü olsun. M yüzeyinin Gauss dönüşümü

$$\begin{aligned} G : M &\to S_1^2(1) \; veya \; H_0^2(1) \\ G(p) &= \mathsf{n}(p) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Eğer G, M nin değerlerini $S_1^2(1)$ de alırsa M ye Lorentz yüzeyi , $H_0^2(1)$ de alırsa M ye Riemann yüzeyi adı verilir.

Tanım 2.2.12. (Şekil Operatörü)

$x(u,v)$ parametrizasyonuyla verilen bir M yüzeyi için,

$$U = \frac{x_u \wedge x_v}{\left\| x_u \wedge x_v \right\|}$$

birim vektör alanıdır. $p \in M$ için

$$S : T_pM \to T_pM$$

$$x_p \to S\left(x_p\right)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona yüzeyin şekil operatörü denir.

$$I\left(x_p, y_p\right) = \left\langle x_p, y_p \right\rangle$$

eşitliğine yüzeyin birinci temel formu denir ve

$$I = \left\langle x_u, x_u \right\rangle du^2 + 2\left\langle x_u, x_v \right\rangle dudv + \left\langle x_v, x_v \right\rangle dv^2$$

şeklinde ifade edilir.

$$II\left(x_p, y_p\right) = \left\langle S\left(x_p\right), y_p \right\rangle$$

eşitliğine ise yüzeyin ikinci temel formu denir ve

$$II = \langle G, x_{uu} \rangle du^2 + 2\langle G, x_{uv} \rangle dudv + \langle G, x_{vv} \rangle dv^2$$

ile ifade edilir.

$$S\left(x\right) = -\frac{dU}{\left\| x_p \right\|}$$

ve

$$y = dx$$

alalım. O zaman yüzeyin ikinci temel formu

$$II\left(x_p, y_p\right) = -\left\langle dU, dx \right\rangle$$

şeklindedir. Ayrıca $dx \perp U$ olduğundan

$$\left\langle U, dx \right\rangle = 0$$

dır. Bu denklemin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\left\langle dU, dx \right\rangle + \left\langle U, d^2 x \right\rangle = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\left\langle U, d^2 x \right\rangle = -\left\langle dU, dx \right\rangle \tag{2.2.1}$$

bulunur. x in tam diferensiyeli

$$dx = x_u du + x_v dv$$

olmak üzere

$$d^2x = x_{uu}d^2u + 2x_u x_v dudv + x_{vv}d^2v$$

dır. O halde

$$\langle U, d^2x\rangle = \langle U, x_{uu}\rangle d^2u + 2\langle U, x_u x_v\rangle dudv + \langle U, x_{vv}\rangle d^2v \qquad (2.2.2)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$L = \langle U, x_{uu}\rangle$$

$$M = \langle U, x_{uv}\rangle$$

$$N = \langle U, x_{vv}\rangle$$

dır. O halde (2.2.1) denklemi

$$\langle U, d^2x\rangle = Ld^2u + 2Mdudv + Nd^2v$$

şeklinde yazılabilir. Yüzeyin U normalinin tam diferensiyeli

$$dU = U_u du + U_v dv$$

dır. O halde

$$\langle dU, dx\rangle = \langle U_u du + U_v dv, x_u du + x_v dv\rangle$$

dir. Buradan da

$$\langle dU, dx\rangle = \langle U_u, x_u\rangle d^2u + \langle U_v, x_u\rangle dudv + \langle U_u, x_v\rangle dudv, \langle U_v, x_v\rangle d^2v \qquad (2.2.3)$$

elde edilir. (2.2.1) denkleminde (2.2.2) ve (2.2.3) eşitliklerini yerine yazalım.

$$\begin{aligned} L &= \langle U, x_{uu}\rangle = -\langle U_u, x_u\rangle \\ M &= \langle U, x_{uv}\rangle = -\langle U_v, x_u\rangle dudv + \langle U_u, x_v\rangle dudv \\ N &= -\langle U, x_{vv}\rangle = -\langle U_v, x_v\rangle \end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_u\rangle \\ F &= \langle x_u, x_v\rangle \\ G &= \langle x_v, x_v\rangle \end{aligned}$$

olmak üzere $\{v, w\}$ T_pM nin bir bazı olsun. O zaman

$$S(v) = av + bw, \quad S(w) = cv + dw$$

şeklinde yazabiliriz.

$$S(v) \wedge S(w) = (av + bw) \wedge (cv + dw)$$

$$= (ad-bc)(v \wedge w)$$

$$= \det(S)(v \wedge w)$$

dir.

$$S(v) \wedge S(w) = K(v \wedge w)$$

eşitliğinin her iki tarafını $u \wedge w$ ile çarparsak,

$$\langle S(v) \wedge S(w), v \wedge w \rangle = K \langle v \wedge w, v \wedge w \rangle$$

elde edilir. Lagrange özdeşliğinden dolayı

$$\langle S(v), v \rangle \langle S(w), w \rangle - \langle S(v), w \rangle \langle S(w), v \rangle = K \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle w, v \rangle \langle v, w \rangle \qquad (2.2.5)$$

dir. Şekil operatörü self-adjoint olduğundan

$$\langle S(v), w \rangle = \langle S(w), v \rangle$$

yazılır ve

$$v = x_u, w = x_v$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} L &= \langle S(v), v\rangle & E &= \langle v, v\rangle \\ N &= \langle S(w), w\rangle & G &= \langle w, w\rangle \\ M &= \langle S(w), v\rangle & F &= \langle w, v\rangle \end{aligned}$$

eşitliklerini (2.2.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{2.2.6}$$

bulunur. Ve bu ifadeye yüzeyin Gauss eğriliği denir. Ayrıca k_1 ve k_2 yüzeyin esas eğrilikleri olmak üzere

$$K = k_1 k_2 \tag{2.2.7}$$

dir. Benzer yolla

$$\begin{aligned} S(v) \wedge w + v \wedge S(w) &= (av + bw) \wedge w + v \wedge (cv + dw) \\ &= (a + d) v \wedge w \\ &= iz(S) v \wedge w \end{aligned}$$

dir. Buradan da

$$S(v) \wedge w + v \wedge S(w) = 2Hv \wedge w$$

eşitliğinin her iki tarafını $u \wedge w$ ile çarparsak,

$$\left\langle S(v) \wedge w + v \wedge S(w), v \wedge w \right\rangle = 2H \left\langle v \wedge w, v \wedge w \right\rangle \qquad (2.2.8)$$

dır. Lagrange özdeşliğinden dolayı

$$\begin{aligned}\left[S(v) \wedge w + v \wedge S(w) \right](v \wedge w) = & \left\langle S(v), v \right\rangle \left\langle w, w \right\rangle - \left\langle S(v), w \right\rangle \left\langle w, v \right\rangle \\ & + \left\langle v, v \right\rangle \left\langle S(w), w \right\rangle - \left\langle v, w \right\rangle \left\langle S(w), v \right\rangle \\ = & \; GL - FM + EN - FM\end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.8) eşitliği kullanılarak,

$$2H (v \wedge w)(v \wedge w) = EN - 2FM + GL$$

elde edilir. Buradan da

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \qquad (2.2.9)$$

olur. Bu ifadeye de yüzeyin ortalama eğriliği denir. Ayrıca k_1 ve k_2 yüzeyin esas eğrilikleri olmak üzere

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \qquad (2.2.10)$$

dir.

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ NOKTASAL 1-TİPLİ OLAN DÖNELYÜZEYLER

Bu bölümde Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli olan dönel yüzeyler incelenecektir. $a< v< b,\ \ 0<u<2\pi$ olduğunda bazı φ ve ψ fonksiyonları için $\mathbb{E}^3$ te M dönel yüzeyi

$$x(u,v)=(\varphi(v)\cos u,\varphi(v)\sin u,\psi(v)) \tag{3.1}$$

şeklinde verilsin. M dönel yüzeyinin hangi durumlarda Gauss dönüşümünün noktasal bir tipli olduğunu araştıracağız. Bunun için ilk olarak aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1. $\mathbb{E}^3$ te Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli dönel yüzey M olsun. Bu durumda G Gauss dönüşümü harmoniktir yani $\Delta G=0$ veya (2.1.1) de tanımlanan f fonksiyonu sadece v ye bağlıdır ve (2.1.1) deki C vektörü dönel yüzeyin eksenine paraleldir.

İspat:

(3.1) de ifade edilen dönel yüzeyin profil eğrisini birim hızlı kabul edelim.

$$x(u,v)=(\varphi(v)\cos u,\varphi(v)\sin u,\psi(v))$$

ile parametrize edilen M dönel yüzeyinin G Gauss dönüşümü

$$x_u\times x_v=(\varphi(v)\psi'(v)\cos u,\varphi(v)\psi'(v)\sin u,-\varphi(v)\varphi'(v))$$

$$\|x_u \times x_v\| = \sqrt{\varphi^2(v)\psi'^2(v)\cos^2 u + \varphi^2(v)\psi'^2(v)\sin^2 u + \varphi^2(v)\varphi'^2(v)}$$
$$= \varphi(v)$$

olmak üzere

$$G = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \left(\psi'(v)\cos u, \psi'(v)\sin u, -\varphi'(v)\right) \tag{3.2}$$

olarak elde edilir. Şimdi $\left(g_{ij}\right)$ matrisinin elemanlarını bulalım. Buradan

$$g_{11} = \langle x_u, x_u \rangle, \quad g_{12} = g_{21} = \langle x_u, x_v \rangle, \quad g_{22} = \langle x_v, x_v \rangle$$

olmak üzere

$$g_{11} = \varphi^2(v), \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1$$

elde edilir. $\left(g_{ij}\right)$ matrisinin determinantı

$$\left|g_{ij}\right| = \begin{vmatrix} \varphi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \varphi^2(v), \quad \mathcal{G} = \det\left(g_{ij}\right) = \varphi^2(v)$$

olur. $\left(g_{ij}\right)$ matrisinin tersi,

$$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varphi^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$g^{11}=\frac{1}{\varphi^2(v)}\ ,\quad g^{12}=0=g^{21},\quad g^{22}=1$$

dir. Şimdi Laplace operatörünü hesaplayalım. Laplace operatörünün;

$$\Delta=\frac{-1}{\sqrt{\mathcal{G}}}\sum_{i,j}^{2}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sqrt{\mathcal{G}}g^{ij}\frac{\partial}{\partial u_j}\right)$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\Delta=-\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\mathcal{G}}g^{11}\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\mathcal{G}}g^{21}\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\mathcal{G}}g^{12}\frac{\partial}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\mathcal{G}}g^{22}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]$$

$$\Delta=-\frac{1}{\varphi(v)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi(v)\frac{1}{\varphi^2(v)}\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi(v)\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi(v)\frac{\partial}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi(v)\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{\varphi(v)}\left[\frac{1}{\varphi(v)}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\varphi^{'}(v)\frac{\partial}{\partial v}+\varphi(v)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{\varphi^2(v)}\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\frac{\partial}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial v^2}$$

elde edilir. $G=\left(\psi'(v)\cos u,\psi'(v)\sin u,-\varphi'(v)\right)$ Gauss dönüşümüne Laplace operatörünü uyguladığımız takdirde

$$\Delta G=\left(\left(\frac{\psi'}{\varphi^{2}}-\frac{\varphi'\psi'''}{\varphi}-\psi'''\right)\cos u,\left(\frac{\psi'}{\varphi^{2}}-\frac{\varphi'\psi'''}{\varphi}-\psi'''\right)\sin u,\frac{\varphi'\varphi''}{\varphi}+\varphi'''\right) \tag{3.3}$$

elde edilir. Eğer M noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip ise bazı f fonksiyonları ve bazı C vektörleri için (2.1.1) sağlanır. Gauss dönüşümü harmonik olmadığı zaman , (2.1.1), (3.2) ve (3.3) de gösterilen C nin ilk iki bileşeni sıfır olmalı ve $C=(0,0,c)$ olduğunda,

$$\frac{\psi'}{\varphi^{2}}-\frac{\varphi'\varphi''}{\varphi}-\psi'''=f\,\psi'(v)\,,\qquad \frac{\varphi'\varphi''}{\varphi}+\varphi^{'''}=f\left(-\varphi'(v)+c\right) \tag{3.4}$$

olur. $\psi'(v)$ ve $\varphi'(v)$ nin her ikiside sıfırdan farklı olduğu için f fonksiyonu u dan bağımsızdır.

