KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Üç Boyutlu Lorentz Uzayında Küresel Eğriler ve Frenet Çatıları Üzerine

Osman KAYA

MAYIS 2010

ÖZET

ÜÇ BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA KÜRESEL EĞRİLER VE FRENET ÇATILARI ÜZERİNE

KAYA, Osman

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

Mayıs 2010, 44 sayfa

Bu çalışmada Lorentz uzayda küresel eğriler incelendi ve bunların Frenet formülleri verildi. Bunlar göz önüne alınarak bir non-flat B-scroll üzerinde küresel eğri bulunamayacağı gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Lorentz hiperyüzeyler, küresel eğriler, B-scroll.

ABSTRACT

ON SPHERICAL CURVES AND FRENET FRAMES IN THREE DIMENSIONAL LORENTZIAN SPACE

KAYA, Osman

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM

May 2010, 44 pages

In this study, the spherical curves in Lorentzian space are investigated. By considering these, it was showed that there is no exist a spherical curve on a non-flat B-scroll.

Key Words: Lorentzian hypersurfaces, spherical curves, B-scroll.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, tez yöneticisi hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM ’a, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm hocam Sayın Doç. Dr. Kazım İLARSLAN ’a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM ’a ve son olarak büyük fedakarlıklarla bana destek olan arkadaşım Mustafa EMİR ’e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

T	:	Eğrinin teğet vektör alanı
N	:	Eğrinin asli normal vektör alanı
B	:	Eğrinin binormal vektör alanı
g	:	Lorentz metriği
k_i	:	Eğrinin i-yinci eğrilik fonksiyonu
V_i	:	Eğrinin i-yinci Frenet vektör alanları
κ	:	Eğrinin eğrilik fonksiyonu
τ	:	Eğrinin burulma fonksiyonu
α	:	Diferensiyellenebilir birim hızlı eğri
λ	:	Diferensiyellenebilir fonksiyon
μ	:	Diferensiyellenebilir fonksiyon
$\|u\|$	:	u nun normu
E^n	:	n-boyutlu Öklid uzayı
E_1^n	:	n-boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayı
E_1^3	:	3-boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayı
$S_1^2(m,r)$	:	Yarı-Riemann küresi
$H_0^2(m,r)$	:	Yarı-Riemann hiperbolik uzayı

1.GİRİŞ

Literatürden iyi bilinmektedir ki; verilen bir eğrinin geometrisini inceleyebilmek için bu eğriye ait Frenet denklemlerinin bilinmesi gerekir. Bu denklemler Serret-Frenet denklemleri olarak da bilinmektedir-Frenet1847, Serret 1851. Bu denklemler sayesinde bir eğrinin düzlemsel ya da bir doğru olup olmadığı anlaşılabilir. Bu konuda çalışmalar önce uzay eğrileri için yapılmıştır. Verilen eğrinin bir yüzey üzerinde de bulunabileceği göz önüne alınarak bu tip eğrilerin de geometrisinin ne olacağı konuyla ilgili bir çok matematikçi tarafından araştırılmıştır. Bu araştırmalar bilhassa bir küre üzerinde bulunan eğriler için yapılmıştır ki bu tip eğrilere küresel eğriler denilmektedir. Kürenin tanımı göz önüne alındığında aslında kürenin verilen iç-çarpımla ilgili olduğu açıkça bilinmektedir. Konu bu açıdan ele alındığında küresel eğrilerin Öklid ve yarı-Öklid uzaylarda çok farklı karakterizasyonlara sahip olabileceği düşünülebilir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışma boyunca kullanılacak temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde ise üç boyutlu Lorentz uzayda eğrilerle ilgili temel kavramlar ele alınmıştır. Küresel eğriler, B-scroll yüzeyler ve bunlar arasındaki ilişki üçüncü bölümde incelenmiştir. Dördüncü bölüm ise sonuç için ayrılmıştır. Bu çalışma boyunca tekrar eden indisler üzerinden toplam alma andlaşması kabul edilerek, örneğin

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$$

yerine

$$v = v^i e_i$$

yazılacaktır.

1.1. Tezin Amacı

Bu çalışmada L^3 Lorentz uzayında verilen bir küre üzerindeki eğrilerin geometrisi incelenecektir. Bilindiği gibi Lorentz uzayda iki tip küre vardır. Bunlardan birincisi spacelike vektörlerin uç noktalarından diğeri ise timelike vektörlerin uç noktalarından oluşan küredir ki bunlar sırasıyla S_1^2 ve H_0^2 ile gösterilir. Ayrıca düzlemsel olmayan bir B-scroll üzerinde küresel eğrilerin bulunamayacağı ortaya konulmuştur.

1.2. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Riemann Geometry (O'NEİL), Lineer Cebir (H. H. Hacısalihoğlu) ve Diferensiyel Geometri (A. Sabuncuoğlu) kitaplarından faydalanılmıştır. Tezin içeriği için ise Lorentzian Spherical Curves (G.S. Birman) makalesinden, Contr. Algebra and Geometry (Liu Huili) makalesinden ve Trans. Amer. Math. Soc.(Graves L. K.) kitabından faydalanılmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak olan kavramlar ve bazı örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1: V n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa g ye V üzerinde bir simetrik non-dejenere bilineer form denir:

$\forall u, v, w \in V$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için;

$i)$ $g(\lambda u + v, w) = \lambda g(u, w) + g(v, w)$, (bilineerlik)

$ii)$ $g(u, v) = g(v, u)$, (simetrik)

$iii)$ $u_0 \in V$ sabit tutulan bir vektör olmak üzere $\forall v \in V$ için

$g(u_0, v) = 0 \Rightarrow v = 0$ dır. (non-dejenere)

Örnek 2.1.1: $\mathbb{R}^3$de tanımlı $g(u,v) = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$,

$v = (v_1, v_2, v_3)$, dönüşümü bir simetrik nondejenere bilineer formdur.

Tanım 2.1.2: V bir vektör uzayı olsun. g V üzerinde tanımlı simetrik non-dejenere bilineer form ise g ye bir skalar çarpım, (V, g) ikilisine de bir **yarı-Öklidiyen uzay** denir.

g, V üzerinde tanımlı simetrik non-dejenere bilineer form olsun. $S = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ V nin bir bazı olmak üzere bileşenleri $g_{ij} = g(\alpha_i, \alpha_j)$ reel sayıları olan $G = [g_{ij}]$

matrisine g nin S bazına göre matris gösterimi denir. Buna göre $u = u^i\alpha_i$, $v = v^j\alpha_j$ ise

$$g(u,v) = [u_1,...,u_n][g_{ij}]\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.1.1: g , V üzerinde tanımlı simetrik bilineer form olsun. Bu durumda g non-dejeneredir $\Leftrightarrow$ V nin herhangi bazına göre g nin matrisi regülerdir [8].

İspat : g non-dejeneredir $\Leftrightarrow$ $\forall v \in V$ için $g(u,v) = 0$ ise $u = 0$ dır.

$\Leftrightarrow \{e_1,...,e_n\}$ V nin bir bazı olmak üzere her bir i için

$g(u,e_i) = 0$ ise $u = 0$

$\Leftrightarrow g(u^j e_j, e_i) = 0$ ise $u = 0$

$$\Leftrightarrow [g_{ij}].\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{bmatrix} = 0 \text{ ise } u = 0$$

$\Leftrightarrow \det[g_{ij}] \neq 0$

$\Leftrightarrow [g_{ij}]$ regülerdir.

