KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEODEZİKLER VE GEODEZİK METRİK UZAYLAR

Hülya ÜNAL ÇOBAN

OCAK 2011

ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalında Hülya ÜNAL ÇOBAN tarafından hazırlanan GEODEZİKLER VE GEODEZİK METRİK UZAYLAR adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN ____________________
Üye : Doç. Dr. Kazım İLARSLAN ____________________
Üye : Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN____________________

07/02/2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GEODEZİKLER VE

GEODEZİK METRİK UZAYLAR

ÜNAL ÇOBAN, Hülya

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Ocak 2011, 103 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde, bir sonraki bölüm için kullanılacak temel kavramlar ele alınmıştır. Geodezikler ve geodezik metrik uzaylar üçüncü bölümde incelenmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Geodezik eğri, metrik uzay, geodezik metrik uzay

ABSTRACT

GEODESİCS AND

GEODESİC METRİC SPACES

ÜNAL ÇOBAN, Hülya

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

January 2011, 103 pages

This thesis consist of four sections. The first section is reserved for introduction. In the second section, we give basic concept that we use in following section. Geodesics and geodesic metric spaces are investigated in the third section. The fourth section is reserved for discussion and conclusion.

Key Words: Geodesic curve, metric space, geodesic metric space

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında her türlü bilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN'a, emek ve katkılarından dolayı anne ve babama, çalışmam boyunca her türlü desteğini benden esirgemeyen biricik kardeşime ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
SİMGELER DİZİNİ vii
1. GİRİŞ 1
1.1. Kaynak Özetleri 1
1.2.Çalışmanın Amacı 1
2. MATERYAL VE YÖNTEM 2
2.1. Eğri 2
2.2. Birim Hızlı Eğri 2
2.3. Hız Vektörü 2
2.4. Teğet Vektör 3
2.5. Vektör Alanı 3
2.7. Yüzey 4
2.7. Yama 5
2.8. Yöne Göre Türev 5
2.9. Kovaryant Türev (Konneksiyon) 5
2.10. Şekil Operatörü 6
2.11. Gauss Denklemi 7
2.12. Birinci Temel Form 7
2.13. Metrik Uzay 8
2.14. Süreklilik 8
2.15. Yakınsaklık 9
2.16. Cauchy Dizisi 9
2.17. Açık Yuvar 10
2.18. Alt ve Üst Sınır 10
2.19. Kapanış 11

2.20. Sınırlı Cümle 11
2.21. Konvekslik 11
2.22. Kompaktlık 12
2.23. Komşuluk 12
2.24. Lokal Kompaktlık 12
2.25. Bağlantılılık 12
2.26. Yoğun Cümle 12
2.27. Tamlık 13
2.28. Homeomorfizm 13
2.29. Normlu Vektör Uzayları 13
2.30. İzometri 14
2.31. Normal Kesit 14
3. ARAŞTIRMA VE BULGULAR 15
3.1.Yüzey Üzerinde Geodezikler 15
3.2. Metrik Uzayda Geodezikler 64
3.3. Geodeziklerin Limitleri 76
3.4. Geodezik Metrik Uzaylar 78
4. TARTIŞMA VE SONUÇ 101
KAYNAKLAR 102

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

3.1. Geodezik Yol 66
3.2. Uzunluk Uzayı 79
3.3. Tek Geodezik Uzay 88

SİMGELER DİZİNİ

$\Vert . \Vert$	Norm fonksiyonu
$T_p(M)$	p noktasında M yüzeyine teğet vektörlerin cümlesi
$V_p[f]$	f fonksiyonunun v_p yönündeki türevi
$\langle \, , \rangle$	İç çarpım fonksiyonu
$\chi(\mathbb{R}^3)$	$\mathbb{R}^3$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı
d	Metrik fonksiyonu
$D(a, \varepsilon)$	a merkezli ε yarıçaplı yuvar
$d(A)$	A cümlesinin çapı
$\bar{A}$	A cümlesinin kapanışı
A^o	A cümlesinin içi
A'	A nın yığılma noktalarının cümlesi
T_pM	M yüzeyinin p noktasındaki teğet düzlemi
${T_p}^{\perp}M$	M yüzeyinin p noktasındaki teğet düzlemine dik düzlem
κ_g	Geodezik eğrilik
T	Birim teğet vektör alanı
N	Birim normal vektör alanı
B	Birim binormal vektör alanı
κ, τ	Eğrilik fonksiyonu
Z	Birim dik vektör alanı
S	Şekil operatörü
∇f	f fonksiyonunun gradiyent vektör alanı
E, F, G	Birinci temel formun katsayıları
$L(\alpha)$	α eğrisinin boyu
$[x, y]$	x, y noktalarını birleştiren geodezik parça
$V_\sigma(\gamma)$	σ ya göre γ nın toplam değişimi
d_p, d_∞	Çarpım metriği
$X_1 \times X_2$	X_1 ve X_2 uzaylarının çarpım uzayı

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar da Sabuncuoğlu (2004)'nun "Diferensiyel Geometri" kitabı ve Hacısalihoğlu (1983)'nun "Diferensiyel Geometri" kitabı, diferensiyel geometride bazı kavramlar için; Bayraktar (2006)'nın "Fonksiyonel Analiz" kitabı ve Başkan, Bizim, Cangül (2006) adlı yazarların "Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş" kitabı ise bazı topolojik kavramlar için referansımız olmuştur. Ayrıca Oprea (1997)' nın "Differential Geometry and Its Application", O'Neill (1966)'ın "Elementary Differential Geometry" ve Pressley (2001)'in "Elementary Differential Geometry" adlı kitabı ise geodeziklerin geometrik anlamda ele alınmasında referansımız olmuştur. Myers (1945)'in "Arc and Geodesics in Metric Spaces" makalesi ışığında geodezik metrik uzaylar ve bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Papadopoulos (2005)'un "Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature" adlı kitabı ise geodezik metrik uzaylarda bazı tanımların ve bu uzayların konveksliğinin incelenmesinde referansımız olmuştur. Bazı örneklerin incelenmesinde ise Hayes, Shubin (2004) adlı yazarların " Mathematical Adventures for Students and Amateurs" adlı kitabından yararlanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Geodezikler yardımıyla yüzeyler üzerinde metrik tanımlanabilmektedir. Bu ilişki ele alınarak geodeziklerin ve geodezik metrik uzayların hem geometrik hem de topolojik olarak incelenmesi amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Eğri

I, $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

biçimindeki diferensiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir eğri denir. (I, α) ikilisine de bu eğrinin koordinat komşuluğu adı verilir.

$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $\boldsymbol{t} \in \mathrm{I}$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir.

2.2. Birim Hızlı Eğri

Bir $\boldsymbol{M}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Eğer $\forall \boldsymbol{t} \in \mathrm{I}$ için

$$\|\alpha'(\boldsymbol{t})\| = 1$$

koşulu sağlanıyorsa $\boldsymbol{M}$ eğrisine (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri denir. Bu durumda $\boldsymbol{t} \in \mathrm{I}$ parametresine de yay parametresi denir.

$\boldsymbol{t_0} \leq \boldsymbol{t}$ için $\alpha(\boldsymbol{t_0})$ ve $\alpha(\boldsymbol{t})$ noktaları arasında kalan eğri parçasının uzunluğu $f(\boldsymbol{t})$ olmak üzere $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna yay uzunluğu fonksiyonu denir ve

$$f(\boldsymbol{t}) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| \, du$$

şeklinde tanımlanır.

2.3. Hız Vektörü

$\mathbb{R}^n$ de $\boldsymbol{M}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

fonksiyonunun Öklid fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ olmak üzere

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),\ \ \alpha(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{M}$

ve

$$\alpha'(\boldsymbol{t}) = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_t, \left.\frac{d\alpha_2}{dt}\right|_t, \ldots, \left.\frac{d\alpha_n}{dt}\right|_t\right)$$

dir. $\big(\alpha(\boldsymbol{t}), \alpha'(\boldsymbol{t})\big) \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{t})$ tanjant vektörüne, $\boldsymbol{M}$ eğrisinin $\boldsymbol{t} \in \mathrm{I}$ parametresine karşılık gelen $\alpha(\boldsymbol{t})$ noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir.

2.4. Teğet Vektör

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R}^n$ olsun. $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, f fonksiyonunun $p + v$ noktasındaki değerine p noktasındaki v artması denir. Bu artma, p noktasından $p + v$ noktasına giden yönlü doğru parçası ile anlatılır. Bu yönlü doğru parçası, p noktasında v teğet vektör olarak adlandırılır ve "v_p" biçiminde gösterilir. p noktasındaki bütün teğet vektörlerin cümlesi ise "$\mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$" ile gösterilir.

2.5. Vektör Alanı

U, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt cümlesi olsun. U nun her bir p noktasına, p noktasında bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyona, U üzerinde bir vektör alanı denir. Bu tanıma göre V, U üzerinde bir vektör alanı ise

$$V : U \longrightarrow \bigcup_{p \in U} \mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$$

$\forall p \in U$ için $V(p) \in \mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$ dir

2.6. Yüzey

$D \subset \mathbb{R}^2$ bir bölge olsun.

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \longrightarrow \varphi(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

vektör değerli fonksiyon altındaki resmine $\mathbb{R}^3$ te bir yüzey denir.

Burada $x, y, z : D \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları C^3 sınıfındandır.

$\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ aralığından M yüzeyinde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne M yüzeyi üzerinde bir eğri denir.

M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olmak üzere $p \in \mathrm{M}$ ve $v_p \in \mathrm{T}_p(\mathbb{R}^3)$ olsun. v_p vektörü, M içinde bulunan en az bir eğrinin hız vektörü ise v_p vektörüne p noktasında M yüzeyine teğet vektör denir.

p noktasında M yüzeyine teğet vektörlerin cümlesi "$\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$" ile gösterilir.

M, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun.

$$V : \mathrm{M} \longrightarrow \bigcup_{p \in \mathrm{M}} \mathrm{T}_p(\mathbb{R}^3)$$

biçiminde bir V fonksiyonu, $\forall p \in \mathrm{M}$ için $V(p) \in \mathrm{T}_p(\mathbb{R}^3)$ önermesini doğruluyorsa V fonksiyonuna, M yüzeyi üzerinde bir vektör alanı denir.

$\forall p \in \mathrm{M}$ için $V(p) \in \mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ ise V ye M üzerinde teğet vektör alanı denir.

$\forall p \in \mathrm{M}$ için $V(p)$ vektörü $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ uzayına dik ise V ye M üzerinde dik vektör alanı denir.

2.7. Yama

$$x : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

birebir ve diferensiyellenebilir dönüşümüne bir yama ya da lokal yüzey denir.

2.8. Yöne Göre Türev

$f \in C^{\infty}(p)$ ve $v_p \in \mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

fonksiyonu, $\gamma(\boldsymbol{t}) = p + \boldsymbol{t}v$ eşitliğiyle verilsin. $f \circ \gamma$ fonksiyonunun sıfır noktasındaki türevine, f fonksiyonunun v_p yönündeki türevi denir ve "$v_p[f]$" ile gösterilir.

Yani $v_p = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere,

$$v_p[f] = \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial f}{\partial x^j}(p)$$

dir.

2.9. Kovaryant Türev (Konneksiyon)

$\mathbb{R}^3$ üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(\mathbb{R}^3)$ ve $X, Y \in \chi(\mathbb{R}^3)$ olsun. $p \in \mathbb{R}^3$ için

$$D_X Y(p) = D_{X(p)} Y = \sum_{j=1}^{3} X[Y^j] \frac{\partial}{\partial x^j}$$

eşitliğiyle tanımlı $D_X Y$ vektör alanına Y nin X yönündeki türevi denir. Böylece

$$D : \chi(\mathbb{R}^3) \times \chi(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \chi(\mathbb{R}^3)$$
$$(X, Y) \longrightarrow D_X Y$$

biçimindeki bir dönüşüm tanımlanmış olur. Bu dönüşüme $\mathbb{R}^3$ uzayı üzerinde doğal bağlantı (doğal konneksiyon ya da Kovaryant türev operatörü) denir.

Ayrıca $\forall X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^3)$, $\forall f, g \in C^\infty$ için

1) $D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z$,

2) $D_X(fY) = fD_X Y + \big(X(f)\big)Y$,

özellikleri sağlanırsa D ye $\mathbb{R}^3$ te bir Afin konneksiyon denir. Bunlara ek olarak;

3) D, C^∞ sınıfındandır ,

4) $\mathbb{R}^3$ ün bir U bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{R}^3)$ için,

$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$,

5) $\mathbb{R}^3$ ün bir U bölgesi üzerinde C^∞ olan $\forall X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^3)$ ve $\forall p \in U$ için,

$X_p\langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle|_p + \langle Y, D_X Z\rangle|_p$,

özelliklerini sağlayan D konneksiyonuna da $\mathbb{R}^3$ te bir Riemann konneksiyonu denir.

2.10. Şekil Operatörü

$\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^3$ de bir yüzey (yönlendirilmiş ve yön N olarak seçilmiş) olsun. D, $\mathbb{R}^3$ deki konneksiyon olmak üzere,

$$S : \chi(\mathrm{M}) \longrightarrow \chi(\mathrm{M})$$
$$X \longrightarrow S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı dönüşüme M nin şekil operatörü denir. Eğer yönlendirme $-N$ olsaydı $S(X) = -D_X N$ olacaktır.

2.11. Gauss Denklemi

$\mathbb{R}^3$ de bir yüzey M, M nin şekil operatörü S ve birim normal vektör alanı N olmak üzere, $\mathbb{R}^3$ in Riemann konneksiyonu D ile gösterilsin.

$\forall X, Y \in \chi(\mathrm{M})$ için

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \langle S(X), Y\rangle N$$

eşitliğine Gauss denklemi denir.

Bu eşitlikte tanımlı $\overline{D} : \chi(\mathrm{M}) \times \chi(\mathrm{M}) \longrightarrow \chi(\mathrm{M})$ dönüşümü de M nin konneksiyonudur.

2.12. Birinci Temel Form

M bir yüzey ve α yüzey üzerinde bir eğri olsun. $\forall \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ için

$\alpha(\boldsymbol{t}) = x\big(u(\boldsymbol{t}), v(\boldsymbol{t})\big)$ eğrisinin hız vektörü,

$$\alpha'(\boldsymbol{t}) = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{t}} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{t}} = u' x_u + v' x_v = u' x_1 + v' x_2$$

dir. $s(\boldsymbol{t})$, α eğrisinin yay uzunluğu olmak üzere,

$$s(\boldsymbol{t}) = \int_a^b \|\alpha'(\boldsymbol{t})\|\, d\boldsymbol{t}$$

dir.

$$\frac{ds}{d\boldsymbol{t}} = \|\alpha'(\boldsymbol{t})\| \Rightarrow \left(\frac{ds}{d\boldsymbol{t}}\right)^2 = \|\alpha'(\boldsymbol{t})\|^2 = \langle \alpha'(\boldsymbol{t}), \alpha'(\boldsymbol{t})\rangle$$

$$= \langle x_1, x_1\rangle u'^2 + 2\langle x_1, x_2\rangle u' v' + \langle x_2, x_2\rangle v'^2$$

dir. Bu eşitlikte Gauss notasyonları

$E = \langle x_1, x_1\rangle$, $F = \langle x_1, x_2\rangle$, $G = \langle x_2, x_2\rangle$ kullanılırsa,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

ya da diferensiyel formda yazılırsa,

$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F(dudv) + G(dv)^2$

bulunur. $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ veya $(ds)^2$ şeklinde tanımlı eşitliğe M yüzeyinin birinci temel formu veya metrik formu denir.

2.13. Metrik Uzay

X boş olmayan herhangi cümle olmak üzere

$$d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall x, y, z \in \mathrm{X}$ için,

i) $d(x, y) \geq 0$

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d fonksiyonuna X cümlesi üzerinde bir metrik denir. Üzerinde bir d metriği tanımlı olan X cümlesine de metrik uzay denir ve "(X, d)" ya da "X_d" ile gösterilir.

2.14. Süreklilik

Boş olmayan $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ cümlesi, $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in \mathrm{X}$ noktası verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in \mathrm{X}$ için $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $a \in \mathrm{X}$ noktasında süreklidir denir.

Metrik uzaylarda ise, (X, d) ve (Y, m) iki metrik uzay, $f : X \longrightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $d(x, x_0) < \delta$ iken $m\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f ye x_0 noktasında süreklidir denir.

2.15. Yakınsaklık

(X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X de yakınsak denir ve x noktasına da dizinin limit noktası denir.

$F = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) ve A keyfi bir cümle olmak üzere

$$f_n : A \longrightarrow F$$

fonksiyonlarının (f_n) dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall x \in A$ için sadece ε a bağlı fakat x e bağlı olmayan ve $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ olduğunda

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı varsa $\big(f_n(x)\big)$ dizisi $f(x)$ e düzgün yakınsaktır denir.

A keyfi bir cümle ve (f_n), A da tanımlı skaler değerli fonksiyonların dizisi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

ise (f_n) dizisi f ye noktasal yakınsaktır denir.

2.16. Cauchy Dizisi

(X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi veya esas dizi denir.

2.17. Açık Yuvar

(X, d) metrik uzayı ve herhangi bir $a \in \mathrm{X}$ noktası verilsin. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$D(a, \varepsilon) = \{x \in \mathrm{X} \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

cümlesine a merkezli, ε yarıçaplı açık yuvar ya da açık disk denir.

$$D[a, \varepsilon] = \{x \in \mathrm{X} \mid d(a, x) \leq \varepsilon\}$$

cümlesine a merkezli, ε yarıçaplı kapalı yuvar ya da kapalı disk denir.

2.18. Alt ve Üst Sınır

A herhangi cümle olsun. A üzerinde $\leq$ bağıntısı $\forall a, b, c \in A$ için

i) $a \leq a$

ii) $a \leq$b ve $b \leq a$ ise $b = a$

iii) $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

koşullarını sağlıyor ise $\leq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı, A ya ise kısmi sıralı cümle denir.

A kısmi sıralı bir cümle ve B, A nın boş olmayan bir alt cümlesi olsun.

Her bir $b \in B$ için $b \leq a$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa a ya B cümlesinin bir üst sınırı denir.

Her bir $b \in B$ için $a \leq$b olacak şekilde bir $a \in A$ varsa a ya B cümlesinin bir alt sınırı adı verilir.

B cümlesinin üst sınırlarının en küçük olanına en küçük üst sınır yani supremum, alt sınırlarının en büyük olanına en büyük alt sınır yani infimum denir.

2.19. Kapanış

A, X metrik uzayının bir alt cümlesi ve $x_0 \in A$ olsun. x_0 ın her bir $D'(x_0, \varepsilon)$ delik civarı A ya ait bir nokta ihtiva ediyorsa x_0 noktasına A nın yığılma noktası denir ve "A'" ile gösterilir.

A nın yığılma noktalarının cümlesi ile A nın birleşimi olan cümleye ise A nın kapanışı denir ve "$\bar{A}$" ile gösterilir.

$$\bar{A} = A' \cup A$$

dır.

2.20. Sınırlı Cümle

(X, d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. A nın çapı $d(A)$ ile gösterilir ve

$$d(A) = sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

olarak tanımlanır. $d(A)$ sonlu ise yani $d(A) < \infty$ ise A ya sınırlı cümle denir.

2.21. Konvekslik

X bir vektör uzayı olsun. Bir $A \subset \mathrm{X}$ cümlesi için $x, y \in A$ keyfi noktalar olmak üzere

$$B = \{z \in \mathrm{X} \mid z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A cümlesine konveks denir.

2.22. Kompaktlık

X bir metrik uzay olsun. X deki her bir dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise X uzayına kompakt denir.

$A \subset \mathrm{X}$ olmak üzere A cümlesi kompakt ise kapalı ve sınırlıdır.

2.23. Komşuluk

(X, d) herhangi metrik uzay ve $p \in \mathrm{X}$ noktası ile bir $V \subset \mathrm{X}$ cümlesi verilsin. Eğer (X, d) uzayında

$$p \in A \subset V$$

koşulunu sağlayan bir A açık cümlesi varsa V cümlesine p nin bir komşuluğu denir.

2.24. Lokal Kompaktlık

Bir (X, d) metrik uzayı verilsin. Eğer her bir $x \in \mathrm{X}$ noktasının kompakt olan bir K komşuluğu varsa X uzayına lokal kompakt denir.

2.25. Bağlantılılık

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset \mathrm{X}$ olsun. Eğer

$A \cap G \neq \emptyset,\ A \cap H \neq \emptyset,\ G \cap H = \emptyset$ ve $A \subset G \cup H$

olacak şekilde boş olmayan G ve H açık cümleleri bulunamıyor ise A cümlesine bağlantılıdır denir.

$A = \mathrm{X}$ ise X metrik uzayına bağlantılı metrik uzay denir.

2.26. Yoğun Cümle

(X, d) herhangi metrik uzay ve $A \subset \mathrm{X}$ olsun. Eğer

$$\bar{A} = \mathrm{X}$$

ise A cümlesine X uzayında yoğun bir cümle denir.

2.27. Tamlık

(X, d) metrik uzayındaki her bir Cauchy dizisi yine bu uzayda bir noktaya yakınsar ise X metrik uzayına tam metrik uzay denir.

2.28. Homeomorfizm

(X, d) ve (Y, m) iki metrik uzay olsun.

$$f : (X, d) \longrightarrow (Y, m)$$

fonksiyonu birebir, üzerine, kendisi ve tersi sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonuna topolojik denklik dönüşümü ya da homeomorfizm denir. Bu durumdaki (X, d) ve (Y, m) metrik uzaylarına da homeomorf uzaylar denir.

2.29. Normlu Vektör Uzayları

X, cismi F ($F = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olan bir vektör uzayı olsun.

Eğer $\forall x, y \in$ X ve $a \in F$ için

$$\rho = \|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\rho(x) = \|x\|$ fonksiyonu,

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

koşulunu sağlıyor ise $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir.

$(X, \|.\|)$ çiftine ise normlu uzay ya da normlu vektör uzayı denir.

2.30. İzometri

M ve N iki yüzey olmak üzere,

$$f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$$

fonksiyonu birebir, örten ve diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. M deki her $\alpha : [c, d] \longrightarrow \mathrm{M}$ eğri parçası için $f \circ \alpha$ eğrisinin uzunluğu α nın uzunluğuna eşit ise f fonksiyonuna M den N ye bir izometri denir.

M den N ye en az bir izometri varsa M ile N ye izometrik yüzeyler denir.

2.31. Normal Kesit

$\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey ve v_p, M de bir birim teğet vektör olsun. $\Pi\left(v_p, \mathrm{N}(\mathrm{p})\right)$ ile gösterilen düzlem, yüzeyin normalidir ve v_p ile belirlenir. M yüzeyi ile $\Pi\left(v_p, \mathrm{N}(\mathrm{p})\right)$ düzleminin arakesitine, M yüzeyinin v_p yönündeki normal kesiti denir.