Aşağıda, birinci ve ikinci çeşit Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli dönel yüzey örneklerini verelim.

Örnek 3.1.

Bir katenoid'in

$$x\left(u,v\right)=\left(\sqrt{1+v^{2}}\cos u,\sqrt{1+v^{2}}\sin u,\sinh^{-1}v\right)$$

ile parametrize edildiğini düşünelim. Bu durumda katenoid'in Gauss dönüşümü

$$G=\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\left(\cos u,\sin u,-v\right)$$

olur. Gerçekten parametrik olarak ifade edilen

$$x\left(u,v\right)=\left(\sqrt{1+v^2}\cos u,\sqrt{1+v^2}\sin u,\sinh^{-1}v\right)$$

dönel yüzeyin sırasıyla u ve v ye göre kısmi türevleri;

$$x_u=\left(-\sqrt{1+v^2}\sin u,\sqrt{1+v^2}\cos u,0\right),$$

$$x_v=\left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\cos u,\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\sin u,\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right)$$

olmak üzere

$$x_u\times x_v=\left(\cos u,\sin u,-v\right)\ ,\quad \left\|x_u\times x_v\right\|=\sqrt{1+v^2}$$

elde edilir. Buna göre Gauss dönüşümü

$$G=\frac{x_u\times x_v}{\left\|x_u\times x_v\right\|}=\left(\frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}},\frac{\sin u}{\sqrt{1+v^2}},\frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}\right)$$

olur. Laplace operatöründe ifade edilen $\left(g_{ij}\right)$ matrisinin elemanları

$$g_{11} = \langle x_u , x_v \rangle = 1 + v^2 ,$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle x_u , x_v \rangle = 0 ,$$

$$g_{22} = \langle x_v , x_v \rangle = 1 ,$$

olup bu matris

$$\left(g_{ij} \right) = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buradan

$$\det\left(g_{ij} \right) = \mathcal{G} = v^2 + 1$$

olup $\left(g_{ij} \right)$ matrisinin tersi

$$\left(g^{ij} \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+v^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. O halde Laplace operatörü

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\mathcal{G}} g^{11} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\mathcal{G}} g^{21} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\mathcal{G}} g^{12} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\mathcal{G}} g^{22} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{v^2+1}\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{v}{v^2+1}\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

olarak elde edilir. G Gauss dönüşümüne Laplace operatörünü uygulayalım. $G=\left(G_1, G_2, G_3\right)$ olmak üzere $\Delta G=\left(\Delta G_1,\ \Delta G_2,\ \Delta G_3\right)$ diyelim. O halde

$$\Delta G_1=-\frac{1}{v^2+1}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}}\right)-\frac{v}{v^2+1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}}\right)-\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}}\right)$$

$$=\frac{2}{\left(1+v^2\right)^2}\frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}}\ ,$$

$$\Delta G_2=\frac{2}{\left(1+v^2\right)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{1+v^2}}\ ,$$

$$\Delta G_3=-\frac{1}{v^2+1}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}\right)-\frac{v}{v^2+1}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}\right)-\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}\right)$$

$$=\frac{-2v}{\left(1+v^2\right)^2\sqrt{1+v^2}}$$

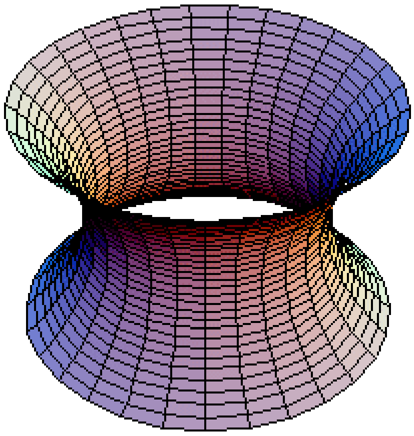
elde edilir ki

$$\begin{aligned}\Delta G&=\left(\Delta G_1,\ \Delta G_2,\ \Delta G_3\right)\\&=\left(\frac{2}{\left(1+v^2\right)^2}\frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}},\frac{2}{\left(1+v^2\right)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{1+v^2}},\frac{2}{\left(1+v^2\right)^2}\frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}\right)\\&=\frac{2}{\left(1+v^2\right)^2}\left(\frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}},\frac{\sin u}{\sqrt{1+v^2}},\frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\Delta G = \frac{2}{\left(1+v^2\right)^2} G$$

dir. Sonuç olarak $x(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, \sinh^{-1} v\right)$ katenoid dönel yüzeyinin Gauss dönüşümü noktasal 1-tiplidir ve birinci çeşittendir.(Şekil 3.1.)



Şekil 3.1. Katenoid Yüzeyi

Örnek 3.2.

$$x(u,v) = \left(v\cos u, v\sin u, av\right) \quad a \geq 0$$

ile parametrize edilen bir dik koniyi ele alalım. Dönel yüzeyin sırasıyla u ve v ye göre kısmi türevleri,

$$x_u = \left(-v\sin u, v\cos u, 0\right), \quad x_v = \left(\cos u, \sin u, a\right)$$

olup

$$x_u \times x_v = \left(v\cos ua, v\sin a, -v\right)$$

$$\left\|x_u \times x_v\right\| = v\sqrt{a^2+1}$$

elde edilir ki Gauss dönüşümü

$$G = \frac{x_u \times x_v}{\left\|x_u \times x_v\right\|} = \frac{\left(v\cos ua, v\sin ua, -v\right)}{v\sqrt{a^2+1}}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a\cos u, a\sin u, -1)$$

olarak bulunur. Laplace operatöründe ifade edilen $\left(g_{ij}\right)$ matrisinin elemanları

$$g_{11} = \left\langle x_u, x_u \right\rangle = v^2,$$

$$g_{12} = \left\langle x_u, x_v \right\rangle = g_{21} = 0,$$

$$g_{22} = \left\langle x_v, x_v \right\rangle = 1 + a^2,$$

olur ve matris

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $\left(g_{ij}\right)$ matrisinin determinantı

$$\det\left(g_{ij}\right) = \mathcal{G} = v^2\,(a^2+1)$$

olup inversi

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. O halde Laplace operatörü

$$\Delta = -\frac{1}{v\sqrt{a^2+1}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(v\sqrt{a^2+1}\,\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(v\sqrt{a^2+1}\,\frac{1}{a^2+1}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{1}{v(a^2+1)}\frac{\partial}{\partial v}-\frac{1}{a^2+1}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

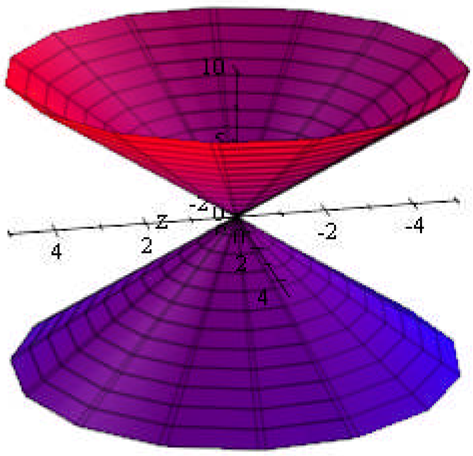
olur. G ye Laplace operatörünü uygulayalım. Buradan

$$\Delta G = \frac{1}{v^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cos u, \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin u, 0\right)$$

$$\Delta G = \frac{1}{v^2}\left(\left(\frac{a\cos u}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{a\sin u}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right) = \frac{1}{v^2}\left(G+\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right)$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak parametrik olarak ifade edilen $x(u,v) = (v\cos u, v\sin u, av)$ dönel yüzeyinin Gauss dönüşümü noktasal 1-tiplidir ve ikinci çeşittendir. (Şekil 3.2.)



Şekil 3.2. Dik Koni

3.1. Birinci Çeşitten Noktasal 1-Tipli Gauss Dönüşümüne Sahip Dönel Yüzeyler

Bu bölümün amacı aşağıdaki teoremin ispatıdır.

Teorem 3.1.1.

$\mathbb{E}^3$ te bir dönel yüzeyin sabit ortalama eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter şart yüzeyin birinci çeşitten noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olmasıdır.

İspat:

Bazı pozitif φ fonksiyonu için M ,

$$x(u,v) = (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v))$$

ile parametrize edilen bir dönel yüzey olsun. Profil eğrisini birim hızlı kabul edelim. Böylece

$$\varphi'(v)^2 + \psi'(v)^2 = 1 \tag{3.1.1}$$

olur. Bazı $\theta=\theta(v)$ fonksiyonu için

$$\varphi'(v)=\cos\theta(v), \qquad \psi'(v)=\sin\theta(v) \tag{3.1.2}$$

olur. Birinci ve ikinci temel formun katsayıları,

$$\begin{aligned}
E&=\langle x_u,x_u\rangle=\varphi^2(v) & \ell&=\langle x_{uu},N\rangle=-\varphi(v)\psi'(v)\\
F&=\langle x_u,x_v\rangle=0 & m&=\langle x_{uv},N\rangle=0\\
G&=\langle x_v,x_v\rangle=1 & n&=\langle x_{vv},N\rangle=\varphi''(v)\psi'(v)-\psi''(v)\varphi'(v)
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler

$$H=\frac{G\ell+En-2Fm}{2(EG-F^2)}$$

eşitliğinde yerlerine yazıldığında

$$H=\frac{-\varphi'+\varphi(\psi\varphi''-\psi''\varphi')}{2\varphi} \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$K=\frac{\ell n-m^2}{EG-F^2}$$

eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılırsa

$$K = \frac{\left(-\varphi(v)\psi'(v)\right)\left(\varphi''(v)\psi'(v) - \psi''(v)\varphi'(v)\right)}{\varphi^2(v)}$$

$$K = \frac{-\varphi''(v)}{\varphi(v)} \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Kabul edelim ki M birinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olsun. O zaman (2.1.1) durumu

$$\Delta G - \langle \Delta G, G \rangle G = 0 \tag{3.1.5}$$

eşitliğini gösteriri ki $\langle , \rangle$ $\mathbb{E}^3$ üzerinde standart iç çarpımdır. Buradan,

$$\langle \Delta G, G \rangle = \left(\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{\varphi'\psi''\psi'}{\varphi} - \psi'\psi''' - \frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi} - \varphi'\varphi''' \right)$$

dir.

$$\Delta G = \langle \Delta G, G \rangle G$$

eşitliğinde ifadeleri yerlerine yazıp karşılıklı bileşenleri eşitlersek;

$$\left(\frac{\psi'}{\varphi^2}-\frac{\varphi'\psi''}{\varphi}-\psi'''\right)=\left(\frac{\psi'^3}{\varphi^2}-\frac{\varphi'\psi''\psi'^2}{\varphi}-\psi'^2\psi'''-\frac{\varphi'^2\varphi''\psi'}{\varphi}-\varphi'\varphi'''\psi'\right)$$

$$\left(\frac{\varphi'\varphi''}{\varphi}+\varphi'''\right)=\left(\frac{-\psi'^2\varphi'}{\varphi^2}+\frac{\varphi'^2\psi''\psi'}{\varphi}+\psi'\psi'''\varphi'+\frac{\varphi'^3\varphi''}{\varphi}+\varphi'^2\varphi'''\right)$$

elde edilir.Birinci eşitliği φ' ile, ikinci eşitliği ψ' ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$\frac{\psi'\varphi'}{\varphi^2}-\frac{\varphi'^2\psi''}{\varphi}-\psi'''\varphi'+\frac{\varphi'\varphi''\psi'}{\varphi}+\psi'\varphi'''=0$$

olur. $\varphi'(v)=\cos\theta(v)$, $\psi'(v)=sin\theta(v)$ ve türevlerini yukarıdaki denklemde yerlerine yazarsak

$$\frac{\sin\theta\cos\theta}{\varphi^2}-\frac{\cos^2\theta.\cos\theta.\theta'}{\varphi}-\cos\theta(-\sin\theta.\theta'+\cos\theta.\theta'')$$
$$+\frac{\cos\theta.(-\sin\theta.\theta')\sin\theta}{\varphi}+\sin\theta(-\cos\theta.\theta'-\sin\theta.\theta'')=0$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{-\sin\theta\cos\theta}{\varphi^2}+\frac{\theta'\cos\theta}{\varphi}+\theta''=0 \qquad (3.1.6)$$

(3.1.6) da eşitliğin sol tarafı $\left(\frac{\sin\theta}{\varphi}+\theta'\right)$ nin türevine eşittir. Yani (3.1.6) ifadesi

$$\left(\frac{\sin\theta}{\varphi}+\theta'\right)'=0$$

olarak yazılabilir. Buradan $\left(\frac{\sin\theta}{\varphi}+\theta'\right)$ bir sabittir. Diğer taraftan (3.1.2) ve (3.1.3) denklemleri kullanılarak

$$H=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\varphi}+\theta'\right) \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Böylece H ortalama eğriliğinin bir sabit olduğu görülür. Şimdi teoremin ikinci tarafını ispatlayalım. Yani, H ortalama eğriliği sabit ise yüzeyin G Gauss dönüşümünün birinci çeşit noktasal 1-tipli olduğunu göstereceğiz.