Tanım 2.1.3: g , V üzerinde tanımlı simetrik bilineer form olsun. Eğer her bir $v \in V$ için, $v \neq 0$, $g(v,v) > 0$ $(g(v,v) < 0)$ ise g ye pozitif (negatif) tanımlıdır denir. $g(v,v) \geq 0$ $(g(v,v) \leq 0)$ ve sıfır olmayan bir u vektörü için $g(u,u) = 0$ olması durumunda g ' ye **pozitif (negatif) yarı tanımlıdır** denir.

Tanım 2.1.4: g, V üzerinde tanımlı simetrik bilineer form olsun. g nin üzerinde negatif tanımlı olduğu V ’ nin en geniş altuzayının boyutuna g nin indeksi denir. Bu indeks (V,g) nin de **indeksi** olarak tanımlanır ve $indV$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: g, V üzerinde tanımlı simetrik bilineer form olsun. $h:V\to\mathbb{R}$, $h(v)=g(v,v)$ şeklinde tanımlı dönüşüme g nin **kuadratik formu** denir.

Eğer h g nin kuadratik formu ise $\forall u,v\in V$ için

$$g(u,v)=\frac{1}{2}\{h(u+v)-h(u)-h(v)\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda V nin öyle bir $\mathrm{E}=\{e_1,...,e_n\}$ bazı vardır ki

$$h(v)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(v_i)^2 \tag{2.1}$$

Şeklinde yazılabileceği lineer cebirden iyi bilinmektedir. Burada $\lambda_i\in\mathbb{R}, v=v^ie_i$ dir.

$r>0$ olmak üzere (2.1) deki λ_i lerin p tanesi pozitif, q tanesi negatif ve r tanesi de sıfır ise h kuadratik formu (p,q,r) tipindedir denir. Burada şunu belirtelim ki yukarıda q ve r sayıları sırasıyla g nin indeksi ve sıfırlık derecesidir. g nin sıfırlık derecesi $W=\ \xi\in V \mid g(\xi,v)=0, \forall v\in V$ olmak üzere $boyW$ olarak tanımlanır.

h kuadratik formunun kanonik formu baza göre değişebilir fakat tipi değişmez.

Teorem 2.1.2: g, V üzerinde tanımlı simetrik bilineer form ve g nin (p,q,r) tipinde kuadratik formu h olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur:

(i) g dejeneredir (non- dejeneredir) $\Leftrightarrow$ $r>0$ $(r=0)$.

(ii) g pozitif (negatif) tanımlı $\Leftrightarrow p = n$ $(q = n)$.

(iii) g pozitif (negatif) yarı-tanımlı $\Leftrightarrow$ $p > 0, q = 0, r > 0$ $(p = 0, q > 0, r > 0)$.

g nin bir $U = \{u_1, ..., u_n\}$ bazına göre matrisi $G = [g_{ij}]$ olsun. V nin öyle bir $\mathrm{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ bazı bulunabilir ki e_i ler G nin karakteristik vektörleridir. Bu baza göre kuadratik form da kanonik forma sahiptir. Eğer kuadratik form (p, q, r) tipinde ise g non- dejeneredir (dejeneredir) $\Leftrightarrow$ $rankG = n$ $(rankG < n)$ dir. Gerçekten g nin E bazına göre matrisi hesaplanırsa

$$G = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda_p & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{p+1} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{p+q} & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{p+q+1} & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{p+q+r} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $\det(G) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ dir. $1 \leq i \leq p$ için $\lambda_i > 0$, $p+1 \leq i \leq p+q$ için $\lambda_i < 0$ olduğundan $\det(G) \neq 0 \Leftrightarrow r = 0$ sonucuna varılır.

Tanım 2.1.6: g V üzerinde tanımlı simetrik non-dejenere bilineer form olsun. g nin kuadratik formu $(p, q, 0)$ tipinde ve $p.q \neq 0$ ise V ye **proper yarı Öklidiyen metrik** denir.

Tanım 2.1.8 de $q=0$ ise V bir iç çarpım uzayı, $q=1$ ise V Lorentz (Minkowski) uzayı ve g de sırasıyla bir iç çarpım veya Lorentz metrik adını alır.

Tanım 2.1.7: (V,g) bir yarı-Öklidiyen uzay olsun. $v \in V$ olmak üzere $\|v\| = |g(v,v)|^{1/2}$ reel sayısına v nin **normu** veya **uzunluğu** denir.

Tanım 2.1.8: (V,g) bir yarı Öklidiyen uzay ve $x \in V$ olmak üzere,

(i) $g(x,x) > 0$ veya $x=0$ ise x vektörüne **uzaysı (spacelike)**,

(ii) $g(x,x) < 0$ ise x vektörüne **zamansı (timelike),**

(iii) $g(x,x) = 0$ ve $x \neq 0$ ise bu durumda x vektörüne **ışıksı (lightlike, null veya isotropik)** vektör denir.

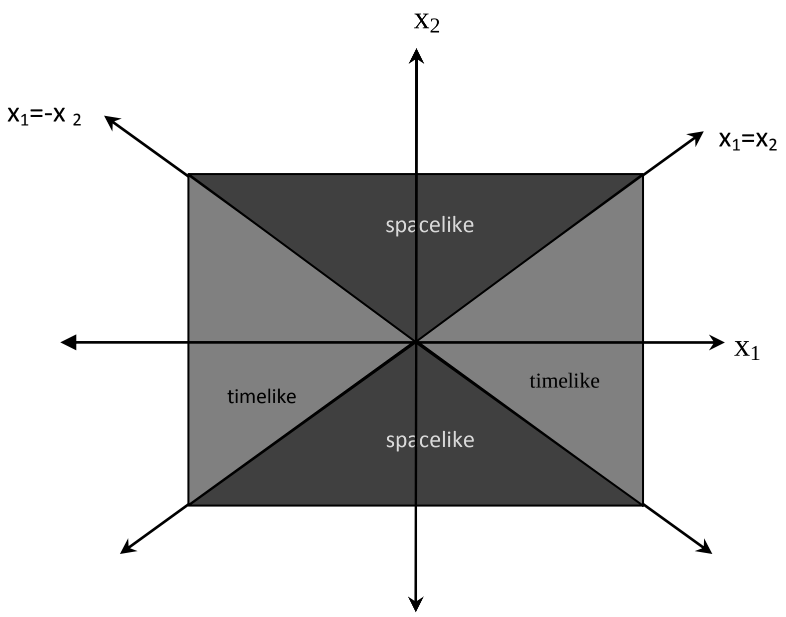
Örnek 2.1.2: a) E_1^2 uzayında spacelike, timelike ve lightlike vektörleri araştıralım:

$$g(x,x) = 0$$

$$-x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$x_1 = \pm x_2$$

dir. Bu denklemler $\mathbb{R}^2$ de I. ve II. açıortay doğrularını göstermektedir. Bu doğrular üzerindeki vektörler lightlike vektörlerdir. ($\vec{0}$ hariç).