3. ARAŞTIRMA VE BULGULAR

3.1. Yüzey Üzerinde Geodezikler

Tanım 3.1.1.(Geodezik Eğri)

M bir yüzey ve $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ bir eğri olmak üzere, M yüzeyinin birim dik vektör alanı Z olsun. α'' vektör alanı, $\mathrm{Z} \circ \alpha$ vektör alanının lineer birleşimi ise α eğrisine M yüzeyi içinde bir geodezik eğri denir.

Başka bir ifadeyle, M üzerinde α'' ivme vektör alanı her $\alpha(\boldsymbol{t})$ noktasında M ye dik ise α eğrisine geodezik eğri denir.

$\forall \boldsymbol{t} \in \mathrm{I}$ için $\alpha''(\boldsymbol{t}) \in \mathrm{T}_{\mathrm{M}}^{\perp}(\alpha(\boldsymbol{t}))$ dir.

Bu tanımlardan yola çıkarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1: Herhangi bir geodezik eğrinin hızı sabittir.

İspat:

Bir M yüzeyi üzerinde $\alpha(\boldsymbol{t})$ bir geodezik eğri olsun. $\alpha(\boldsymbol{t})$ eğrisinin hızı ise v olsun.

$v = \|\alpha'\|$

ve

$v^2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle$

dır. Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alınırsa,

$$2v\frac{dv}{dt} = \langle \alpha''(\boldsymbol{t}), \alpha'(\boldsymbol{t}) \rangle + \langle \alpha'(\boldsymbol{t}), \alpha''(\boldsymbol{t}) \rangle$$

$$\Rightarrow 2v\frac{dv}{dt} = 2\langle \alpha'(\boldsymbol{t}), \alpha''(\boldsymbol{t}) \rangle$$

$$\Rightarrow v'(\boldsymbol{t}) = \langle \alpha'(\boldsymbol{t}), \alpha''(\boldsymbol{t}) \rangle$$

dir. $\alpha'(t) \in T_M(\alpha)$ ve $\alpha''(t) \in T_M^{\perp}(\alpha)$ olup $T_M(\alpha)$ ve $T_M^{\perp}(\alpha)$ ortogonal olduğundan;

$v'(t) = \langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$

$\Rightarrow v'(t) = 0$

olup v sabittir.

Tanım 3.1.2.(Geodezik Eğrilik)

Bir M yüzeyi üzerinde herhangi bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi verilsin. $T_P M$, P noktasındaki teğet düzlemi ve α'' eğrinin eğrilik vektörü olmak üzere α'' eğrilik vektörünün $T_P M$ teğet düzlemi üzerindeki izdüşüm vektörüne α eğrisinin P noktasındaki geodezik eğriliği denir ve "κ_g" ile gösterilir.

Teorem 3.1.2: M herhangi bir yüzey ve α, M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. α eğrisi bir geodeziktir gerek ve yeter şart α eğrisinin geodezik eğriliği her yerde sıfırdır.

İspat:

α eğrisi bir geodezik olsun. α, yüzeyin bir σ yamasında ihtiva edilsin. N, σ yamasının standart birim normali olsun.

$k_g = \alpha''(\mathrm{N} \times \alpha')$

dir. Eğer α'', N ye paralel ise $k_g = 0$ dır. Tanım 3.1.1 gereğince $\alpha'' \in T_M^{\perp}(\alpha)$ olup α'', N ye paraleldir. Açıkça $\mathrm{N} \times \alpha'$ ye de diktir. Böylece $k_g = \alpha''(\mathrm{N} \times \alpha')$ eşitliğinde $k_g = 0$ dır.

Tersine olarak $k_g = 0$ olsun. O zaman $k_g = \alpha''(\mathbb{N} \times \alpha')$ eşitliğinde α'', $\mathbb{N} \times \alpha'$ ya diktir. Öte yandan α', $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N} \times \alpha'$ $\mathbb{R}^3$ de dik birim vektörler olduğundan ve α'', α' ya dik olduğundan α'', $\mathbb{N}$ ye paralel olur. O halde Tanım 3.1.1 gereğince α eğrisi bir geodezik eğridir.

Örnek 3.1.1:

$\mathbb{M}$, $\mathbb{R}^3$ içinde bir düzlem olsun. $\mathbb{M}$ içindeki her geodezik eğrinin bir doğru olduğu ve karşıt olarak $\mathbb{M}$ içindeki her doğrunun bir geodezik eğri olduğu gösterilebilir. $\mathbb{M}$ düzleminin birim dik vektör alanı $\mathbb{Z}$ ile gösterilsin. α, $\mathbb{M}$ de bir geodezik eğri ise, Tanım 3.1.1 gereğince

$$\alpha'' = \lambda(\mathbb{Z} \circ \alpha)$$

yazılabilir. α eğrisi, $\mathbb{M}$ yüzeyinde bir eğri olduğundan

$$\langle \alpha', \mathbb{Z} \circ \alpha \rangle = 0$$

dır. Bu eşitlikte türev alınırsa,

$$\langle \alpha'', \mathbb{Z} \circ \alpha \rangle + \langle \alpha', (\mathbb{Z} \circ \alpha)' \rangle = 0$$

bulunur. $\mathbb{M}$ bir düzlem olduğundan $(\mathbb{Z} \circ \alpha)' = 0$ dır.

Böylece $\langle \alpha'', \mathbb{Z} \circ \alpha \rangle = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte geodeziğin tanımı gereği

$\alpha'' = \lambda(\mathbb{Z} \circ \alpha)$ yazılırsa;

$$\langle \lambda(\mathbb{Z} \circ \alpha), (\mathbb{Z} \circ \alpha) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \langle (\mathbb{Z} \circ \alpha), (\mathbb{Z} \circ \alpha) \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan $\lambda = 0$ dır. Dolayısıyla $\alpha'' = 0$ dır. Bu eşitlik α geodeziğinin bir doğru olduğunu gösterir.

Karşıt olarak $\mathbb{M}$ düzlemi içinde bir doğru verilsin. Bu doğru,

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow At + B$$

biçiminde verilebilir. $\alpha'' = 0$ olduğundan, α'' vektör alanı, N vektör alanının sıfır katıdır. Buna göre α eğrisi bir geodezik eğridir. Yani $\alpha(t) = At + B$ ifadesinde A ve B sabit vektörlerdir. O halde $\alpha'' = 0$ dır. Dolayısıyla bir M düzlemi üzerindeki doğrular birer geodezik eğrilerdir.

Teorem 3.1.3: Bir yüzeyin herhangi normal kesiti bir geodeziktir.

İspat:

Bir M yüzeyinin normal kesiti, bir Π düzlemi ile yüzeyin arakesitidir. Bu arakesit eğrisi α ile ifade edilirse, α nın her noktasında Π düzlemi yüzeyin tanjant düzlemine diktir. O halde N ye paralel olup Teorem 3.1.2 den $k_g = 0$ dır. Dolayısıyla α bir geodeziktir.

Örnek 3.1.2:

Bir küre üzerindeki bütün büyük çemberlerin birer geodezik olduğunu Teorem 3.1.3 kullanılarak gösterilebilir.

Kürenin O-merkezinden geçen bir Π düzlemi ile kürenin kesişimi bir büyük çemberdir.

P büyük çember üzerinde bir nokta olmak üzere $\overrightarrow{OP}$ vektörü Π düzleminde yatar ve P noktasında kürenin T tanjant düzlemine diktir. Dolayısıyla N standart vektör alanına paraleldir. O halde Π düzlemi üzerindeki büyük çember bir geodeziktir.

Örnek 3.1.3:

Bir genelleştirilmiş silindirin, doğrularına dik bir Π düzlemi ile kesişimi bir geodeziktir. Gerçekten de N birim normali silindir doğrularına diktir. Bu nedenle N, Π düzlemine paraleldir ve Π, tanjant düzlemine diktir. O halde α eğrisi bir geodeziktir.

Teorem 3.1.4: M yüzeyi içindeki bir $\boldsymbol{\beta} : J \longrightarrow \mathrm{M}$ geodezik eğrisi birim hızlı olacak şekilde bir parametre dönüşümü yapıldığında yine bir geodezik eğri elde edilir.

İspat:

$\boldsymbol{\beta} : J \longrightarrow \mathrm{M}$ bir geodezik eğri olduğundan Teorem 3.1.1 gereğince hız vektörü sabittir. Yani $\|\boldsymbol{\beta}'\|$ fonksiyonu sabittir. Bu sabit m ile gösterilsin. $\boldsymbol{\beta}$ nın yay uzunluğu fonksiyonu f olmak üzere;

$$f(\boldsymbol{t}) = \int_a^t \|\boldsymbol{\beta}'(u)\| du$$

$$= \int_a^t m du = m \int_a^t du = m.u|_a^t = m(\boldsymbol{t} - a) = m\boldsymbol{t} - ma$$

dır. $-ma = n$ alınırsa, $m\boldsymbol{t} + n$ olur. $h = f^{-1}$ olmak üzere

$h(s) = cs + d$

biçimindedir. $\boldsymbol{\beta} \circ h = \alpha$ diyelim.

$\alpha' = h'(\boldsymbol{\beta}' \circ h)$

$\alpha'' = h''(\boldsymbol{\beta} \circ h) + (h')^2(\boldsymbol{\beta}'' \circ h)$

dır. $h(s) = cs + d$ olduğundan $h' = c$ ve $h'' = 0$ değerleri yerine yazılırsa;

$\alpha'' = c^2(\boldsymbol{\beta}'' \circ h)$

olur. Bu eşitlik $\alpha''(s)$ vektörünün $\boldsymbol{\beta}''(\boldsymbol{t})$ vektörünün bir kattı olduğundan, $\alpha''(s)$ vektörü de $Z(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t}))$ vektörünün bir katı olur. O halde parametre dönüşümü ile elde ettiğimiz α eğrisi de bir geodezik eğridir.

Örnek 3.1.4:

α, M yüzeyi içinde birim hızlı bir geodezik eğri ise,

$S(\mathrm{T}) = -\kappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B}$

veya

$S(\mathrm{T}) = -(-\kappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B})$

dir. Genel olarak, birim hızlı bir α eğrisi için $\alpha'' = \kappa \mathrm{N}$ dir. α, M içinde bir geodezik eğri olduğundan $\alpha'' = \lambda(\mathrm{Z} \circ \alpha)$ biçimindedir. Burada Z, M nin birim dik vektör alanıdır. Buradan $\kappa \mathrm{N} = \lambda(\mathrm{Z} \circ \alpha)$ elde edilir. N ve $\mathrm{Z} \circ \alpha$ nın uzunlukları 1 dir. Buna göre $\mathrm{N} = -\mathrm{Z} \circ \alpha$ veya $\mathrm{N} = \mathrm{Z} \circ \alpha$ dır.

$\mathrm{N} = -\mathrm{Z} \circ \alpha$ ise;

$$\begin{aligned} S\big(\mathrm{T}(s)\big) &= S\big(\alpha'(s)\big) = -(\mathrm{Z} \circ \alpha')(s) \\ &= (-\mathrm{Z} \circ \alpha)'(s) = \mathrm{N}'(s) \\ &= -\kappa(s)\mathrm{T}(s) + \tau(s)\mathrm{B}(s) \\ &= (-\kappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B})(s) \end{aligned}$$

olur. $S(\mathrm{T}(s)) = \big(S(\mathrm{T})\big)(s)$ anlamındadır. Buradan,

$\big(S(\mathrm{T})\big)(s) = (-\kappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B})(s)$

elde edilir. Dolayısıyla $S(\mathrm{T}) = -\kappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B}$ dir.

$\mathrm{N} = \mathrm{Z} \circ \alpha$ ise;

$$S(\mathrm{T}(s)) = S(\alpha'(s)) = -(-(\mathrm{Z} \circ \alpha')(s))$$

$$= -(-\mathrm{Z} \circ \alpha)'(s) = -\mathrm{N}'(s)$$

$$= -(-\kappa(s)\mathrm{T}(s) + \tau(s)\mathrm{B}(\mathrm{s}))$$

$$= -(-\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B})(s)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\big(S(\mathrm{T})\big)(s) = -(-\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B})(s)$$

$$\Rightarrow S(\mathrm{T}) = -(-\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B})$$

dir.

Örnek 3.1.5:

$\mathbb{R}^3$ uzayında r yarıçaplı, merkezi başlangıç noktasında bulunan küre yüzeyi M olmak üzere, M yüzeyi içindeki her geodezik eğrinin görüntü cümlesi, kürenin bir büyük çemberi üzerinde bulunur.

Karşıt olarak görüntü cümlesi kürenin bir büyük çemberi üzerinde bulunan, birim hızlı bir eğri küre üzerinde bir geodezik eğridir.

M içinde bir β geodezik eğrisini göz önüne alalım. Bu eğri birim hızlı bir α eğrisine dönüştürüldüğünde, α eğrisinin bir geodezik eğri olduğu Teorem 3.1.4 te gösterilmişti. M yüzeyinin

$$\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(y^i)/\mathrm{M}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial y^i/\mathrm{M}}$$

eşitliğiyle tanımlı Z birim dik vektör alanını seçelim. Şekil operatörünün tanımına göre,

$$S(v_p) = -D_{v_p}\mathrm{Z} = -\sum_{i=1}^{3} v_p[\mathrm{Z}_i]\frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} v_p\left[\frac{(y^i)/\mathrm{M}}{r}\right]\frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{r} v_p[(y^i)/\mathrm{M}]\frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

dir. $v_p[(y^i)/\mathrm{M}] = v_i$ olmak üzere;

$$S(v_p) = -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3} v_i\frac{\partial}{\partial y^i}(p) = -\frac{1}{r}v_p = -\frac{1}{r}\mathrm{I}_p(v_p) = \left(-\frac{1}{r}\mathrm{I}_p\right)(v_p)$$

bulunur. (Burada I_p, $\mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ nin özdeşlik dönüşümü anlamındadır.)

Yukarıdaki eşitlik, $\forall v_p \in \mathrm{T}_p(\mathrm{M})$ için doğru olduğundan

$$S_p = -\frac{1}{r}\mathrm{I}_p$$

ve dolayısıyla

$$S = -\frac{1}{r}\mathrm{I}$$

dır. Buradan yola çıkılarak kürenin şekil operatörü

$$S(\mathrm{T}) = -\frac{1}{r}\mathrm{T}$$

bulunur. Ayrıca α birim hızlı bir geodezik eğri olduğundan Örnek 3.1.4 gereğince,

$$S(\mathrm{T}) = -\kappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}$$

olur. Bu iki eşitlik karşılaştırılarak

$\kappa = \frac{1}{r}$ ve $\tau = 0$

bulunur. Bu eşitlikler, α nın görüntü cümlesinin, kürenin bir büyük çemberi olduğunu gösterir. $\boldsymbol{\beta}$ ile α nın görüntü cümleleri eşit olduğundan, $\boldsymbol{\beta}$ eğrisinin görüntü cümlesi de kürenin bir büyük çemberi üzerindedir.

Karşıt olarak, küre yüzeyi üzerinde, görüntü cümlesi kürenin bir büyük çemberinin içinde bulunan, birim hızlı bir α eğrisini göz önüne alalım. Küre üzerindeki büyük çemberler, merkezden geçen bir düzlem ile kürenin arakesitidir. α bir çember olduğundan $\alpha''(s)$ vektörü kürenin merkezine yönelmiş bir vektördür. Kürenin dik birim vektörü olan $\mathrm{Z}(\alpha(\mathrm{s}))$ vektörünün bir katıdır. O halde geodezik eğri tanımına göre α eğrisi bir geodezik eğridir.

Teorem 3.1.5: $\mathrm{M} = \{(x_1, x_2, x_3) : \ x_1^2 + x_2^2 = r^2 \ , r > 0\}$, $\mathbb{R}^3$ te bir silindir yüzeyidir. M yüzeyi üzerindeki bir α eğrisi M de bir geodezik eğridir $\Leftrightarrow$ α nın denkleminin, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için

$\alpha(\boldsymbol{t}) = (r\cos(\boldsymbol{at} + b)\,, r\sin(\boldsymbol{at} + b)\,, \boldsymbol{ct} + d)$ olmasıdır.

İspat:

α nın denklemi , $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için

$\alpha(\boldsymbol{t}) = (r\cos(\boldsymbol{at} + b)\,, r\sin(\boldsymbol{at} + b)\,, \boldsymbol{ct} + d)$ olsun.

$\alpha'(\boldsymbol{t}) = (-ar\sin(\boldsymbol{at} + b)\,, ar\cos(\boldsymbol{at} + b)\,, c)$

$\alpha''(\boldsymbol{t}) = (-a^2r\cos(\boldsymbol{at} + b)\,, -a^2r\sin(\boldsymbol{at} + b)\,, 0)$

$\Rightarrow \alpha''(\boldsymbol{t}) = -a^2r(\cos(\boldsymbol{at} + b), \sin(\boldsymbol{at} + b), 0)$

dır. Halbuki

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - r^2$

olmak üzere $\mathrm{M} = f^{-1}(0)$ dır. O halde;

$$\nabla f = (2x_1, 2x_2, 0)$$

$$\|\nabla f\| = \sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2} = \sqrt{4(x_1^2 + x_2^2)} = \sqrt{4r^2} = 2r$$

ve M nin bir diferensiyellenebilir birim normal vektör alanı

$$\mathrm{N} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{(2x_1, 2x_2, 0)}{2r} = \frac{(x_1, x_2, 0)}{r}$$

dir. Buna göre;

$$\mathrm{N}_{\alpha(t)} = (\frac{r\cos(at+b)}{r}, \frac{r\sin(at+b)}{r}, 0)$$

$$\Rightarrow \mathrm{N}_{\alpha(t)} = (\cos(at+b), \sin(at+b), 0)$$

olup;

$$\alpha''(t) = -a^2 r \underbrace{(\cos(at+b), \sin(at+b), 0)}_{\mathrm{N}_{\alpha(t)}}$$

$$\Rightarrow \alpha''(t) = -a^2 r \mathrm{N}_{\alpha(t)}$$

dir. Dolayısıyla Tanım 3.1.1 gereğince α , M de bir geodeziktir.

Tersine olarak , $\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$ bir geodezik osun. O zaman M deki konneksiyon $\overline{D}$ ve $\mathbb{R}^n$ deki konneksiyon D olduğuna göre Gauss denkleminden;

$$\overline{D}_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = D_{\alpha'(t)}\alpha'(t) + \langle \alpha'(t), D_{\alpha'(t)}N \rangle N_{\alpha(t)}$$

yazılabilir. α eğrisi M de geodezik olduğu için $\overline{D}_{\alpha'(t)}\alpha'(t) = 0$ olacağından,

$$D_{\alpha'(t)}\alpha'(t) + \langle \alpha'(t), D_{\alpha'(t)}\mathrm{N} \rangle \mathrm{N}_{\alpha(t)} = 0$$

veya

$$\alpha''(t) + \langle \alpha'(t), \frac{d}{dt}(\mathrm{N} \circ \alpha)\Big|_t \rangle (\mathrm{N} \circ \alpha)(t) = 0$$

denklemleri sağlanmalıdır. M üzerinde α eğrisi

$$\alpha = (rf, rg, h) \; ; f^2 + g^2 = 1$$

şeklinde düşünülebilir. Burada $f, h, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\mathrm{N} = \frac{(x_1, x_2, 0)}{r}$$

olduğundan, $\mathrm{N}_{\alpha(t)} = (f, g, 0)$ dır. Böylece

$$D_{\alpha'(t)}\mathrm{N} = \frac{d}{dt}(\mathrm{N} \circ \alpha) = (f', g', 0)$$

ve

$$\alpha'(\boldsymbol{t}) = (rf', rg', h')$$

$$\Rightarrow D_{\alpha'(t)}\alpha'(\boldsymbol{t}) = (rf'', rg'', h'')$$

veya Gauss denkleminden;

$$\alpha''(\boldsymbol{t}) + \langle \alpha'(\boldsymbol{t}), \frac{d}{dt}(\mathrm{N} \circ \alpha)\Big|_t \rangle (\mathrm{N} \circ \alpha)(\boldsymbol{t}) = 0$$

dır.

$$(rf'', rg'', h'') + r((f')^2 + (g')^2)(f, g, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} rf'' + \big(r((f')^2 + (g')^2)\big)f = 0 \\ rg'' + (r((f')^2 + (g')^2))g = 0 \\ \qquad h'' = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

$$\Rightarrow h' = c$$

$$\Rightarrow h = ct + d \qquad \text{dir.}$$

$$\alpha'(\boldsymbol{t}) = (rf', rg', h')$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(\boldsymbol{t})\|^2 = \langle (rf', rg', h'), (rf', rg', h') \rangle = r^2(f')^2 + r^2(g')^2 + (h')^2$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(\boldsymbol{t})\|^2 = r^2((f')^2 + (g')^2) + (h')^2$$

α eğrisi M de geodezik olduğundan $\|\alpha'(\boldsymbol{t})\|$ sabittir ve ayrıca $h' = c$ (sabit) olduğu göz önüne alınırsa;

$\|\alpha'(\boldsymbol{t})\|^2 - (h')^2 = r^2((f')^2 + (g')^2)$ =sabit

$\Rightarrow \frac{1}{r^2}(\|\alpha'(\boldsymbol{t})\|^2 - (h')^2) = (f')^2 + (g')^2$ =sabittir.

(3.1.1) denkleminden;

$$\underbrace{\frac{1}{r^2}}_{sabit}\left(\underbrace{\|\alpha'(\boldsymbol{t})\|^2}_{sabit} - \underbrace{(h')^2}_{sabit}\right) = a^2 = \boldsymbol{sabit} \qquad ; \quad r > 0 \text{ dır. Buradan;}$$

$$rf'' + \left(r((f')^2 + (g')^2)\right)f = 0$$

$$\Rightarrow rf'' + \left(\frac{r}{r^2}(\|\alpha'(\boldsymbol{t})\|^2 - (h')^2)\right)f = 0$$

$$\Rightarrow rf'' + ra^2 f = 0$$

$$\Rightarrow rf'' = -ra^2 f$$

$$\Rightarrow f'' = -a^2 f \quad \text{dir.}$$

$$rg'' + (r((f')^2 + (g')^2))g = 0$$

$$\Rightarrow rg'' + \left(r\underbrace{\left(\frac{r}{r^2}(\|\alpha'(\boldsymbol{t})\|^2 - (h')^2)\right)}_{a^2}\right)g = 0$$

$$\Rightarrow rg'' + ra^2 g = 0$$

$$\Rightarrow rg'' = -ra^2 g$$

$$\Rightarrow g'' = -a^2 g$$

yazılır. Böylece;

$$\begin{cases} h(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{ct} + \boldsymbol{d} \\ f'' = -a^2 f \\ g'' = -a^2 g \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde,

$$\begin{cases} f(0) = \cos b \\ g(0) = \sin b \\ h(0) = d \end{cases}$$

başlangıç şartları için çözüm yapılırsa;

$f(t) = \cos(at + b)$

$g(t) = \sin(at + b)$

$h(t) = ct + d$ elde edilir.

