KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CARISTI TİP SABİT NOKTA TEOREMİ VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Selman BOZBIYIK

2011

KIRIKKALE

Matematik Anabilim Dalında Selman Bozbıyık tarafından hazırlanan CARISTI TİP SABİT NOKTA TEOREMİ VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye (Danışman)	: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hatice ASLAN HANÇER	____________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

CARISTI TİP SABİT NOKTA TEOREMİ VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

BOZBIYIK, Selman

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN

Haziran 2011, 67 sayfa

Bu tez çalışmasında, Banach sabit nokta teoreminin bir sıralı metrik uzaylarda ki versiyonu verildi. Ardından, tam metrik uzaylarda Caristi sabit nokta teoreminin direkt ispatı ile bir sıralama bağıntısı kullanılarak yapılan farklı iki ispatı da incelendi. Daha sonra, tam metrik uzaylarda Caristi sabit nokta teoreminin bazı genelleştirmeleri verildi.

Anahtar kelimeler: Tam Metrik Uzay, Caristi Dönüşümü, Sabit Nokta

ABSTRACT

CARISTI TYPE FIXED PONT THEOREM AND SOME GENERALIZATIONS

BOZBIYIK, Selman

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. İshak ALTUN

June 2011, 67 pages

In this study, an ordered version of Banach fixed point theorem on complete metric space is given. Then, the direct proof of Caristi's fixed point theorem on complete metric space and two order approach of the proof of it were analyzed. After then some generalizations of Caristi's fixed point theorem on complete metric space were given.

Key Words: Complete Metric Space, Caristi Mapping, Fixed Point

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her türlü bilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Yrd. Doç Dr. İshak ALTUN'a, çalışmam boyunca desteğini benden esirgemeyen eşim ve çocuklarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sabit nokta teori, diferansiyel denklemlerin, integral denklemlerin, kısmi diferansiyel denklemlerin ve diğer ilgili alanların varlık teorisinde çok kullanılmaktadır. Yine sabit nokta teori, sınır değer problemleri ve yaklaşım problemlerinde olduğu kadar özdeğer problemlerde de çok verimli uygulamalara sahiptir.

X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $Tx_0 = x_0$ oluyorsa, x_0 noktasına T nin bir sabit noktası denir. Yani, T dönüşümü altında değişmeyen bir noktaya T nin bir sabit noktası denir. Örneğin, $T: [0,1] \to [0,1]$ $Tx = \frac{x}{10}$ olarak tanımlansın. $T0 = 0$ olduğundan 0 noktası T nin bir sabit noktasıdır.

Analiz ve Fonksiyonel Analizde, $Sx = 0$ ve $Tx = x$ tipindeki denkelmlerle sıkça karşılaşırız. Bu tür denklemleri çözmek başlı başına bir problemdir. Kimi tam sonucu kimi de yaklaşık sonucu veren bazı metotlar vardır. Sabit nokta teoride bu metotlardan biridir. Örneğin, $x^2 - 7x + 12 = 0$ şeklinde bir denklemi göz önüne alalım. $x = 3$ ve $x = 4$ bu denklemin birer köküdür. Bu denklem $x = \frac{x^2+12}{7}$ olarak yazılabilir. O halde $Tx = \frac{x^2+12}{7}$ olmak üzere, bu denklem $x = Tx$ olarak yazılabilir. Şu halde $x = 3$ ve $x = 4$ noktaları T nin iki sabit noktasıdır. Bu yüzden, $Sx = 0$ şeklindeki bir denklemin çözümünün bulunması problemi $Sx = Tx - x$ ile verilen T fonksiyonunun sabit noktasının bulunması problemi ile aynıdır.

Brouwer 1912 de aşağıdaki önemli sonucu ispatlamıştır.

"C, $\mathbb{R}^n$ in kapalı birim yuvarı ve $T: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, C de bir sabit noktaya sahiptir".