Yüzeyin birinci çeşitten Gauss dönüşümü noktasal-1 tipli olması için $\Delta G = fG$ şartına sahip olmalıdır. Bu şart

$$\Delta G-\langle\Delta G, G\rangle G=0$$

ifadesine denktir.

$G=(\psi'\cos u,\psi'\sin u,-\varphi')$ Gauss dönüşümüne Laplace operatörü uygulanırsa,

$$\Delta G=\left(\left(\frac{\psi'}{\varphi^2}-\frac{\varphi'\psi''}{\varphi}-\psi'''\right)\cos u,\left(\frac{\psi'}{\varphi^2}-\frac{\varphi'\psi''}{\varphi}-\psi'''\right)\sin u,\left(\frac{\varphi'\varphi''}{\varphi}+\varphi'''\right)\right)$$

olur ve

$$\langle \Delta G, G \rangle = \left(\frac{\psi'^2}{\varphi^2} - \frac{\varphi'\psi''\psi'}{\varphi} - \psi'\psi''' - \frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi} - \varphi'\varphi''' \right)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$A = \left(\frac{\psi'}{\varphi^2} - \frac{\varphi'\psi''}{\varphi} - \psi''' \right),$$

$$B = \left(\frac{\varphi'\varphi''}{\varphi} + \varphi''' \right),$$

olarak seçilirse

$$\langle \Delta G, G \rangle = \psi' A - \varphi' B$$

olur. Bulunan ifadeler $\Delta G - \langle \Delta G, G \rangle G = 0$ eşitliğinde yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{cases} \cos u \left(A - \psi'^2 A + \varphi'\psi' B \right) = 0 \\ \sin u \left(A - \psi'^2 A + \varphi'\psi' B \right) = 0 \\ B + A\psi'\varphi' - \varphi'^2 B = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi

$$A - \psi'^2 A + \varphi'\psi' B = 0$$

$$B + A\psi'\varphi' - \varphi'^2 B = 0$$

halini alır ki $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ olduğundan

$$A\varphi'^2 + B\varphi'\psi' = 0 \Rightarrow \varphi'\left(A\varphi' + \psi' B\right) = 0$$

$$B\psi'^2 + A\psi'\varphi' = 0 \Rightarrow \psi'\left(B\psi' + \varphi' A\right) = 0$$

şeklinde yazılır. (3.1.3) ifadesinin türevi alınırsa;

$$2H' = \left(\varphi'\psi''' - \varphi'''\psi' + \left(\frac{\psi'}{\varphi}\right)'\right) = 0$$

elde edilir. Şimdi $A\varphi' + \psi' B$ ifadesinde A ve B değerleri yerlerine yazılır ve $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$ ifadesinin türevi kullanılırsa

$$A\varphi' + \psi' B = \left(\frac{\psi'}{\varphi^2} - \frac{\varphi'\psi''}{\varphi} - \psi'''\right)\varphi' + \left(\frac{\varphi'\varphi''}{\varphi} + \varphi'''\right)\psi'$$

$$= -\left(\varphi'\psi''' - \varphi'''\psi' - \frac{\psi'\varphi'}{\varphi^2} + \frac{\varphi'^2\psi''}{\varphi} - \frac{\varphi'\varphi''\psi'}{\varphi}\right)$$

$$= -\left(\varphi'\psi''' - \varphi'''\psi' + \left(\frac{\psi'}{\varphi}\right)'\right)$$

olur. H sabit ve türevi sıfır olduğu için

$$A\varphi' + \psi' B = 0$$

dır. Bu ifadeyi

$$\varphi' \text{ ile çarparsak} \qquad \varphi'\left(A\varphi' + \psi' B\right) = 0,$$

$$\psi' \text{ ile çarparsak} \qquad \psi'(A\varphi' + \psi' B) = 0,$$

elde edilir. Bu ifadeler $\Delta G = fG$ olmasını gerektiriyordu. Sonuç olarak, H ortalama eğriliği sabit ise $\Delta G = fG$ dir. Yani yüzey Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli ve birinci çeşittendir. Böylece teoremin ikinci kısmı da ispatlanmış olur.

Not : Sabit ortalama eğrilikli dönel yüzeyler aynı zamanda Delaunay yüzeyleri olarak da bilinir

3.2. İkinci Çeşitten Noktasal 1-Tipli Gauss Dönüşümüne Sahip Dönel Yüzeyler

M, bazı $g(t)$ düzgün fonksiyonu için

$$x(\theta,t) = \left(t\cos\theta, t\sin\theta, g(t)\right) \tag{3.2.1}$$

ile parametrize edilen $\mathbb{E}^3$ de bir dönel yüzey olsun. Bir M dönel yüzeyi, eğer $g(t)$ bir polinom ise **polinom çeşit** dönel yüzey, eğer $g(t)$ bir rasyonel fonksiyon ise **rasyonel çeşit** dönel yüzeydir. Rasyonel çeşit bir dönel yüzey kısaca rasyonel dönel yüzey olarak adlandırılır.

(3.2.1) ile parametrize edilen M nin G Gauss dönüşümü;

$$x_\theta = \left(-t\sin\theta, t\cos\theta, 0\right), \; x_t = \left(\cos\theta, \sin\theta, g(t)\right)$$

olup

$$x_\theta \times x_t = \left(t\cos\theta g'(t), t\sin\theta g'(t), -t\right), \quad \left\| x_\theta \times x_t \right\| = t\sqrt{g'^2(t)+1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} G &= \frac{x_\theta \times x_t}{\left\| x_\theta \times x_t \right\|} \\ &= \frac{\left(t\cos\theta g'(t), t\sin\theta g'(t), -t\right)}{t\sqrt{g'^2(t)+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$G = \left(\frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\cos\theta, \frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\sin\theta, \frac{-1}{\sqrt{1+g'^2}} \right) \tag{3.2.2}$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan Laplace operatörünün

$$\Delta = \frac{-1}{\sqrt{\mathcal{G}}}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{\mathcal{G}} g^{11} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\mathcal{G}} g^{22} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right]$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $\left(g_{ij}\right)$ matrisinin elemanları

$$g_{11} = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = t^2,$$

$$g_{12} = \langle x_\theta, x_t \rangle = 0 = g_{21},$$

$$g_{22} = \langle x_t , x_t \rangle = 1 + g'^2(t) ,$$

olmak üzere

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1 + g'^2(t) \end{pmatrix}$$

olup,

$$\det g_{ij} = \mathcal{G} = t^2\left(1 + g'^2\left(t\right)\right)$$

olur. $\left(g^{ij}\right)$ matrisinin inversi

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1 + g'^2(t)} \end{pmatrix}$$

olur. Buradan M nin Laplace operatörü

$$\Delta = \frac{-1}{t\sqrt{1 + g'^2(t)}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(t\sqrt{1 + g'^2(t)}\, \frac{1}{t^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(t\sqrt{1 + g'^2(t)}\, \frac{1}{1 + g'^2(t)} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right]$$

$$= \frac{-1}{t\sqrt{1+g'^2(t)}} \left[\frac{\sqrt{1+g'^2(t)}}{t} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{1+g'^2(t)}} + \frac{g'(t)g''(t)t}{\sqrt{1+g'^2(t)}\left(1+g'^2(t)\right)} - \frac{t\left(\sqrt{1+g'^2(t)}2g'(t)g''(t)\right)}{\left(1+g'^2(t)\right)^2} \right) \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\left. + \frac{t\sqrt{1+g'^2(t)}}{1+g'^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right]$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak

$$\Delta = \frac{-1}{1+g'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{t(1+g'^2)} - \frac{g'g''}{(1+g'^2)^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{3.2.3}$$

elde edilir.

M ikinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olsun. O zaman, tanımdan (2.1.1) deki C vektörü sıfırdan farklı vektördür. (2.1.1), (3.2.2), (3.2.3) ve Lemma 3.1. uygulanırsa,

$$\frac{1}{t} g''\left(1+g'^2\right) + g'''\left(1+g'^2\right) - 4g'g''^2 - \frac{1}{t^2} g'\left(1+g'^2\right)^3 = -fg'\left(1+g'^2\right)^3 \tag{3.2.4}$$

elde edilir. Gerçekten $G = \left(G_1, G_2, G_3\right)$ Gauss dönüşümüne Laplace operatörünü uygulayalım. $\Delta G = \left(\Delta G_1, \Delta G_2, \Delta G_3\right)$ diyelim. Buradan,

$$\Delta G_1 = -\frac{1}{1+g'^2}\cos\theta\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\right)+\left(\frac{1}{t\left(1+g'^2\right)}-\frac{g'g''}{\left(1+g'^2\right)^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\right)$$

$$-\frac{1}{t^2}\frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\cos\theta)$$

$$\Delta G_1 = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+g'^2}}\left[\frac{-t^2 g'''\left(1+g'^2\right)-g''\left(1+g'^2\right)t+4g'g''t^2+g'\left(1+g'^2\right)^3}{t^2\left(1+g'^2\right)^3}\right],$$

$$\Delta G_2 = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+g'^2}}\left[\frac{-t^2 g'''\left(1+g'^2\right)-tg''\left(1+g'^2\right)+4g'g''^2t^2+g'\left(1+g'^2\right)^3}{t^2\left(1+g'^2\right)^3}\right],$$

ve

$$\Delta G_3 = \frac{1}{\left(1+g'^2\right)^3}\left[\frac{3g'^2g''^2t-g''^2t-g'g'''\left(1+g'^2\right)t-g'g''\left(1+g'^2\right)}{t\left(1+g'^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

olup

$$\Delta G = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+g'^2}}\left[\frac{-t^2 g'''\left(1+g'^2\right)-g''\left(1+g'^2\right)t+4g'g''^2t^2+g'\left(1+g'^2\right)^3}{t^2\left(1+g'^2\right)^3}\right],$$

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+g'^2}}\left[\frac{-t^2 g'''\left(1+g'^2\right)-g''\left(1+g'^2\right)t+4g'g''^2t^2+g'\left(1+g'^2\right)^3}{t^2(1+g'^2)^3}\right],$$

$$\frac{1}{\left(1+g'^2\right)^3}\left[\frac{3g'^2g''^2t-g''^2t-g'g'''\left(1+g'^2\right)t-g'g''\left(1+g'^2\right)}{t\left(1+g'^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

olarak elde edilir.