Örnek 3.1.6:

$\mathbb{R}^3$ uzayında $(x_1)^2 + (x_2)^2 = r^2$ denklemiyle M silindir yüzeyi verilsin. M içindeki geodezik eğrileri belirtelim.

M içinde bir α eğrisinin geodezik olması için denkleminin

$\alpha(t) = (r\cos(at + b), r\sin(at + b), ct + d)$

biçiminde olması gerektiği Teorem 3.1.5 de gösterildi.

Şimdi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ değerleri için bu geodezik eğrinin geometrik olarak hangi eğriyi ifade ettiği gösterilebilir.

$a \neq 0$ ve $c \neq 0$ ise;

$\alpha(t) = (r\cos(at + b), r\sin(at + b), ct + d)$

olup α eğrisi bir helis eğrisidir.

$a = 0$ ve $c \neq 0$ ise;

$\alpha(t) = (r\cos b, r\sin b, ct)$

olur. Bu durumda α eğrisi, $(r\cos b, r\sin b, 0)$ noktasından geçen ve $x_1 \circ x_2$ düzlemine dik olan bir doğrudur.

$a \neq 0$ ve $c = 0$ ise;

$\alpha(t) = (r\cos(at + b), r\sin(at + b), d)$

olur. Bu durumda α eğrisi $x_3 = d$ düzlemi ile silindir yüzeyinin arakesiti olan çemberlerdir.

$a = 0$ ve $c = 0$ ise;

$\alpha(t) = (r\cos b, r\sin b, d)$

olur. Bu durumda α eğrisi tek noktadan oluşur. Yani sabit eğridir.

Örnek 3.1.7:

$$\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) = (\cos t, \sin t)$$

ile tanımlanan eğri $\mathbb{R}^2$ de bir çemberdir. Bu çemberin $\mathbb{R}^2$ de geodezik olmadığı halde kendi üzerinde bir geodeziktir.

$\mathrm{I} = \{t \in \mathbb{R} | 0 \le t \le 2\pi\}$ dir. Bu çember $\mathrm{M} = \{(\alpha, \mathrm{I})\}$ ile gösterilsin.

M üzerinde bir vektör alanı;

$\frac{d\alpha}{dt} = (-\sin t, \cos t) = \mathrm{T}$

dir. M ve $\mathbb{R}^2$ deki konneksiyon sırasıyla $\bar{D}$ ve D olsun. Gauss denkleminden;

$\bar{D}_{\mathrm{T}}\mathrm{T} = D_{\mathrm{T}}\mathrm{T} + \langle S(\mathrm{T}), \mathrm{T}\rangle \mathrm{N}$

olmak üzere, $boy\chi(\mathrm{M}) = 1$ olduğundan

$S(\mathrm{T}) = \lambda \mathrm{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

eşitliği kullanılarak

$\bar{D}_{\mathrm{T}}\mathrm{T} = D_{\mathrm{T}}\mathrm{T} + \lambda \|\mathrm{T}\| \mathrm{N}$

denklemi elde edilir. Burada yarıçap vektörü M için birim normal vektör alanıdır.

Böylece $\mathrm{N} = (\cos t, \sin t)$, $\|\mathrm{T}\| = 1$ olacaktır.

$D_{\mathrm{T}}\mathrm{T} = \frac{d\mathrm{T}}{dt} = (-\cos t, -\sin t) \neq 0$

dır. $\forall t \in \mathrm{I}$ için,

$\overline{D}_{\mathrm{T}}\mathrm{T} = (-\cos t, -\sin t) + 1(\cos t, \sin t) = (0{,}0)$

olur. Bu ise T vektör alanının M çemberi boyunca paralel bir vektör alanı olduğunu gösterir. Diğer yandan α eğrisi M çemberi için $\overline{D}_{\mathrm{T}}\mathrm{T} = 0$ ve $D_{\mathrm{T}}\mathrm{T} \neq 0$ olur. Bu eşitlikler M çemberinin $\mathbb{R}^2$ de geodezik olmadığı halde kendi üzerinde bir geodezik olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.3.(Geodezik Denklemler)

α bir σ yama yüzeyinde bir geodezik olsun.

$\alpha(\boldsymbol{t}) = \sigma(u(\boldsymbol{t}), v(\boldsymbol{t}))$ için;

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}\left(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2\right) \qquad (3.1.2)$$

$$\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2\right) \qquad (3.1.3)$$

eşitlikleriyle verilen diferensiyel denklemlere geodezik denklemler denir.

Geodezik denklemlerin nasıl elde edildiği aşağıdaki teoremle açıklanacaktır.

Teorem 3.1.6: Bir M yüzeyi üzerinde α eğrisi bir geodeziktir gerek ve yeter şart M nin bir yamasında α nın bir $\alpha(\boldsymbol{t}) = \sigma(u(\boldsymbol{t}), v(\boldsymbol{t}))$ parçası için aşağıdaki iki eşitliğin sağlanmasıdır.

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}\left(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2\right)$$

Burada,

$E = \sigma_u \cdot \sigma_u$, $F = \sigma_u \cdot \sigma_v$ ve $G = \sigma_v \cdot \sigma_v$

olup σ nın birinci temel formu $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ dır.

İspat:

σ nın tanjant düzleminin bir bazı $\{\sigma_u, \sigma_v\}$ olduğundan, α bir geodeziktir gerek ve yeter şart α'', σ_u ve σ_v ye diktir.

$\alpha' = u'\sigma_u + v'\sigma_v$ olduğundan

$\alpha'' \cdot \sigma_u = 0$ ve $\alpha'' \cdot \sigma_v = 0$ dır. Buradan;

$$\left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v)\right)\sigma_u = 0 \tag{3.1.4}$$

ve

$$\left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v)\right)\sigma_v = 0 \tag{3.1.5}$$

yazılabilir. Bu iki denklemin (3.1.2) de ve (3.1.3) de verilen geodezik denklemlere eşit olduğu gösterilebilir.(3.1.4) denkleminin sol tarafı;

$$\left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v)\right)\sigma_u - (u'\sigma_u + v'\sigma_v)\frac{d\sigma_u}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - (u'\sigma_u + v'\sigma_v) \cdot (u'\sigma_{uu} + v'\sigma_{uv})$$

$$= \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \left(u'^2(\sigma_u\sigma_{uu}) + u'v'(\sigma_u\sigma_{uv} + \sigma_v\sigma_{uu}) + v'^2(\sigma_v\sigma_{uv})\right) \tag{3.1.6}$$

denklemine eşittir.

$E_u = (\sigma_u \cdot \sigma_u)_u = \sigma_{uu}\sigma_u + \sigma_u\sigma_{uu} = 2\sigma_u\sigma_{uu}$ dır.

Buradan $\sigma_u\sigma_{uu} = \frac{1}{2}E_u$ dır. Benzer şekilde;

$$G_u = (\sigma_v \cdot \sigma_v)_u = \sigma_{vu}\sigma_v + \sigma_v\sigma_{vu} = 2\sigma_v\sigma_{vu}$$

$$\Rightarrow \sigma_v\sigma_{vu} = \frac{1}{2}G_u$$

dır. Ayrıca

$$F_u = (\sigma_u \cdot \sigma_v)_u = \sigma_{uu}\sigma_v + \sigma_u\sigma_{vu}$$

olup bu değerler (3.1.6) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v)\right)\sigma_u = \frac{d}{dt}(Eu' + Fv') - \frac{1}{2}\left(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2\right)$$

elde edilir. Bu da gösterir ki (3.1.4) denklemi (3.1.2) de verilen geodezik denkleme eşittir.

Benzer şekilde (3.1.5) denkleminin sol tarafı;

$$\left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v)\right)\sigma_v - (u'\sigma_u + v'\sigma_v)\frac{d\sigma_v}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') - (u'\sigma_u + v'\sigma_v)\cdot(u'\sigma_{uv} + v'\sigma_{vv})$$

$$= \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') - \left(u'^2(\sigma_u\sigma_{uv}) + u'v'(\sigma_u\sigma_{vv} + \sigma_v\sigma_{uv}) + v'^2(\sigma_v\sigma_{vv})\right) \qquad (3.1.7)$$

denklemine eşittir.

$$E_v = (\sigma_u \cdot \sigma_u)_v = \sigma_{uv}\sigma_u + \sigma_u\sigma_{uv} = 2\sigma_u\sigma_{uv}$$

$$\Rightarrow \sigma_u\sigma_{uv} = \frac{1}{2}E_v$$

dir.

$$G_v = (\sigma_v \cdot \sigma_v)_v = \sigma_{vv}\sigma_v + \sigma_v\sigma_{vv} = 2\sigma_v\sigma_{vv}$$

$$\Rightarrow \sigma_v\sigma_{vv} = \frac{1}{2}G_v$$

dir. Son olarak,

$F_v = (\sigma_u \cdot \sigma_v)_v = \sigma_{uv}\sigma_v + \sigma_u\sigma_{vv}$

olup bu değerler (3.1.7) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\left(\frac{d}{dt}(u'\sigma_u + v'\sigma_v)\right)\sigma_v = \frac{d}{dt}(Fu' + Gv') - \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2\right)$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla (3.1.5) denklemi (3.1.3) de verilen geodezik denkleme eşittir.

Örnek 3.1.8:

S^2 birim küre üzerindeki geodezikler, geodezik denklemler yardımıyla tanımlanabilir.

u enlemi ve v boylamı ile

$\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$

verilsin. Birinci temel form

$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

şeklindedir. O halde önce σ nın birinci temel formunu hesaplayalım.

$\sigma_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$

$\sigma_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$ için;

$E = \sigma_u \cdot \sigma_u$

$= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \cdot (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$

$= \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u = 1$ dir.

$F = \sigma_u \cdot \sigma_v$

$= (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \cdot (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$

$= \sin u \cos v \cos u \sin v - \sin u \sin v \cos u \cos v = 0$ dır.

$G = \sigma_v \cdot \sigma_v$

$= (-\cos u \sin v\,, \cos u \cos v\,, 0) \cdot (-\cos u \sin v, \cos u \cos v\,, 0)$

$= \cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \cos^2 v$

$= \cos^2 u$ dır.

O halde σ nın birinci temel formu $du^2 + \cos^2 u\, dv^2$ dir.

$\alpha(\boldsymbol{t}) = \sigma(u(\boldsymbol{t}), v(\boldsymbol{t}))$

birim hızlı eğrilere kısıtlanabilir. Buradan,

$u'^2 + v'^2 \cos^2 u = 1$

dir ve eğer α bir geodezik ise (3.1.3) geodezik denklemini sağlar.

$\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u' v' + G_v v'^2\right)$

denkleminde,

$E_v = 0$, $F_v = 0$ ve $G_v = (\cos^2 u)_v = 0$ değerleri yerine yazılırsa;

$\frac{d}{dt}(v' \cos^2 u) = 0$

olur. Buradan $v' \cos^2 u = c$ olup, c bir sabittir.

Eğer $c = 0$ ise $v' = 0$ dır. Dolayısıyla v sabittir ve bir meridyen parçasıdır.

$c \neq 0$ olduğunu varsayalım.

$u'^2 + v'^2 \cos^2 u = 1$

$\Rightarrow u'^2 = 1 - v'^2 \cos^2 u$

dir. $v' = \frac{c}{\cos^2 u}$ olduğundan,

$$u'^2 = 1 - \frac{c^2}{\cos^2 u}$$

dır. Böylece geodezik boyunca,

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{v'^2}{u'^2} = \frac{\frac{c^2}{\cos^4 u}}{1-\frac{c^2}{\cos^2 u}} = \frac{c^2 \cdot \cos^2 u}{\cos^4 u \cdot c^2(c^{-2}\cos^2 u - 1)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 u\,(c^{-2}\cos^2 u - 1)}$$

elde edilir ve buradan;

$$\Rightarrow \pm(v - v_0) = \int \frac{du}{\cos u\sqrt{\cos^2 u\left(c^{-2} - \frac{1}{\cos^2 u}\right)}}$$

dır ve v_0 bir sabittir.

$$\Rightarrow \pm(v - v_0) = \int \frac{du}{\cos^2 u\sqrt{\left(c^{-2} - \frac{1}{\cos^2 u}\right)}}$$

dır. $\theta = \tan u$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\pm(v - v_0) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(c^{-2} - 1 - \theta^2)}} = \sin^{-1}\left(\frac{\theta}{\sqrt{c^{-2} - 1}}\right)$$

dir. Böylece

$\tan u = \pm\sqrt{c^{-2} - 1}\,\sin(v - v_0)$ dır.

$$\frac{\sin u}{\cos u} = \pm\sqrt{c^{-2} - 1}\,\sin v_0 \cos v \mp \sqrt{c^{-2} - 1}\cos v_0 \sin v$$

$$\sin u = \pm\sqrt{c^{-2} - 1}\,\sin v_0 \cos u \cos v \mp \sqrt{c^{-2} - 1}\cos v_0 \cos u \sin v$$

bulunur. Bu da gösterir ki $\alpha(t)$ nin

$x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \sin v$ ve $z = \sin u$

koordinatları

$a = \pm\sqrt{c^{-2} - 1}\,\sin v_0$, $b = \mp\sqrt{c^{-2} - 1}\cos v_0$ için;

$z = ax + by$

eşitliği sağlanır. Buradan α , S^2 küresinin merkezinden geçen bir düzlem ile kesişimi ihtiva eder. Böylece bütün durumlarda α bir büyük çember parçasıdır.

Teorem 3.1.7: P, M yüzeyi üzerinde bir nokta ve T, P de M ye teğet bir birim vektör olsun. O zaman M üzerinde P noktasından geçen ve T teğet vektörüne sahip olan bir tek birim hızlı α geodeziği vardır.

İspat:

Geodezik denklemler,

$$u'' = f(u, v, u', v'), v'' = g(u, v, u', v') \tag{3.1.8}$$

formundadır. Burada f ve g u, v, u', v' değerlerinin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Diferensiyel denklemlerin teorisi gereğince verilen herhangi bir t_0 değeri için (3.1.8) denkleminin bir çözümü vardır öyle ki

$$u(t_0) = a \ , \ v(t_0) = b \ , \ u'(t_0) = c \ , v'(t_0) = d \quad \text{dir.} \tag{3.1.9}$$

$u(t)$, $v(t)$ tanımlanır ve diferensiyellenebilirdir. Bütün t değerleri için

$$|t - t_0| < \varepsilon$$

sağlanır ki $\varepsilon > 0$ dır. Ayrıca (3.1.8) denkleminin herhangi iki çözümü t nin bütün değerleri için (3.1.9) denklemini sağlar öyle ki

$|t - t_0| < \varepsilon'$, $\varepsilon' > 0$ ve $\varepsilon' \leq \varepsilon$ dır.

Şimdi bunlar geodezik denklemlere uygulanabilir. Kabul edelim ki P, M nin bir $\sigma(u,v)$ yaması içinde bulunsun. P, $\sigma(a,b)$ noktası olsun.

$T = c\sigma_u + d\sigma_v$

a, b, c, d skalerdir ve türevleri

$u = a \;, \; v = b$

eşitliklerine karşılık gelir. Bir birim hızlı

$\alpha(\boldsymbol{t}) = \sigma(u(\boldsymbol{t}), v(\boldsymbol{t}))$

eğrisi $u(\boldsymbol{t_0}) = a \;, \; v(\boldsymbol{t_0}) = b$ için $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$ da P noktasından geçer. Ayrıca T teğet vektörüne sahip olduğundan,

$c\sigma_u + d\sigma_v = \boldsymbol{t} = \alpha'(\boldsymbol{t_0}) = u'(\boldsymbol{t_0})\sigma_u + v'(\boldsymbol{t_0})\sigma_v$

yazılabilir. Yani

$u'(\boldsymbol{t_0}) = c$, $v'(\boldsymbol{t_0}) = d$ dir.

Böylece bulunan bir (birim hızlı) α geodeziği $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$ da P noktasından geçer ve orada elde edilen T teğet vektörü, (3.1.9) başlangıç şartları için geodezik denklemleri çözer ve yukarıda da belirtildiği gibi bir tek çözüme sahiptir.

Teorem 3.1.8: İki yüzey arasındaki bir izometri bir yüzeyin geodeziklerini diğer yüzeyin geodeziklerine götürür.

İspat:

M_1 ve M_2 iki yüzey olsun. $f : \mathrm{M}_1 \longrightarrow \mathrm{M}_2$ bir izometri ve α , M_1 de bir geodezik olsun. Ayrıca $\sigma(u,v)$, M_1 de bir yama ve bu yama üzerindeki α geodeziği,

$\alpha(\boldsymbol{t}) = \sigma(u(\boldsymbol{t}), v(\boldsymbol{t}))$

denklemi ile verilsin. Bu durumda u ve v , σ nın birinci temel formunun katsayıları olan E, F, G ile (3.1.2) ve (3.1.3) geodezik denklemleri sağlar.

$$\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u' v' + G_v v'^2\right)$$

$f \circ \sigma$, σ nın aynı birinci temel formu ile M_2 nin yamasıdır. Buradan $f \circ \sigma$ nın M_2 üzerinde bir geodezik olduğunu göstermek için $f \circ \sigma$ nın da geodezik denklemi sağladığı gösterilmelidir. Teorem 3.1.6 dan ve

$$t \longrightarrow f\left(\sigma\big(u(t), v(t)\big)\right)$$

olup zincir kuralından;

$$\frac{d}{dt}\left(\left(u'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u} + v'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) - \left(u'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u} + v'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(u'\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u \partial v} + v'\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v \partial v}\right)$$

$$- \left(u'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u} + v'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\left(u'\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u \partial v} + v'\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v \partial v}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left((u'F + v'G)\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\right) - \frac{\partial^3 f}{\partial \sigma^3}\cdot\frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u' v' + G_v v'^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\right)\frac{d}{dt}(u'F + v'G) = \frac{\partial^3 f}{\partial \sigma^3}\cdot\frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u' v' + G_v v'^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(u'F + v'G) = \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u' v' + G_v v'^2\right)$$

dir. Yani $f \circ \sigma$ (3.1.3) ile verilen ikinci geodezik denklemi sağlar. Benzer şekilde;

$$\frac{d}{dt}\left(\left(u'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u}+v'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)-\left(u'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u}+v'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(u'\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u\partial u}+v'\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v\partial u}\right)$$

$$-\left(u'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u}+v'\frac{\partial f}{\partial \sigma}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)\left(u'\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial u\partial u}+v'\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial v\partial u}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left((u'E+v'F)\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\right)-\frac{\partial^3 f}{\partial \sigma^3}\cdot\frac{1}{2}\left(E_u u'^2+2F_u u'v'+G_u v'^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}\right)\frac{d}{dt}(u'E+v'F)=\frac{\partial^3 f}{\partial \sigma^3}\cdot\frac{1}{2}\left(E_u u'^2+2F_u u'v'+G_u v'^2\right)$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}(u'E+v'F)=\frac{1}{2}\left(E_u u'^2+2F_u u'v'+G_u v'^2\right)$$

dir. $f\circ\sigma$ (3.1.2) ile verilen birinci geodezik denklemi sağlar.

Dolayısıyla $f\circ\sigma$, σ nın aynı birinci temel formu ile M_2 nin bir yamasıdır. Buradan, Teorem 3.1.6 gereğince ve

$\boldsymbol{t}\longrightarrow f\left(\sigma\left(u(\boldsymbol{t}),v(\boldsymbol{t})\right)\right)$

ile $f\circ\sigma$, M_2 üzerinde bir geodeziktir.

Örnek 3.1.9:

$x^2+y^2=1$ dairesel silindiri verilsin. Bu silindir üzerinde verilen herhangi teğet yönünde, her noktadan geçen bir geodezik vardır. Bu geodezikler, düzlemin geodezikleri olan doğruların izometri altındaki görüntüleri yardımıyla bulunur. Bunun için öncelikle silindirin düzleme izometrik olduğu gösterilebilir.

$\sigma(u,v) = (u,v,0)$ düzlem, $\sigma^*(u,v) = (\cos u\,, \sin u\,, v)$ silindir olmak üzere;

$\sigma_u = (1,0,0)$, $\sigma_v = (0,1,0)$

ve

$\sigma_u^* = (-\sin u\,, \cos u\,, 0)$, $\sigma_v^* = (0,0,1)$ dir.

Düzlem için;

$E = \sigma_u \cdot \sigma_u = (1,0,0) \cdot (1,0,0) = 1$

$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = (1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0$

$G = \sigma_v \cdot \sigma_v = (0,1,0) \cdot (0,1,0) = 1$

olup,

$\mathrm{I}_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Silindir için;

$E^* = \sigma_u^* \cdot \sigma_u^* = (-\sin u\,, \cos u\,, 0) \cdot (-\sin u\,, \cos u\,, 0) = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$

$F^* = \sigma_u^* \cdot \sigma_v^* = (-\sin u\,, \cos u\,, 0) \cdot (0,0,1) = -\sin u \cos u + \sin u \cos u = 0$

$G^* = \sigma_v^* \cdot \sigma_v^* = (0,0,1) \cdot (0,0,1) = 1$

olup,

$\mathrm{I}^*_{P^*} = \begin{bmatrix} E^* & F^* \\ F^* & G^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

dir. Burada $P = \sigma(u_0, v_0)$ düzlem üzerinde, $P^* = \sigma^*(u_0, v_0)$ silindir üzerinde keyfi noktalar olmak üzere

$\mathrm{I}_p = \mathrm{I}^*{}_{P^*}$

olup düzlem ve silindir lokal olarak izometriktir. P ve P^* keyfi noktalar olduğundan her P ve P^* için düzlem ve silindir izometriktir.

İzometri xy −düzleminin $(u, v, 0)$ noktasını silindirin $(\cos u\,, \sin u\,, v)$ noktasına götürür. Teorem 3.1.8 ile izometri düzlem üzerindeki geodezikleri yani doğruları, silindir üzerindeki geodeziklere götürür. O halde silindir üzerindeki geodeziklerin bulunması için düzlemdeki bütün doğruların izometri altındaki görüntülerinin bulunması yeterlidir. y −eksenine paralel olmayan herhangi doğru $y = mx + c$ ye karşılık gelir, burada m ve c sabitlerdir. Bu doğru $x = u\,, y = mu + c$ ile parametrelendirilir. Bunun silindir üzerindeki görüntüsü

$\alpha(u) = (\cos u\,, \sin u\,, mu + c)$

eğrisidir. Bu ise $r = 1$ yarıçaplı bir dairesel helis denklemidir.