Reel eksende bu teoremin özel bir durumu şu şekildedir: "T: $[0,1] \to [0,1]$ sürekli bir dönüşüm ise T nin bir sabit noktası vardır". Bu sonucun ispatı Aradeğer Teoremi yardımıyla kolayca yapılabilir. Yukarıda bahsedilen problemlerin çoğu fonksiyon uzaylarında ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle Brouwer'ın teoreminin fonksiyon uzaylarına genişletilmesi düşünülmüştür. Ancak, Kakutani sonsuz boyutlu uzaylara teoremin bu hali ile genişletilemeyeceğini gösteren aşağıdaki örneği vermiştir.

$C = \{x \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$, l^2 Hilbert uzayının kapalı birim yuvarı olsun. $T: C \to C$ dönüşümü, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \in C$ için

$$Tx = \left\{\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_{1,} x_2, \dots, x_n, \dots\right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda T sürekli ve $\|Tx\| = 1$ dir. Şimdi T nin sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim ve bu sabit nokta $x_0 = \left\{x_{1,} x_2, \dots, x_n, \dots\right\} \in C$ olsun. O halde $\|Tx_0\| = \|x_0\| = 1$ dir. Fakat

$$\begin{aligned} Tx_0 &= \left\{\sqrt{1 - \|x_0\|^2}, x_{1,} x_2, \dots, x_n, \dots\right\} \\ &= \left\{0, x_{1,} x_2, \dots, x_n, \dots\right\} \\ &= x_0 \end{aligned}$$

olduğundan bu $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots\ ,\ x_n = 0,\ \dots$ veya $x_0 = \{0,0,\dots,0,\dots\}$ olduğunu gösterir. Bu ise $\|x_0\| = 1$ olması ile çelişir. O halde T nin sabit noktası yoktur.

Bruouwer'ın teoremi 1930 yılında Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

"X bir Banach uzayı, C, X in kompakt konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. O zaman T nin C de en az bir sabit noktası vardır".

Burada C üzerindeki kompaktlık şartı çok kuvvetlidir. Bu nedenle kompaktlık şartının hafifletilerek bu teoremin yenilenmesi düşünülmüştür. Böylece kompakt dönüşüm kavramı kullanılarak Schauder in bu teoremi yenilenmiştir. Bu teoremi ifade etmeden önce kompakt dönüşüm kavramını hatırlayalım.

"$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T sınırlı kümeleri prekompakt (kapanışı kompakt olan) kümelere dönüştüren sürekli bir dönüşüm ise T ye tamamen sürekli kompakt dönüşüm denir. Bir kompakt dönüşüm daima süreklidir fakat bir sürekli dönüşüm kompakt olmayabilir. Aşağıdaki teorem Schauder Sabit Nokta Teoremi (ikinci versiyon) olarak bilinir.

"X bir Banach uzayı, C, X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ kompakt bir dönüşüm ise, T nin C de en az bir sabit noktası vardır".

Bu teorem, analizde denklemlerin nümerik işlemlerinde büyük öneme sahiptir.

1. 1. Kaynak özetleri

Metrik uzay, topolojik uzay ve fonksiyonel analiz ile ilgili temel kavramları için Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar" adlı kitabı ile Soykan'ın "Fonksiyonel Analiz" adlı kitabı kullanılmıştır (1,2). Kısmi sıralama bağıntısı ve temel özellikleri ile ilgili kavramlar için Özer, Çöker ve Taş'ın "Soyut Matematik" adlı kitabı temel kaynak olmuştur (3). Kısmi sıralı kümeler üzerinde verilen Knaster-Tarski ve Tarski sabit nokta teoremlerinin ispatı için Granas ve Dugundji nin "Fixed Point Theory" adlı kitabından yararlanılmıştır (4). Sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teorisi için temel iki kaynak olan Ran ve Reurings'in "A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations" adlı makalesi ile Nieto ve Rodriguez-Lopez'in "Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations" adlı makalesi kullanılmıştır (5,6). Daha sonra tezin asıl amacını oluşturan Caristi sabit nokta teoreminin direkt ispatı için Caristi'nin "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions" adlı makalesinin yanı sıra Singh, Watson ve Srivastava'nın "Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-Map Principle" adlı kitabı ile Agarwal, O'Regan ve Sahu'nun "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications" adlı kitapları temel alınmıştır (7,8,9). Ayrıca Caristi sabit nokta teoreminin kısmi sıralama yardımıyla yapılan ispatı için Granas ve Dugundji nin "Fixed Point Theory" adlı kitabı ile Khamsi'nin "Remarks on Caristi's fixed point theorem" adlı makalesi incelenmiştir (4,10). Son olarak Caristi sabit nokta teoreminin bazı genelleştirmeleri için Bae, Cho ve Yeom'un "A generalization of the Caristi-Kirk fixed point theorem and its applications to mapping theorems", Suzuki'nin "Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others", Kirk ve