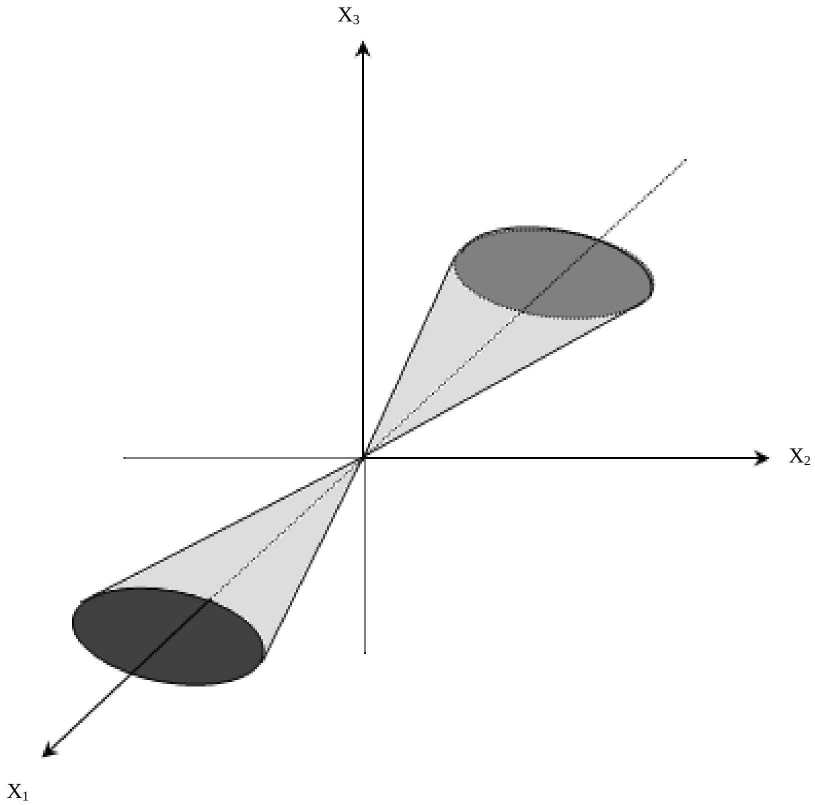


Şekil 2.1. E_1^2 de spacelike, timelike ve lightlike vektörler

b) E_1^3 Minkowski uzayında spacelike, timelike ve lightlike vektörleri elde edelim:

$$g(x,x)=0$$
$$-x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$
$$x_2^2+x_3^2=x_1^2$$

elde edilir. Bu da bir koni denklemidir ve bu koniye lightlike koni denir. Koni yüzeyinde yatan vektörler lightlike, koninin iç bölgesinde yatan vektörler timelike, dış bölgesinde yatan vektörler spacelike vektörlerdir.



Şekil 2.2 E_1^3 de ışık konisi

$u \in V$ olmak üzere $g(u,u) = \mp 1$ ise u ya bir **birim vektör** denir. V de alınan u ve v gibi iki vektör için $g(u,v) = 0$ ise bunlar **ortogonaldirler** denir ve $u \perp v$ şeklinde yazılır. $U,W \subset V$ birer altuzay olmak üzere $\forall u \in U$ ve $\forall w \in W$ için $g(u,w) = 0$ ise U ve W altuzayları birbirine diktir denir ve $U \perp W$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.9: (V,g) bir yarı-Öklidiyen uzay ve $\mathrm{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ V nin bir bazı olsun. Her bir i, j $(1 \le i, j \le n)$ için $g(e_i, e_j) = \mp \delta_{ij}$ ise E ye V nin bir **ortonormal bazı** denir.

Teorem 2.1.3: $V \neq \{0\}$ olmak üzere (V,g) bir yarı-Öklidiyen uzay olsun. Bu durumda V nin g ye göre bir ortonormal bazı vardır.

Tanım 2.1.10: (V,g) bir yarı-Öklidiyen uzay ve $W \subset V$ bir altuzay olsun. $g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$, $\forall u,v \in W$ için $g|_W(u,v) = g(u,v)$ şeklinde tanımlı simetrik bilineer form dejenere ise W ya **dejenere veya lightlike altuzay** denir.

Bu tanıma göre W dejenere ise W da öyle bir ξ vektörü vardır ki $\forall w \in W$ için $g(w,\xi) = 0$ dır. Şimdi

$$P = \ \xi \in W \mid g(w,\xi) = 0, \forall w \in W$$

kümesi göz önüne alınsın. $0 \in P$ olacağından P nin boş olmayan bir küme olduğu açıktır. Ayrıca $\forall \xi_1, \xi_2 \in P$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall w \in W$ için

$$\begin{aligned} g(\lambda\xi_1 + \xi_2, w) &= \lambda g(\xi_1, w) + g(\xi_2, w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Buna göre $\lambda\xi_1 + \xi_2 \in P$ olup, P W nın bir alt uzayıdır. Bu altuzaya W nın **null veya radikal altuzayı** denir ve $Rad(W)$ ile gösterilir. $boyRad(W)$ sayısına da g nin W üzerinde **sıfırlık derecesi** denir [2].

Tanım 2.1.11: (V,g) bir yarı-Öklidiyen uzay ve $W \subset V$ bir altuzay olsun.

$$W^{\perp} = \{u \in V \mid g(u,w) = 0, \forall w \in W\}$$

altuzayına W nın dik tümleyeni denir.

Radikal ve dik tümleyen alt uzayların tanımlarını göz önüne alarak şu teoremi verebiliriz.

Teorem 2.1.4: (V,g) bir yarı-Öklidiyen uzay ve $W \subset V$ bir altuzay olsun. Bu durumda W dejeneredir $\Leftrightarrow W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$.

Örnek 2.1.3: $\mathbb{R}_1^4$ in $W = \{(x,y,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ altuzayı göz önüne alınsın. W nın dejenere olup olmadığını inceleyelim:

$$\alpha \in W^{\perp}, \alpha = (a,b,c,d)$$

olsun. $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ W nın bir bazı olduğundan

$$\langle \alpha,(1,0,1,0) \rangle = -a + c = 0$$

$$\langle \alpha,(0,1,0,1) \rangle = b + d = 0$$

Buradan $W^{\perp} = Sp\{(1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$ elde edilir. Böylece $W \cap W^{\perp} = Sp\{(1,0,1,0)\}$ olup W dejeneredir.

Örnek 2.1.4: $\mathbb{R}^3$ te $u = {}_1,u \; {}_2,u = {}_3 u$ v olmak üzere $\langle u,v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$,

Lorentz metriği göz önüne alınırsa $E = e_1 = 1,0,0 \; ,e_2 = 0,1,0 \; ,e_3 = 0,0,1$ bazının bir ortonormal baz olduğu görülür.

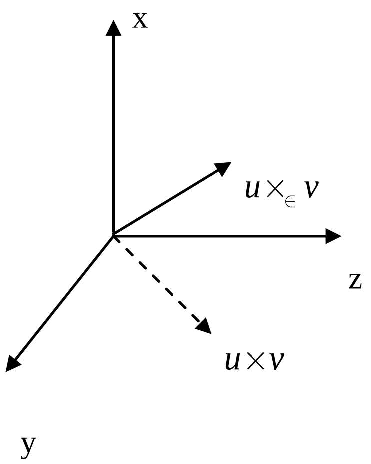
Tanım 2.1.12: $u, v \in E_1^3$ olsun. Bu durumda $\forall w \in E_1^3$ için $\langle u \times v, w \rangle = \det\ u, v, w$ olacak şekilde bir tek $u \times v$ vektörü vardır ki buna u ile v nin Lorentz vektörel çarpımı denir.