Burada eğer $m = 0$ ise, $\alpha(u) = (\cos u\,, \sin u\,, c)$ olup, α geodeziği çemberdir.

Son olarak xy −düzleminde, y −eksenine paralel herhangi doğru izometri ile silindir üzerinde z −eksenine paralel bir doğruya dönüşür .

Dolayısıyla xy −düzleminin doğrularının izometri altındaki görüntüleri, silindirin geodezikleri olan çemberleri, doğruları ve dairesel helisleri verir.

Şimdi de dairesel silindir üzerindeki geodeziklerin, geodezik denklemler yardımıyla nasıl bulunabileceği aşağıdaki örnekle incelenecektir.

Örnek 3.1.10:

Geodezik denklemler yardımıyla bir dairesel silindir üzerindeki geodezikler bulunabilir.

$x^2 + y^2 = 1$

dairesel silindirini göz önüne alalım. Silindirin u , v parametrelendirilmesi

$\alpha = \sigma(u, v) = (\cos u , \sin u , v)$

$\sigma_u(u, v) = (-\sin u , \cos u , 0)$ ve $\sigma_v(u, v) = (0,0,1)$ dir.

$E = \sigma_u \cdot \sigma_u = (-\sin u , \cos u , 0) \cdot (-\sin u , \cos u , 0) = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$,

$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = (-\sin u , \cos u , 0) \cdot (0,0,1) = 0$,

$G = \sigma_v \cdot \sigma_v = (0,0,1) \cdot (0,0,1) = 1^2 = 1$ dir.

$E = G = 1$ ve $F = 0$

değerleri (3.1.2) ve (3.1.3) ile verilen birinci ve ikinci geodezik denklemlerde yerine yazılırsa;

$\frac{d}{dt} = (Eu' + Fv') = \frac{1}{2}\left(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2\right)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} u' = 0$

$\Rightarrow u'' = 0$ dır.

$$\frac{d}{dt} = (Fu' + Gv') = \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} v' = 0$$

$\Rightarrow v'' = 0$

dır. Buradan $u = at + b$, $v = ct + d$ olup a, b, c, d sabitlerdir.

Eğer $a = 0$ ise,

$\alpha = \sigma(u, v) = (\cos b , \sin b , ct + d)$

olup α, $(\cos b , \sin b , d)$ noktasından geçen bir doğrudur.

Eğer $a \neq 0$ ise,

$\alpha = \sigma(u, v) = (\cos(at + b) , \sin(at + b) , ct + d)$

olup α , silindir üzerinde helis eğrisidir.

Eğer $a \neq 0$, $c = 0$ ise,

$\alpha = \sigma(u, v) = (\cos(at + b), \sin(at + b), d)$

olup α , $z = d$ düzlemi ile silindirin arakesiti olan çemberlerdir.

Tanım 3.1.4: $\mathbb{R}^2$ de $x_2 > 0$ yarı düzleminde bir düzlemsel eğri α olsun. α eğrisinin x_1 −ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey M olsun.

$$\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$$

eğrisi de $\mathbb{R}^2$ de sabit hızlı bir eğri olsun. Her $\theta \in \mathbb{R}$ için bir

$$\alpha_\theta : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$$

$$t \longrightarrow \alpha_\theta(t) = (x_1(t), x_2(t)\cos\theta\,, x_2(t)\sin\theta)$$

ve $\forall t \in \mathrm{I}$ için bir

$$\beta_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{M}$$

$$\theta \longrightarrow \beta_t(\theta) = (x_1(t), x_2(t)\cos\theta\,, x_2(t)\sin\theta)$$

eğrileri tanımlansın.

α_θ eğrilerine M dönel yüzeyinin meridyen eğrileri ve β_t eğrilerine (çemberlerine) de M dönel yüzeyinin paralel eğrileri denir. α eğrisine ise dönel yüzeyin profil eğrisi denir.

Teorem 3.1.9: $\alpha(t) = \sigma\big(u(t), v(t)\big)$ eğrisinin döndürülmesiyle elde edilen M yüzeyinin $\forall t \in \mathrm{I}$ ve $\forall \theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$\alpha_\theta(t) = (u(t), v(t)\cos\theta\,, v(t)\sin\theta)$

$\beta_t(\theta) = (u(t), v(t)\cos\theta, v(t)\sin\theta)$

paralel ve meridyenleri için;

i) Meridyenler ve paralel çemberler daima birbirini dik keser.

$$\langle \alpha_\theta{}'(t), \beta_t{}'(t)\rangle = 0$$

ii) Her bir α_θ meridyen eğrisi M üzerinde bir geodeziktir.

iii) $\beta_t(\theta)$ paralel dairelerinin M üzerinde geodezik eğri olmaları için gerek ve yeter şart α nın eğriliği olan $\frac{v'}{u'}$ nin $\alpha(t)$ de sıfır olmasıdır.

İspat:

i) $\alpha_\theta(t) = (u(t), v(t)\cos\theta, v(t)\sin\theta)$, $\forall t \in I$

$\beta_t(\theta) = (u(t), v(t)\cos\theta, v(t)\sin\theta)$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$

eşitliklerinin türevleri alınırsa;

$\alpha_\theta{}'(t) = (u'(t), v'(t)\cos\theta, v'(t)\sin\theta)$

$\beta_t{}'(\theta) = (0, -v(t)\sin\theta, v(t)\cos\theta)$

elde edilir.

$\Rightarrow \langle \alpha_\theta{}'(t), \beta_t{}'(t)\rangle$

$= \langle (u'(t), v'(t)\cos\theta, v'(t)\sin\theta), (0, -v(t)\sin\theta, v(t)\cos\theta)\rangle$

$$= 0 \cdot u'(t) - v(t)v'(t)\sin\theta\cos\theta + v(t)v'(t)\sin\theta\cos\theta = 0$$

dır. O halde meridyenler ve paralel daireler birbirini daima dik keser.

ii) $\{\alpha_\theta{}'(t), \beta_t{}'(t)\}$, i) koşulu gereğince ortogonal bir sistem olduğundan lineer bağımsızdır ve

$T_M(P) = S_P\{\alpha_\theta{}'(t), \beta_t{}'(t)\}$

dir. Böylece $\{\alpha_\theta{}'(t), \beta_t{}'(t)\}$, $P = \alpha_\theta(t)$ noktasında $T_M(P)$ nin bir bazıdır. Diğer taraftan α eğrisi sabit hızlı bir eğri olduğundan,

$\langle \alpha_\theta{}'(t), \alpha_\theta{}'(t)\rangle = c$, c sabittir.

$\Rightarrow \langle \alpha_\theta{}''(t), \alpha_\theta{}'(t)\rangle + \langle \alpha_\theta{}'(t), \alpha_\theta{}''(t)\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \alpha_\theta{}''(t), \alpha_\theta{}'(t)\rangle = 0$

dır. Ayrıca $\langle \alpha_\theta{}''(t), \beta_t{}'(t)\rangle = 0$ olduğundan $\alpha_\theta{}''(t) \perp S_P\{\alpha_\theta{}'(t), \beta_t{}'(t)\}$ dır. Dolayısıyla $\alpha_\theta{}''(t) \perp T_M\big(\alpha_\theta(t)\big)$ dır. Yani $\alpha_\theta(t)$ eğrisi M yüzeyinin tanjant düzlemine dik olup normal düzlemine paraleldir. O halde $\alpha_\theta(t)$ eğrisi M yüzeyi üzerinde bir geodeziktir.

iii) Bir $\beta_t(\theta) = Q \in M$ noktasında M nin $N_{\beta_t(\theta)}$ normali,

$$N_{\beta_t(\theta)} = \alpha_\theta{}'(t) \wedge \beta_t{}'(t) = det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ u'(t) & v'(t)\cos\theta & v'(t)\sin\theta \\ 0 & -v(t)\sin\theta & v(t)\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= (v'(t)v(t), -u'(t)v(t)\cos\theta, -u'(t)v(t)\sin\theta)$$

$$= u'(t)v(t)\left(\frac{v'(t)}{u'(t)}, -\cos\theta, -\sin\theta\right)$$

dir. Ayrıca

$\beta_t{}'(\theta) = (0, -v(t)\sin\theta, v(t)\cos\theta)$

ve

$\beta_t{}''(\theta) = (0, -v(t)\cos\theta, -v(t)\sin\theta)$

dir. O halde $\beta_t{}''(\theta) = \lambda N_{\beta_t(\theta)}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{v'(\boldsymbol{t})}{u'(\boldsymbol{t})} = 0$$

olmasıdır. $\boldsymbol{\beta}_t{}''(\theta) = \lambda \mathrm{N}_{\beta_t(\theta)}$ olması $\boldsymbol{\beta}_t(\theta)$ eğrisinin M yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri olması demektir.

Teorem 3.1.10 (Clairaut Teoremi): α, M dönel yüzeyi üzerinde bir geodezik olsun. ρ, dönme ekseninden M nin bir noktasına olan uzaklık ve ψ, α ve M nin meridyeni arasındaki açı olsun. Bu durumda $\rho \sin\psi$, α boyunca sabittir.

Tersine, $\rho \sin\psi$ yüzeyde bazı α eğrileri boyunca sabitse ve α nın parçası M nin bazı paralellerinin hiçbir parçası olmuyorsa, o zaman α bir geodeziktir. (Burada, α nın parçası olarak $\alpha(\mathrm{J})$ kastedilir ki burada J bir açık aralıktır. Bir $\psi = \frac{\pi}{2}$ paraleli üzerinde $\rho \sin\psi$ kesinlikle sabit olduğu için hipotez sağlanır. Ancak paraleller Teorem 3.1.9 gereğince genel olarak geodezik değildir.)

İspat:

M nin $\sigma(u,\psi) = \big(f(u)\cos\psi\,, f(u)\sin\psi\,, g(u)\big)$ parametrelendirmesiyle $\rho = f(u)$ elde edilir.

$$\frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|} = \sigma_u$$

ve

$$\frac{\sigma_v}{\|\sigma_v\|} = \rho^{-1}\sigma_v$$

sırasıyla, meridyenlere ve paralellere teğet birim vektörlerdir ve Teorem 3.1.9 gereğince birbirine diktir.

Kabul edelim ki $\alpha(\boldsymbol{t}) = \sigma\big(u(\boldsymbol{t}), v(\boldsymbol{t})\big)$ birim hızlı olsun.

$$\alpha' = \cos\psi\,\sigma_u + \rho^{-1}\sin\psi\,\sigma_v \tag{3.1.10}$$

elde edilir. (Bu eşitlik aslında ψ nin işaretini tanımlamaya yardımcı olur.)

(3.1.10) denkleminin her iki yanı σ_u ile çarpılırsa,

$$\sigma_u \times \alpha' = \cos\psi\,\sigma_u \times \sigma_u + \rho^{-1}\sin\psi\,\sigma_u \times \sigma_v \tag{3.1.11}$$

elde edilir.

$$\sigma_u \times \sigma_u = 1 \tag{3.1.12}$$

eşitliği (3.1.11) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sigma_u \times \alpha' = \rho^{-1}\sin\psi\,\sigma_u \times \sigma_v \tag{3.1.13}$$

dir. $\alpha' = u'\sigma_u + v'\sigma_v$ iken,

$\sigma_u \times \alpha' = u'\sigma_u \times \sigma_u + v'\sigma_u \times \sigma_v$

yazılabilir. Burada (3.1.12) eşitliği yerine yazılırsa,

$$v'\sigma_u \times \sigma_v = \rho^{-1}\sin\psi\,\sigma_u \times \sigma_v \tag{3.1.14}$$

$$\rho v' = \sin\psi \tag{3.1.15}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\rho\sin\psi = \rho^2 v'$ dır. O halde

$$\frac{d}{dt}\left(\left(f(u)\right)^2 v'\right) = 0 \tag{3.1.16}$$

denklemi gösterir ki bu geodezik α boyunca sabittir. Bu sabit Ω ile gösterilsin.

Tersi için; $\rho \sin \psi$, M de bir birim hızlı α eğrisi boyunca bir Ω sabiti ise,

$$\frac{d}{dt}\left(\left(f(u)\right)^2 v'\right) = 0$$

sağlanır.

$$u'' = f(u)\frac{df}{du}v'^2 \tag{3.1.17}$$

denkleminin sağlandığı gösterilmelidir. (3.1.16) eşitliğinden

$$v' = \frac{\sin \psi}{\rho} = \frac{\Omega}{\rho^2} \tag{3.1.18}$$

iken α eğrisi birim hızlı olduğundan ve (3.1.17) denkleminden

$u'^2 + \rho^2 v'^2 = 1$ olup

$$u'^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2} \tag{3.1.19}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın da t ye göre türevi alınırsa,

$$2u'u'' = 2\frac{\Omega^2}{\rho^3}\rho' = \frac{2\Omega^2}{\rho^3}\frac{d\rho}{du}u'$$

$$\Rightarrow u'\left(u'' - \rho\frac{d\rho}{du}v'^2\right) = 0 \tag{3.1.20}$$

dır. Eğer (3.1.20) eşitliğinde parantez içindeki kısım, eğrinin bazı noktalarında sıfır olmazsa orada bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki

$|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_0}| < \varepsilon$ için $\alpha(\boldsymbol{t_0}) = \sigma(u_0, v_0)$ da sıfır olur.

Ancak $|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_0}| < \varepsilon$ için $u' = 0$ olduğundan α, $|\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_0}| < \varepsilon$ iken $u = u_0$ paraleli ile çakışır. Bu ise $\alpha(\boldsymbol{t}) = \sigma\big(u(\boldsymbol{t}), v(\boldsymbol{t})\big)$ nin birim hızlı olması ile çelişir. Dolayısıyla (3.1.20) eşitliğinde parantez içindeki kısım, α üzerinde her yerde sıfır olmalıdır. Yani

$$u'' = \rho\frac{d\rho}{du}v'^2$$

dir ki bu da (3.1.17) denkleminin sağlandığını gösterir.

Örnek 3.1.11: $\alpha = \sigma(u, v) = \big((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\big)$ parametrelendirmesiyle M tor yüzeyi verilsin.

$\sigma_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$

$\sigma_v = (-(R + r\cos u)\sin v, (R + r\cos u)\cos v, 0)$

için;

$E = \sigma_u \cdot \sigma_u = r^2$

$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = 0$

$G = \sigma_v \cdot \sigma_v = (R + r\cos u)$

dir. Bu eşitlikler (3.1.2) ve (3.1.3) geodezik denklemleri ve Teorem 3.1.9 gereğince,

$$u'' + \frac{(R + r\cos u)}{r}\sin u\, v'^2 = 0 \tag{3.1.21}$$

ve

$$v'' - 2\frac{r\sin u}{(R + r\cos u)}u'v' = 0 \tag{3.1.22}$$

dır. (3.1.22) denklemi göz önüne alınırsa;

$$v'' - 2\frac{r\sin u}{(R + r\cos u)}u'v' = 0$$

$$\Rightarrow v'' = 2\frac{r\sin u}{(R + r\cos u)}u'v'$$

$$\Rightarrow \frac{v''}{v'} = 2\frac{r\sin u}{(R + r\cos u)}u'$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte integral alınırsa,

$$\ln v' = -2\ln(R + r\cos u) + c_1 \tag{3.1.23}$$

dır. Burada $c_1 = \ln c$ alınırsa,

$$\ln v' = \ln(R + r\cos u)^{-2} + \ln c$$

$$\Rightarrow v' = \frac{c}{(R + r\cos u)^2}$$

elde edilir. α nın birim hızlı olduğu varsayılırsa (ki $F = 0$ olup α, birim hızlıdır) birim hız bağıntısından;

$$E{u'}^2 + G{v'}^2 = 1$$

$$\Rightarrow r^2{u'}^2 + (R + r\cos u)^2\frac{c^2}{(R + r\cos u)^4} = 1$$

$$\Rightarrow r^2{u'}^2 + \frac{c^2}{(R + r\cos u)^2} = 1$$

$$\Rightarrow u'^2 = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{c^2}{(R + r\cos u)^2}\right)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{c^2}{(R + r\cos u)^2}}$$

elde edilir. v' nün u' ye bölünmesiyle,

$$\frac{v'}{u'} = \frac{du}{dv} = \frac{cr}{(R + r\cos u)\sqrt{(R + r\cos u)^2 - c^2}} du$$

elde edilir. Tor yüzeyi için Clairaut bağıntısı

$$(R + r\cos u)\sin\varphi = c$$

dir. Burada φ , α' ve σ_u arasındaki açıdır.

α, en üstteki çembere paralel olarak başladığını kabul edelim.

$$\sigma\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \sigma\left(\left(R + r\cos\frac{\pi}{2}\right)\cos v, \left(R + r\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin v, r\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = (R\cos v, R\sin v, r)$$

dir. O zaman $\varphi = \frac{\pi}{2}$ den ve Clairaut bağıntısından

$$\left(R + r\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi = c$$

$$\Rightarrow R\sin\frac{\pi}{2} = c$$

$$\Rightarrow R = c$$

elde edilir. $|\sin\varphi| \le 1$ olduğunda, bütün α boyunca

$$R + r\cos u \ge R$$

elde edilir. Bu $\cos u \ge 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$$

dir. O halde, geodezik torun dışında kalır. Yani en üstteki ve en alttaki paraleller arasında sıçrar.

Tanım 3.1.5.(Clairaut parametrizasyonu)

Bir M yüzeyi üzerinde

$F = 0$ ve $E_v = G_v = 0$

koşulunu sağlayan (E ve G sadece u ya bağlı olan) bir

$$\sigma : D \longrightarrow M$$

ortogonal parametrizasyonuna bir Clairaut parametrizasyonu denir.

Küre ve tor için yamalar ortogonaldir ve E, G sadece u ya bağlıdır. Bir ortogonal $\sigma(u, v)$ yamasının,

$E_v = 0$ ve $G_v = 0$ ise u da bir Clairaut parametrelendirmesi

$E_u = 0$ ve $G_u = 0$ ise, v de bir Clairaut parametrelendirmesi olduğu söylenebilir. Dolayısıyla tor u içinde Clairaut'dır. Geodezik denklemler bu durumda daha basit bir hal alır. Yani u −Clairaut için $F = 0$ ve $E_v = G_v = 0$

değerleri ile birlikte (3.1.2) geodezik denklemi göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') = \frac{1}{2}\left(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(Eu') = \frac{1}{2}\left(E_u u'^2 + G_u v'^2\right)$$

$$\Rightarrow 2Eu'' = E_u u'^2 + G_u v'^2$$

$$\Rightarrow u'' - \frac{E_u}{2E}u'^2 - \frac{G_u}{2E}v'^2 = 0 \quad (u - \text{Clairaut Geodezik Denklemi}) \tag{3.1.24}$$

Benzer şekilde (3.1.3) geodezik denkleminde

$F = 0$ ve $E_u = G_u = 0$

değerleri göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') = \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u' v' + G_v v'^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(Gv') = \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + G_v v'^2\right)$$

$$\Rightarrow 2Gv'' = E_v u'^2 + G_v v'^2$$

$$\Rightarrow v'' - \frac{E_v}{2G}u'^2 - \frac{G_v}{2G}v'^2 = 0 \quad (v - \text{Clairaut Geodezik Denklemi}) \qquad (3.1.25)$$

elde edilir.

Bundan sonraki teoremlerde daha çok u −Clairaut parametrelendirmesi dikkate alınacaktır.

Teorem 3.1.11: M : $\sigma(\mathrm{u,v})$, u −Clairaut parametrelendirmesiyle bir yüzey olsun. u −parametre eğrileri sabit hızla parametrelendirildiklerinde birer geodeziktir.

İspat:

σ, u −Clairaut yaması için bir $\sigma(\mathrm{u,v_0})$ u −parametre eğrisini göz önüne alalım.

$\alpha(\boldsymbol{t}) = \sigma(\mathrm{t,v_0})$ için

$u(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}$, $v(\boldsymbol{t}) = \mathrm{v_0}$, $u' = 1$, $v' = 0$

dır. α için yay uzunluğu,

$$S(\boldsymbol{t}) = \int_0^t |\alpha'(\gamma)|\, d\gamma = \int_0^t \sqrt{E(\gamma)}d\gamma$$

dır. $\alpha'(\boldsymbol{t}) = \sigma_u u' = \sigma_u$ dır. Buradan

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E(\boldsymbol{t})} > 0$$

elde edilir. Bu nedenle bir $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(s)$ ters fonksiyonu vardır ki

$\boldsymbol{\beta}(s) = \alpha(\boldsymbol{t}(s))$ olarak α birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendirilebilir.

$u(s) = \boldsymbol{t}(s)$ ve $v(s) = v_0$ ile $\boldsymbol{\beta}(s) = \sigma(\boldsymbol{t}(s), v_0)$

dır. Zincir kuralından;

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{E^{\frac{3}{2}}}E_u\frac{1}{\sqrt{E}} = -\frac{E_u}{2E^2}$$

elde edilir. Bu türevler (3.1.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u'' - \frac{E_u}{2E}u'^2 = -\frac{E_u}{2E^2} + \frac{E_u}{2E}\left(\frac{1}{E}\right) = 0$$

dır. Buradan $u'' = 0$ olup, u –Clairaut geodezik denklemi olan (3.1.24) denklemi sağlanır. Dolayısıyla yeniden parametrelendirilmiş $\boldsymbol{\beta}(s)$ u –parametre eğrisi bir geodeziktir.

u –Clairaut yamalarının u –parametre eğrilerinin bir geodezik olduğu Teorem 3.1.11 ile ispatlandı. Şimdi u –Clairaut yamalarının $\sigma(u_0, v)$ v –parametre eğrileri için de doğru olup olmadığı incelenebilir.

Teorem 3.1.12: M : σ(u,v), u –Clairaut yamasıyla bir yüzey olsun. Bir v –parametre eğrisi $u = u_0$ ile $G_u(u_0) = 0$ iken bir geodeziktir.

İspat:

v –parametre eğrisi, $u = u_0$ için geodeziktir gerek ve yeter şart

$\sigma_{vv}(u_0, v) \cdot \sigma_u(u_0, v) = 0$

dır. Aşağıdaki eşitlik gösterir ki bu durum $G_u(u_0) = 0$ dır.

$0 = F_v = \sigma_{uv} \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \sigma_{vv}$

dır. Her v için,

$G_u(u_0) = G_u(u_0, v) = 2\sigma_{vu}(u_0, v) \cdot \sigma_v(u_0, v)$

dir. $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$ olduğundan,

$G_u(u_0) = \sigma_{vu}(u_0, v) \cdot \sigma_v(u_0, v) = 0$

dır. $u-$Clairaut yaması olduğundan $G_v = 0$ dır. Böylece $v-$parametre eğrileri birim hızlı olduğundan geodeziktir.