$$\Delta G = f\left(G+C\right)$$

eşitliğinde ifadeler yerlerine yazılıp karşılıklı bileşenler eşitlenirse,

$$\Delta G = f\left(\frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\cos\theta + c_1, \frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\sin\theta + c_2, \frac{-1}{\sqrt{1+g'^2}} + c_3\right)$$

$$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+g'^2}}\left(\frac{-t^2 g'''\left(1+g'^2\right) - g''\left(1+g'^2\right)t + 4g'g''^2t^2 + g'\left(1+g'^2\right)^3}{t^2\left(1+g'^2\right)^3}\right) = f\left(\frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\cos\theta + c_1\right)$$

olur. Eşitliğin olabilmesi için $c_1 = 0$ alınmalıdır. O halde; eşitliğin her iki tarafındaki $\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+g'^2}}$ ifadeleri sadeleşir. Bu durumda,

$$-g'''\left(1+g'^2\right) - \frac{1}{t}g''\left(1+g'^2\right) + 4g'g''^2 + \frac{1}{t^2}g'\left(1+g'^2\right)^3 = fg'\left(1+g'^2\right)^3$$

elde edilir. Her iki tarafı (-1) ile çarparsak

$$g'''\left(1+g'^2\right) + \frac{1}{t}g''\left(1+g'^2\right) - 4g'g''^2 - \frac{1}{t^2}g'\left(1+g'^2\right)^3 = -fg'\left(1+g'^2\right)^3$$

olur ki (3.2.4) denklemini bu şekilde elde ederiz. Benzer şekilde $c_2 = 0$ olacaktır ve aynı denklem elde edilecektir. Şimdi c_3 için inceleyelim. Buradan $c_3 = c$ alalım. O halde

$$\frac{1}{\left(1+g'^2\right)^3}\left[\frac{3g'^2g''^2t-g''^2t-g'g'''\left(1+g'^2\right)t-g'g''\left(1+g'^2\right)}{t\left(1+g'^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]=f\left(\frac{-1}{\sqrt{1+g'^2}}+c\right)$$

$$3g'^2g''^2-g''^2-g'g'''\left(1+g'^2\right)-\frac{1}{t}g'g''\left(1+g'^2\right)=f\left(1+g'^2\right)^3\left(-1+c\left(1+g'^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

olur. Her iki tarafı (-1) ile çarparsak

$$\frac{1}{t}g'g''\left(1+g'^2\right)+g'g'''\left(1+g'^2\right)+g''^2-3g'^2g''^2=f\left(1+g'^2\right)^3\left(1-c\sqrt{1+g'^2}\right) \quad (3.2.5)$$

denklemini elde ederiz. (3.2.4) denklemini t^2 ile çarptığımızda

$$g''\left(1+g'^2\right)t+g'''\left(1+g'^2\right)t^2-4g'g''^2t^2-g'\left(1+g'^2\right)^3=-fg'\left(1+g'^2\right)^3t^2 \quad (3.2.6)$$

denklemini elde ederiz. (3.2.5) denklemini $-g't^2$ ile çarparsak

$$-g'^2g''\left(1+g'^2\right)t-g'^2g'''\left(1+g'^2\right)t^2+3g'^3g''^2t^2-g'g''^2t^2$$
$$=-fg'\left(1+g'^2\right)^3t^2+fg'\left(1+g'^2\right)^3t^2c\sqrt{1+g'^2}$$

olarak bulunur. Eşitliğin ikinci kısmındaki ifadelerin (3.2.6) da ki değerleri yerlerine yazılırsa;

$$c\sqrt{1+g'^2}\Big[g''\left(1+g'^2\right)t+g'''\left(1+g'^2\right)t^2-4g'g''^2t^2-g'\left(1+g'^2\right)^3\Big]$$

$$= g''\left(1+g'^2\right)t + g'''\left(1+g'^2\right)t^2 - 4g'g''^2t^2 - g'\left(1+g'^2\right)^3$$

$$+ g'^2g''\left(1+g'^2\right)t + g'^2g'''\left(1+g'^2\right)t^2 - 3g'^3g''^2t^2 + g'g''^2t^2$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & g''\left(1+g'^2\right)^2 t + g'''\left(1+g'^2\right)^2 t^2 - 3g'g''^2t^2\left(1+g'^2\right) - g'\left(1+g'^2\right)^3 \\ & = c\sqrt{1+g'^2}\left\{g''\left(1+g'^2\right)t + g'''\left(1+g'^2\right)t^2 - 4g'g''^2t^2 - g'\left(1+g'^2\right)^3\right\} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Yani (3.2.4) ve (3.2.5) denklemlerinden (3.2.7) denklemi elde edildi. (3.2.7) denklemini

$$P(t) = c\sqrt{1+g'(t)}Q(t) \tag{3.2.8}$$

olarak tekrar yazarız öyle ki

$$P(t) = \left(g'' + g'''t\right)\left(1+g'^2\right)^2 t - 3g'g''^2\left(1+g'^2\right)t^2 - g'\left(1+g'^2\right)^3 \tag{3.2.9}$$

ve

$$Q\left(t\right) = g''\left(1+g'^2\right)t + g'''\left(1+g'^2\right)t^2 - 4g'g''^2t^2 - g'\left(1+g'^2\right)^3 \tag{3.2.10}$$

olur. M , polinom çeşit bir dönel yüzey olsun. Böylece, $g(t)$ t ye bağlı bir polinomdur. $g(t)$ nin derecesi $\deg g(t)$ ile gösterilir. Eğer $\deg g(t) \geq 2$ ise o zaman $\deg P(t) = \deg Q(t) \geq 7$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece, sadece (3.2.8) için söz konusu olan ihtimal $\deg g(t) = 1$ olmasıdır.

Bu durumda, bazı $a \neq 0$ sabiti için $g'(t) = a$ dır. Böylece (3.2.7) denkleminde $g'(t) = a$ ifadesi kullanılırsa

$$-a\left(1+a^2\right)^3 = c\sqrt{1+a^2}\left(-a\left(1+a^2\right)^3\right)$$

olur. Buradan da

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

olarak elde edilir. Bundan dolayı M nin parametrik ifadesi aşağıdaki eşitliğe indirgenir.

$$x(\theta, t) = (t\cos\theta, t\sin\theta, at) \ , \qquad a \neq 0 \ a \in R \tag{3.2.11}$$

Sonuç olarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.1. Polinom çeşit bir dönel yüzeyin, ikinci çeşitten noktasal 1-tipli bir Gauss dönüşümüne sahip olması için gerek ve yeter şart yüzeyin bir dik koni olmasıdır.

Şimdi rasyonel çeşit dönel yüzeyleri ele alalım. Bu durumda, (3.2.1) in $g(t)$ fonksiyonu ve bunun türevi olan $g'(t)$ fonksiyonu, t de rasyonel fonksiyonlardır.

Eğer $g'(t)$ bir sabit değil ise $g'(t)=\dfrac{r(t)}{q(t)}$ şeklinde yazılabilir ki, $r(t)$ ve $q(t)$ asal polinomlardır. Yani, $r(t)$ ve $q(t)$, $\deg \geq 1$ olan bir ortak çarpana sahip değildirler. $\deg r(t)=n$ ve $\deg q(t)=m$ olduğunu varsayalım. (3.2.8) den $\sqrt{1+g'^2(t)}$ nin aynı zamanda bir rasyonel fonksiyon olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı, eğer $g'(t)$ sabit değilse o zaman

$$q^2(t)+r^2(t)=p^2(t)$$

eşitliğini sağlayan bir $p(t)$ polinomu mevcuttur ki $q(t), r(t)$ ve $p(t)$ asal polinomlardır.

$$P_1(t)=g''(t)(1+g'^2(t))^2 t\,, \qquad P_2(t)=g'''(t)(1+g'^2(t))^2 t^2\,,$$

$$P_3(t)=g'(t)g''^2(t)(1+g'^2(t))t^2\,, \qquad P_4(t)=g'(t)(1+g'^2(t))^3\,,$$

$$Q_1(t)=g''(t)(1+g'^2(t))t\,, \qquad Q_2(t)=g'''(t)(1+g'^2(t))t^2\,,$$

$$Q_3(t)=g'(t)g''^2(t)t^2 \qquad Q_4(t)=P_4(t)\,.$$

O zaman $P_1,...,P_4,Q_1,...,Q_4$ aynı zamanda rasyonel fonksiyonlardır.

Durum 1 :

$m=0$ ise $g(t)$ bir polinomdur. O taktirde, dönel yüzeyin dik koniden başka bir şey olmadığı Teorem 3.2.1. den görülür.

Durum 2 :

$m \geq 1$ olsun. O zaman her bir $i=1,...,4$ için $q^7(t)p_i(t)$ ifadesinin bir polinom olduğunu görürüz. Fakat

$$q^6(t)Q_4(t) = \frac{r(t)p^6(t)}{q(t)}$$

olduğunu biliyoruz. Çünkü ;

$$Q_4(t) = P_4(t) = g'(t)\left(1+g'^2(t)\right)^3$$

$$= \frac{r(t)}{q(t)}\left(1+\frac{r^2(t)}{q^2(t)}\right)^3 = \frac{r(t)}{q(t)}\left(\frac{q^2(t)+r^2(t)}{q^2(t)}\right)^3$$

$$= q^6(t)Q_4(t) = \frac{r(t)p^6(t)}{q(t)}$$

dir. $g'(t) = \dfrac{r(t)}{q(t)}$ eşitliği (3.2.8) de yerine yazılırsa

$$P(t) = c\,\frac{p(t)}{q(t)}Q(t)$$

elde edilir. Böylece $q^6(t)Q_4(t)$ bir polinomdur. Bu bir çelişkidir. Çünkü p(t), q(t), r(t) asaldırlar. Sonuç olarak aşağıda ki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.2.2.

İkinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümlü yüzeylerin polinom çeşitleri hariç, rasyonel dönel yüzeyleri yoktur.

Son olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.3.

Rasyonel dönel yüzey noktasal 1-tipli bir Gauss dönüşümüne sahiptir gerek ve yeter şart o bir düzlemin açık bir bölümüdür, dik konidir veya dairesel silindirdir.

İspat :

M dönel yüzeyi,

$$x(u,v) = \left(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)\right) \tag{3.1}$$

ile parametrize edilen bir dönel yüzey olsun. Eğer φ fonksiyonu bir sabit ise o zaman yüzey bir dairesel silindirdir. φ sabit olmadığı zaman, dönel yüzey

$$x(\theta,t) = \left(t\cos\theta, t\sin\theta, g(t)\right) \tag{3.2.12}$$

ile ifade edilir. Bu durumda, dönel yüzeyin sabit ortalama eğriliğe sahip olması için $g = g(t)$ aşağıdaki diferensiyel denklemin bir çözümü olması gerek ve yeter şarttır. Sabit ortalama eğriliğe sahip ise $H' = 0$ dır.

$$H = \frac{G\ell + En - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

olduğunu biliyoruz. $x(\theta,t) = (t\cos\theta, t\sin\theta, g(t))$ yüzeyinin I.temel form katsayıları

$$G = \langle x_t, x_t \rangle = 1 + g'^2(t)$$

$$E = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = t^2$$

$$F = \langle x_\theta, x_t \rangle = 0$$

dir. Yüzeyin normal vektörü

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2(t)}}\left(\cos\theta\, g'(t), \sin\theta\, g'(t), -1\right)$$

olmak üzere yüzeyin II.temel form katsayıları

$$\ell = -\langle x_{\theta\theta}, N \rangle = \frac{tg'(t)}{\sqrt{1+g'^2(t)}}$$

$$m = -\langle x_{\theta t}, N \rangle = 0$$

$$n = -\langle x_{tt}, N \rangle = \frac{g''(t)}{\sqrt{1+g'^2(t)}}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler H denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$H = \frac{g'(t)\left(1+g'^2(t)\right) + tg''(t)}{2t\left(1+g'^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. Buradan H nın türevi alınırsa

$$g'' + \frac{g'}{t}\left(1+g'^2\right) + 2\alpha\left(1+g'^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \qquad (3.2.13)$$

elde edilir.(bazı α sabiti için) Eğer

$$g' = \sinh y$$

$$g'' = y' \cosh y$$

uygulayalım. Bu ifadeler (3.2.13) de yerlerine yazılırsa,

$$y' \cosh y + \frac{\sinh y}{t}\left(1+\sinh^2 y\right) + 2\alpha\left(1+\sinh^2 y\right)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

$$y' \cosh y + \frac{\sinh y}{t}\cosh^2 y + 2\alpha\left(\cosh^2 y\right)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

$$y' + \frac{1}{t}\sinh y \cosh y + 2\alpha \cosh^2 y = 0 \tag{3.2.14}$$

olur. Yine $y = \tanh^{-1} w$ dönüşümü uygulanırsa ,

$$y' = \frac{w'}{1-w^2}\ , \qquad \sinh y = \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}\ , \qquad \cosh y = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$$

olur. Bu ifadeler

$$y' + \frac{1}{t}\sinh y \cosh y + 2\alpha \cosh^2 y = 0$$

eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$tw'(t)+w(t)+2\alpha t=0 \tag{3.2.15}$$