Yukarıdaki tanıma göre gerekli işlemler yapılırsa $u = \ u_1, u_2, u_3\ , v = \ v_1, v_2, v_3\ ,$ olmak üzere

$$u \times v = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (-(u_2 v_3 - u_3 v_2), u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \qquad (2.2)$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıdan da görüldüğü gibi Lorentz vektörel çarpımına göre $u \times v$, Öklid durumda elde edilen vektörel çarpımın $x = 0$ düzlemine göre yansımasıdır.



Şekil 2.1.3

Burada $\times_{\in}$ Öklid durumdaki vektörel çarpımı göstermektedir.

Teorem 2.1.5: $\forall u, v \in E_1^3$ için aşağıdaki önermeler doğrudur:

$(i)\ u\times v=-v\times u$

$(ii)\ u\times v$ vektörü u ile v ye diktir.

$(iii)\ u\times v\neq 0$ vektörü $P=Sp\{u,v\}$ düzleminde olup, P lightlike bir altuzaydır.

İspat : (i) ve (ii) (2.2) eşitliğinden kolayca hesaplanır.

(iii): (ii) den $u\times v\perp u$ ve $u\times v\perp v$ olduğu bilinmektedir. Buna göre $u\times v$ P deki her bir vektöre diktir. $u\times v\in P$ kabul edildiğinden $u\times v\in RadP$ olup $RadP\neq\{0\}$ dır. Bu ise P nin dejenere olması demektir.

2.2. E_1^3 Lorentz Uzayında Eğriler

Bilindiği gibi eğri kavramı metrik bir kavram değildir. Dolayısıyla Lorentz uzayda genel eğri tanımı öklid uzayındakinden farklı olmayacaktır. Buna göre E_1^3 de bir eğri denildiğinde $\alpha : I\subset R\rightarrow E^3$ şeklinde bir diferensiyellenebilir bir dönüşüm kastedilecektir. Eğer $\forall s\in I$ için $\alpha'(s)\neq 0$ ise eğri regüler eğri olarak bilinir. Bu çalışma boyunca eğri denildiğinde regüler bir eğri anlaşılacaktır.

Yarı-Öklidyen uzaylarda eğriler teğet vektörünün causal karakterine göre sınıflandırılırlar. Buna göre şu tanım verilebilir:

Tanım 2.2.1: Eğer $\forall s\in I$ için $\alpha'(s)$ spacelike (timelike, lightlike) ise α eğrisine spacelike (timelike, lightlike) denir.

Burada şuna dikkat edilmelidir ki E_1^3 de verilen her bir eğri I aralığının tamamında Tanım 2.2.1 deki sınıflardan birinde olmak zorunda değildir. Daha açıkçası α , I aralığındaki tüm s parametreleri için spacelike, timelike veya lightlike olmayabilir. Bunun için şu örneği verebiliriz:

Örnek 2.2.1: $\alpha : R \to E_1^3$, $\alpha(s) = (\cosh(s),\ s^2, \sinh(s))$ ise $\langle \alpha'(s),\ \alpha'(s) \rangle = 4s^2 - 1$

dir.

Buna göre α, $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ aralığında spacelike, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aralığında timelike ve $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ de lightlike dır.

Bir eğrinin spacelike veya timelike olması açık bir özelliktir, yani, eğer α bir noktasında spacelike veya timelike ise bu durumda bir $(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ aralığı vardır ki α burada spacelike veya timelike dir. Bunun nedeni α nın I nın her bir noktasında diferensiyellenebilir olmasıdır.

Teorem 2.2.1: $\alpha : I \to E_1^3$, E_1^3 de spacelike veya timelike bir eğri olsun. O zaman bir

$$\begin{aligned} &\varphi : j \to I \\ &s \to \varphi(s) = t \end{aligned}$$

parametre değişimi vardır ki $\beta = \alpha o \varphi$ olmak üzere $\|\beta'(s)\| = 1$ dir. Bu durumda eğriye yay-uzunluğu parametrelidir denir.

Eğer α lightlike ise öyle bir $\varphi : j \to I$ parametre değişimi bulunabilir ki $\beta = \alpha o \varphi$ olmak üzere $\|\beta''(s)\| = 1$ dir. Bu durumda α yay-uzunluğu yarı-parametrelidir.

2.3. E_1^3 Minkowski Uzayında Spacelike, Timelike ve Null Eğrilerin Frenet Denklemleri

2.3.1. Spacelike Eğrilerin Frenet Denklemleri

2.3.1.1. Asli Normali Spacelike veya Timelike Olan Spacelike Eğrilerin Frenet Denklemleri

α spacelike bir eğri ve asli normali N , timelike ve spacelike olsun. Bu durumda,

g(T,T) = 1, g(N , N) $=\varepsilon=\pm 1$, $g(B,B)=-\varepsilon$, $g(T,N)=0$, $g(T,B)=0$,

$g(N,B)=0$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&N=\frac{T'}{\|T'\|}=\frac{T'}{k_1}\Rightarrow T'=k_1N\\
&N'=aT+bN+cB
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlikten;

$$
\begin{aligned}
&g(N',T)=ag(T,T)+bg(N,T)+cg(B,T)\\
&g(N',T)=a
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

olur. $g(T,N)=0$ eşitliğinin her iki yanının türev alınıp (2.1) kullanılırsa,

$$g(T',N)+g(T,N')=0 \Rightarrow g(N',T)=-g(T',N)$$

$$g(N',T)=-g(k_1N,N)$$
$$g(N',T)=-k_1g(N,N)$$
$$g(N',T)=-\varepsilon k_1$$

elde edilir. Bu durumda $a=g(N',T)=-\varepsilon k_1$ dir. Şimdi de (2.1) eşitliği N ile çarpılırsa,

$$g(N',N)=ag(T,N)+bg(N,N)+cg(B,N)$$

bulunur. Buradan,

$$g(N',N)=\varepsilon b$$

olur. $g(N,N)=\varepsilon$ eşitliğinden

$$g(N',N)+g(N,N')=0$$

$$2g(N',N)=0$$

$$g(N',N)=0$$

bulunur ve buradan b = $g(N',N)=0$ elde edilir. Son olarak (2.1) eşitliği B ile çarpılır ise,

$$g(N',B)=ag(T,B)+bg(N,B)+cg(B,B)$$
$$g(N',B)=-c\varepsilon$$

dir. Burada eğer N spacelike ise ε=1, $g(N',B)$=-k_2 ve $g(B,B)$=1 olur ki her iki durumda da c = k_2 bulunur. $a=-\varepsilon k_1$, b = 0 ve c = k_2 den,

$$N' = -\varepsilon k_1 T + k_2 B \tag{2.3}$$

dir. Benzer olarak,

$$B' = aT + bN + cB \tag{2.4}$$

eşitliğinden;

$$g(B',T) = a$$

bulunur ve $g(T,B)=0$ eşitliğinde türev alınır ise,

$$g(T',B)+g(T,B')=0$$
$$g(B',T)=-g(T',B)$$
$$g(B',T)=-g(k_1 N,B)$$
$$g(B',T)=0$$

dir. Öyleyse a = 0 dır. (2.4) eşitliğinden,

$$g(B',N) = b\varepsilon$$

elde edilir ve $g(N,B)=0$ eşitliğinde türev alınır ise,

$$g(N',B)+g(N,B')=0$$
$$g(N',B)=-g(N,B')$$

bulunur. Burada eğer N spacelike ise $g(B',N)=-g(N',B)=k_2$ ve $g(B,B)=-1$,eğer N timelike ise $g(B',N)=-g(N',B)=-k_2$ ve $g(B,B)=1$ olur ki her iki durumda da b = k_2 elde edilir. Son olarak, (2.4) eşitliği B ile çarpılır ise,

$$g(B',B)=c\varepsilon \tag{2.5}$$

olur ve $g(B,B)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise;

$$\begin{aligned} g(B',B)+g(B,B')&=0 \\ g(B,B')&=0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

olduğundan c = 0 bulunur. a = 0, b = k_2 ve c = 0 olduğundan (2.4) eşitliği,

$$B'=k_2N$$

biçimindedir. (2.1), (2.3) ve (2.5) den:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -\varepsilon k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece asli normali lightlike olmayan spacelike bir eğrinin Frenet denklemleri elde edilmiş olur.