Tanım 3.1.6.(Pregeodezik)

α bir M yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α nın bir geodezik olan $\alpha \circ h$ yeniden parametrelendirmesi varsa α ya bir pregeodezik denir.

Teorem 3.1.13: M bir yüzey ve $\alpha : (a, b) \longrightarrow \mathrm{M}$ bir regüler eğri olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) α bir pregeodeziktir.

ii) Bir $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyle ki $a < t < b$ için

$$(\mathrm{D}_{\alpha'}\alpha')(t) = f(t)\alpha'(t)$$

dir.

iii) α nın geodezik eğriliği sıfırdır.

İspat:

i) $\Rightarrow$ ii) için;

$\alpha \circ h$ bir geodezik olsun. $\beta' = (\alpha' \circ h)h'$ olur ki Teorem 3.1.4 gereğince β' ve h' sıfırdan farklı değerler alır. Dahası

$$\mathrm{D}_{\beta'}\beta' = h'^2(\mathrm{D}_{\alpha'}\alpha')\circ h + h''\alpha' \circ h = 0$$

öyle ki

$$\mathrm{D}_{\alpha'}\alpha' = \left(-\frac{h''}{h'^2}\circ h^{-1}\right)\alpha'$$

dır. Böylece

$$f = -\left(\frac{h''}{h'^2}\right)\circ h^{-1}$$

alınabilir. O halde $(\mathrm{D}_{\alpha'}\alpha')(t) = f(t)\alpha'(t)$ koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu vardır.

ii) $\Rightarrow$ i) için;

$\mathrm{D}_{\alpha'}\alpha' = f\alpha'$ ve h ,

$$h'' + h'^2(f\circ h) = 0$$

diferensiyel denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olduğunu kabul edelim.

$\beta = \alpha\circ h$ alınırsa;

$$\mathrm{D}_{\beta'}\beta' = h'^2(\mathrm{D}_{\alpha'}\alpha')\circ h + h''\alpha' \circ h = \left((f\circ h)h'^2 + h''\right)\alpha' \circ h = 0$$

dır. Bu ise i) ve ii) nin denkliğini gösterir.

Son olarak i) $\Rightarrow$ iii) için; α bir pregeodezik olsun. Bu durumda Tanım 3.1.6 gereğince $\alpha\circ h$ bir geodeziktir. Diğer yandan Teorem 3.1.4 dikkate alınırsa α bir geodeziktir. O halde α nın geodezik eğriliği her yerde sıfırdır.

Tanım 3.1.7.(Maksimal Geodezik)

Bir α geodeziği, reel eksenin bir en geniş I aralığında tanımlanan herhangi bir diğer geodeziğin kısıtlaması değilse, bu durumda α geodeziğine maksimal geodezik denir.

Teorem 3.1.14: M bir yüzey olmak üzere keyfi bir $P \in \mathrm{M}$ noktası ve $v_P \in \mathrm{T_M(P)}$ vektörü verilsin. $\boldsymbol{t_0}$ noktasını içeren bazı aralıklar üzerinde tanımlanan kesin olarak bir α geodeziği vardır öyle ki

$$\alpha(\boldsymbol{t_0}) = P\ ,\ \ \alpha'(\boldsymbol{t_0}) = v_P$$

dir.

İspat:

$\mathcal{A}$, $\alpha(\boldsymbol{t_0}) = P$ ve $\alpha'(\boldsymbol{t_0}) = v_P$ eşitliklerini sağlayan bütün $\alpha(\boldsymbol{t})$ geodeziklerinin cümlesini göstersin. Bu geodeziklerin her biri $\boldsymbol{t_0}$ noktasını içeren bazı I_α aralıkları üzerinde tanımlanır. Bu duruma uygun en az bir $\alpha \in \mathcal{A}$ geodeziği olup $\mathcal{A}$ cümlesi boş değildir.

Herhangi iki $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ geodezikleri

$\mathrm{I}_{\alpha_1} \cap \mathrm{I}_{\alpha_2}$ aralığı üzerinde kesişir. Böylece $\boldsymbol{t} \in \mathrm{I}_\alpha$ için $\bar{\alpha}(\boldsymbol{t}) = \alpha(\boldsymbol{t})$

eşitliği ile birlikte

$$\mathrm{I} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{I}_\alpha$$

aralığı üzerinde $\bar{\alpha} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$ eğrisi tanımlanır. Bu eğri diğer geodeziklerle kısıtlanmaz ve

$$\mathrm{I} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{I}_\alpha$$

ile aralığı örten geodezik olduğundan maksimal geodeziktir. Ayrıca;

$v_P = 0$ ise buradaki $\bar{\alpha}$ eğrisi P noktasında reel eksenin sabit noktaya dönüşümüdür.

$v_P \neq 0$ ise buradaki $\bar{\alpha}$ eğrisi P noktasını içeren en geniş

$$\mathrm{I} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathrm{I}_\alpha$$

aralığında tanımlıdır. Bu da maksimal geodezik olduğu anlamına gelir.

$\boldsymbol{t_0} = 0$ alınsın. Bu durumda $\alpha(0) = P$ ve $\alpha'(0) = v_P$ olan maksimal geodeziktir.

Teorem 3.1.15: M bir yüzey olsun. $\overrightarrow{v_P} \in \mathrm{T_M(P)}$, $P \in \mathrm{M}$ ve

$$\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$$

eğrisi, başlangıç hızı $\overrightarrow{v_P}$ olan bir maksimal geodezik olsun. M de başlangıç hızı $c\overrightarrow{v_P}$, $c \in \mathbb{R}$ olan bir maksimal geodezik eğri $\boldsymbol{\beta}$ ise,

$$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t}) = \alpha(\boldsymbol{ct})$$

dir.

İspat:

α eğrisi M üzerinde bir geodezik eğri ise Gauss denkleminden;

$$\alpha''(\boldsymbol{t}) + \langle \alpha'(\boldsymbol{t}), \frac{d}{dt}(\mathrm{N} \circ \alpha)(\boldsymbol{t}) \rangle (\mathrm{N} \circ \alpha)(\boldsymbol{t}) = 0$$

olur.

$$\begin{cases} \alpha(0) = P \\ \alpha'(0) = v_P \end{cases}$$

başlangıç şartlarıyla bu sistemin çözümü $\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$ eğrisidir. Diğer taraftan bir diğer $\boldsymbol{\beta} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$ eğrisinin de geodezik olduğunu varsayalım. O zaman;

$$\beta''(t) + \langle \beta'(t), \frac{d}{dt}(\mathrm{N} \circ \beta)(t) \rangle (\mathrm{N} \circ \beta)(t) = 0 \tag{3.1.26}$$

olmalıdır. Bu diferensiyel denklemin başlangıç koşulları;

$$\begin{cases} \beta(0) = P \\ \beta'(0) = cv_P \end{cases}$$

olsun. O zaman diferensiyel denklemin bu başlangıç koşullarına uygun çözümünü araştıralım. Sistemin çözümü $\beta(t) = \alpha(ct)$ olsun. Bunun (3.1.26) ile verilen diferensiyel denklemi sağladığı görülebilir.

$$\beta(t) = \alpha(ct)$$

$$\beta'(t) = c\alpha'(ct)$$

$$\beta''(t) = c^2\alpha''(ct)$$

değerleri (3.1.26) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\beta''(t) + \langle \beta'(t), \frac{d}{dt}(\mathrm{N} \circ \beta)(t) \rangle (\mathrm{N} \circ \beta)(t)$$

$$= c^2\alpha''(ct) + \langle c\alpha'(ct), \frac{d}{dt}(\mathrm{N} \circ \alpha)(ct) \rangle (\mathrm{N} \circ \alpha)(ct)$$

$$= c^2\alpha''(ct) + \langle c\alpha'(ct), \frac{d\mathrm{N}\big(\alpha(ct)\big)}{dt} \rangle \, \mathrm{N}\big(\alpha(ct)\big) \tag{3.1.27}$$

olur. Burada,

$$\frac{d\mathrm{N}\big(\alpha(ct)\big)}{dt} = D_{\beta'(t)}\mathrm{N}$$

olup $\beta'(t) = c\alpha'(ct)$ olduğundan

$$\frac{d\mathrm{N}\big(\alpha(ct)\big)}{dt} = D_{c\alpha'(ct)}\mathrm{N} = \mathrm{c}D_{\alpha'(ct)}\mathrm{N}$$

$$\Rightarrow \mathrm{N}\big(\alpha(ct)\big) = \mathrm{N}_{\alpha(ct)}$$

dir. Bu değerler (3.1.27) denkleminde yerine yazılırsa;

$c^2\alpha''(ct) + \langle c\alpha'(ct), cD_{\alpha'(ct)}\mathrm{N}\rangle \mathrm{N}_{\alpha(ct)}$

$\Rightarrow c^2\left[\alpha''(ct) + \langle \alpha'(ct), D_{\alpha'(ct)}\mathrm{N}\rangle \mathrm{N}_{\alpha(ct)}\right]$

dır. Hipotezden,

$\alpha''(ct) + \langle \alpha'(ct), D_{\alpha'(ct)}\mathrm{N}\rangle \mathrm{N}_{\alpha(ct)} = 0$

olduğundan $c^2 \cdot 0 = 0$ elde edilir.

$\beta(t) = \alpha(ct)$ iken,

$\beta(0) = \alpha(c \cdot 0) = \alpha(0) = P$

ve

$\beta'(t) = c\alpha'(ct)$ iken,

$\beta'(0) = c\alpha'(c.0) = \beta'(0) = c\alpha'(0) = cv_P$

dir. O halde $\beta(0) = P$ ve $\beta'(0) = cv_P$ başlangıç şartlarını sağlayan bir tek

$t \longrightarrow \beta(t)$ geodeziği mevcut olacağından bu geodezik eğri

$\beta(t) = \alpha(ct)$ dir.

Teorem 3.1.16: M bir yüzey ve $P \in \mathrm{M}$, $\overrightarrow{v_P} \in \mathrm{T_M}(P)$ olsun.

$$\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$$

eğrisi P den geçen ve başlangıç hızı $\overrightarrow{v_P}$ olan bir maksimal geodezik eğri olsun.

$$\beta : \tilde{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathrm{M}$$

eğrisinin bir $t_0 \in \tilde{\mathrm{I}}$ için $\beta(t_0) = P$ ve $\beta'(t_0) = \overrightarrow{v_P}$ şartlarına uyan bir geodezik olması için $\beta(t) = \alpha(t - t_0)$, $\forall t \in \tilde{\mathrm{I}}$ olmalıdır.

İspat:

M yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri α olsun. α geodezik olduğundan

$$\alpha''(t) + \langle \alpha'(t), D_{\alpha'(t)} \mathrm{N} \rangle \mathrm{N}_{\alpha(t)} = 0$$

dır. Burada $\mathrm{N}_{\alpha(t)}$ ile $\alpha(t) \in M$ noktasında M nin birim normal vektörü gösterilmektedir.

$$\begin{cases} \alpha(0) = P \\ \alpha'(0) = v_P \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$ eğrisidir. Aynı şekilde bir diğer $\beta : \tilde{\mathrm{I}} \longrightarrow \mathrm{M}$ eğrisi de M üzerinde geodezik ise,

$$\beta''(t) + \langle \beta'(t), D_{\beta'(t)} \mathrm{N} \rangle \mathrm{N}_{\beta(t)} = 0$$

dır ve bu eğrinin başlangıç koşulları,

$$\begin{cases} \beta(t_0) = P \\ \beta'(t_0) = v_P \end{cases}$$

olduğundan diferensiyel denklemin çözümü tek olup bu çözüm

$\beta(t) = \alpha(t - t_0)$ dır. Gerçekten de,

$\beta'(t) = \alpha'(t - t_0)$ ve $\beta''(t) = \alpha''(t - t_0)$

olduğundan $\beta''(t) + \langle \beta'(t), D_{\beta'(t)} \mathrm{N} \rangle \mathrm{N}_{\beta(t)} = 0$ diferensiyel denkleminde β' ve β'' değerleri yerine yazılırsa,

$$\alpha''(t - t_0) + \langle \alpha'(t - t_0), D_{\alpha'(t-t_0)} \mathrm{N} \rangle \mathrm{N}_{\alpha(t-t_0)} = 0$$

elde edilir. O halde $\forall t \in \mathrm{I}$ için,

$$\beta(t) = \alpha(t - t_0) \Rightarrow \beta'(t) = \alpha'(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \beta'(t_0) = \alpha'(t_0 - t_0) = \alpha'(0) = v_P$$

ve

$$\beta(t) = \alpha(t - t_0) \Rightarrow \beta(t_0) = \alpha(t_0 - t_0) = \alpha(0) = P$$

dir. O halde

$\beta(t_0) = P$, $\beta'(t_0) = v_P$

ve

$\beta''(t) + \langle \beta'(t), D_{\beta'(t)}\mathrm{N}\rangle \mathrm{N}_{\beta(t)} = 0$

başlangıç değer probleminin çözümü bir tek olduğundan bu çözüm

$t \longrightarrow \beta(t) = \alpha(t - t_0)$ dir.

Tanım 3.1.8.(Periyodik Geodezik)

M bir yüzey ve α bu yüzeyde bir geodezik eğri olsun. Her t için,

$$t_1 < t_2\ ,\ \alpha(t_1 + t) = \alpha(t_2 + t)$$

eşitliğini sağlayan t_1 ve t_2 sayıları varsa, bu durumda bir en küçük δ sayısı vardır öyle ki $\forall t$ için,

$$\alpha(t + \delta) = \alpha(t)$$

dir. Bu koşulları sağlayan α eğrisine bir kapalı geodezik ya da δ periyodu ile bir periyodik geodezik denir.

Teorem 3.1.17: M bir yüzey ve M üzerinde

$$\beta : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$$

$t_0 \in \mathrm{I}$, $t_0 \neq 0$ için, $\beta(t_0) = \beta(0)$ ve $\beta'(t_0) = \beta'(0)$

koşullarını sağlayan bir geodezik eğri olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathrm{I}$ için,

$\beta(t + t_0) = \beta(t)$

dir. Yani β eğrisi periyodiktir.

İspat:

M yüzeyi üzerindeki bir geodezik eğri $\beta : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$ için,

$$\beta''(t) + \langle \beta'(t), D_{\beta'(t)}\mathrm{N}\rangle \mathrm{N}_{\beta(t)} = 0 \qquad (3.1.28)$$

diferensiyel denklemi sağlanır. Ayrıca bu eğri için

$\beta(t_0) = \beta(0)\,, \beta'(t_0) = \beta'(0) \quad ; \; t_0 \in \mathrm{I}\,, t_0 \neq 0$

başlangıç koşulları sağlanmış olsun. Aynı başlangıç koşullarını sağlayan $\beta(t)$ den farklı bir geodezik eğri $\beta(t + t_0)$ olsun.

$$\beta(t + t_0) = \beta(t) \;\Rightarrow\; \beta'(t + t_0) = \beta'(t)$$
$$\Rightarrow\; \beta''(t + t_0) = \beta''(t)$$

değerleri (3.1.28) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\beta''(t + t_0) + \langle \beta'(t + t_0), D_{\beta'(t+t_0)}\mathrm{N}\rangle \mathrm{N}_{\beta(t+t_0)} = 0$$

olur ve aynı başlangıç koşulları $t = 0$ için,

$$\beta(t + t_0) = \beta(t) \;\Rightarrow \beta(t_0) = 0$$

$$\beta'(t + t_0) = \beta'(t) \Rightarrow \beta'(t_0) = \beta'(0)$$

sağlanır. Dolayısıyla (3.1.28) denkleminin başlangıç koşullarını sağlayan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$t \longrightarrow \beta(t + t_0) = \beta(t) \quad , \forall t \in \mathrm{I}$$

dır. O halde β eğrisi periyodiktir.

Tanım 3.1.9. (Geodezik Tamlık)

M bir yüzey olsun.

$\alpha : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{M}$

maksimal geodezik eğrisi için $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ ise M yüzeyine geodezik olarak tamdır denir.

Örnek 3.1.12:

$\mathrm{M} = \mathrm{S}^2$ küresi üzerinde geodezikler

$\alpha(\boldsymbol{t}) = (\cos \boldsymbol{at}, \sin \boldsymbol{at}, 0)$, $0 < \boldsymbol{t} \leq \pi$

dir. Burada $\mathrm{I} = \{\mathrm{t} \mid 0 < \boldsymbol{t} \leq \pi\}$ dir. $\mathrm{I} \neq \mathbb{R}$ olduğundan S^2 küresi geodezik olarak tam değildir.

Örnek 3.1.12:

$\mathbb{R}^3$ te $x_3 > 0$ olmak üzere ${x_3}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2$ konisi üzerinde ana doğrular birer geodeziktir. Bu geodezikler,

$x_2 = mx_1$

doğrularının x_3 −ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilir. Bu geodezikler için parametrik ifadeler;

$$\begin{cases} x_1 = \boldsymbol{t} \\ x_2 = m\boldsymbol{t} \\ x_3 = (1 + m^2)\boldsymbol{t}^2 \end{cases}$$

dir. Burada $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dır. O halde $\mathrm{I} \neq \mathbb{R}$ dir.

Dolayısıyla ${x_3}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2$ konisi geodezik olarak tam değildir.

Örnek 3.1.15:

$\mathbb{R}^3$ te ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$ silindiri üzerinde

$\alpha(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{a} \cos \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a} \sin \boldsymbol{t}, \boldsymbol{bt})$

helis eğrileri geodeziklerdir. $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$ dir yani bu eğrilerin tanım bölgesi $\mathbb{R}$ olduğundan ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$ silindiri geodezik olarak tamdır.

Teorem 3.1.18: M bir yüzey olsun. $p, q \in \mathrm{M}$ olmak üzere α, M de p den q ya bir en kısa eğri parçası ise α bir geodeziktir.

İspat:

ρ asıl uzaklığını, M de p den q ya bütün eğri parçalarının boylarının en büyük alt sınırı olarak tanımlayalım. $\alpha : [a,b] \longrightarrow$ M eğrisi p den q ya geodezik olmayan bir eğri parçası olsun. O zaman $L(\alpha) > \rho(p,q)$ dır. Eğer α bir geodezik değilse en az bir t_0 için $\alpha''(t_0)$ ivmesi sıfırdan farklıdır. α'' sürekli olduğundan t_0 noktaları civarında sıfırdan farklıdır. Bu durumda $t_0 < b$ kabul edilebilir. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\alpha(t_0 + \varepsilon)$, $\alpha(t_0)$ ın bir komşuluğundadır ve $\alpha''(t_0) \neq 0$ olduğundan t_0 dan $t_0 + \varepsilon$ a α nın parçası bir geodezik değildir. Ancak $L_{t_0,t_0+\varepsilon}$ uzunluğu kesinlikle $\alpha(t_0 + \varepsilon)$ dan $\alpha(t_0)$ a olan asıl uzunluktan daha büyüktür. Bu durumda üçgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= L_{a,t_0} + L_{t_0,t_0+\varepsilon} + L_{t_0+\varepsilon,b} \\ &> \rho\big(p, \alpha(t_0)\big) + \rho\big(\alpha(t_0), \alpha(t_0+\varepsilon)\big) + \rho(\alpha(t_0+\varepsilon), b) \\ &\geq \rho(p,q) \quad \text{dır.} \end{aligned}$$

Teorem 3.1.19: M geodezik olarak tam olan bir yüzey olsun. $p, q \in$ M olmak üzere M de p den q ya bir en kısa geodezik parça vardır.

3.2. Metrik Uzaylarda Geodezikler

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere $p, q \in$ X için $d(p,q) = |p - q|$ olarak tanımlanacaktır.

Tanım 3.2.1. (Geodezik Yol)

X bir metrik uzay olsun. Bir $\gamma : [a,b] \longrightarrow$ X dönüşümü için,

$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |t_1 - t_2|$; $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$

koşulu sağlanıyorsa yani γ uzaklığı koruyorsa γ ya bir geodezik yol ya da kısaca geodezik denir. Burada d, X üzerindeki metrik olmak üzere

$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$ dir.

γ geodezik yolunun boyu ise $L(\gamma)$ ile gösterilir.

$$L_X(\gamma) = L(\gamma) = sup \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})|$$

dir ki burada supremum $\sigma = \gamma(t_i)_{i=0,1,\dots,n} \in [a, b]$ alt bölünme cümlesi üzerinden alınır.

Tanım 3.2.2.(Geodezik Çizgi)

X bir metrik uzay olmak üzere

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow X$$

uzaklığı koruyan dönüşümüyle birlikte γ ya X de bir geodezik çizgi denir.

Örnek 3.2.1:

p ve q bir küre üzerinde farklı iki nokta olsun. p ve q yu birleştiren kısa büyük çember yayı p den q ya en yakın yoldur. Yani p den q ya bir geodezik yoldur.

Genel anlamda bir yüzey üzerindeki her farklı iki noktayı birleştiren bir en kısa yol bulunmayabilir.

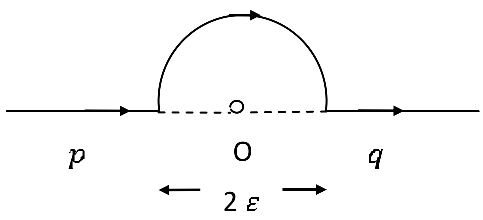
Aşağıdaki örnekle bu durum daha anlaşılır bir şekilde açıklanabilir.

Örnek 3.2.2:

Orijini çıkarılmış bir xy –düzleminide içine alan bir M yüzeyini göz önüne alalım. Yüzey üzerinde $p = (-1,0)$ noktasından $q = (1,0)$ noktasına en kısa yol yoktur. En kısa yol iki noktayı birleştiren doğru parçası olmalıdır. Ancak bu doğru parçası, yüzeyin bir parçası olan orijin çıkarıldığından tam olarak yüzey üzerinde yatmaz. O halde bu iki noktayı birleştiren geodezik yol $1-\varepsilon$ uzunluğundaki iki doğru parçası ve yarıçapı ε olan bir yarı çemberden meydana gelir. Böylece yarı çember yayının uzunluğu $\pi\varepsilon$ olmak üzere toplam uzunluk,

$2(1-\varepsilon)+\pi\varepsilon=2+(\pi-2)\varepsilon$

dır. Bu yol uzunluğu 2 den daha büyüktür. Ancak yeterince küçük ε alınarak bu uzunluk 2 ye yakın yapılabilir. Yüzey üzerinde p ve q nun birleşimleri olan eğrilerin en büyük alt sınırı 2 dir. Ancak M yüzeyinde p ve q yu birleştiren eğrilerde bu alt sınıra eşit uzunlukta olan eğri yoktur. (Şekil 3.1)



Şekil 3.1. Geodezik Yol

Tanım 3.2.3.(Geodezik Parça)

X bir metrik uzay olsun. X de bir geodezik yolun görüntüsüne yine X de bir geodezik parça denir.