lineer denklemi elde edilir. (3.2.14) denkleminin çözümünü bulalım. Bu denklem

$$w'(t)+\frac{1}{t}w(t)=-2\alpha$$

olarak yazılabilir ki denklemin her iki tarafını $e^{\int \frac{1}{t}dt}=e^{\ln t}=t$ ile çarparsak denklem tam diferensiyel denklem haline gelir. Buradan

$$\int \frac{\partial}{\partial t}(wt)=\int -2\alpha t$$

$$wt=\frac{-2\alpha t^2}{2}+c$$

elde edilir. $w=-\alpha t+\frac{c}{t}$ ifadesinde $c=a$ diyelim. O zaman $w(t)=-\alpha t+\frac{a}{t}$ olur. $w(t)=-\alpha t+\frac{a}{t}$ ve $y=\tanh^{-1}w$ ifadelerini yaptığımız dönüşümlerde yerlerine yazarsak

$$g'(t)=\sinh y\,,$$

$$g'(t)=\sinh\left(\tanh^{-1}w\right),$$

$$g'(t)=\sinh\left(\tanh^{-1}\left(\frac{a-\alpha t^2}{t}\right)\right)=\frac{a-\alpha t^2}{\sqrt{t^2-\left(a-\alpha t^2\right)^2}} \tag{3.2.16}$$

olur. Buradan $g(t)$

$$g(t)=\int \frac{a-\alpha t^2}{\sqrt{t^2-\left(a-\alpha t^2\right)^2}}dt \qquad (3.2.17)$$

ile verilir. Eğer $a=\alpha=0$ ise g bir sabittir. Çünkü;

$$\begin{aligned} g(t) &= \int 0 \ dt \\ &= c \end{aligned}$$

olur. Bu durumda yüzey düzlemin açık bir bölümüdür. Eğer $\alpha=0$ ve $a\neq 0$ ise

$$g(t)=\int \frac{a}{\sqrt{t^2-a^2}}dt$$

olur. Bu integralin sonucunu bulmak için $t=a\cosh x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$t=a\cosh x$$

$$dt=a\sinh x$$

olur. Bu ifadeler yerlerine yazılırsa;

$$g(t)=\int \frac{a^2 \sinh x}{\sqrt{a^2 \cosh^2 x - a^2}}dx$$

$$= ax + c_1$$

olur. $t = a\cosh x$ ifadesinden elde edilen $x = \cosh^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)$, $g(t)$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$g(t) = a\cosh^{-1}\left(\frac{t}{a}\right) + c_1$$

olur. Bu durumda yüzey bir katenoid dir. Aynı zamanda rasyonel çeşit değildir.

Eğer $a = 0$ ve $\alpha \neq 0$ ise

$$g(t)=\int \frac{-\alpha t^2}{\sqrt{t^2 - \left(\alpha t^2\right)^2}}dt$$

$$= \sqrt{\alpha^{-2} - t^2} + c_2$$

ile gösterilir. Bu durumda yüzey bir küredir. Aynı zamanda rasyonel çeşit değildir. Eğer $a, \alpha \neq 0$ ise, (3.2.16) $g(t)$ nin t de bir rasyonel fonksiyon olmadığını ve eliptik fonksiyon terimleriyle ifade edilebilir olduğunu açıklar. Eğer M, rasyonel dönel yüzey ise öyle ki ikinci çeşit noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahiptir.

M, Teorem 3.2.1. ve Teorem 3.2.2. ye göre dik koninin açık bir bölümüdür. Teoremin tersini ispatlamak kolaydır. Çünkü

$$x(\theta,t)=\left(t\cos\theta, t\sin\theta, at\right)$$

dik koni denklemini ele alalım. Bu denklemin sırasıyla θ ve t ye göre kısmi türevleri

$$x_\theta=\left(-t\sin\theta, t\cos\theta, 0\right),\ x_t=\left(\cos\theta, \sin, a\right)$$

olup yüzeyin Gauss dönüşümü

$$G=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(a\cos\theta, a\sin\theta, -1\right)$$

olur.

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} t^2 & o \\ 0 & 1+a^2 \end{pmatrix},\ \left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

olmak üzere Laplace operatörü,

$$\Delta=-\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{\mathcal{G}}g^{11}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\mathcal{G}}g^{22}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)$$

$$\Delta=\left[\frac{-1}{t^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{t(a^2+1)}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{1+a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]$$

elde edilir. Gauss dönüşümüne Laplace operatörü uygulanırsa,

$$\Delta G = \frac{1}{t^2}\left(\left(\frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2+1}}, \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right)$$

$$\Delta G = \frac{1}{t^2}\left(G + \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right)$$

olur. Dolayısıyla dik koni Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli ve ikinci çeşittendir.

$x(\theta,t) = (t\cos\theta, t\sin\theta, c)$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklem düzlemin açık bir bölümünü ifade eder. (Şekil 3.3.)

$$x_\theta = (-t\sin\theta, t\cos\theta, 0),\ x_t = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

olmak üzere $G = (0,0,-1)$ olur. Laplace operatörü

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

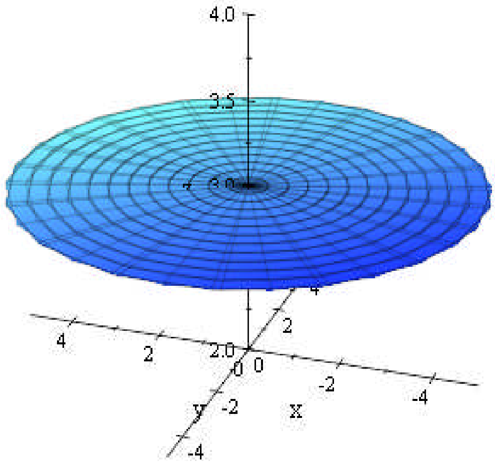
olmak üzere

$$\Delta = -\frac{1}{t^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{1}{t\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

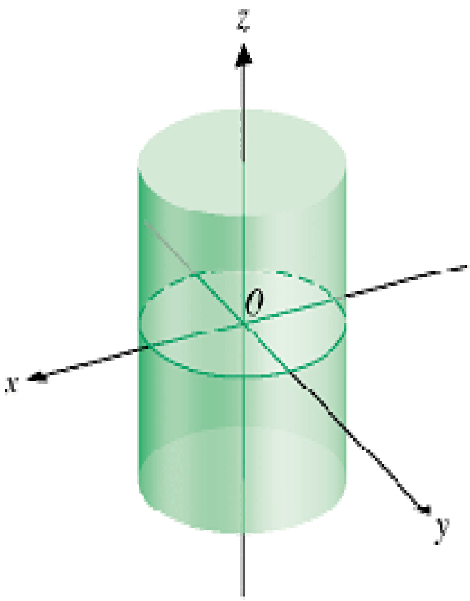
olarak bulunur. Sonuç olarak,

$$\Delta G = 0$$

olur. Benzer şekilde dairesel silindirin rasyonel çeşit ve G Gauss dönüşümünün noktasal 1-tipli olduğu gösterilebilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. (Şekil 3.4.)



Şekil 3.3. Düzlemin açık bir bölümü



Şekil 3.4. Dik dairesel silindir

4. 3- BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA GAUSS DÖNÜŞÜMÜ NOKTASAL 1-TİPLİ OLAN DÖNEL YÜZEYLER

Bu bölümde Minkowski 3-uzayında Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli dönel yüzeyler incelenecektir. M , $\mathbb{E}^3$ de ekseni L olan bir dönel yüzey olsun. M' , $M-\mathrm{L}$ nin herhangi bir irtibatlı parçası olmak üzere aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.1.

(i) Eğer L spacelike eksen ise g ve r , s parametresinin düzgün fonksiyonları ve her s için ;

$$g'^2(s) - r'^2(s) \neq 0 \quad \text{ve} \quad r(s) \neq 0$$

olmak üzere M' ,

$$I = (g'^2 - r'^2)ds^2 + r^2 d\varphi^2$$

metriği ile birlikte

$$x = g(s)\,, \quad y = r(s)\sinh(\varphi)\,,\ z = r(s)\cosh(\varphi)\,; \quad a < s < b,\ -\infty < \varphi < \infty$$

formunda verilir. Gerçekten ;

$$I = \langle x_s, x_s \rangle_L\, ds^2 + 2\langle x_s, x_\varphi \rangle_L\, ds d\varphi + \langle x_\varphi, x_\varphi \rangle_L\, d\varphi^2$$

olduğundan $\langle x_s, x_s \rangle_L$, $\langle x_\varphi, x_\varphi \rangle_L$, $\langle x_s, x_\varphi \rangle_L$ iç çarpımlarını hesaplarsak;

$x(s,\varphi) = \left(g(s), r(s)\sinh(\varphi), r(s)\cosh(\varphi)\right)$ olmak üzere;

$$x_s = \left(g'(s), r'(s)\sinh(\varphi), r'(s)\cosh(\varphi)\right),$$

$$x_\varphi = \left(0, r(s)\cosh(\varphi), r(s)\sinh(\varphi)\right),$$

$$\left\langle x_s, x_s \right\rangle_L = \left(g'^2(s) + r'^2(s)\sinh^2(\varphi) - r'^2(s)\cosh^2(\varphi)\right),$$

$$= g'^2(s) - r'^2(s),$$

$$\left\langle x_s, x_\varphi \right\rangle_L = \left(0 + r'(s)r(s)\sinh(\varphi)\cosh(\varphi) - r'(s)r(s)\cosh(\varphi)\sinh(\varphi)\right)$$

$$= 0,$$

ve

$$\left\langle x_\varphi, x_\varphi \right\rangle_L = \left(0 + r^2(s)\cosh^2(\varphi) - r^2(s)\sinh^2(\varphi)\right)$$

$$= \left(r^2(s)(\cosh^2(\varphi) - \sinh^2(\varphi)\right)$$

$$= r^2(s)$$

olur. Buna göre,

$$I = \left(g'^2(s) - r'^2(s)\right)ds^2 + r^2\left(s\right)d\varphi^2$$

elde edilir.

(ii) Eğer L timelike eksen ise g ve r , s parametresinin düzgün fonksiyonları

ve her s için

$$g'^2(s) - r'^2(s) \neq 0 \quad \text{ve} \quad r(s) \neq 0$$

olmak üzere M' ,

$$I = \left(r'^2 - g'^2\right) ds^2 + r^2 d\varphi^2$$

metriği ile

$$x = r(s)\cos\theta \ , \ \ y = r(s)\sin\theta \ , \ \ z = g(s) \ ; \ \ a < s < b \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

formunda verilir. Gerçekten;

$$I = \left\langle x_s , x_s \right\rangle_L ds^2 + 2\left\langle x_s , x_\theta \right\rangle_L dsd\theta + \left\langle x_\theta , x_\theta \right\rangle_L d\theta^2$$

olduğundan $\langle x_s, x_s \rangle_L$, $\langle x_\varphi, x_\varphi \rangle_L$, $\langle x_s, x_\varphi \rangle_L$ iç çarpımlarını hesaplarsak, $x(s,\theta) = \left(r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, g(s)\right)$ olmak üzere

$$x_s = \left(r'(s)\cos\theta, r'(s)\sin\theta, g'(s)\right),$$

$$x_\theta = \left(-r(s)\sin\theta, r(s)\cos\theta, 0\right),$$

$$\langle x_s, x_s \rangle_L = \left(r'^2(s)\cos^2\theta + r'^2\sin^2\theta - g'^2(s) \right)$$

$$= \left(r'^2(s) \right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - g'^2(s) \right) \ ,$$

$$= \left(r'^2(s) - g'^2(s) \right)$$

$$\langle x_s, x_\theta \rangle_L = \left(-r'(s)r(s)\cos\theta\sin\theta + r'(s)r(s)\sin\theta\cos\theta + 0 \right)$$

$$= 0,$$

$$\langle x_\theta, x_\theta \rangle_L = \left(r^2(s)\sin^2\theta + r^2(s)\cos^2\theta - 0 \right)$$

$$= r^2(s)\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta \right)$$

$$= r^2(s)$$

elde edilir. Buna göre;

$$I = \left(r'^2(s) - g'^2(s) \right) ds^2 + r^2(s) d\theta^2$$

olur.