2.3.1.2. Asli Normali Lightlike Olan Eğrilerin Frenet Denklemleri

Şimdi de benzer şekilde asli normali lightlike olan spacelike bir eğrinin Frenet denklemlerini elde edelim. Bu durumda,

$$g(T,T)=1,\ g(N,N)=0,\ g(B,B)=0,\ g(T,N)=0,\ g(T,B)=0,\ g(N,B)=1$$

dir.

$$\mathrm{N}=\frac{\mathrm{T}'}{\|\mathrm{T}'\|}=\frac{T'}{k_1}\ \Rightarrow T'=k_1N \qquad (2.7)$$

elde edilir.

$$N'=aT+bN+cB \qquad (2.8)$$

olsun. (2.8), T ile çarpılır ise,

$$g(N',T)=ag(T,T)+bg(N,T)+cg(B,T)\Rightarrow g(N',T)=a$$

olur. $g(T,N)=0$ eşitliğinde türev alınır ise,

$$
\begin{aligned}
&g(T',N)+g(T,N')=0\\
&g(N',T)=-g(T',N)\\
&g(N',T)=-g(k_1N,N)=-k_1g(N,N)=0
\end{aligned}
$$

olur ve $a=g(N',T)=0$ elde edilir. (2.8), N ile çarpılır ise,

$$
\begin{aligned}
&g(N',N)=ag(T,N)+bg(N,N)+cg(B,N)\\
&g(N',N)=c
\end{aligned}
$$

olur. $g(N,N)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$
\begin{aligned}
&g(N',N)+g(N,N')=0\\
&2g(N',N)=0\\
&g(N',N)=0
\end{aligned}
$$

olur ve $c=g(N',N)=0$ elde edilir. (2.8), B ile çarpılır ise,

$$g(N',B)=ag(T,B)+bg(N,B)+cg(B,B)$$

$$g(N',B)=b$$

dir. $g(N,B)=1$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&g(N,B)=1\\
&g(N',B)+g(N,B')=0\\
&g(N',B)=-g(N,B')=k_2
\end{aligned}
$$

olur ve b=k_2 bulunur. $a=0, b=k_2$ ve c=0 olduğundan,

$$N' = k_2 N \tag{3.9}$$

olarak elde edilir. Şimdi de,

$$B' = aT + bN + cB \tag{2.10}$$

eşitliği T ile çarpılırsa,

$$g(B',T) = a$$

bulunur. $g(T,B)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(T',B) + g(T,B') = 0$$
$$g(B',T) = -g(T',B)$$
$$g(B',T) = -g(k_1 N, B) = -k_1$$

ve $a=-k_1$ olur. (2.10), N ile çarpılır ise,

$$g(B',N) = c$$

elde edilir. $g(N,B)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(N',B)+g(N,B')=0$$
$$g(N',B)=-g(N,B')=k_2$$

olarak bulunur ve c = -k_2 olur. Son olarak (2.10), B ile çarpılır ise,

$$g(B',B)=b$$

elde edilir.

g(B,B) = 0 eşitliğinin türevi alınır ise;

$$g(B',B)+g(B,B')=0$$
$$g(B,B')=0$$

elde edilir ve b=0 olarak bulunur. $a=-k_1$, b = 0 ve c $=-k_2$ olduğundan (2.10) eşitliği,

$$B'=-k_1T-k_2B \tag{2.11}$$

olarak bulunur. (2.7), (2.9) ve (2.11) den;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

olur. Böylelikle asli normali lightlike olan spacelike bir eğrinin Frenet denklemleri elde edilmiş olur.

2.3.1.3. Timelike Eğrilerin Frenet Denklemleri

α timelike bir eğri ve

$g(T,T)=-1,\ \ g(N,N)=1,\ \ g(B,B)=1,\ \ g(T,N)=0,\ g(T,B)=0,\ \ g(N,B)=0$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} N &= \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{T'}{k_1} \\ T' &= k_1 N \end{aligned} \tag{2.13}$$

dir.

$$N' = aT + bN + cB \tag{2.14}$$

olsun. (2.14), denklemi T ile çarpılır ise,

$$g(N',T) = ag(T,T) + bg(N,T) + cg(B,T)$$
$$g(N',T) = -a$$

olur. $g(T,N) = 0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(T',N) + g(T,N') = 0$$
$$g(N',T) = -g(T',N)$$
$$g(N',T) = -g(k_1N,N) = -k_1g(N,N) = -k_1$$

olur ve a=k_1 elde edilir. (2.14), N ile çarpılır ise,

$$g(N',N) = ag(T,N) + bg(N,N) + cg(B,N)$$
$$g(N',N) = b$$

olur. $g(N,N) = 1$ eşitliğinim türevi alınır ise,

$$g(N',N) + g(N,N') = 0$$
$$2g(N',N) = 0$$
$$g(N',N) = 0$$

olur ve b=0 elde edilir. (2.14) B ile çarpılır ise,

$$g(N',B) = ag(T,B) + bg(N,B) + cg(B,B)$$
$$g(N',B) = c$$

elde edilir ve

$$g(N,B)=0$$

$$g(N',B)+g(N,B')=0$$
$$g(N',B)=-g(N,B')=c=k_2$$

bulunur. $a=k_1, b=0$ ve c $=k_2$ olduğundan,

$$N'=k_1T+k_2B \tag{2.15}$$

olarak elde edilir. Şimdi de,

$$B'=aT+bN+cB \tag{2.16}$$

eşitliği T ile çarpılır ise,

$$g(B',T)=-a$$

dır. $g(T,B)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(T',B)+g(T,B')=0$$
$$g(B',T)=-g(T',B)$$
$$g(B',T)=-g(k_1N,B)=0$$

ve a = 0 olur. (2.16), N ile çarpılırsa,

$$g(B', N) = b$$

bulunur ve g(N, B) = 0 eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(N, B) + g(N, B') = 0$$
$$g(N', B) = -g(N, B') = k_2$$

ve $b = -k_2$ olur. Son olarak (2.16), B ile çarpılır ise,

$$g(B', B) = c$$

dir. $g(B, B) = 0$ eşitliğinin türevi alınır ise;

$$g(B', B) + g(B, B') = 0$$
$$g(B, B') = 0$$

dır. ve c = 0 olarak bulunur. $a = 0$, $b = -k_2$ ve c = 0 olduğundan (2.16) eşitliği,

$$B' = -k_2 N \tag{2.17}$$

biçimindedir. (2.13), (2.15) ve (2.17) den,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

olur. Böylece timelike bir eğrinin Frenet denklemleri elde edilmiş olur.