Caristi'nin "Mappings theorems in metric and Banach spaces", Kirk'in "Caristi's fixed point theorem and metric convexity", Brezis-Browder'ın "A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis", Bae'nin "Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps" adlı makaleleri incelenmiştir (11,12,13,14,15,16).

1. 2. Çalışmanın Amacı

James Caristi, 1976 yılında yayınladığı bir makalesinde aşağıdaki teoremi ispatlamıştır: (X, d) bir tam metrik uzay ve φ de X den $\mathbb{R}$ ye tanımlı alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. T ise X den X e tanımlı, her $x \in X$ için $d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir. Daha sonra Caristi nin bu teoremi pek çok yazar tarafından genelleştirilmiş, uygulamaları yapılmış, farklı uzaylarda ispatları yapılmıştır. Bu tez çalışmasında, yapılan bu çalışmaları irdeleyerek yeni çalışmaların yapılması amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Metrik ve Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme olsun. Eğer $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z, \in X$ için

a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x, y) = d(y, x)$

c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.2. (X, d) herhangi bir metrik uzay olmak üzere bir $x_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) = r\}$$

kümesine yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.1.3. (X, d) bir metrik uzay ve U da X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine d-açıktır denir.

Tanım 2.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında bir A alt kümesi için $X \backslash A$ d-açık ise, A ya d-kapalı küme denir.

Önerme 2.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun.

a) (X, d) içindeki her açık yuvar d-açıktır.

b) (X, d) içindeki her kapalı yuvar d-kapalıdır.

Tanım 2.1.5. (X, d) bir metrik uzay *A* ve *B* de *X* in boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

sayısına *A* ve *B* kümeleri arasındaki uzaklık, $x \in X$ olmak üzere

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

sayısına *x* noktasının *A* kümesine olan uzaklığı,

$$d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$$

sayısına A kümesinin çapı denir. Eğer $d(A) < \infty$ ise A kümesine sınırlı küme, eğer $d(A) = \infty$ ise A kümesine sınırsız küme denir.

Tanım 2.1.6. Bir (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.2. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın d-kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\} \subseteq A$ olacak şekildeki her $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \to x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 2.1.7. Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.8. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar $T: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. T fonksiyonunun x noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul X içinde herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak iken, Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisinin Tx e yakınsak olmasıdır.

Tanım 2.1.9. Bir (X, d) metrik uzayında açık kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i : i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer bir açık örtünün

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

olacak biçimde bir $\{G_{i_k} : k = 1,2, \dots, n\}$ alt ailesi var ise, bu aileye A kümesinin sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.10. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt bir küme ise (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir. Kompakt bir metrik uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 2.1.11. X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{K}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X e $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir Lineer Uzay veya Vektör Uzayı denir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$ için

a) $x + y \in X$

b) $x + (y + z) = (x + y) + z$

c) $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır

d) $x + (-x) = -x + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır

e) $x + y = y + x$

f) $\alpha x \in X$

g) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

h) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

ı) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

i) $1. x = x$ (Burada 1, $\mathcal{K}$'nın birim elemanıdır.)

Tanım 2.1.12. X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlarsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir Norm denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay adı verilir.