(iii) Eğer L light like eksen ise f ve g, s parametresinin düzgün fonksiyonları ve her s için ,

$$g'^2(s) - f'^2(s) \neq 0 \text{ ve } g(s) - f(s) \neq 0$$

olmak üzere M' ,

$$I=\left(f'^2-g'^2\right)ds^2+\left(f^2-g^2\right)dt^2$$

metriği ile birlikte,

$$\left.\begin{aligned} x &= t(g-f) \\ y &= f+\frac{t^2}{2}(g-f) \\ z &= g+\frac{t^2}{2}(g-f) \end{aligned}\right\} \quad a<s<b\,,\; -\infty<t<\infty$$

formunda verilir. Aksine, yukarıdaki her bir durum için verilen bir yüzey, bir dönel yüzey olup,

$i)$ durumunda yüzeyin profil eğrisi $s \to x=g(s)\,,\; z=r(s)\,,$

$ii)$ durumunda yüzeyin profil eğrisi $s \to x=r(s)\,,\; z=g(s)\,,$

$iii)$ durumunda yüzeyin profil eğrisi $s \to y=f(s)\,,\; z=g(s)$ dir

Lemma 4.2.

(a) Profil eğrisinin yay uzunluğu s ile parametrize edildiğinde ve $x=x(s)>0$ kabul ettiğimizde, lemma (4.1)-(i) de

$$x(s,\varphi)=\left(z(s),x(s)\sinh(\varphi),x(s)\cosh(\varphi)\right) \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilen bir dönel yüzey için, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(a_1) $\varepsilon_1=\pm 1$ olmak üzere , $I.$ ve $II.$ temel formlar,

$$x_s = \left(z'(s), x'(s)\sinh(\varphi), x'(s)\cosh(\varphi) \right),$$

$$x_\varphi = \left(0, x(s)\cosh(\varphi), x(s)\sinh(\varphi) \right),$$

$$\langle x_s, x_s \rangle_L = z'^2(s) - x'^2(s)$$
$$= \varepsilon_1,$$

$$\langle x_s, x_\varphi \rangle_L = 0 ,$$

$$\langle x_\varphi, x_\varphi \rangle_L = x^2(s)$$

dir. Buna göre ;

$$I = \varepsilon_1 ds^2 + x^2(s) d\varphi^2$$

elde edilir. Ayrıca;

$$x_s \times_L x_\varphi = \left(-x'(s)x(s), -z'(s)x(s)\sinh(\varphi), -z'(s)x(s)\cosh(\varphi) \right),$$

$$\left\| x_s \times_L x_\varphi \right\| = x(s),$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$G = \left(-x'(s), -z'(s)\sinh(\varphi), -z'(s)\cosh(\varphi) \right),$$

$$x_{ss} = \left(z''(s), x''(s)\sinh(\varphi), x''(s)\cosh(\varphi) \right),$$

$$x_{s\varphi} = \left(0, x'(s)\cosh(\varphi), x'(s)\sinh(\varphi) \right),$$

$$x_{\varphi\varphi} = \left(0, x(s)\sinh(\varphi), x(s)\cosh(\varphi) \right),$$

olmak üzere,

$$\left\langle G, x_{ss} \right\rangle_L = \left(-x'(s)z''(s) + z'(s)x''(s)\right),$$

$$\left\langle G, x_{s\varphi} \right\rangle_L = 0,$$

$$\left\langle G, x_{\varphi\varphi} \right\rangle_L = x(s)z'(s),$$

elde edilir. Buna göre;

$$II = \left(-x'(s)z''(s) + z'(s)x''(s)\right) ds^2 + z'(s)x(s)d\varphi^2$$

olur. Sonuç olarak;

$$\begin{cases} I = \varepsilon_1 ds^2 + x^2(s) d\varphi^2 \\ II = \varepsilon_1 \left(z'x'' - x'z''\right) ds^2 + \left(z'x\right) d\varphi^2 \end{cases} \tag{4.2}$$

elde edilir.

(a_2) Yukarıda hesapladığımız ifadeleri H nın formülünde yerine yazarsak H ortalama eğriliği ve türevi,

$$\begin{cases} 2H = \varepsilon_1 \left(z'x'' - x'z''\right) + \left(\dfrac{z'}{x}\right) \\ 2H' = \varepsilon_1 \left(z'x''' - x'z'''\right) + \left(\dfrac{z'}{x}\right)' \end{cases} \tag{4.3}$$

olur.

(a_3) Laplace operatörünü hesaplarsak

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{G}g^{11}\frac{\partial}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sqrt{G}g^{21}\frac{\partial}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\sqrt{G}g^{12}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sqrt{G}g^{22}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\right)$$

eşitliğinden

$$\Delta = -\left(\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{x'}{x}\frac{\partial}{\partial s}\right)+\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial \varphi^2}\right) \tag{4.4}$$

elde edilir.

(b) Profil eğrisinin yay uzunlugu s ile parametrize edildiğinde ve $x = x(s) > 0$ kabul ettiğimizde, Lemma (4.1)-(ii) de

$$x(s,\theta) = \left(x(s)\cos\theta, x(s)\sin\theta, z(s)\right) \tag{4.5}$$

formunda verilen bir dönel yüzey için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(b_1) $\varepsilon_1 = \pm 1$ olmak üzere $I.$ ve $II.$ temel fomlar

$$\begin{cases} I = \varepsilon_1 ds^2 + x^2 d\theta^2 \\ II = \varepsilon_1\left(z''x' - z'x''\right) + \left(z'x\right)d\theta^2 \end{cases} \tag{4.6}$$

ile verilir.

(b_2) H ortalama eğriliği,

$$\begin{cases} 2H = \varepsilon_1\left(z''x' - z'x''\right) + \left(\dfrac{z'}{x}\right) \\ 2H' = \varepsilon_1\left(z'''x' - z'x'''\right) + \left(\dfrac{z'}{x}\right)' \end{cases} \tag{4.7}$$

eşitliklerini sağlar.

(b_3) Laplace operatörü

$$\Delta = -\left(\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{x'}{x}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \tag{4.8}$$

ile verilir.

(c) Profil eğrisinin yay uzunluğu s ile parametrize edildiğinde ve $z(s) - y(s) > 0$ kabul ettiğimizde, Lemma (4.1)-(iii) şıkkında

$$x(s,t) = \left(t\left(z(s) - y(s)\right); y(s) + \frac{t^2}{2}\left(z(s) - y(s)\right); z(s) + \frac{t^2}{2}\left(z(s) - y(s)\right)\right) \tag{4.9}$$

formunda verilen dönel bir yüzey için aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

(c_1) $\varepsilon_1 = \mp 1$ olmak üzere birinci ve ikinci temel formlar,

$$\begin{cases} I = \varepsilon_1 ds^2 + \left(z-y\right)^2 dt^2 \\ II = \varepsilon_1\left(z'y'' - y'z''\right) + \left(z-y\right)\left(z'-y'\right)dt^2 \end{cases} \tag{4.10}$$

ile verilir.

$\left(c_2\right)$ H ortalama eğriliği

$$\begin{cases} 2H = \varepsilon_1\left(z'y'' - y'z''\right) + \left(\dfrac{z'-y'}{z-y}\right) \\ 2H^{'} = \varepsilon_1\left(z'y''' - y'z'''\right) + \left(\dfrac{z'-y'}{z-y}\right) \end{cases} \tag{4.11}$$

eşitliklerini sağlar.

$\left(c_3\right)$ Laplace operatörü,

$$\Delta = -\left(\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{z'-y'}{z-y}\frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{1}{\left(z-y\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \tag{4.12}$$

ile verilir.

Teorem 4.1. M, dönme ekseni L olan, 3-boyutlu bir Minkowski uzayında bağlantılı yarı-Rieaman bir dönel yüzey olsun. M', $M - L$ alt kümesinin herhangi bağlantılı bir parçası olmak üzere, M' Gauss dönüşümü noktasal 1-tiplidir gerek ve yeter şart eğer M' sabit ortalama eğriliğe sahip ise.

İspat :

Teoremin ispatı için ilk olarak birinci kısmı ispatlayalım. Yani, lemma 4.1 deki *(i),(ii)* ya da *(iii)* de verilen bir M dönel yüzeyinin bağlantılı bir M' parçası için, M' noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunda, H ortalama eğriliği sabittir. İkinci olarak, (her üç tip için) M' için tersini ispatlamak zorundayız. İlk olarak bilinen bazı durumları dikkate alalım. *(i)* durumunda verilen bir M yüzeyi için $\{M - \mathrm{L}, x = r(s) < 0\}$ ın veya $\{M - \mathrm{L}, x = r(s) > 0\}$ ın herhangi bağlantılı bir M' parçasını düşünmek zorundayız.

Benzer şekilde *(ii)* veya *(iii)* durumunda verilen bir M yüzeyi için sırasıyla $\{M - \mathrm{L}, z - y = g(s) - f(s) < 0\}$ ın veya $\{M - \mathrm{L}, z - y = g(s) - f(s) > 0\}$ ın veya $\{M - \mathrm{L}, x = r(s) < 0\}$ veya $\{M - \mathrm{L}, z = r(s) > 0\}$ ın bağlantılı herhangi bir M' parçasını düşünmek zorundayız.

Bu altı durumun her birinde, M' parçasını noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunda ortalama eğriliğin (H) sabit olduğunu kanıtlamıştık. H nın sabitliğini ispatlamak için her bir durumda verilen iki farklı parçayı ayrı ayrı dikkate almak gerekli değildir. Bunun için yukarıda verilen yüzey parçalarından sadece birini dikkate alarak ispatı gerçekleştireceğiz.

Özel olarak lemma 4.2. de dikkate alınan yüzeyler için sağlanır. Burada *(i)* ve *(ii)* için ispat yapılacak. Benzer şekilde *(ii)* içinde ispat yapılabilir.

Şimdi ispata başlayabiliriz.

1.Adım:

(i) Lemma 4.2-(a) da verilen bir M' dönel yüzeyini (yani 4.1 de verilen yüzeyi)

dikkate alalım. Bu durumda M', $\{M-\mathsf{L}, x(s)>0\}$ kümesinin bağlantılı bir parçasıdır. $G=-\left(x', z'\sinh(\varphi), z'\cosh(\varphi)\right)$ Gauss dönüşümü için M' üzerinde $\Delta G = fG$ şartını ifade edelim. G den

$$G_s = -\left(x'', z''\sinh(\varphi), z''\cosh(\varphi)\right),$$

$$G_{ss} = -\left(x''', z'''\sinh(\varphi), z'''\cosh(\varphi)\right),$$

$$G_{\varphi\varphi} = -\left(0, z'\sinh(\varphi), z'\cosh(\varphi)\right),$$

vektörlerini elde ederiz.O halde, (4.4) denklemini uygulayarak Gauss dönüşümünün Laplace’ ı

$$-\left[\varepsilon_1 (G_{ss} + \frac{x'}{x} G_s) + \frac{1}{x^2} G_{\varphi\varphi}\right]$$

vektörü yardımıyla

$$\Delta G = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \left(x''' + \dfrac{x'}{x} x'' \right) \\ \left\{ \varepsilon_1 \left(z''' + \dfrac{x'}{x} z'' \right) + \dfrac{1}{x^2} z' \right\} \sinh(\varphi) \\ \left\{ \varepsilon_1 \left(z''' + \dfrac{x'}{x} z'' \right) + \dfrac{1}{x^2} z' \right\} \cosh(\varphi) \end{Bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikten aşağıdaki fonksiyonları tanımlamak mümkündür.