2.3.1.4 Lightlike Eğrilerin Frenet Denklemleri

α lightlike bir eğri ve $g(T,T)=0,\ g(N,N)=1,\ g(B,B)=0,\ g(T,N)=0,$

$g(T,B)=1,\ g(N,B)=0$ olmak üzere,

$$N=\frac{T'}{\|T'\|}=\frac{T'}{k_1}$$
$$T'=k_1N \tag{2.19}$$

dir.

$$N'=aT+bN+cB \tag{2.20}$$

olsun. Bu eşitlik T ile çarpılır ise,

$$g(N',T)=ag(T,T)+bg(N,T)+cg(B,T)$$
$$g(N',T)=c$$

bulunur. $g(T,N)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(T',N)+g(T,N')=0$$
$$g(N',T)=-g(T',N)$$
$$g(N',T)=-g(k_1N,N)=-k_1g(N,N)=-k_1$$

olur ve $c=-k_1$ elde edilir. (2.20), N ile çarpılır ise,

$$g(N',N)=ag(T,N)+bg(N,N)+cg(B,N)$$
$$g(N',N)=b$$

olur. $g(N,N)=1$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(N',N)+g(N,N')=0$$
$$2g(N',N)=0$$
$$g(N',N)=0$$

olur ve b=0 elde edilir. (2.20), B ile çarpılır ise,

$$g(N',B)=ag(T,B)+bg(N,B)+cg(B,B)$$
$$g(N',B)=a$$

elde edilir ve $g(N,B)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(N,B)=0$$
$$g(N',B)+g(N,B')=0$$
$$g(N',B)=-g(N,B')=k_2$$

olur ve $a=k_2$ bulunur. $a=k_2$,b=0 ve c=$-k_1$ olduğundan,

$$N'=k_2T-k_1B \tag{2.21}$$

olarak elde edilir. Şimdi de,

$$B' = aT + bN + cB \qquad (2.22)$$

eşitliği T ile çarpılır ise,

$$g(B',T) = c$$

elde edilir. $g(T,B) = 0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(T',B) + g(T,B') = 0$$
$$g(B',T) = -g(T',B)$$
$$g(B',T) = -g(k_1 N,B) = 0$$

dır ve c=0 bulunur. (2.22), N ile çarpılır ise

$$g(B',N) = b$$

elde edilir. $g(N,B) = 0$ eşitliğinin türevi alınır ise,

$$g(N',B) + g(N,B') = 0$$
$$g(N',B) = -g(N,B') = k_2$$

ve $b = -k_2$ olur. Son olarak (2.22), B ile çarpılır ise,

$$g(B',B)=a$$

elde edilir. $g(B,B)=0$ eşitliğinin türevi alınır ise;

$$g(B',B)+g(B,B')=0$$
$$g(B,B')=0$$

elde edilir ve a =0 olarak bulunur. a = 0, $b=-k_2$ ve c = 0 olduğundan (2.22) eşitliği,

$$B'=-k_2N \tag{2.23}$$

olarak bulunur. (2.19), (2.21) ve (2.23) den;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

olur. Böylece lightlike bir eğrinin Frenet denklemleri elde edilmiş olur.

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Eğrilik Küresi

$\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki dik koordinat sistemi (y_1, y_2, y_3) olsun. Bu koordinat sistemini kısaca y ile gösterelim.

$$\langle y-c, y-c\rangle = r^2$$

denklemiyle verilen küreye K diyelim. Burada c, kürenin merkezi , r, kürenin yarıçapıdır. $\alpha(s)$ noktasının K küresine göre kuvveti $f(s)$ olsun. Böylece ,

$$f(s) = \|\alpha(s) - c\|^2 - r^2$$

eşitliğiyle belirlenmiş bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanmış olur.

$$\|\alpha(s) - c\|^2 = \langle \alpha(s) - c, \alpha(s) - c\rangle$$

olduğundan,

$$f(s) = \langle \alpha(s) - c, \alpha(s) - c\rangle - r^2$$

olur.

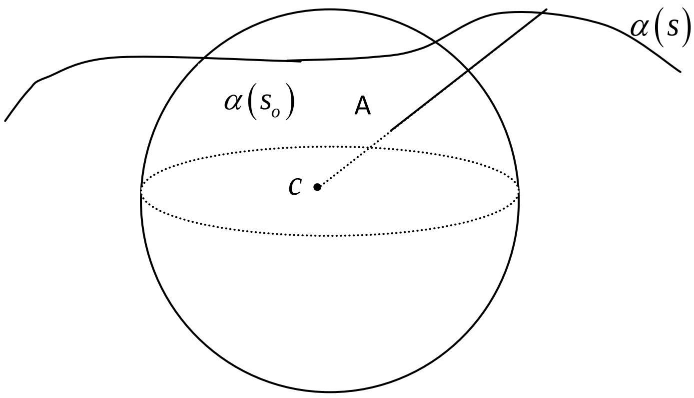
Tanım 3.1.1 : $f : I \to \mathbb{R}$, $f(s) = \langle \alpha(s) - c, \alpha(s) - c \rangle - r^2$

olsun. $s_0 \in I$ olmak üzere ,

$$f(s_0) = 0$$

ise, K küresi α eğrisine $\alpha(s_o)$ noktasında 0-**ncı basamaktan değiyor** denir.

K küresinin α eğrisine $\alpha(s_o)$ noktasında sıfırıncı basamaktan değmesinin geometrik anlamı , kürenin noktasından geçmesidir,



Şekil 3.1. Eğrilik Küresi

Tanım 3.1.2 :

$f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = 0$ ise,

K küresi α eğrisine noktasında **1-inci basamaktan değiyor** denir.

$f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = 0$, $f''(s_0) = 0$ ise,

K küresi α eğrisine $\alpha(s_o)$ noktasında **2-inci basamaktan değiyor** denir.

$f(s_0)=0$, $f'(s_0)=0$, $f''(s_0)=0$, $f'''(s_0)=0$ ise,

K küresi α eğrisine $\alpha(s_o)$ noktasında **3-üncü basamaktan değiyor** denir.

$\alpha(s_o)$ noktasını kürenin merkezine birleştiren doğrunun küreyi kestiği nokta A olsun (şekil 3.1.2). $\alpha(s_o)$ noktasında küre eğriye ne denli yüksek basamaktan değiyorsa, $\alpha(s_o)$ noktası A noktasına o denli yakın olur.

Teorem 3.1.1 : $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve bunun burulma fonksiyonu σ olsun. $s_0 \in I$ olmak üzere α eğrisine $\alpha(s_o)$ noktasında 2-inci basamaktan değen kürelerin merkezlerinin geometrik yeri, $\mu \in \mathbb{R}$ için ,

$$c_0(\mu) = \alpha(s_o) + \rho_0 N_0 + \mu B_0$$

eşitliğiyle belirli $c_0(\mu)$ noktalarının belirlediği doğrudur.

Teorem 3.1.2 : $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri ve $s_0 \in I$ olsun. α eğrisine $\alpha(s_o)$ noktasında 3-üncü basamaktan değen bir ve yalnız bir küre vardır ve bu kürenin merkezi,

$$c_0 = \alpha(s_o) + \rho_0 N_0 + (\rho')_0 \sigma_0 B_0$$

eşitliğiyle belirli c_0 noktasıdır. Burada $\sigma = \dfrac{1}{\tau}$ ve $\sigma_0 = \sigma(s_o)$ anlamındadır.