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

b) $\alpha \in \mathcal{K}$ olmak üzere $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan d bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.13. X normlu lineer uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.14. X boş olmayan bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt sınıfı olsun. Eğer τ sınıfı,

a) $\emptyset, X \in \tau$

b) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti τ ya aittir

c) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ya aittir

koşullarını sağlıyorsa τ ya X üzerinde topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.15. (X, τ) bir topolojik uzay ve X in bazı açık alt kümelerinin sınıfı β olsun. X in her açık alt kümesi β nın elemanlarının herhangi bir sayıdasının birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ için bir taban denir.

Tanım 2.1.16. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren bir açık alt kümeyi kapsayan her kümeye x noktasının bir komşuluğu denir. x noktasının komşuluklarının ailesini N_x ile gösteririz.

Teorem 2.1.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. N_x komşuluklar ailesi

a) $N \in N_x$ ise $x \in N$

b) $N \in N_x$ ve $N \subseteq M$ ise $M \in N_x$

c) $N, M \in N_x$ ise $N \cap M \in N_x$

d) $N \in N_x$ ise öyle bir $M \in N_x$ vardır ki her $y \in M$ için $N \in N_y$

koşullarını sağlar. Bu koşullara komşuluklar aksiyomları adı verilir.

Teorem 2.1.2 Boş olmayan bir X kümesinin her $x \in X$ noktası için komşuluk aksiyomları diye adlandırılan bu dört özelliği sağlayan N_x ailesi verilmiş olsun. Bu durumda X kümesi üzerinde N_x ailesini $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi kabul eden bir tek τ topolojisi vardır.

Tanım 2.1.17. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$$

ailesi A üzerinde bir topolojidir. τ tarafından oluşturulan τ_A topolojisine τ dan indirgenen topoloji ve (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) topolojik uzayının alt uzayı denir.

Tanım 2.1.18. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her nokta çiftini içeren ayrık komşulukları varsa (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff Uzay denir.

Tanım 2.1.19. Bir X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi $\mathfrak{I} = \{F_\alpha : \alpha \in I\}$ olsun. Eğer bu ailenin sonlu her alt ailesinin arakesiti boş kümeden farklı ise bu aileye sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

Teorem 2.1.3. Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

a) (X, τ) topolojik uzayı kompakttır

b) X in kapalı alt kümelerinin sonlu arakesit özelliğine sahip her ailesinin bütün elemanlarının arakesiti boştan farklıdır.

Teorem 2.1.4. Bir (X, τ) kompakt topolojik uzayının her kapalı alt kümesi de kompakttır.

Teorem 2.1.5. Bir (X, τ) Hausdorff uzayında kompakt alt kümeler kapalıdır.

Teorem 2.1.6. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. A, X in boş olmayan bir kompakt alt kümesi olsun. Eğer $T: A \to \mathbb{R}$ sürekli ise $Ta = supT(A)$ ve $Tb = infT(A)$ olacak şekilde $a, b \in A$ vardır.

Tanım 2.1.20. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$$

olacak şekilde bir L sabiti varsa, T fonksiyonuna Lipschitz koşulunu sağlar denir. Eğer $L < 1$ ise, T ye bir büzülme dönüşümü denir. Her Lipschitz fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır.

Teorem 2.1.7. (Banach) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1 = T^2x_0,\ldots,$ $x_n = Tx_{n-1} = T^nx_0$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq Ld(x_{n-1}, x_n) \\ &\;\;\vdots \\ &\leq L^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$= [L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{m-1}]d(x_0, x_1)$$

$$= \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $lim x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$z = lim x_{n+1} = lim T x_n = T lim x_n = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir. Şimdi $w \in X$ noktası T nin bir başka sabit noktası ise

$$0 < d(z, w) = d(Tz, Tw) \leq L d(z, w) < d(z, w)$$

olur ki bu $L < 1$ olduğundan bir çelişkidir. Yani T nin sabit noktası tekdir.

Teorem 2.1.8. (Cantor) (X, d) bir tam metrik uzay ve $\{A_n\}$ de X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_{n+1} \subseteq A_n$ ve $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$ ise bu durumda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

kümesi tek noktadan ibarettir.