Eğer bir $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathrm{X}$ yolu iki x, y noktasını birleştirirse, $\gamma([a,b])$ geodezik parçalarının bu iki noktayı birleştirdiği söylenebilir.

Genel olarak x, y bir X metrik uzayında iki noktaysa bu noktaları birleştiren ya hiç geodezik parça yoktur ya da bir veya birden fazla geodezik parça onları birleştirebilir.

Belirsizlikleri ortadan kaldırmak için $\gamma([a, b])$ geodezik parçası $[x, y]$ ile gösterilecektir.

Geodezik parçanın doğal parametrizasyonu; bir $[x_0, x_1]$ geodezik parçası üzerindeki noktalar $[0,1]$ aralığı ile doğal olarak parametrelendirilecektir. Bu parametrizasyonda $[x_0, x_1]$ üzerinde x_t veya $(1 - t)x_0 + tx_1$ ile gösterilen nokta, x_0 noktasının $t|x_0 - x_1|$ uzaklığında bulunur.

Lemma 3.2.1: X bir metrik uzay ve $[x, y]$ bu uzayda bir geodezik parça,

$\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow X$ ve $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow X$

görüntüleri $[x, y]$ olan iki geodezik olsun. Bu durumda $\mathbb{R}$ nin iki $[a_1, b_1]$ ve $[a_2, b_2]$ aralığı aynı uzunluktadır ve bir tek $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki

$\forall t \in [a_2, b_2]$ için, $\gamma_2(t) = \gamma_1(t + \alpha)$ dır. (γ_1 ve γ_2 aynı uzunluktadır.)

İspat:

Bir geodezik dönüşüm birebir olduğundan, γ_1 in bir

$\gamma_1{}^{-1} : [x, y] \longrightarrow [a, b]$

ile gösterilen inversi vardır öyle ki $\gamma_1{}^{-1}$,

$\gamma_1{}^{-1} \circ \gamma_2 = I_d$

bağıntısını sağlar. Geodezik yollar uzaklığı koruduğundan, $\gamma_1{}^{-1} \circ \gamma_2$ dönüşümü $\mathbb{R}$ nin aralıkları arasında bir dönüşümdür.

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma_2} [x,y] \xrightarrow{\gamma_1^{-1}} [a,b]$$

$\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 = \mathrm{I}_d$ dir.

$(\gamma_1 \circ \gamma_1^{-1}) \circ \gamma_2 = (\gamma_1 \circ \mathrm{I}_d)$

$\Rightarrow \mathrm{I}_d \circ \gamma_2 = \gamma_1 \circ \mathrm{I}_d$

$\Rightarrow \gamma_2 = \gamma_1$

dir. O halde $\forall \boldsymbol{t} \in [a_2, b_2]$ için $\gamma_2(\boldsymbol{t}) = \gamma_1(\boldsymbol{t} + \alpha)$ olan bir tek $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır. Yani γ_1 ve γ_2 aynı uzunluktadır.

Sonuç 3.2.1: Geodezik çizgi için de benzer bir durum vardır. Yani $\gamma_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ ve $\gamma_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ geodezik çizgileri aynı görüntüye sahiptir gerek ve yeter şart bir $\alpha \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\gamma_2(\boldsymbol{t}) = \gamma_1(\boldsymbol{t} + \alpha)$; $\forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$ dir.

Lemma 3.2.1 den aşağıdaki tanım yapılabilir.

Tanım 3.2.4.(Geodezik Parçanın Uzunluğu)

Bir X metrik uzayında bir $[x, y]$ geodezik parçanın uzunluğu, X metrik uzayında görüntüsü $[x, y]$ olan bir keyfi geodezik yolun uzunluğu olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.1: X bir metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathrm{X}$ bir geodezik yol olsun. Bu durumda γ yay uzunluğuyla parametrelendirilir.

İspat:

u ve v, $a \le u \le v \le b$ koşulunu sağlayan iki reel sayı olsun. $[u, v]$ aralığının herhangi bir $\sigma = (\boldsymbol{t}_i)_{i=1,2,\dots,n}$ alt bölmesi için,

$$V_\sigma(\gamma|_{[u,v]}) = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| = \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = v - u$$

dır. Bu nedenle

$$L(\gamma|_{[u,v]}) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma|_{[u,v]}) = v - u$$

dır. Bu ise γ nın yay uzunluğuyla parametrelendirildiğini gösterir.

Teorem 3.2.2: X bir metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş bir yol olsun. Aşağıdaki üç ifade birbirine denktir.

i) γ bir geodeziktir.

ii) $a \leq u \leq v \leq b$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için,

$|\gamma(a) - \gamma(v)| = |\gamma(a) - \gamma(u)| + |\gamma(u) - \gamma(v)|$ dir.

iii) $L(\gamma) = |\gamma(a) - \gamma(b)|$ dir.

İspat:

i)$\Rightarrow$ ii) için;

γ bir geodezik olsun. Bu durumda $a \leq u \leq v \leq b$ koşuluna uyan $\forall u, v$ için,

$$|\gamma(a) - \gamma(v)| = v - a = v - u + u - a = |\gamma(a) - \gamma(u)| + |\gamma(u) - \gamma(v)|$$

dir. Dolayısıyla γ bir geodezik ise $a \leq u \leq v \leq b$ yi sağlayan $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için,

$|\gamma(a) - \gamma(v)| = |\gamma(a) - \gamma(u)| + |\gamma(u) - \gamma(v)|$ dir.

ii)$\Rightarrow$ iii) için;

$a \leq u \leq v \leq b$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için,

$$|\gamma(a) - \gamma(v)| = |\gamma(a) - \gamma(u)| + |\gamma(u) - \gamma(v)|$$

sağlansın. $\sigma = (t_i)_{i=1,2,\dots,n}$ $[a,b]$ aralığının bir alt bölmesi olsun. ii) koşulu $n-2$ defa uygulanırsa;

$$V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| = |\gamma(a) - \gamma(b)|$$

elde edilir. Dolayısıyla bütün σ alt bölmelerinin supremumu olarak

$L(\gamma) = |\gamma(a) - \gamma(b)|$

elde edilir.

Son olarak iii)$\Rightarrow$ i) ;

Bütün $a \leq u \leq v \leq b$ değerleri için,

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= |\gamma(a) - \gamma(b)| \\
&\leq |\gamma(a) - \gamma(u)| + |\gamma(u) - \gamma(v)| + |\gamma(v) - \gamma(b)| \\
&\leq |\gamma(a) - \gamma(u)| + L(\gamma|_{[u,v]}) + |\gamma(v) - \gamma(b)| \\
&\leq L(\gamma|_{[a,u]}) + L(\gamma|_{[u,v]}) + L(\gamma|_{[v,b]}) \\
&= L(\gamma)
\end{aligned}$$

dır. Buradan $[a,b]$ deki her u ve v için, $|\gamma(u) - \gamma(v)| = L(\gamma|_{[u,v]})$ elde edilir.

Ayrıca γ yay uzunluğuyla parametrelendirildiğinden

$L(\gamma|_{[u,v]}) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$

dir ve bu $|\gamma(u) - \gamma(v)| = |u - v|$ anlamına gelir. Dolayısıyla γ bir geodeziktir.

Tanım 3.2.5.(Afin Geodezik)

X bir metrik uzay ve $\gamma : [a,b] \longrightarrow X$ bir geodezik yol olsun. Eğer γ bir sabit yol ise ya da

$$\psi(x) : [a,b] \longrightarrow [c,d]\ ,\ \psi(x) = \left(\frac{(d-c)x+(bc-ad)}{(b-a)}\right)$$

olmak üzere yani ψ, $[a,b]$ ve $[c,d]$ aralıkları arasında bir tek homeomorfizm olmak üzere $\gamma = \gamma' \circ \psi$ olacak şekilde bir diğer

$\gamma' : [c,d] \longrightarrow \mathrm{X}$ geodezik yolu varsa γ ya bir afin olarak yeniden parametrelendirilmiş geodezik ya da kısaca afin geodezik denir.

Teorem 3.2.3: X bir metrik uzay ve $\gamma : [0{,}1] \longrightarrow \mathrm{X}$ afin geodezik ise $0 \leq u \leq v \leq 1$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in \mathbb{R}$ için,

$|\gamma(u) - \gamma(v)| = L(\gamma)|u - v|$ dir.

İspat:

Yay uzunluğuyla parametrelendirilen yollar için

$|\gamma(u) - \gamma(v)| \leq L(\gamma)|u - v|$

yazılabilir. $\gamma' : [c,d] \longrightarrow \mathrm{X}$ geodezik yolu ve bir $\psi(x) : [0{,}1] \longrightarrow [c,d]$ dönüşümü ile X de bir $\gamma = \gamma' \circ \psi$ geodezik yolu

$0 \leq u \leq v \leq 1$ koşulunu sağlayan bütün u ve v değerleri için;

$\left|\gamma'\big(\psi(u)\big) - \gamma'\big(\psi(v)\big)\right| = L\big(\gamma|_{[\psi(u),\psi(v)]}\big)$

yazılır. Böylece

$|\gamma(u) - \gamma(v)| = L(\gamma)|u - v|$ elde edilir.

Teorem 3.2.4: X bir metrik uzay olsun. $\gamma : [0{,}1] \longrightarrow \mathrm{X}$ bir yol ve K, $[0{,}1]$ deki $\forall u, v$ için $|\gamma(u) - \gamma(v)| = K|u - v|$ eşitliğini sağlayan ve negatif olmayan bir reel sayı olsun. Bu durumda γ bir afin geodeziktir ve $K = L(\gamma)$ dır.

İspat:

$|\gamma(u)-\gamma(v)|=K|u-v|$

için, $K=0$ ise γ bir sabit yoldur ve Tanım 3.2.6 gereğince bir afin geodeziktir.

Kabul edelim ki $K>0$ olsun. $\psi(x):[0,K]\longrightarrow[0,1]$ dönüşümü $\forall u\in[0,K]$ için, $\psi(u)=\frac{u}{K}$ olarak tanımlanan bir afin dönüşüm ve $\gamma':[0,1]\longrightarrow X$, $\gamma\circ\psi$ den oluşan dönüşüm olsun. Bu durumda $[0,K]$ aralığındaki $\forall u,v$ için;

$$|\gamma'(u)-\gamma'(v)|=|\gamma\circ\psi(u)-\gamma\circ\psi(v)|=\left|\gamma\left(\frac{u}{K}\right)-\gamma\left(\frac{v}{K}\right)\right|=|u-v|$$

dir. Buradan γ' bir geodeziktir. Dolayısıyla γ bir afin geodeziktir. Gerçektende γ' nin tanım cümlesinin $[0,K]$ aralığı olması $L(\gamma')=K$ anlamına gelir ve bu da $L(\gamma)=K$ eşitliğini verir.

Lemma 3.2.2: X bir metrik uzay $[x,y]$ ve $[y,z]$ bu uzayda iki geodezik parça olsun. $[x,y]\cup[y,z]$ birleşimi bir geodezik parçadır gerek ve yeter şart $|x-z|=|x-y|+|y-z|$ dir.

İspat:

γ_1 ve γ_2 sırasıyla görüntüleri $[x,y]$ ve $[y,z]$ olan X de iki geodezik yol olsun.

$\gamma=\gamma_1\circ\gamma_2$ ve $|x-z|=|x-y|+|y-z|$

olsun. Bu durumda $L(\gamma)=|x-z|$ olur. Bu ise γ nın bir geodezik olduğunu gösterir. Böylece $[x,y]\cup[y,z]$ birleşimi γ nın görüntüsü olup X de bir geodezik parçadır.

Tersine olarak, $[x, y] \cup [y, z]$ bir geodezik parça olsun. Bu durumda bu parça bir kapalı aralığın görüntüsündedir ki birebir olduğundan bu iki $[x, y]$ ve $[y, z]$ parçalarının kesişimleri y noktasıdır. Bu ise $[x, y] \cup [y, z]$ birleşiminin, görüntüleri sırasıyla $[x, y]$ ve $[y, z]$ olan iki γ_1 ve γ_2 geodezik yolun birleşimi olan bir γ geodezik yolunun görüntüsü olduğu anlamına gelir. Böylece,

$|x-y| = L(\gamma_1)$ ve $|y-z| = L(\gamma_2)$ için,

$|x-y| + |y-z| = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) = L(\gamma) = |x-z|$

dir. O halde $[x, y] \cup [y, z]$ bir geodezik parça ise

$|x-z| = |x-y| + |y-z|$ dir.

Tanım 3.2.5:

Bir X metrik uzayında x, y, z noktaları verilsin. Eğer bu üç nokta farklı ikililer ile ifade edildiğinde $|x-z| = |x-y| + |y-z|$ ise y noktası x ve z nin arasındadır denir. Kısaca "xyz" ile gösterilir.

Arasında olma bağıntısı simetriktir. Yani xyz ise aynı zamanda zyx de denilebilir. Aşağıdaki teoremle arasında olma bağıntısının geçişme özelliği incelenecektir.

Teorem 3.2.5: X bir metrik uzay ve $x, y, z, \boldsymbol{t}$ X in farklı ikili noktaları olsun. Bu durumda xyz ve $xz\boldsymbol{t}$ dir gerek ve yeter şart $xy\boldsymbol{t}$ ve $yz\boldsymbol{t}$ dir.

İspat:

xyz ve $xz\boldsymbol{t}$ olsun. y, x ve z nin ve z, x ve $\boldsymbol{t}$ nin arasında olduğundan;

$|x-y| + |y-z| = |x-z|$ ve $|x-z| + |z-\boldsymbol{t}| = |x-\boldsymbol{t}|$ dir.

$|x-\boldsymbol{t}| = |x-z| + |z-\boldsymbol{t}| = |x-y| + |y-z| + |z-\boldsymbol{t}|$

$\Rightarrow |x - \boldsymbol{t}| = |x - y| + \underbrace{|y - z| + |z - \boldsymbol{t}|}_{|y-t|}$

$\Rightarrow |x - \boldsymbol{t}| = |x - y| + |y - \boldsymbol{t}|$

yazılabilir. Bu y noktasının x ve $\boldsymbol{t}$ arasında olduğu anlamına gelir. Öte yandan,

$|x - \boldsymbol{t}| = |x - y| + |y - z| + |z - \boldsymbol{t}|$

$\Rightarrow |x - y| + |y - \boldsymbol{t}| = |x - y| + |y - z| + |z - \boldsymbol{t}|$

$\Rightarrow |y - \boldsymbol{t}| = |y - z| + |z - \boldsymbol{t}|$

dir. Bu ise z nin y ve $\boldsymbol{t}$ noktalarının arasında olduğunu gösterir.

Tersine y, x ve $\boldsymbol{t}$ nin ve z, y ve $\boldsymbol{t}$ nin arasında olsun. Bu durumda;

$|x - \boldsymbol{t}| = |x - y| + |y - \boldsymbol{t}|$

ve

$|y - \boldsymbol{t}| = |y - z| + |z - \boldsymbol{t}|$ dir.

$|x - \boldsymbol{t}| = |x - y| + |y - \boldsymbol{t}| = |x - y| + |y - z| + |z - \boldsymbol{t}|$

$\Rightarrow |x - \boldsymbol{t}| = \underbrace{|x - y| + |y - z|}_{|x-z|} + |z - \boldsymbol{t}|$

$\Rightarrow |x - \boldsymbol{t}| = |x - z| + |z - \boldsymbol{t}|$

dir. Buradan z noktası x ve $\boldsymbol{t}$ nin arasındadır. Diğer yandan,

$|x - \boldsymbol{t}| = |x - y| + |y - z| + |z - \boldsymbol{t}|$

$\Rightarrow |x - z| + |z - \boldsymbol{t}| = |x - y| + |y - z| + |z - \boldsymbol{t}|$

$\Rightarrow |x - z| = |x - y| + |y - z|$

dir. Dolayısıyla y noktası x ve z nin arasındadır.

Arasında olma bağıntısının geçişme özelliği genel olarak doğru olmayabilir. Bu durum şu örnekle görülebilir.

Örnek 3.2.3:

S^2 üzerinde bir büyük çember göz önüne alınsın. Bu çember üzerinde $x, y, z, \boldsymbol{t}$ farklı noktalar olsun. Eğer xyz ve $yz\boldsymbol{t}$ ise bu durumda $xz\boldsymbol{t}$ olduğu söylenemez. Çünkü x noktasını $\boldsymbol{t}$ ye birleştiren çember yayı z noktasını içermez. O halde xyz ve $yz\boldsymbol{t}$ iken $xz\boldsymbol{t}$ olamaz. Dolayısıyla arasında olma bağıntısının geçişme özelliği çember üzerindeki bütün noktalar için doğru değildir.

Teorem 3.2.6: X bir metrik uzay, $x \in$ X bir nokta ve r, bir pozitif reel sayı olsun. y, z noktaları merkezi x, yarıçapı r olan bir açık (veya kapalı) $B(x, r)$ yuvarının içinde ise ve $\gamma : [a, b] \longrightarrow$ X y, z noktalarını birleştiren bir geodezik yol ise o zaman γ nın görüntüsü, merkezi x ve yarıçapı $2r$ olan bir açık (veya kapalı) $B(x, 2r)$ yuvarı tarafından kapsanır.

İspat:

$y, z \in B(x, r)$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden;

$|y - z| \leq |y - x| + |z - x| < 2r$

yazılabilir. Ayrıca X bir metrik uzay olduğundan y ve z noktalarını birleştiren bir geodezik yol $\gamma : [a, b] \longrightarrow$ X olsun. Bu geodeziğin görüntüsünün $B(x, 2r)$ yuvarında kapsandığı gösterilecektir.

$[a, b]$ kapalı aralığındaki bir $\boldsymbol{t}$ noktası için $\gamma(\boldsymbol{t}) \notin B(x, 2r)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$|y - \gamma(\boldsymbol{t})| \geq |x - \gamma(\boldsymbol{t})| - |x - y| > r$

$|z - \gamma(\boldsymbol{t})| \geq |x - \gamma(\boldsymbol{t})| - |x - z| > r$

yazılabilir. Buradan

$|y-\gamma(t)|+|z-\gamma(t)|=|y-z|>2r$

dir. Bu bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup $\forall t \in [a,b]$ için $\gamma(t) \in B(x,2r)$ dir. Dolayısıyla γ geodeziğinin görüntüsü $B(x,2r)$ yuvarı tarafından kapsanır.

3.3. Geodeziklerin Limitleri

Teorem 3.3.1.(Geodezik Yolların Limitleri)

X bir metrik uzay ve $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ için $\gamma_n : [a,b] \longrightarrow$ X bir geodezik (veya her biri ayrı bir afin geodezik) olsun. Eğer (γ_n) dizisi bir $\gamma : [a,b] \longrightarrow$ X dönüşümüne noktasal yakınsar ise γ bir geodeziktir (veya afin geodeziktir).

İspat:

$n = 1,2,\ldots$ için (γ_n) dizisi afin geodeziklerin dizisi olduğundan $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için

$|\gamma_n(t_1)-\gamma_n(t_2)|=|t_1-t_2|$

dir. (γ_n) dizisi γ dönüşümüne noktasal yakınsak olsun. Uzaklık fonksiyonu sürekli olduğundan;

$\lim_{n\to\infty}|\gamma_n(t_1)-\gamma_n(t_2)|=|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)|=|t_1-t_2|$

yazılabilir. Dolayısıyla $|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)|=|t_1-t_2|$ olup γ dönüşümü bir geodeziktir.

Teorem 3.3.2: X bir kompakt metrik uzay ve $\forall n \geq 0$ için $\gamma_n : [a,b] \longrightarrow$ X bir afin geodezik olsun. Bu durumda $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisi bir afin geodeziğe düzgün yakınsayan bir alt diziye sahiptir.

İspat:

X bir kompakt metrik uzay olduğundan X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir. Diğer yandan $\forall n \geq 0$ için

$L(\gamma_n) = |\gamma_n(a) - \gamma_n(b)|$

yazılabilir. X kompakt olduğundan kapalı ve sınırlıdır. O halde $|\gamma_n(a) - \gamma_n(b)|$ değeri sonludur. Dolayısıyla $\left(L(\gamma_n)\right)_{n\geq 0}$ dizisi n den bağımsız olan bir ε sabitiyle yukarıdan sınırlandırılır. O halde $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisinin bir γ yoluna düzgün yakınsayan bir alt dizisi vardır ve Teorem 3.3.1 gereğince bu γ bir afin geodezik yoldur.

Teorem 3.3.3: X bir metrik uzay ve $\forall n \geq 0 \in \mathbb{Z}$ için $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow X$ bir afin geodezik olsun. $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisi bir $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ afin geodeziğine noktasal yakınsar ise bu yakınsama düzgündür.

İspat:

(γ_n) dizisinin γ geodeziğine yakınsamasının düzgün olmadığını kabul edelim. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı bulunur öyle ki $\forall n_0 \geq 0$ tamsayısı için bir $n \geq n_0$ tamsayısı vardır ve $[0,1]$ de bir $\boldsymbol{t_n} \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki

$|\gamma_n(\boldsymbol{t_n}) - \gamma(\boldsymbol{t_n})| \geq \varepsilon$

dir. Bu nedenle $\boldsymbol{i} \to \infty$ için bir $(n_i)_{i\geq 0}$ tamsayılarının dizisi bulunabilir ve $[0,1]$ deki reel sayıların bir $\left(\boldsymbol{t}_{n_i}\right)_{i\geq 0}$ dizisi $\forall n_i \geq 0$ için,

$\left|\gamma_{n_i}\left(\boldsymbol{t}_{n_i}\right) - \gamma\left(\boldsymbol{t}_{n_i}\right)\right| \geq \varepsilon$

eşitsizliğini sağlar. $[0,1]$ aralığı kompakt olduğundan $i \to \infty$ iken $\left(\boldsymbol{t}_{n_i}\right)$ dizisi $[0,1]$ de bazı $\boldsymbol{t}$ noktalarına yakınsar. $\forall i \geq 0$ için γ_{n_i} yolu parametre değişimi olmaksızın bir geodezik yoldur. Bu nedenle

$L\left(\gamma_{n_i}\right) = \left|\gamma_{n_i}(0) - \gamma_{n_i}(1)\right|$

yazılabilir. $i \to \infty$ iken $\left(\gamma_{n_i}\right)_{i\geq 0}$ dizisi γ ya noktasal yakınsadığından, $\left(L\left(\gamma_{n_i}\right)\right)_{i\geq 0}$ dizisi $L(\gamma) = |\gamma(0) - \gamma(1)|$ e yakınsar.