α eğrisinin, $\alpha(s_o)$ noktasındaki **eğrilik küresi (dokunum küresi** veya **oskülatör küre)** denir.

Sonuç 3.1.1 : α eğrisinin, $\alpha(s_o)$ noktasındaki eğrilik küresinin yarıçapı r ise,

$$r = \sqrt{(\rho_0)^2 + ((\rho')_0 \sigma_0)^2}$$

dır.

Teorem 3.1.3 : $\alpha : \mathrm{I} \to E^3$ eğrisinin her noktasındaki dik düzlemi belirli bir p_0 noktasından geçiyorsa, bu eğri bir küre üzerindedir.

3.2. E_1^3 te B-scroll Yüzeyler

α, E_1^3 de bir null eğri olsun. Verilen bir $d = d(t)$ diferensiyellenebilir pozitif fonksiyonu için $X = X(t) = \frac{1}{d} \cdot \alpha'\ t$ vektör alanı göz önüne alınsın. Buna göre X α boyunca bir null vektördür. α boyunca öyle bir Y vektör alanı vardır ki $\langle X, Y \rangle = -1$ dir. Burada $Z = X \times Y$ alınırsa α boyunca $F = X, Y, Z$ null çatısı elde edilir ki bu durumda α, F ikilisine çatılı null eğri denir.

α bir null çatılı bir eğri ve ∇ E_1^3 de Levi-civita Konneksiyonu olsun. O zaman bir, çatılı null eğri α aşağıda Frenet denklemleri denilen eşitlikleri sağlar.

$$\nabla_X X = aX + bZ,$$

$$\nabla_X Y = -aY + cZ,$$

$$\nabla_X Z = cX + bY,$$

Burada $a = -< \nabla_X X, Y >$, $b =< \nabla_X X, Y >$, $c =< \nabla_X Y, Z >$ dir.

Bir , çatılı null eğri α, F de $d = 1$ ve $a = 0$ ise bu eğriye Cartan çatılı null eğri ve F çatısına da bir Cartan çatı denir.

Teorem 3.2.1: M bir B-scroll yüzey olsun. Bu durumda M flattir $\Leftrightarrow c = 0$ dır [5].

Örnek 3.2.1: α bir null çatılı bir eğri ve $\alpha(t) = (t, \cos t, \sin t)$ şeklinde tanımlansın.

$\alpha'(t) = (1, -\sin t, \cos t)$ olur. $X(t) = \alpha'(t)$ olacağından $X(t) = (1, -\sin t, \cos t)$ dır. $\langle X, Y \rangle = -1$ eşitliğini sağlayacak şekilde $Y(t) = (1, \cos t, \sin t)$ alalım. O halde

$$Z = X \times Y$$

$$Z = -\begin{vmatrix} 1 & -\sin t & \cos t \\ 1 & \cos t & \sin t \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot e_1 + \begin{vmatrix} 1 & -\sin t & \cos t \\ 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot e_2 + \begin{vmatrix} 1 & -\sin t & \cos t \\ 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot e_3$$

$$Z = e_1 + (-\sin t + \cos t)e_2 + (\cos t + \sin t)e_3$$

$$Z = (1, -\sin t + \cos t, \sin t + \cos t)$$

elde edilir. Z yi X ile çarparsak,

$$Z \cdot X = -1 + \sin^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t + \cos^2 t$$

$$Z \cdot X = 0$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$Z \cdot Y = 0$$

olduğu görülebilir. Ayrıca

$$Z \cdot Z = 1$$

olduğu da kolayca görülebilir. Öte yandan

$$\varphi: [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to L^3$$

$$\varphi(t,u) = \alpha(t) + u \cdot Y$$

$$= (t, \cos t, \sin t) + u(1, \cos t, \sin t)$$

şeklinde tanımlı φ dönüşümü E_1^3 de bir yüzey belirtir ki bu α eğrisi yardımıyla verilen bir B-scroll yüzeydir.

3.3. S_1^2 ve H_0^2 Üzerinde Null Olmayan Eğrilerin Frenet Formülleri

Şimdi kabul edelim ki $x(s)$, S_1^2 veya H_0^2 üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Bu takdirde

$$\langle x(s), x(s) \rangle = \delta = \pm 1$$

dir. Aynı zamanda

$$T = x'(s)$$

ve

$$\begin{aligned} T' &= w_{11}T + w_{12}N + w_{13}B, \\ N' &= w_{21}T + w_{22}N + w_{23}B, \\ B' &= w_{31}T + w_{32}N + w_{33}B, \end{aligned} \tag{3.1}$$

w_{ij} fonksiyonlarını hesaplamak için (3.1) deki iç çarpımı kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$w_{ij} = -w_{ji} \quad (i \neq j \text{ için})$$

$$w_{ii} = 0$$

elde edilir.Buradan Frenet formülleri

$$T' = w_{12}N + w_{13}B,$$
$$N' = -w_{12}T + w_{23}B,$$
$$B' = -w_{13}T - w_{23}N$$

olur . Eğer $w_{12} = k_1$, $w_{13} = k_2$, $w_{23} = k_3$ dersek aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz ;

$$T' = k_1N + k_2B,$$
$$N' = -k_1T + k_3B \tag{3.2}$$
$$B' = -k_2T - k_3N$$

olur öyle ki $x(s) \cdot x(s) = \delta = \pm 1$ ve $x' = w_0T$, $w_0 > 0$ ile birlikte Frenet denklemlerini oluştururlar. Bu denklemler S_1^2 üzerinde (benzer şekilde H_0^2 üzerinde) non –null bir eğri içindir.

3.4. B-Scroll Üzerinde Null Olmayan Eğriler İçin Frenet Formülleri

$x(s)$ null bir eğri ve (A, B, C) Frenet çatısı , $A \cdot A = B \cdot B = 0 = A \cdot C = B \cdot C$ ve $A \cdot B = -1$, $C \cdot C = 1$ olmak üzere

$$\frac{dx}{ds} = \lambda A(s) \ ,$$

$$\frac{dA}{ds} = k_1A(s) + k_2C(s) \ , \tag{3.3}$$

$$\frac{dB}{ds} = -k_1B(s) + k_3C(s),$$

$$\frac{dC}{ds} = k_3A(s) + k_2B(s),$$

bu şartlar altında $f(s,u)=x(s)+uB(s)$ ile verilen yüzeyi B-scroll olarak adlandırmıştık.Açıkça

$$df/ds = x' + uB'(s) = A(s) + uk_3(s)C(s) \quad \text{ve} \quad df/du = B$$

dir. Şimdi Teorem 3.2.1. i göz önüne alarak:

Kabul edelim ki $k_3 \neq 0$ ve yukarıdaki notasyona geri dönerek (3.3) te $A=T$, $B=N$, $C=B$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \lambda T(s), \\
\frac{dT}{ds} &= k_1 T(s) + k_2 B(s), \\
\frac{dN}{ds} &= -k_1 N(s) + k_3 B(s), \\
\frac{dB}{ds} &= k_3 T(s) + k_2 N(s),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir.