$A = x''' + \frac{x'}{x} x''$ ve $B = \varepsilon_1 \left(z''' + \frac{x'}{x} z'' \right) + \frac{1}{x^2} z'$ olsun. Bu durumda

$$\Delta G = \left(\varepsilon_1 A,\ B \sinh(\varphi),\ B \cosh(\varphi) \right)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\left\langle \Delta G, G \right\rangle_L = -\left(\varepsilon_1 x' A - z' B \right)$$

olduğundan $\Delta G = fG$ şartı $\Delta G + \varepsilon_1 \left\langle \Delta G, G \right\rangle_L G = 0$ ifadesine denktir. Bu eşitlikten

$$\begin{cases} \varepsilon_1 A - \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 x' A - z' B \right)(-x') = 0 \\ \left\{ B - \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 x' A - z' B \right)\left(-z'\right) \right\} \sinh(\varphi) = 0 \\ \left\{ B - \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 x' A - z' B \right)(-z') \right\} \cosh(\varphi) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bunlar aşağıdaki iki eşitliğe denktir.

$$\begin{cases} \left(1 + \varepsilon_1 x'^2 \right) A - x' z' B = 0 \\ \\ x' z' A + \left(1 - \varepsilon_1 z'^2 \right) B = 0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Ayrıca ,

$$(r) : z'^2 - x'^2 = \varepsilon_1$$

bağıntısını kullanarak, (4.13) eşitliklerinin aşağıdaki (4.14) şartına denk olduğunu görürüz.

$$\begin{cases} z'\left(z'A-\varepsilon_1 x'B\right)=0 \\ x'\left(z'A-\varepsilon_1 x'B\right)=0. \end{cases} \tag{4.14}$$

(r) bağıntısı ve türevi kullanarak basit bir hesaplamadan sonra

$$z'A-\varepsilon_1 x'B=\left(z'x'''-x'z'''\right)+\varepsilon_1\left(\frac{z'}{x}\right)' \tag{4.15}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.3) deki ikinci formülden H ortalama eğriliğinin türevi

$$z'x'''-x'z'''=2\varepsilon_1 H'-\varepsilon_1\left(\frac{z'}{x}\right)'$$

şeklinde elde edilir.(4.15) deki eşitlik dikkate alınırsa yukarıdaki ifadenin

$$z'A-\varepsilon_1 x'B=2\varepsilon_1 H'$$

olduğu görülür. Bu durumda (4.14) şartı

$$\begin{cases} z'H'=0 \\ x'H'=0 \end{cases}$$

şeklini alır. Buradan *(r)* bağıntısı kullanılarak H'^2 nin sıfır olduğu görülür. Böylece M' üzerinde, H' özdeş olarak sıfırdır. Tersine Lemma 4.2 deki (a) şıkkındaki M' yüzeyinin sabit ortalama eğriliğe sahip olduğunu kabul edelim. M' yüzeyinin noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için (4.14) de verilen bağıntıya ulaşmak zorundayız. H nın türevinden

$$\left(z'x''' - x'z'''\right) = 2\varepsilon_1 H' - \varepsilon_1 \left(\frac{z'}{x}\right)'$$

bağıntısına sahibiz. Ayrıca A ve B değerleri kullanılarak

$$z'A - \varepsilon_1 x'B = \left(z'x''' - x'z'''\right) + \varepsilon_1 \left(\frac{z'}{x}\right)'$$

eşitliği elde edilir. $H' = 0$ olduğundan bu iki bağıntıdan $z'A - \varepsilon_1 x'B = 0$ bağıntısını elde ederiz. Bu durumda (4.14) şartı sağlanmış olur. Bu da ispatı tamamlar.

2.Adım:

(iii) de verilen bir M yüzeyini, yani lemma (4.2)-(c) de verilen yüzeyi göz önüne alalım. Birinci adımda yapılanlara benzer olarak M' nin noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunu kabul edelim

İlk olarak M' yi $\{M - \mathrm{L}, z(s) - y(s) > 0\}$ kümesinin bağlantılı bir parçası olarak göz önüne alalım.

$$G = -\left(-t\left(z' - y'\right); z' - \frac{t^2}{2}\left(z' - y'\right); y' + \frac{t^2}{2}\left(z' - y'\right)\right)$$

olduğu için $U = z' - y'$ kullanarak,

$$G = -\begin{pmatrix} -tU' \\ z' - \frac{t^2}{2}U' \\ y' - \frac{t^2}{2}U' \end{pmatrix} \; ; \; G_s = \begin{pmatrix} -tU'' \\ z'' - \frac{t^2}{2}U'' \\ y'' - \frac{t^2}{2}U'' \end{pmatrix}$$
$$G_{ss} = \begin{pmatrix} -tU''' \\ z'' - \frac{t^2}{2}U''' \\ y'' - \frac{t^2}{2}U''' \end{pmatrix} \; ; \; G_{tt} = \begin{pmatrix} 0 \\ -U \\ -U \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

vektörleri kolaylıkla elde edilir. O halde, Gauss dönüşümünün Laplace'ı, (4.12) yi uygulayarak

$$-\left[\varepsilon_1 \left(G_{ss} + \frac{U'}{U} G_s \right) + \frac{1}{U^2} G_{\varphi\varphi} \right]$$

vektörü yardımıyla

$$\Delta G = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 t \left(U''' + \left(\frac{U'}{U} \right) U'' \right) \\ \varepsilon_1 \left(-z''' + \frac{t^2}{2} U''' \right) + \varepsilon_1 \left(-z'' + \frac{t^2}{2} U'' \right) \left(\frac{U'}{U} \right) + \frac{U'}{U^2} \\ \varepsilon_1 \left(-y''' + \frac{t^2}{2} U''' \right) + \varepsilon_1 \left(-y'' + \frac{t^2}{2} U'' \right) \left(\frac{U'}{U} \right) + \frac{U'}{U^2} \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 t\left(U''' + \left(\dfrac{U'}{U}\right)U''\right) \\ \left\{\varepsilon_1\left(-z''' - z''\left(\dfrac{U'}{U}\right)\right) + \dfrac{U'}{U^2}\right\} + \dfrac{t^2}{2}\varepsilon_1\left(U''' + \left(\dfrac{U'}{U}\right)U''\right) \\ \left\{\varepsilon_1\left(-y''' - y''\left(\dfrac{U'}{U}\right)\right) + \dfrac{U'}{U^2}\right\} + \dfrac{t^2}{2}\varepsilon_1\left(U''' + \left(\dfrac{U'}{U}\right)U''\right) \end{pmatrix}
$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitlikten aşağıdaki fonksiyonları tanımlamak mümkündür.

$$
\begin{cases} A := \varepsilon_1\left(U''' + \left(\dfrac{U'}{U}\right)U''\right) \\ B := \varepsilon_1\left(-z''' - z''\left(\dfrac{U'}{U}\right) + \dfrac{U'}{U^2}\right) \\ C := \varepsilon_1\left(-y''' - y''\left(\dfrac{U'}{U}\right) + \dfrac{U'}{U^2}\right) \end{cases} \tag{4.17}
$$

olsun. Bu durumda G nin Laplace operatörü,

$$
\begin{pmatrix} tA \\ B + \dfrac{t^2}{2}A \\ C + \dfrac{t^2}{2}A \end{pmatrix}
$$

dir. Şimdi $g = \langle \Delta G, G \rangle_L$ fonksiyonunu hesaplayalım.

$$
g = -t^2 U'A + \left(z' - \frac{t^2}{2}U'\right)\left(B + \frac{t^2}{2}A\right) - \left(y' - \frac{t^2}{2}U'\right)\left(C + \frac{t^2}{2}A\right)
$$

$$=-t^2U'A+\left(z'B\right)+\frac{t^2}{2}\left(z'A-U'B\right)+\left(-y'C\right)+\frac{t^2}{2}\left(U'C-y'A\right)$$

$$=-t^2U'A+\left(z'B-y'C\right)+\frac{t^2}{2}A\left(z'-y'\right)+\frac{t^2}{2}U'\left(C-B\right)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{cases} z'-y'=U' \\ \quad ve \\ C-B=A \end{cases}$$

dir. $g=\left\langle \Delta G, G\right\rangle_L = z'B-y'C$ yazabiliriz. Şimdi, $\Delta G+\varepsilon_1\left\langle \Delta G, G\right\rangle_L G=0$ ifadesine eşit olan $\Delta G=fG$ şartı;

$$\begin{cases} tA+\varepsilon_1\left(z'B-y'C\right)\left(-tU'\right)=0 \\ \left(B+\dfrac{t^2}{2}A\right)+\varepsilon_1\left(z'B-y'C\right)\left(z'-\dfrac{t^2}{2}U'\right)=0 \\ \left(C+\dfrac{t^2}{2}A\right)+\left(\left(z'B-y'C\right)\left(y'-\dfrac{t^2}{2}U'\right)\right)=0 \end{cases}$$

haline gelir. Yukarıdaki bağıntıların her birinin sol tarafı bir polinom verir. Polinomların kuvvetine uyum göstererek aşağıdaki denk bağıntılar elde edilir.

$$\begin{cases} A-\varepsilon_1\left(z'B-y'C\right)U'=0 \\ B+\varepsilon_1\left(z'B-y'C\right)z'=0 \\ C+\varepsilon_1\left(z'B-y'C\right)y'=0 \end{cases}$$

Diğer taraftan $A = C - B$ ve $U' = z' - y'$ olduğundan yukarıdaki bağıntılar aşağıda verdiğimiz bağıntılara denktir.

$$\begin{cases} -\left(1+\varepsilon_1\left(z'^2 - y'^2\right)\right)B + \left(1-\varepsilon_1\left(y'^2 - y'z'\right)\right)C = 0 \\ \left(1+\varepsilon_1 z'^2\right)B - \varepsilon_1 y'z'C = 0 \\ \varepsilon_1 y'z'B + \left(1-\varepsilon_1 y'^2\right)C = 0 \end{cases}$$

İkinci denklemi (-1) ile çarpıp üçüncüye eklersek ilk denklemi elde ederiz.

$(r') : y'^2 - z'^2 = \varepsilon_1$ bağıntısı kullanarak ve M' nin noktasal 1-tipli Gauss dönüşümüne sahip olduğunu dikkate alarak

$$\begin{cases} y'\left(y'B - z'C\right) = 0 \\ z'\left(y'B - z'C\right) = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

elde edilir. Şimdi $y'B - z'C$ ifadesini hesaplayalım. (4.17) de verilen B ve C den dolayı

$$\begin{cases} y'B - z'C \\ = y'\left(\varepsilon_1\left(-z''' - z''\left(\dfrac{U'}{U}\right) + \dfrac{U'}{U^2}\right)\right) - z'\left(\varepsilon_1\left(-y''' - y''\left(\dfrac{U'}{U}\right) + \dfrac{U'}{U^2}\right)\right) \\ = \varepsilon_1\left(\left(z'y''' - y'z'''\right) + \dfrac{U'}{U}\left(z'y'' - y'z''\right)\right) - \dfrac{U'}{U^2}\left(z' - y'\right) \\ = \varepsilon_1\left(\left(z'y''' - y'z'''\right) + \dfrac{U'}{U}\left(z'y'' - y'z''\right)\right) - \dfrac{U'^2}{U^2} \end{cases}$$

yazarız. Şimdi $U'\left(z'y''-y'z''\right)$ terimini dikkate alalım. $(r'): y'^2-z'^2=\varepsilon_1$ bağıntısı ve bu bağıntının türevi kullanılarak

$$U'\left(z'y''-y'z''\right)=\varepsilon_1 U''$$

elde edilir. O halde $y'B-z'C$;

$$\begin{aligned} y'B-z'C &= \varepsilon_1\left(z'y'''-y'z'''\right)+\frac{U''}{U}-\frac{U'^2}{U^2} \\ &= \varepsilon_1\left(z'y'''-y'z'''\right)+\left(\frac{U'}{U}\right)' \end{aligned}$$

şeklini alır. Sonuçta, bu eşitliği

$$2H'=\varepsilon_1\left(z'y'''-y'z'''\right)+\left(\frac{U'}{U}\right)'$$

bağıntısı ile ve (4.14) eşitliği ile birlikte dikkate aldığımızda

$$\begin{cases} y'H'=0 \\ z'H'=0 \end{cases}$$

şekline gelir. Bu durumda H, M' üzerinde sabittir. Diğer taraftan ispatın ikinci kısmı birinci adımdaki gibi kolaylıkla elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3- Boyutlu Minkowski Uzayında Gauss Dönüşümü Noktasal 1-Tipli Dönel Yüzey Örnekleri

Örnek 4.1. (Hiperbolik silindir)

$$x(u,v)=\left(u,a\cosh v,a\sinh v\right)$$

parametrik denklemiyle verilen hiperbolik silindirin $(a>0)$ G Gauss dönüşümü,

$$G=\left(0,-\cosh v,0-\sinh v\right)$$

ile verilir. Buna göre;

$$\Delta G=\frac{1}{a^2}G$$

dir. Dolayısıyla hiperbolik silindir, Gauss dönüşümü noktasal-1 tipli ve ikinci çeşittendir. Gerçekten;

$$x_u=\left(1,0,0\right) \text{ ve } x_v=\left(0,a\sinh v,a\cosh v\right)$$

olmak üzere

$$x_u\times_L x_v=\left(0,-a\cosh v,-a\sinh v\right) \text{ ve } \left\|x_u\times_L x_v\right\|=a$$

olur. Buna göre;

$$G=\left(0,-\cosh v,-\sinh v\right)$$

elde edilir. Buradan Laplace operatörünü hesaplarsak;

$$E=\left\langle x_u,x_v\right\rangle_L=1,\ F=\left\langle x_u,x_v\right\rangle_L=0,\ G=\left\langle x_v,x_v\right\rangle_L=-a^2$$

olur. Diğer taraftan;