$M = L(\gamma) + 1$ olsun. Bu durumda bir $N > 0$ sayısı vardır öyle ki $\forall n_i \geq N$ için

$L\left(\gamma_{n_i}\right) \leq M$, $|\gamma_n(t) - \gamma(t)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ ve $\left|t_{n_i} - t\right| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$

koşulları sağlanır. Böylece $\forall n_i \geq N$ için,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \left|\gamma_{n_i}\left(t_{n_i}\right) - \gamma\left(t_{n_i}\right)\right| \\
&\leq \left|\gamma_{n_i}\left(t_{n_i}\right) - \gamma_{n_i}(t)\right| + \left|\gamma_{n_i}(t) - \gamma(t)\right| + \left|\gamma(t) - \gamma\left(t_{n_i}\right)\right| \\
&= L\left(\gamma_{n_i}\right)\left|t_{n_i} - t\right| + \left|\gamma_{n_i}(t) - \gamma(t)\right| + L\left(\gamma_{n_i}\right)\left|t_{n_i} - t\right| \\
&= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup (γ_n) dizisi γ ya düzgün yakınsar.

3.4. Geodezik Metrik Uzaylar

Tanım 3.4.1.(Geodezik Uzay)

X bir metrik uzay olsun. X de herhangi iki noktayı birleştiren bir geodezik yol varsa X uzayına geodezik metrik uzay ya da kısaca geodezik uzay denir.

Tanım 3.4.2.(Uzunluk Uzayı)

X bir metrik uzay olsun. $\forall x, y \in$ X için γ x ve y yi birleştiren yolların cümlesi olmak üzere

$$|x - y| = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

ile tanımlanan metriğe X üzerinde bir uzunluk metriği denir. Bu uzunluk metriği ile birlikte X uzayına bir uzunluk uzayı adı verilir.

Örnek 3.4.1:

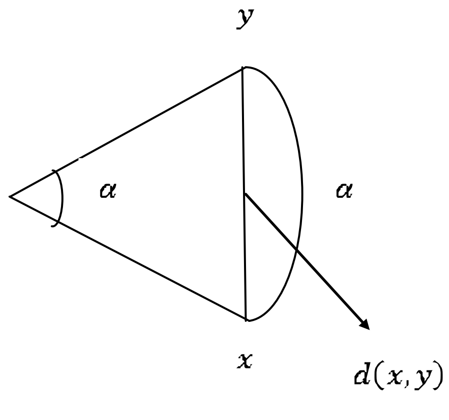
$\mathbb{R}^3$ de Öklid metriğini ele alalım. S^2 nin $\mathbb{R}^3$ deki Öklid metriğinden indirgediği metriği d ile gösterelim. Burada d , Öklid metriğinin S^2 ye kısıtlanmışıdır. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in S^2$ olsun. S^2 nin x, y den geçen büyük çemberi üzerindeki xy −yay uzunluğu α ile gösterilsin (Şekil 3.2).

$d(x, y) = 2\sin\frac{\alpha}{2} < \alpha \leq L(\gamma)$

$inf L(\gamma) = \alpha > d(x, y)$

$\Rightarrow inf L(\gamma) \neq d(x, y)$

dir. Dolayısıyla (S^2, d) bir uzunluk uzayı değildir. Ancak S^2 de $\rho(x. y) = \alpha$ ile tanımlanan ρ asıl metriği ile birlikte (S^2, ρ) bir uzunluk uzayıdır.



Şekil 3.2. Uzunluk uzayı

Teorem 3.4.1: Bir geodezik uzay bir uzunluk uzayıdır.

İspat:

X bir geodezik uzay olsun. x, y bu uzayda iki keyfi nokta ve $\gamma : [a, b] \longrightarrow$ X , x ve y yi birleştiren bir geodezik yol olsun.

$|a-b| = |x-y|$

dir ve γ yay uzunluğuyla parametrelendirildiğinden $|a-b| = L(\gamma)$ dır. Böylece

$|x-y| = L(\gamma)$

dır. Dolayısıyla Tanım 3.4.2 gereğince X geodezik uzayı bir uzunluk uzayıdır.

Örnek 3.4.2: $3-$boyutlu Öklid uzayda herhangi bir kapalı yüzey bir geodezik uzaydır. Yüzey üzerindeki keyfi iki nokta bir geodezik parçayla birleştirilebilirdir.

Örnek 3.4.3:

Orijini çıkarılmış bir $xy-$düzlemi bir metrik uzaydır ancak bir geodezik uzay değildir.

$x = (-1{,}0)$ ve $y = (0{,}1)$ noktaları için

$|\gamma(x) - \gamma(y)| = |x-y| = |-1-1| = 2$

olacak şekilde geodezik parça yoktur.

$L(\gamma) = |\gamma(x) - \gamma(y)| > 2$

olacak şekilde x ve y noktaları birleştirilebilir. Bu ise orijini çıkarılmış $xy-$düzleminin bir metrik uzay olduğunu ancak bir geodezik uzay olmadığını gösterir. Buna göre şu sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4.1: Geodezik uzaylar bir uzunluk uzayıdır ancak her uzunluk uzayı bir geodezik uzay değildir.

Örnek 3.4.4:

Normlu vektör uzayları (konveks alt cümleleri) bir geodezik uzaydır. $\mathbb{R}$ normlu vektör uzayı göz önüne alınırsa $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $x \neq y$ için γ dönüşümü,

$\gamma : [0, \|x-y\|] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longrightarrow \gamma(t) = \left(1 - \frac{t}{\|x-y\|}\right)x + \frac{t}{\|x-y\|}y$$

ile tanımlansın. $\forall t_1, t_2 \in [0, \|x-y\|]$ için

$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$

$= \left\| \left(\left(1 - \frac{t_1}{\|x-y\|}\right)x + \frac{t_1}{\|x-y\|}y \right) - \left(\left(1 - \frac{t_2}{\|x-y\|}\right)x + \frac{t_2}{\|x-y\|}y \right) \right\|$

$= \frac{1}{\|x-y\|} \|(t_2 - t_1)x + (t_1 - t_2)y\|$

$= \frac{1}{\|x-y\|} |t_1 - t_2| \cdot \|x-y\|$

$= |t_1 - t_2|$

$\Rightarrow |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |t_1 - t_2|$

olup bu, γ nın bir geodezik olduğunu gösterir. $\forall t \in [0, \|x-y\|]$ için

$t' = \frac{t}{\|x-y\|}$

olsun. $\mathbb{R}$ afin konveks olduğundan,

$\gamma(t) = (1 - t')x + t'y$, $\mathbb{R}$ dedir. Dolayısıyla γ nın görüntüsü $\mathbb{R}$ de x noktasını y ye birleştiren bir geodezik parça olup $\mathbb{R}$ normlu vektör uzayı bir geodezik uzaydır.

Teorem 3.4.2: X bir lokal kompakt uzunluk uzayı ve x, X in herhangi bir noktası olsun. X de $\forall y, z \in$ U noktalarını birleştiren bir geodezik yol var olacak şekilde x noktasının bir $U = U(x)$ komşuluğu vardır.

İspat:

x, X in bir noktası olsun. X lokal kompakt olduğundan pozitif bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı vardır öyle ki merkezi x ve yarıçapı $2r$ olan açık $B(x, 2r)$ yuvarı X de kompakt bir kapanışa sahiptir. $U = B(x, r)$ açık yuvar ve $y, z \in U$ iki keyfi nokta olsun. X bir uzunluk uzayı oluğundan y ve z noktalarını birleştiren X deki yolların bir $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} L(\gamma_n) = \lim_{n\to\infty} |\gamma_n(y) - \gamma_n(z)| = |\gamma(y) - \gamma(z)| = |y - z|$$

dir. Yani $n \longrightarrow \infty$ iken $L(\gamma_n)$, $|y - z|$ ye yakınsar. Böylece yeterince büyük n için $L(\gamma_n) < 2r$

elde edilir ve γ_n nin görüntüsü $\bar{B}(x, 2r)$ yuvarındadır. Bu kapanış kompakt olduğundan tamdır. Ayrıca $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisinin bir $\left(\gamma_{n_i}\right)_{i\geq 0}$ alt dizisi vardır öyle ki bu alt dizi bir γ yoluna yakınsar. Bu γ yolu y ve z noktalarını birleştirir ve $L(\gamma) = |y - z|$ dir. γ yay uzunluğuyla parametrelendirilmiştir ve dolayısıyla bir geodezik yoldur. γ nın görüntüsü de $B(x, 2r)$ dedir.

Tanım 3.4.3.(Has Uzay)

X bir metrik uzay olsun. X uzayının kapalı ve sınırlı her alt cümlesi kompakt ise X uzayına has uzay denir.

Teorem 3.4.3: X bir has uzunluk uzayı olsun. $\forall x, y \in$ X için X de bu noktaları birleştiren bir geodezik yol vardır.

İspat:

X bir gerçel uzunluk uzayı $x, y \in$ X verilsin.

$\alpha = inf\{L(\gamma) |\ \gamma$, X de x, y $noktalarını\ birleştiren\ bir\ yol\}$

ve $(\gamma_n)_{n\geq 0}$, $L(\gamma) \longrightarrow \alpha$ koşulunu sağlayan x ve y yi birleştiren yolların bir dizisi olsun. Teorem 3.3.2 gereğince $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisinin γ ya düzgün yakınsayan bir alt dizisi vardır. γ, x ve y yi birleştiren, uzunluğu

$L(\gamma) = |x - y|$

olan ve yay uzunluğuyla parametrelendirilmiş bir geodeziktir.

$L(\gamma) \leq \lim_{n\to\infty} inf L(\gamma_n) = \alpha$

dır. Ayrıca α nın tanımından $L(\gamma) \geq \alpha$ olup $L(\gamma) = \alpha$ dır. O halde X uzayında her x, y noktasını birleştiren bir geodezik X de vardır.

Teorem 3.4.4: Bir lokal kompakt X geodezik uzayı konvekstir.

İspat:

$x, y \in$ X noktalarını birleştiren yolların bir dizisi $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ olsun. Bu durumda $L(\gamma_n) \to |x - y|$ dir. x noktasının bir kompakt komşuluğunun yarıçapı r ve $m = \frac{r}{2|x-y|}$ olsun. (γ_{n_i}) , x noktasından çıkan ve uzunluğu $mL(\gamma_n)$ olan γ_n yollarının bir alt dizisi olsun ve P_i nin sonu γ_{n_i} nin noktasıyla sonlansın. Bu durumda,

$|x - P_i| \leq L(\gamma_{n_i}) = mL(\gamma_n) \to \frac{r}{2}$

dir. Bu nedenle P_i nin yaklaşık olarak tamamı $B(x, r)$ dedir. P_i bir P limit noktasına ve $|x - y| \leq \frac{r}{2}$ ile bir $P_\alpha \to P$ alt dizisine sahiptir. g_α , P_α dan y noktasına giden γ_α yollarının bir alt dizisi olsun. O zaman

$|P_\alpha - x| \leq L(g_\alpha)$, $|P_\alpha - y| \to |P - y|$,

$$L(g_\alpha) = (1-m)L(\gamma_\alpha) \to |x-y| - \frac{r}{2}$$

dir. Bu nedenle

$$L(P,y) \le |x-y| - \frac{r}{2}$$

dir. Bunu $|x-P| \le \frac{r}{2}$ ile birleştirince,

$$|x-P| + |P-y| \le |x-y|$$

elde edilir öyle ki $|x-P| + |P-y| = |x-y|$ dir ve P, x ve y nin arasındadır. Bu nedenle X uzayı konvekstir.

Teorem 3.4.5: X bir lokal kompakt uzunluk uzayı olsun. Aşağıdaki üç durum birbirine denktir.

i) X de kapalı yuvarlar kompakttır.

ii) X tamdır.

iii) Her yarı açık geodezik yol bir geodezik yola tamamlanabilir.
Yani herhangi $\gamma : [a,b) \longrightarrow X$ geodeziği $[a,b]$ kapalı aralığına genişletilebilir.

İspat:

i)⇒ii) için,

X uzayında $\bar{B}(x,2r)$ yuvarı kompakt olsun. $\bar{B}(x,2r)$ de x ve y noktalarını birleştiren geodezik yolların bir dizisi $\gamma_n : [a,b] \longrightarrow X$ olsun. Teorem 3.3.2 gereğince $(\gamma_n)_{n\ge 0}$ dizisinin bir γ geodeziğine düzgün yakınsayan bir $(\gamma_{n_i})_{i\ge 0}$ alt dizisi vardır. $\bar{B}(x,2r)$ yuvarı kapalı olduğundan $\gamma \in \bar{B}(x,2r)$ dir. Diğer yandan $r > 0$ için,

$$\lim_{i\to\infty} L(\gamma_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} |\gamma_{n_i}(a) - \gamma_{n_i}(b)| = |\gamma(a) - \gamma(b)| = |x - y| < 2r$$

dir. Yani yeterince büyük $i \geq 0$ için $L(\gamma_{n_i}) < 2r$ dir. Buradan $(\gamma_{n_i})_{i\geq 0}$ dizisi sınırlıdır ve yakınsaktır. O halde $(\gamma_{n_i})_{i\geq 0}$ dizisi bir Cauchy dizisidir ve $\boldsymbol{t} \in [a, b]$ için

$(\gamma_{n_i})_{i\geq 0} \to \gamma(\boldsymbol{t}) \in \bar{B}(x, 2r) \subset \mathrm{X}$

olup X uzayı tamdır.

ii)⇒iii) için,

X uzayı tam olsun. $x, y \in \mathrm{X}$ noktalarını birleştiren geodezik yolların bir $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisi bir $\gamma : [a, b) \longrightarrow \mathrm{X}$ yarı açık geodezik yola yakınsasın. Bu geodeziğin bir $[a, b]$ kapalı aralığına genişletilebildiğini gösterelim.

$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n(a) - \gamma_n(b)| = |\gamma(a) - \gamma(b)| = L(\gamma) = |x - y|$

dir. O halde $\lim_{n\to\infty} (\gamma_n(b)) = \gamma(b)$ olup X uzayı tam olduğundan

$\gamma(b) = y \in \mathrm{X}$ dir. Dolayısıyla bir $\gamma : [a, b) \longrightarrow \mathrm{X}$ geodeziği $[a, b] \longrightarrow \mathrm{X}$ geodeziğine genişletilebilir.

iii)⇒i) için,

$\gamma : [a, b) \longrightarrow \mathrm{X}$ geodeziği $[a, b] \longrightarrow \mathrm{X}$ geodeziğine genişletilebilir olsun. X de $x, y \in \bar{B}(x, 2r)$ kapalı yuvarı verilsin. $\bar{B}(x, 2r)$ kapalı yuvarında x ve y noktalarını birleştiren geodezik yollar $\gamma_n : [a, b] \longrightarrow \mathrm{X}$ olsun.

$\gamma : [a, b) \longrightarrow \mathrm{X}$ geodeziği, $[a, b] \longrightarrow \mathrm{X}$ geodeziğine genişletilebilir olduğundan

$$\lim_{i\to\infty} \left(\gamma_{n_i}(b)\right) = \gamma(b)$$

koşulunu sağlayan bir $(\gamma_{n_i})_{i\geq 0}$ alt dizisi vardır. Ayrıca $\bar{B}(x, 2r)$ kapalı yuvarı bütün limit noktalarını içerdiğinden

$$\lim_{i\to\infty} L(\gamma_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} |\gamma_{n_i}(a) - \gamma_{n_i}(b)| = |\gamma(a) - \gamma(b)| = |x - y| < 2r$$

yazılabilir. Böylece $(\gamma_{n_i})_{i\geq 0}$ alt dizisi $\gamma : [a, b) \longrightarrow X$ geodeziğine yakınsar. O halde keyfi seçilmiş $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahip olduğundan $\bar{B}(x, 2r)$ kapalı yuvarında her dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir. Dolayısıyla $\bar{B}(x, 2r)$ kapalı yuvarı kompakttır.

Sonuç 3.4.2: Bir uzayın geodezik uzay olması için gerek ve yeter şart bu uzayın tam ve lokal kompakt bir uzay olmasıdır.

Tanım 3.4.4.(Lokal Geodezik)

X bir metrik uzay ve $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$ bir yol olsun.

Eğer $\forall \boldsymbol{t} \in [a, b]$ için γ nın $\mathrm{I}(\boldsymbol{t}) \cap [a, b]$ ye kısıtlaması bir geodezik olacak şekilde içinde (yani $(\mathrm{I}(\boldsymbol{t}))^{0}$de) $\boldsymbol{t}$ yi kapsayan bir $\mathrm{I}(\boldsymbol{t})$ kapalı aralığı bulunabilirse γ ya bir lokal geodezik denir.

Tanım 3.4.5.(Doğru Metrik Uzay)

X bir metrik uzay olsun. Eğer X bir geodezik uzaysa ve X deki her geodezik parça bir doğru tarafından kapsanıyorsa X e bir doğru metrik uzay adı verilir.

Örnek 3.4.5:

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı bir doğru metrik uzaydır.

Tanım 3.4.6.(Tek Geodezik Uzay)

Bir X metrik uzayında her bir x, y nokta çiftini birleştiren bir tek geodezik parça varsa X uzayına tek geodezik uzay denir.

Örnek 3.4.6:

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayını ele alalım. Bu uzay bir tek geodezik uzay örneği olarak verilebilir.

Örnek 3.4.7:

Küre yüzeyi bir tek geodezik uzaydır. Küre yüzeyi üzerinde alınan keyfi $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2$ noktalarını birleştiren geodezik γ olsun. Kürenin geodezikleri büyük çember yaylarıdır. O halde γ geodeziği bir büyük çember yayıdır. Küre üzerinde alınan her keyfi $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2$ nokta çiftini birleştiren bir tek γ geodeziği vardır. Dolayısıyla küre yüzeyi bir tek geodezik uzaydır.

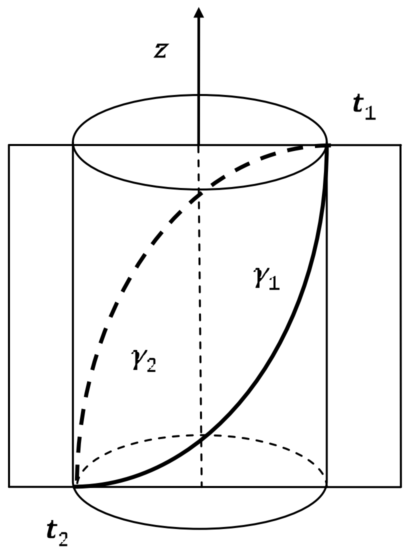
Örnek 3.4.8:

Silindir yüzeyi bir tek geodezik uzay değildir. xyz −koordinat sisteminde verilen bir silindir yüzeyi üzerinde alınan keyfi $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2$ noktalarını birleştiren geodezik, γ olsun.
γ geodeziği z −eksenine paralel ise $\boldsymbol{t}_1$ ve $\boldsymbol{t}_2$ noktalarını birleştiren γ geodeziği silindir üzerindeki doğrulardır ve bu iki noktayı birleştiren γ geodeziği tektir.
γ geodeziği xy −düzlemine paralel düzlemler tarafından ihtiva ediliyorsa $\boldsymbol{t}_1$ ve $\boldsymbol{t}_2$ noktalarını birleştiren γ geodeziği silindir üzerindeki çemberlerdir ve tektir.
Son olarak γ geodeziği bu iki koşulu da sağlamıyorsa o halde $\boldsymbol{t}_1$ ve $\boldsymbol{t}_2$ noktalarını birleştiren γ geodeziği silindir üzerindeki helis eğrileridir. Ancak bu eğriler tek olmayabilir. Silindir üzerinde z −ekseninden geçen bir düzlem ile silindirin arakesitinde alınan $\boldsymbol{t}_1$ ve $\boldsymbol{t}_2$ noktalarını ele alalım. $\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2$ −doğrusu z −eksenine dik

değilse ve z −eksenine paralel de değilse $\boldsymbol{t}_1$ ve $\boldsymbol{t}_2$ noktalarını birleştiren geodezikler γ_1 ve γ_2 olsun.

$L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ iken $\gamma_1 \neq \gamma_2$ dir. Yani γ_1 ve γ_2 nin boyları eşittir ancak farklı helis eğrileridir.(Şekil 3.3)

O halde silindir üzerinde alınan her nokta bir tek geodezikle birleştirilemediğinden silindir yüzeyi bir tek geodezik uzay değildir.



Şekil 3.3. Tek geodezik uzay

Bir tek geodezik X uzayı aynı zamanda konvekstir. $\forall x, y \in$ X farklı noktalar çifti için X de bu noktaları birleştiren bir tek geodezik parça olduğundan X in geodezik konveks olduğu da söylenebilir.

Tanım 3.4.7.(Geodezik Konveks)

X bir tek geodezik uzay ve A, X in bir alt uzayı olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ için $[x, y]$ geodezik parçası A tarafından kapsanıyorsa A ya X in bir geodezik konveks alt uzayı denir.

Sonuç 3.4.3: A, X in bir geodezik konveks alt cümlesi ve f : X ⟶ X bir izometri ise $f(A)$ nın da bir geodezik konveks alt cümle olduğu söylenebilir. Gerçekten de A geodezik konveks olduğundan $\forall x, y \in A$ için $[x, y]$ geodezik parçası tamamen A dadır. f bir izometri olduğundan uzaklığı korur. Bu nedenle $\forall f(x), f(y) \in f(A)$ için

$f([x,y]) = [f(x), f(y)]$

geodezik parçadır ve tamamen $f(A)$ dadır. Dolayısıyla $f(A)$ alt cümlesi de geodezik konvekstir.

Teorem 3.4.6: X bir tek geodezik uzay olsun. X in geodezik konveks alt cümlelerinin herhangi ailesinin kesişimi de geodezik konvekstir. Ayrıca geodezik konveks alt cümlelerinin herhangi bir artan ailesinin birleşimi de geodezik konvekstir.

İspat:

X bir tek geodezik uzay olsun ve $\mathcal{A}_i$, X in geodezik konveks alt cümlelerinin herhangi ailesi olsun. $\forall x, y \in \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ için

$$x, y \in \bigcap_{i=1} \mathcal{A}_i$$

dir. $\mathcal{A}_i$ cümleleri geodezik konveks olduğundan $[x, y]$ geodezik parçası sırasıyla $\forall x, y \in \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ dedir. Bu nedenle .

$$\forall x, y \in \bigcap_{i=1} \mathcal{A}_i$$

için $[x, y]$ geodezik parçası

$$\bigcap_{i=1} \mathcal{A}_i$$

dedir. O halde

$$\bigcap_{i=1} \mathcal{A}_i$$

geodezik konvekstir.