Bu eşitlikler N-scroll olarak adlandırılan null olmayan bir eğrinin Frenet denklemleridir.

$$f(s,u) = x(s) + uN(s) .$$

3.5. S_1^2 ve H_0^2 de Küresel Eğriler

Eğrinin birbirini takip eden dört noktasından geçen küreye oskülatör küresi denildiğini ve

$$\langle (x-c),(x-c) \rangle - r^2 = 0$$

denklemini sağladığını bölüm 3.1 de açıklamıştık. Burada x küre üzerinde herhangi bir nokta , c merkez ve r yarı çaptır. Eğer yukarıda bahsettiğimiz dört kontak noktasına bakarsak aşağıdaki fonksiyonu elde ederiz;

$$f(s) = (x-c)\cdot(x-c) - r^2$$

Bu fonksiyon

$$f(s) = \langle x, x \rangle = \pm 1,$$

$$f'(s) = \langle x, x' \rangle = 0,$$

$$f^{(2)}(s) = \langle x, x^{(2)} \rangle + \langle x', x' \rangle = 0$$

$$f^{(3)}(s) = \langle x, x^{(3)} \rangle + 3\langle x', x^{(2)} \rangle = 0$$

denklemlerini sağlamalıdır.

Eğrilerin spacelike veya timelike oluşu göz önüne alınır ve $x' \bullet x' = \varepsilon = \pm 1$ alınırsa $f', f^{(2)}, f^{(3)}$ denklemleri

$$\langle (x-c), T \rangle = 0,$$

$$\langle (x-c), (k_1 N + k_2 B) \rangle = -\varepsilon,$$

$$\langle (x-c), (-k_1 N + k_3 B) \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan oskülatör kürenin merkezi $c = x + (k_1 + \varepsilon)N + (k_2 + \varepsilon)B$ ve yarı çapı $r = \sqrt{(k_1+\varepsilon)^2 + (k_2+\varepsilon)^2}$ olur.

Karşılıklı olarak kürenin merkezinin denkleminin türevi alınırsa;

$$c' = x' + (k_1+\varepsilon)'N + (k_1+\varepsilon)N' + (k_2+\varepsilon)'B + (k_2+\varepsilon)B'$$

veya

$$\begin{aligned} c' &= T + (k_1 + \varepsilon)(-k_2T + k_3B) + (\varepsilon + k_2)(-k_2T - k_3N) \\ &= T(1 - k_1k_2 - k_2\varepsilon - k_2^2 - \varepsilon k_2) + k_3(k_1 + \varepsilon)B - k_3(k_2 + \varepsilon)N + k_1'N + k_2'B \end{aligned}$$

olur.

Denklem düzenlenirse;

$$c' = (1 - k_1k_2 - 2k_2\varepsilon - k_2^2)T + (-k_3k_2 - k_3\varepsilon + k_1')N + (k_3k_1 + k_3\varepsilon + k_2')B$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} &1 - k_1k_2 - k_2^2 - 2\varepsilon k_2 = 0, \\ &-k_2k_3 - k_3\varepsilon + k_1' = 0, \\ &k_1k_3 + k_3\varepsilon + k_2' = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Bu denklemler $x \cdot x = \delta$ ve $x' \cdot x' = \varepsilon$ ile S_1^2 ve H_0^2 de timelike ya da spacelike küresel eğrileri için diferensiyel denklemlerdir.

Sonuç 3.5.1: $k_2 = 0$ olamaz.

Sonuç 3.5.2: Eğer $k_1 = k_2$ $(k_1 = k_2 \neq 0)$ ise $k_1 = -\dfrac{\varepsilon}{2} \mp \sqrt{\dfrac{3}{4}}$ ve $k_3 = 0$ dır.

3.6. N-Scroll da Null Olmayan Küresel Eğriler

N-Scroll da null olmayan küresel eğrileri elde etmek için (3.4) ü kullanarak (3.5) denklemini çözmeliyiz.

$$f(s) = \langle x, x \rangle = \pm 1,$$

$$f'(s) = \langle x, x' \rangle = 0,$$

$$f^{(2)}(s) = \langle x, x^{(2)} \rangle + \langle x', x' \rangle = 0$$

$$f^{(3)}(s) = \langle x, x^{(3)} \rangle + 3\langle x', x^{(2)} \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan c merkezli küre alınırsa,

$$\langle (x-c), T \rangle = 0,$$

$$\langle (x-c), (k_1 N(s) + k_2 B(s)) \rangle = -\varepsilon,$$

$$\langle (x-c), (-k_1 N(s) + k_3 B(s)) \rangle = 0$$

olur. Buradan da merkez

$c = x + (-k_1 + \varepsilon)N + k_3 B$ ve yarı çap $r = \sqrt{(-k_1 + \varepsilon)^2 + k_3{}^2}$ olur. Böylece

$$c' = x' - k_1' N + (\varepsilon - k_1)N' + k_3' B + k_3 B'$$

veya

$$c' = x' - k_1' N + (\varepsilon - k_1)(-k_1 N(s) + k_3 B(s)) + k_3' B + k_3(k_3 T(s) + k_2 N(s))$$

elde edilir.

Sonuç olarak

$$c' = x' + k_3{}^2 T + (-k_1' - k_1(\varepsilon - k_1) + k_3 k_2)N + ((\varepsilon - k_1)k_3 + k_3')B$$

yazılır.

Buradan

$$k_3{}^2 = 0, \tag{3.6}$$

$$(-k_1' - k_1(\varepsilon - k_1) + k_3 k_2) = 0,$$

$$((\varepsilon - k_1)k_3 + k_3') = 0$$

elde edilir.

4. SONUÇ

3.6 da elde edilen bu denklemler N-Scroll da $x \cdot x = \delta$ ve $x' \cdot x' = \varepsilon$ ile birlikte timelike ya da spacelike küresel eğrilerin diferensiyel denklemlerine eşittir ve (4.1) deki denklemlere denktir.

$$k_3 = 0\,, \tag{4.1}$$

$$k_1(k_1 - \varepsilon) = k_1'.$$

Teorem 3.2.1den biliyoruz ki bir B-scroll yüzeyin flat olması $k_3 = 0$ olmasına denktir. Buna göre (4.1) deki eşitlikler göz önüne alınırsa düzlemsel olmayan bir N-scroll yüzey üzerinde küresel bir eğri olmadığı ortaya çıkar.

KAYNAKLAR

1. Birman G. S., Lorentzian Spherical Curves, C. R. Acad.Bulgare Sci. 61, no.6, 695-700, 2008.

2. K.L. Duggal and A.Bejancu, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannion Manifolds and Applications, vol. 364 0f Mathematics and Its Applications, Kluver Academic Publishers, Dordrecht, TheNetherlands, 1996.

3. Birman, G. S. , Desideri, G. M. ,Null Frenet's Fromen and Null Frenet's Curves in Lorentzian Spaces of Zero Curvature For East J. Math. Sci. (FJMS) 3 no.6, 1007-1013, 2001.

4. Bonnor W. Tensor N. S., 20, , 229-242, 1969.

5. Graves L. K. Trans. Amer. Math. Soc., 252, 367-392, 1979.

6. Liu Huili. Contr. Algebra and Geometry, 45, 291-303, 2004.

7. D. Struik, Lectures on Classical Dierential Geometry, Dover, 1988.

8. O'NEIL. B, Semi-Riemann Geometry, Academic Press New York, 1983.

9. A. Sabuncuoğlu, Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, 2004.