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -a^2\end{pmatrix}\ \text{ve}\ \det\left(g_{ij}\right)=-a^2$$

elde edilir. Bu durumda $\left(g^{ij}\right)$ ters matrisi

$$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{a^2}\end{pmatrix}$$

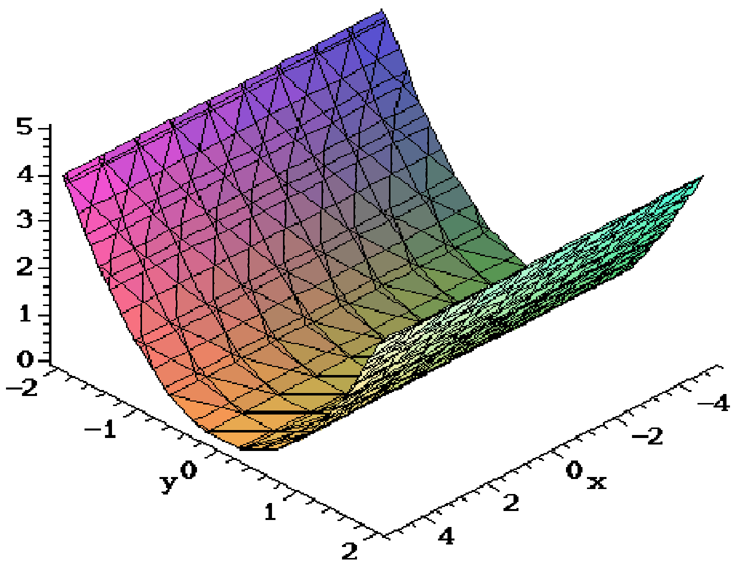
olur. Bu ifadeler Laplace operatöründe yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\Delta=-\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

elde edilir. Buradan G Gauss dönüşümüne Laplace operatörünü uygularsak;

$$\begin{aligned}\Delta G &= \frac{1}{a^2}\left(0,-\cosh v,-\sinh v\right) \\ &= \frac{1}{a^2}G\end{aligned}$$

olur. Böylece $x(u,v)=\left(u,a\cosh v,a\sinh v\right)$ parametrik denklemiyle verilen hiperbolik silindir Gauss dönüşümü noktasal 1-tiplidir ve birinci çeşittendir. (Şekil 4.1.)



Şekil 4.1. Hiperbolik Silindir

Örnek 4.2. (Dik koni)

$u>0$ ve bazı a sabitleri için $a>1$ olmak üzere;

$$x(u,v)=\left(u\sin v, u\cos v, au\right)$$

şeklinde parametrize edilen dik koni için;

$$G = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(a \sin v, a \cos v, 1 \right) \ ,$$

$$\Delta G = \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(a \sin v, a \cos v, 1 \right) + \left(0, 0, \frac{-1}{\sqrt{a^2 - 1}} \right) \right)$$

dir ve dik koni Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli ve ikinci çeşittendir. Gerçekten ;

$$x_u = \left(\sin v, \cos v, au \right) \ \text{ve} \ x_v = \left(u \cos v, -u \sin v, 0 \right)$$

olmak üzere,

$$x_u \times_L x_v = \left(au \sin v, au \cos v, u \right) \ \text{ve} \ \left\| x_u \times_L x_v \right\| = u \sqrt{a^2 - 1}$$

elde edilir. Buradan;

$$G = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} \left(a \sin v, a \cos v, 1 \right)$$

olur. Diğer taraftan

$$E = 1 - a^2, \ F = 0, \ G = u^2$$

olduğundan

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1-a^2 & 0\\ 0 & u^2\end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \det\left(g_{ij}\right)=u^2\left(1-a^2\right)$$

olur. Bu durumda $\left(g^{ij}\right)$ matrisi;

$$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1-a^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{u^2}\end{pmatrix}$$

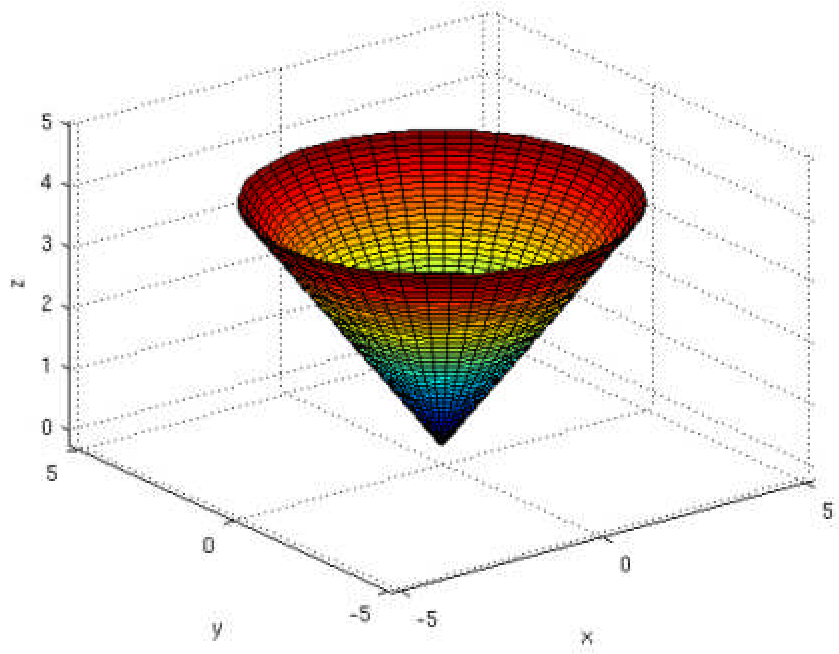
olur. Bu ifadeler kullanılarak Δ Laplace operatörü;

$$\Delta=\frac{a^2-1}{u}\frac{\partial}{\partial u}+\left(1-a^2\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

şeklinde elde edilir. G Gauss dönüşümüne Laplace operatörünü uygularsak;

$$\begin{aligned}\Delta G&=\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\left(a\sin v, a\cos v, 1\right)+\left(0,0,\frac{-1}{\sqrt{a^2-1}}\right)\right)\\&=\frac{1}{u^2}\left(G+\left(0,0,\frac{-1}{\sqrt{a^2-1}}\right)\right)\end{aligned}$$

olur. Böylece yukarıdaki parametrik denklemle ifade edilen dik koni, Gauss dönüşümü noktasal-1 tiplidir ve ikinci çeşittendir. (Şekil 4.2.)



Şekil 4.2. Dik koni

Örnek 4.3. (Hiperbolik koni)

$$x(u,v) = \left(au, u\sinh v, u\cosh v \right)$$

şeklinde parametrize edilen hiperbolik koninin G Gauss dönüşümü;

$$G = \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}}\left(1, a\sinh v, a\cosh v\right),$$

$$\Delta G = \frac{-1}{u^2}\left(G + \left(\frac{1}{1-a^2}, 0, 0 \right) \right)$$

dir. Dolayısıyla hiperbolik koni Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli ve ikinci çeşittendir. Gerçekten;

$$x_u = (a, \sinh v, \cosh v) \text{ ve } x_v = (0, u\cosh v, u\sinh v)$$

olmak üzere;

$$x_u \times_L x_v = (-u, -au\sinh v, -au\cosh v) \text{ ve } \|x_u \times_L x_v\| = u\sqrt{1-a^2}$$

olur. Buna göre ;

$$G = \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}}(1, a\sinh v, a\cosh v)$$

dir. Diğer taraftan;

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2-1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \text{ ve } \det(g_{ij}) = u^2(a^2-1)$$

olur. Bu durumda (g^{ij}) ters matrisi;

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} \end{pmatrix}$$

olur. Bu ifadeler kullanılarak Δ Laplace operatörü;

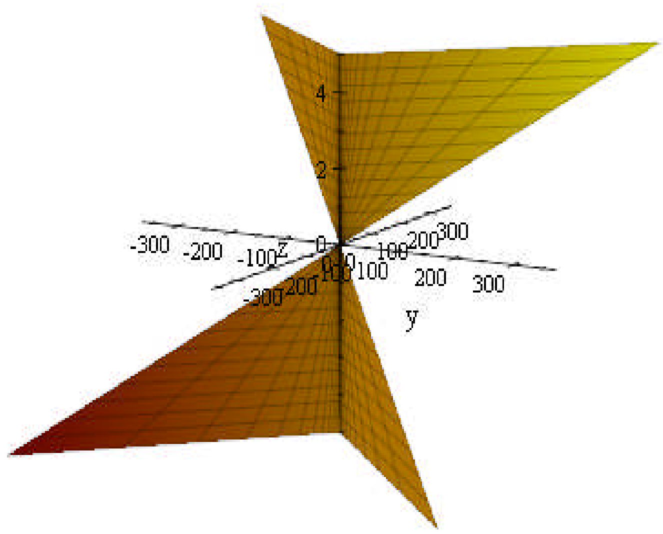
$$\Delta=\left(\frac{1-a^2}{u}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(1-a^2\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

şeklinde elde edilir. G Gauss dönüşümüne Laplace operatörü uygulanırsa;

$$\Delta G=-\frac{1}{u^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-a^2}}\left(1,a\sinh v,a\cosh v\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}},0,0\right)\right)$$

$$\Delta G=-\frac{1}{u^2}\left(G+\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}},0,0\right)\right)$$

olur. Böylece yukarıdaki parametrik denklem ile ifade edilen hiperbolik koni Gauss dönüşümü noktasal-1 tipli ve ikinci çeşittendir. (Şekil 4.3.)



Şekil 4.3. Hiperbolik Koni

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Chen vd. (2005) ve Niang (2004) tarafından elde edilen sonuçlar detaylı bir şekilde incelenmiştir. Üçüncü bölümde Öklid 3-uzayında Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli olan dönel yüzeyler ile birinci ve ikinci çeşitten Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli olan dönel yüzeyler ele alınmıştır. Ayrıca bu bölümde bir dönel yüzeyin hangi durumlarda polinom çeşit ve rasyonel çeşit olduğu gösterilmiştir. Dördüncü bölümde ise Minkowski 3-uzayında Gauss dönüşümü noktasal 1-tipli dönel yüzeyler incelenmiştir.

İleri çalışmalar için Chen vd. (2005) ve Niang (2004)'da elde edilen sonuçlara benzer olarak hiperyüzeyler içinde yeni sonuçlar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

A.Yıldız, 3-boyutlu Öklid uzayındaki yüzeylerin Gauss dönüşümlerinin bir karakterizasyonu, Yüksek Lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, 2004.

Carmo, M. Perdigao do, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall Inc., Brazil, 1976.

Chen, B. Y., Choi, M., Kim , Y. H., Surfaces of Revolution with pointwise 1-type Gauss map , J. Korean Math. Soc., 42, No.3, 447-455, 2005.

Chen, B. Y., Ishikawa S., On Classification of Some Surfaces of Revolution of Finite Type , Tsukuba J. Math., Vol.17, No.1, 287-298, 1993.

Duggal, K.L. and Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications, Klower Academic Publishers , London ,1996.

Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 2000.

Kuhnel, W., Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, Student Mathematical Library Volume 16, American Mathematical Society , 2006.

Lipschutz, M. M., Theory and problems of Differential Geometry, Schaum’s Outline Series , New York, 1969.

M. Dede, 3-boyutlu Minkowski uzayında Minimal regle yüzeyler, Yüksek Lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2006.

Milman, R. S., Elements of Differential Geometry, California State University, Prentice-Hall Inc. , California, 1977.

Niang, A., On rotation surfaces in the Minkowski 3-dimensional space with pointwise 1-type Gauss map, J.Korean Math. Soc., 41, No.6, 1007-1021, 2004.

O'Neill, B., Elementary Differential Geometry , Elsevier Inc., New York 2006.

O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity , Academic Press , New York, 1983.

Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri, Nobel yayın dağıtım , Ankara, 2004.