Benzer şekilde $\forall x, y \in \mathcal{A}_i$ ler için

$$x, y \in \bigcup_{i=1} \mathcal{A}_i$$

dir. $\mathcal{A}_i$ cümleleri geodezik konveks ve artan olduğundan $[x, y]$ geodezik parçası

$$\bigcup_{i=1} \mathcal{A}_i$$

dedir. O halde

$$\bigcup_{i=1} \mathcal{A}_i$$

geodezik konvekstir.

Tanım 3.4.8.(Menger Konveks)

X bir metrik uzay olsun. Eğer X in her farklı x ve y noktası arasında bir $z \in$ X noktası varsa X uzayına Menger konveks ya da Menger anlamında konvekstir denir. (Yani z, x ve y den farklı bir noktadır ve $|x - z| + |z - y| = |x - y|$ dir.)

Teorem 3.4.7.(Menger Konveksliği ve Geodezik Metrik)

X bir has metrik uzay olsun. Aşağıdaki dört özellik denktir.

i) X uzayı Menger konvekstir.

ii) $\forall x, y \in$ X için $|x - z| = |y - z| = \left(\frac{1}{2}\right)|x - y|$ olacak şekilde bir $z \in$ X noktası vardır.

iii) $\forall x, y \in$ X için $d_1 + d_2 = |x - y|$ koşulunu sağlayan her d_1 ve d_2 pozitif reel sayıları için $|x - z| = d_1$ ve $|y - z| = d_2$ olacak şekilde bir $z \in$ X noktası vardır.

iv) X geodezik uzaydır.

İspat:

iv)⇒iii) için,

X metrik uzayı geodezik ve $\forall t \in [a, b]$ için $\gamma_t = \gamma|_{[a,t]}$ olsun. γ yay uzunluğuyla parametrelendirildiğinden $L(\gamma_t) = t - a$ dır. Özellikle $t \rightarrow L(\gamma_t)$ dönüşümü süreklidir. $t = a$ için değeri sıfırdır ve $t = b$ için $|x - y|$ dir. d_1 ve d_2 iii) koşulundaki gibi ise ortalama değer teoreminden, bir $c \in [a, b]$ vardır öyle ki $L(\gamma_t) = d_1$ dir. Uzunlukların toplanmasıyla $L(\gamma|_{[c,b]}) = d_2$ dir. $z = \gamma(c)$ olsun.

$|x - z| \leq L(\gamma_c)$ ve $|y - z| \leq L(\gamma|_{[c,b]}) = d_2$

dir. $|x - z| \leq d_1$ ve $|y - z| \leq d_2$ eşitsizlikleri,

$|x - z| + |y - z| = d_1 + d_2$

ile birlikte $|x - z| = d_1$ ve $|y - z| = d_2$ anlamına gelir.

ii)⇒iv) için,

ii) koşulunun sağlandığını kabul edelim. $x_0, x_1 \in X$ iki farklı nokta için

$\alpha = |x_0 - x_1|$ olsun ve $\gamma(0) = x_0$ ve $\gamma(\alpha) = x_1$ eşitliklerini sağlayan bir

$\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ geodezik yolu tanımlansın. D, $[0,1]$ aralığının $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$k \leq 2^n$ koşulunu sağlayan ${k\alpha}/{2^n}$ biçimindeki noktalardan oluşan alt cümlesi olsun.

İlk olarak D deki elemanlar üzerinde γ nın değerini tanımlayalım. Bu ii) şartını sonsuz defa uygulanarak yapılabilir. Bu şartı x_0 ve x_1 noktalarına uygulayarak başlayalım. X de

$$\left|x_0 - x_{1/2}\right| = \left|x_1 - x_{1/2}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)|x_0 - x_1|$$

eşitliğini sağlayan bir $x_{1/2}$ noktası elde edilir ve $\gamma\left({\alpha}/{2}\right) = x_{1/2}$ tanımlanır. Aynı durum x_0, $x_{1/2}$ ve x_1 noktalarına uygulanırsa X de sırasıyla,

$$\left|x_0 - x_{1/4}\right| = \left|x_{1/2} - x_{1/4}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)\left|x_0 - x_{1/2}\right|$$

ve

$$\left|x_{1/2} - x_{3/4}\right| = \left|x_1 - x_{3/4}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)\left|x_{1/2} - x_1\right|$$

eşitliklerini sağlayan $x_{1/4}$ ve $x_{3/4}$ noktaları elde edilir. $\gamma\left({\alpha}/{4}\right) = x_{1/4}$ ve $\gamma\left({3\alpha}/{4}\right) = x_{3/4}$ alınsın. Benzer şekilde devam edilirse bütün D alt cümlesi üzerinde γ tanımlanabilir. Her bir $n \geq 1$ için n basamağında, X de n noktalarını seçelim. Bunların her biri bir sonraki basamakta elde edilen nokta çiftinin orta noktasıdır ve bu noktalarda γ tanımlanır. Böylece n basamağından sonra γ dönüşümü $[0,\alpha]$ aralındaki noktalar üzerinde $0 \leq k \leq 2^n$ için ${k}/{2^n}$ olarak tanımlanır. Bu ise D üzerinde γ yı tanımlar. D üzerindeki bu dönüşüm tanım cümlesi $[0,\alpha]$ olan bir dönüşüme genişletilebilir. Bu genişletilmiş dönüşüm bir geodezik yoldur ve γ olarak adlandırılır. D deki her farklı t_1, t_2 reel sayılar çifti için

$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |t_1 - t_2|$ dir. Bazı pozitif olmayan n tamsayıları ve $0 \leq k_1 < k_2 \leq 2^n$ için t_1 ve t_2 sırasıyla ${k_1\alpha}/{2^n}$ ve ${k_2\alpha}/{2^n}$ olarak yazılır.

$$t_1 = \sum_{j=0}^{k_1-1} \frac{(j+1-j)\alpha}{2^n} = \sum_{j=0}^{k_1-1} |x_j - x_{j+1}| \geq |x_0 - x_{k_1}| \, ,$$

$$t_2 - t_1 = \sum_{j=k_1}^{k_2-1} \frac{(j+1-j)\alpha}{2^n} = \sum_{j=k_1}^{k_2-1} |x_j - x_{j+1}| \geq |x_{k_1} - x_{k_2}|$$

ve

$$\alpha - t_2 = \sum_{j=k_2}^{2^n-1} \frac{(j+1-j)\alpha}{2^n} = \sum_{j=k_2}^{2^n-1} |x_j - x_{j+1}| \geq |x_{k_2} - x_1|$$

eşitliklerinin sol tarafları toplamı α ya eşittir. Sağ tarafları ise

$|x_0 - x_{k_1}| + |x_{k_1} - x_{k_2}| + |x_{k_2} - x_1| \geq |x_0 - x_1|$

dir. Sonuç olarak bu üç eşitlik eşittir. Özellikle ikinci eşitlik

$|t_1 - t_2| = |x_{k_1} - x_{k_2}| = |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$

anlamına gelir ki bu ise iddiayı kanıtlar.

t, $[0, \alpha]$ da bir keyfi reel sayı olsun. D, $[0, \alpha]$ aralığında yoğun olduğundan, D de bir $(t_n)_{n\geq 0}$ noktalarının dizisi vardır öyle ki $n \to \infty$ iken $t_n \to t$ dir. $\gamma\big((t_n)\big)_{n\geq 0}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir. $\forall i, j \geq 1$ için

$|\gamma(t_i) - \gamma(t_j)| = |t_i - t_j|$

dir ki $i, j \to \infty$ iken sıfıra gider. Dahası $\gamma\big((t_n)\big)_{n\geq 0}$ noktalar dizisi X de bir kapalı yuvardadır. X has olduğundan böyle bir yuvar kompakttır ve bu nedenle tamdır. Böylece $\gamma\big((t_n)\big)_{n\geq 0}$ dizisi yakınsaktır.

Şimdi $\gamma(\boldsymbol{t}) = \lim_{n\to\infty}\gamma(\boldsymbol{t}_n)$ alalım. $\gamma(\boldsymbol{t})$ noktasının $(\boldsymbol{t}_n)_{n\geq 0}$ dizisinin seçilişinden bağımsız olduğu ispatlanmalıdır.

$(\boldsymbol{t}_n')_{n\geq 0}$, D de $\boldsymbol{t}$ ye yakınsayan bir başka dizi ise $(\boldsymbol{t}_n'')_{n\geq 0}$ dizisi $\boldsymbol{t}_{2n}'' = \boldsymbol{t}_n$ ve $\boldsymbol{t}_{2n+1}'' = \boldsymbol{t}_n'$ olarak tanımlanır ve $\boldsymbol{t}$ ye yakınsar. $\gamma(\boldsymbol{t}_{2n}'')_{n\geq 0}$ dizisinin görüntüleri bir Cauchy dizisidir ki bu nedenle yakınsaktır ve $\gamma(\boldsymbol{t}_{2n})_{n\geq 0}$, $\gamma(\boldsymbol{t}_{2n}')_{n\geq 0}$ dizileri aynı limite sahiptir. Böylece $\gamma(0) = x$ ve $\gamma(\alpha) = y$ koşulunu sağlayan bir

$\gamma : [0,\alpha] \longrightarrow \mathrm{X}$ dönüşümü vardır. Bu dönüşümün uzaklığı koruduğunu gösterelim.

$[0,\alpha]$ aralığındaki $\boldsymbol{t}$ ve $\boldsymbol{t}'$ için $(\boldsymbol{t}_n)_{n\geq 0}$ ve $(\boldsymbol{t}_n')_{n\geq 0}$, D de $n \to \infty$ iken $\boldsymbol{t}_n \to \boldsymbol{t}$ ve $\boldsymbol{t}_n' \to \boldsymbol{t}'$ yi sağlayan iki dizi olsun.

$$\gamma(\boldsymbol{t}) = \lim_{n\to\infty}\gamma(\boldsymbol{t}_n)$$

ve

$$\gamma(\boldsymbol{t}') = \lim_{n\to\infty}\gamma(\boldsymbol{t}_n')$$

dir ki

$$|\gamma(\boldsymbol{t}) - \gamma(\boldsymbol{t}')| = \lim_{n\to\infty}|\gamma(\boldsymbol{t}_n) - \gamma(\boldsymbol{t}_n')| = \lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{t}_n - \boldsymbol{t}_n'|$$

eşitliğini verir. Böylece γ dönüşümü uzaklığı korur. O halde X uzayı bir geodeziktir.

i)⇒ii) için,

X uzayı Menger konveks ve $x, y \in \mathrm{X}$ olsun.

$$B = \{z \in \mathrm{X} \mid |x - z| + |z - y| = |x - y|\}$$

cümlesini göz önüne alalım. Uzaklık fonksiyonunun sürekliliğinde B, X in bir kapalı alt cümlesidir. Ayrıca $|x - z| \leq |x - y|$, B nin yarıçapı $|x - y|$ ve merkezi x olan bir yuvar tarafından ihtiva edildiği anlamına geldiğinden B cümlesi sınırlıdır. X uzayı has olduğundan B cümlesi kompakttır. B den $\mathbb{R}$ ye

$z \to min\{|z-x|, |z-y|\}$ ile tanımlanan dönüşüm süreklidir ve böylece bir maksimum değer elde edilir. β bir maksimum değer olsun. $m \in B$ için

$$\beta = |m-x| = |m-y| = \left(\frac{1}{2}\right)|x-y|$$

dir. Tanım gereğince

$\beta = min\{|m-x|, |m-y|\}$ ve $|m-x| + |m-y| = |x-y|$ dir ki bu

$\beta \leq \left(\frac{1}{2}\right)|x-y|$ anlamına gelir.

$|m-x| = \left(\frac{1}{2}\right)|x-y|$ olduğu gösterilebilir.

$\beta = |m-x| < |m-y|$ olduğunu kabul edelim.

$$\beta \leq \left(\frac{1}{2}\right)|x-y|$$

dir. i) koşulu gereğince X de m ve y den farklı bir z noktası vardır öyle ki

$|m-z| + |z-y| = |m-y|$

dir. Arasında olma bağıntısı gereğince

$|x-z| + |z-y| = |x-y|$ ve $|x-m| + |m-z| = |x-z|$ dir.

$|z-y| \leq \beta$ olduğu iddia ediliyor. $|z-y| > \beta$ olduğunu kabul edelim.

$|x-z| + |z-y|$ olarak bu $|z-y|$ nin $\{|z-x|, |z-y|\}$ nin minimum değeri olduğu gerçeğiyle çelişir. Böylece,

$|m-z| = |x-z| - |x-m| = |x-y| - |z-y| - |x-m|$

elde edilir ki $|m-z| \geq |x-y| - 2\beta > 0$ anlamına gelir.

$Z = \{z \in X \mid |m-z| + |z-y| = |m-y|\} \cup \{y\}$

cümlesi kapalı ve X de sınırlıdır. Bu nedenle kompakttır.

$z \to d_m(z) = |m - z|$ dönüşümü Z nin bazı z_0 noktalarındaki minimum değerlerinden elde edilen Z de tanımlanır. i) koşulundan X de bir z' noktası bulunur ki m den ve z_0 dan farklıdır ve

$|m - z'| + |z' - z_0| = |m - z_0|$

eşitliğini sağlar. Böylece $|m - z'| < |m - z_0|$ dır. Tekrar arasında olma bağıntısı kullanılırsa, $|m - z'| + |z' - y| = |m - y|$ elde edilir. Bu ise z_0 ın, d_m nin minimum değerinden elde edilen bir nokta olduğu gerçeğiyle çelişir. Bu nedenle kabul yanlış olup, $|m - x| = |x - y|$ dir.

ii)⇒i) ve iii)⇒ii) nin ispatı ise Menger konveksliğinin tanımı gereği açıktır.

ii) koşulu sağlansın. $\forall x, y \in$ X için bir $z \in$ X noktası vardır öyle ki

$$|x - z| = |y - z| = \left(\frac{1}{2}\right)|x - y|$$

dir. Arasında olma bağıntısı gereğince z noktası x ve y nin arasında ise

$$|x - z| + |y - z| = \left(\frac{1}{2}\right)|x - y| + \left(\frac{1}{2}\right)|x - y| = |x - y|$$

olup X Menger konvekstir.

Son olarak iii) koşulu sağlansın. $\forall x, y \in$ X ve $d_1 + d_2 = |x - y|$ eşitliğini sağlayan bütün $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ için bir $z \in$ X noktası vardır öyle ki

$|x - z| = d_1$ ve $|y - z| = d_2$ dir.

$|x - y| = d_1 + d_2 = |x - z| + |y - z|$

olup z noktası x ve y nin arasındadır. Bu durum $\forall x, y \in$ X için bu noktaların arasında

$$|x - z| = |y - z| = \left(\frac{1}{2}\right)|x - y|$$

koşulunu sağlayan bir $z \in \mathrm{X}$ noktası olduğunu gösterir.

Tanım 3.4.9: X_1 ve X_2 iki metrik uzay olsun. $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ üzerinde d_p metriği şu şekilde tanımlanır.

$p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$ ve $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ için

$p \in [1,\infty)$ ise,

$$d_p\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \Big(\big(d_{\mathrm{X}_1}(x_1,y_1)\big)^p + \big(d_{\mathrm{X}_2}(x_2,y_2)\big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

dir. $p = \infty$ ise,

$$d_\infty\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = max\{d_{\mathrm{X}_1}(x_1,y_1), d_{\mathrm{X}_2}(x_2,y_2)\}$$

dir. $p = 2$ için d_p metriği $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ üzerinde Öklid metriğidir.

Teorem 3.4.14: X_1 ve X_2 iki has (geodezik) uzay olsun.

$p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$ için tanımlanan d_p metriklerinin herhangi biriyle birlikte $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ has (geodezik) uzaydır.

İspat:

$p \in [1,\infty)$ için d_p metriği kullanılsın. X_1 ve X_2 uzayları has ise $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ de has uzaydır. K, $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ nin bir kapalı ve sınırlı alt cümlesi ve sırasıyla K_1 ve K_2, X_1 ve X_2 üzerine izdüşümleri olsun. K_1 ve K_2 sınırlıdır ve $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$ kapanışları kompakttır. X_1 ve X_2 has uzaydır. $\overline{K_1} \times \overline{K_2}$ çarpımı $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ nin bir kapalı kompakt K alt cümlesinde kompakttır. Bu da $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ nin has uzay olduğunu gösterir. Şimdi X_1 ve X_2 geodezik uzaylar ise $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ nin de geodezik uzay olduğunu gösterelim.

Teorem 3.4.7 nin ii)⇔iv) bağıntısını kullanalım.

$x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$, $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$

de iki nokta olsun. X_1 ve X_2 geodezik uzaylar olduğundan Teorem 3.4.7 gereğince,

$$|x_1 - z_1| = |y_1 - z_1| = \left(\frac{1}{2}\right)|x_1 - y_1|$$

ve

$$|x_2 - z_2| = |y_2 - z_2| = \left(\frac{1}{2}\right)|x_2 - y_2|$$

eşitliklerini sağlayan X_1 de bir z_1 noktası ve X_2 de bir z_2 noktası vardır. Böylece

$$d_p\big((z_1, z_2), (x_1, x_2)\big)^p = \left(d_{X_1}(z_1, x_1)\right)^p + \left(d_{X_2}(z_2, x_2)\right)^p$$

$$= \frac{1}{2^p}\left(d_{X_1}(x_1, y_1)\right)^p + \frac{1}{2^p}\left(d_{X_2}(x_2, y_2)\right)^p$$

$$= \frac{1}{2^p} d_p\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big)^p$$

dir. Yani $d_p(z, x) = \frac{1}{2} d_p(x, y)$ dir ki $z = (z_1, z_2) \in X_1 \times X_2$ dir.

Aynı şekilde $d_p(z, y) = \frac{1}{2} d_p(x, y)$ elde edilir.

Benzer şekilde d_∞ metriği için;

$$d_\infty\big((z_1, z_2), (x_1, x_2)\big) = max\{d_{X_1}(z_1, x_1), d_{X_2}(z_2, y_2)\}$$

$$= max\left\{\frac{1}{2} d_{X_1}(x_1, y_1), \frac{1}{2} d_{X_2}(x_2, y_2)\right\}$$

$$= max\left\{\frac{1}{2}\left(d_{X_1}(x_1, y_1), d_{X_2}(x_2, y_2)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} max\left\{\left(d_{X_1}(x_1, y_1), d_{X_2}(x_2, y_2)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} d_\infty\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big)$$

dir.

Yani $d_\infty(z, x) = \frac{1}{2} d_\infty(x, y)$ ve aynı şekilde $d_\infty(z, y) = \frac{1}{2} d_\infty(x, y)$

dir. O halde Teorem 3.4.7 nin ii) koşulu $X_1 \times X_2$ üzerindeki d_p ve d_∞ metrikleri için sağlanır. Dolayısıyla $(X_1 \times X_2, d_p)$ ve $(X_1 \times X_2, d_\infty)$ birer geodezik uzaydır.

Teorem 3.4.8: X_1 ve X_2 iki geodezik uzay ve $\exists p \in [1, \infty) \cup \{\infty\}$ için d_p metriklerinden biri ile tanımlı $X = X_1 \times X_2$ çarpım uzayı verilsin.

$x_1, y_1 \in X_1$ ve $x_2, y_2 \in X_2$ keyfi noktalar olmak üzere $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow X_1$, x_1 ve y_1 noktalarını ve $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X_2$, x_2 ve y_2 noktalarını birleştiren birer afin geodezik olsun. Bu durumda $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ ile tanımlanan $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ çarpım yolu (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) yi birleştiren bir afin geodeziktir. Ayrıca, $p \in [1, \infty)$ durumunda,

$L(\gamma) = (L(\gamma_1)^p + L(\gamma_2)^p)^{\frac{1}{p}}$ dir

ve $p = \infty$ durumunda ise $L(\gamma) = max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\}$ dir.

İspat:

γ dönüşümü sürekli ve (x_1, y_1), (x_2, y_2) noktalarını birleştiren bir yol olsun. Bu dönüşümün bir afin geodezik olduğunu gösterelim. $\forall u, v \in [0,1]$ için,

$$d_p(\gamma(u), \gamma(v)) = (|\gamma_1(u) - \gamma_1(v)|^p + |\gamma_2(u) - \gamma_2(v)|^p)^{1/p}$$

$$= \left(\left(L(\gamma_1)\right)^p |u - v|^p + \left(L(\gamma_2)\right)^p |u - v|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\left(L(\gamma_1)\right)^p + \left(L(\gamma_2)\right)^p\right)^{1/p} |u - v|$$

dir. Teorem 3.2.3 gereğince γ bir afin parametrelendirilmiş geodeziktir ve uzunluğu

$\left(\left(L(\gamma_1)\right)^p + \left(L(\gamma_2)\right)^p\right)^{1/p}$ dir.

$p = \infty$ durumunda,

$$d_\infty(\gamma(u), \gamma(v)) = max\{ |\gamma_1(u) - \gamma_1(v)|, |\gamma_2(u) - \gamma_2(v)| \}$$

$$= max\{\ L(\gamma_1)|u-v|, L(\gamma_2)|u-v|\ \}$$

$$= max\{\ L(\gamma_1), L(\gamma_2)\ \}|u-v|$$

dir. Yine Teorem 3.2.3 gereğince γ uzunluğu $L(\gamma) = max\{L(\gamma_1), L(\gamma_2)\}$ olan bir afin parametrelendirilmiş geodeziktir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, yüzeyler üzerinde ve metrik uzaylarda geodezikler incelenmiştir. Geodezikler 3-boyutlu Öklid uzayında örneklendirilmiştir. Geodezik denklemler kullanılarak geodeziklerin nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir. Geodeziklerden oluşan dizilerin limitleri incelenmiştir. Uzunluk uzayı ve geodezik metrik uzay tanımlanarak bazı topolojik özellikleri ele alınmıştır.

Çalışmanın devamı olarak geodezik metrik uzaylar üzerinde topolojik incelemeler yapılabilir.

KAYNAKLAR

1) Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, Şubat 2004

2) Hacısalihoğlu, H., H., Diferensiyel Geometri, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1983

3) Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara, 2006 Yayınları, Ankara, 1983

4) Başkan, T., Bizim, O., Cangül, İ., N., Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş, Nobel Yayınları, Ankara, 2006

5) Oprea, J., Differential Geometry and Its Applications (Second Edition), Pearson Education,USA,1997

6) O'Neill, B., Elementary Differntial Geometry, Academic Press, New York, 1966

7) Pressley, A., Elementary Differntial Geometry, Springer-Verlag, London, 2001

8) Papadopoulos, A., Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature, European Mathematical Society, Zürih, 2005,

9) Myers, S., B., Arc and Geodesics in Metric Spaces, Transactions of American Mathematical Society, Volume 57, Issue 2, 217-227, March, 1945

10) Hayes, David F., Shubin, Tatiana, Mathematical Adventures for Students and Amateurs, The Mathematical Association of America, New York, 2004