İspat. Önce $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ seçelim. Bu durumda $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için $x_m \in A_n$ olacağından $d(x_m, x_n) \leq d(A_n)$ olur. Yani $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Yine $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için $x_m \in A_n$ olduğundan $\lim_{m\to\infty} x_m = z \in \overline{A_n} = A_n$ olur. Bu durum Her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

dir. Şimdi $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $x, y \in A_n$ olacağından

$$d(x, y) \leq d(A_n)$$

olur. Bu ise $d(x, y) = 0$ yani $x = y$ olduğunu gösterir ki sonuç olarak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$$

bulunur.

2.2. Kısmi Sıralama Bağıntısı ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.2.1. X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip bir β bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve (X,β) ikilisine de kısmi sıralı küme denir:

a) β yansımalıdır, yani her $x \in X$ için $x\beta x$ dir,

b) β ters simetriktir, yani her $x, y \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta x$ ise $x = y$ dir,

c) β geçişlidir, yani her $x, y, z \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta z$ ise $x\beta z$ dir.

Bir kısmi sıralama bağıntısını göstermek için β simgesi yerine $\preccurlyeq$ gösterimini kullanacağız. Böylece $x\beta y$ yerine $x \preccurlyeq y$ yazıp bunu "x, y den önce gelir" ya da "x küçük eşit y" şeklinde okuyacağız. $x \preccurlyeq y$ ile $y \succcurlyeq x$ aynı anlama gelecektir. Ayrıca $x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ ise bu durumu $x \prec y$ biçiminde göstereceğiz.

Örnek 2.2.1.

a) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

b) Bir X kümesinin $P(X)$ kuvvet kümesi $\subseteq$ kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir.

c) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde'$m \preccurlyeq n \Leftrightarrow m$ sayısı n sayısını böler' şeklinde tanımlı $\preccurlyeq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

d) $X = \{a, b, c, d, e\}$ olmak üzere

$\preccurlyeq = \{(x,x) : x \in X\} \cup \{(e,d), (e,a), (d,a), (c,d), (c,a)(c,b), (b,a)\}$ şeklinde tanımlı $\preccurlyeq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

e) $X = \mathbb{R}^2$ ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ olsun. X üzerinde $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$ şeklinde tanımlı $\preccurlyeq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Bu sıralama bağıntısına koordinatsal sıralama denir.

f) $X = \mathbb{R}^2$ ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ olsun. X üzerinde $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow (x_1 < y_1)$ ya da $(x_1 = y_1$ve $x_2 \leq y_2)$ şeklinde tanımlı $\preccurlyeq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Bu sıralama bağıntısına sözlüksel sıralama denir.

Tanım 2.2.2. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $x, y \in X$ için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ oluyorsa *x* ile *y* elemanlarına karşılaştırılabilir elemanlar denir.

Kısmi sıralı bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılamayabilir. Örneğin $\mathbb{R}^2$ deki koordinatsal sıralamaya göre (2,1) ile (1,2) elemanları karşılaştırılamaz.

Tanım 2.2.3. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in bütün elemanları birbirleri ile karşılaştırılabiliyorsa $\preccurlyeq$ bağıntısına bir tam sıralama bağıntısı, $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine de tam sıralı küme denir.

$\mathbb{R}$, üzerinde ki bilinen $\leq$ bağıntısı ile bir tam sıralı kümedir. $\mathbb{R}^2$ deki koordinatsal sıralama bir tam sıralama bağıntısı değil fakat sözlüksel sıralama bir tam sıralama bağıntısıdır.

$(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. $\preccurlyeq$ bağıntısı A alt kümesi üzerinde yine bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Buna ek olarak A üzerindeki bu bağıntı bir tam sıralama bağıntısı oluyorsa A alt kümesine X in bir zinciri adı verilir. Örnek 2.2.1 (d) deki X için $A = \{a, b, c\}$ bir zincirdir.

Tanım 2.2.4. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. Eğer X kümesinin hiçbir elemanı a dan daha büyük değilse a ya X in maksimal elemanı denir. Buna göre a, X in bir maksimal elemanıdır ancak ve ancak $x \in X$ ve $a \preccurlyeq x$ ise $a = x$ dir. Benzer şekilde bir $b \in X$ için, X kümesinin hiçbir elemanı b den daha küçük değilse b ye X in minimal elemanı denir. Buna göre b, X in bir minimal elemanıdır ancak ve ancak $x \in X$ ve $x \preccurlyeq b$ ise $b = x$ dir.

Örnek 2.2.1 (d) deki X için a bir maksimal elemandır. Yine c ve e birer minimal elemandır. Bu örnekten de görüldüğü gibi kısmi sıralı bir kümenin maksimal ve minimal elemanları tek olmayabilir. $\mathbb{R}$, üzerinde ki bilinen $\leq$ sıralama bağıntısına göre maksimal ve minimal elemanlar yoktur.

Tanım 2.2.5. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in bütün elemanlarından daha büyük eşit olan $a \in X$ elemanına X in en büyük (maksimum) elemanı denir. Yani her $x \in X$ için $x \preccurlyeq a$ olacak şekildeki $a \in X$ elemanına X in en büyük elemanı denir. Yine X in bütün elemanlarından daha küçük eşit olan $b \in X$ elemanına X in en küçük (minimum) elemanı denir. Yani her $x \in X$ için $b \preccurlyeq x$ olacak şekildeki $b \in X$ elemanına X in en küçük elemanı denir.

Örnek 2.2.1 (d) deki X için a en büyük elemandır, fakat X in en küçük elemanı yoktur. Eğer kısmi sıralı bir kümenin en büyük (en küçük) elemanı varsa bu eleman tekdir.

Tanım 2.2.6. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $x \preccurlyeq a$ olacak şekilde bir $a \in X$ varsa a elemanına A kümesinin bir üst sınırı denir. Yine Her $x \in A$ için $b \preccurlyeq x$ olacak şekilde bir $b \in X$ varsa b elemanına A kümesinin bir alt sınırı denir.

Örnek 2.2.2.

a) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ sıralama bağıntısına göre $A = [0,1)$ kümesini göz önüne alalım. $(-\infty, 0]$ kümesinin her elemanı A nın bir alt sınırıdır ve yine $[1, \infty)$ kümesinin her elemanı A nın bir üst sınırıdır.

b) $X = \mathbb{R}^2$ ve $A = (0,1) \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in (0,1)\}$ olsun. Bu durumda $a = (1, -1)$ noktası sözlüksel sıralamaya göre A kümesinin bir üst sınırıdır ancak koordinatsal sıralamaya göre bir üst sınır değildir. $b = (0,1)$ noktası sözlüksel sıralamaya göre A kümesinin bir alt sınırıdır ancak koordinatsal sıralamaya göre bir alt sınır değildir. $c = (0,0)$ her iki sıralamaya göre A kümesinin bir alt sınırı ve $d = (1,0)$ her iki sıralamaya göre A kümesinin bir üst sınırıdır.

Tanım 2.2.7. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $a \in X$ elemanına A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $a = supA$ ile gösterilir:

i) a, A nın bir üst sınırıdır, yani her $x \in A$ için $x \preccurlyeq a$ dır.

ii) a, A nın üst sınırları kümesinin en küçük elemanıdır, yani c, A nın bir üst sınırı ise $a \preccurlyeq c$ dir.

Benzer şekilde aşağıdaki şartları sağlayan $b \in X$ elemanına A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $b = infA$ ile gösterilir:

i) b, A nın bir alt sınırıdır, yani her $x \in A$ için $b \preccurlyeq x$ dır.

ii) b, A nın alt sınırları kümesinin en büyük elemanıdır, yani d, A nın bir alt sınırı ise $d \preccurlyeq b$ dir.

Örnek 2.2.3.

a) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ sıralama bağıntısına göre $A = [1,2)$ kümesini göz önüne alalım. $(-\infty, 1]$ kümesinin her elemanı A nın bir alt sınırıdır ve yine $[2, \infty)$ kümesinin her elemanı A nın bir üst sınırıdır. Buna göre $supA = 2$ ve $infA = 1$ dir.

b) $X = \mathbb{R}^2$ ve $A = (0,1) \times \{0\} = \{(x, 0): x \in (0,1)\}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^2$ sözlüksel sıralamaya göre tam sıralı ve A kümesi üstten sınırlı olduğu halde A kümesinin supremumu yoktur. Benzer şekilde A kümesinin infimumu da yoktur. Ancak koordinatsal sıralamaya göre $supA = (1,0)$ ve $infA = (0,0)$ olur.

Tanım 2.2.8. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in boş olmayan her alt kümesinin en küçük elemanı varsa X e iyi sıralı küme ve bağıntıya da iyi sıralama bağıntısı denir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi bilinen $\leq$ bağıntısına göre iyi sıralı bir kümedir. İyi sıralı bir kümenin tam sıralı olduğu açıktır. Çünkü X iyi sıralı ise, her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin en küçük elemanı vardır ve bu ya x yada y dir. Böylece $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ olur.

Teorem 2.2.1. (Zorn Lemması) Boş olmayan ve her zinciri bir üst sınıra sahip olan kısmi sıralı bir kümenin maksimal elemanı vardır.

Tanım 2.2.9. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine bir latis (örgü) denir. Genellikle bir latiste $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ gösterimleri kullanılır. Eğer X in boş olmayan her A alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine bir tam latis denir.

Tam sayılar kümesi bilinen sıralamaya göre bir latistir fakat tam latis değildir.

Tanım 2.2.10. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $Tx \preccurlyeq Ty$ oluyorsa T fonksiyonuna azalmayan (artan, izoton, sıra korur) fonksiyon denir.

Teorem 2.2.2. (Knaster-Tarski) $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T: X \to X$ bir azalmayan bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki iki şartı sağlayan bir $x_0 \in X$ noktasının var olduğunu kabul edelim:

a) $x_0 \preccurlyeq Tx_0$,

b) $\{x \in X : x_0 \preccurlyeq x\}$ kümesi içindeki her zincir bir üst sınıra sahip.

Bu durumda *T* bir maksimal sabit noktaya sahiptir.

İspat. X içinde $Q = \{x \in X : x \preccurlyeq Tx\} \cap \{x \in X : x_0 \preccurlyeq x\}$ kümesini göz önüne alalım. $x_0 \in Q$ olduğundan Q kümesi boş değildir. Ayrıca Q içindeki her zincir bir supremuma sahiptir. *C*, Q da bir zincir olmak üzere $u = supC$ denirse her $c \in C$ için $c \preccurlyeq u$ olup T azalmayan olduğundan $Tc \preccurlyeq Tu$ olur. Yine $c \in C$ olduğundan $c \preccurlyeq Tc \preccurlyeq Tu$ olur. Bu ise Tu nun da *C* nin bir üst sınırı olduğunu gösterir. Fakat $u = supC$ olduğundan $u \preccurlyeq Tu$ olmalıdır. Bu ise $u \in Q$ olduğunu gösterir ki buradan Q

nun her zincirinin Q da bir üst sınırının var olması demektir. O halde Zorn Lemması gereği Q nun z gibi bir maksimal elemanı vardır. $z \in Q$ olduğundan $z \preccurlyeq Tz$ ve T azalmayan olduğundan $Tz \preccurlyeq TTz$ olur ki bu $x_0 \preccurlyeq z$ ve $x_0 \preccurlyeq Tx_0 \preccurlyeq Tz$ olduğundan $Tz \in Q$ olmasını gerektirir. Fakat z, Q nun maximal elemanı olduğundan $z = Tz$ olmalıdır.

Teorem 2.2.3. (Tarski) $(X, \preccurlyeq)$ bir tam latis ve $T: X \to X$ bir azalmayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda *T* bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. X bir tam latis olduğundan X in kendisi bir supremuma ve infimuma sahiptir. Bu nedenle $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır. Böylece

$$Q = \{x \in X: x \preccurlyeq Tx\}$$

kümesi boş değildir. Yine X tam latis olduğundan Q nun supremumu vardır. $u = supQ$ diyelim. O halde her $x \in Q$ için $x \preccurlyeq u$ olup *T* azalmayan olduğundan $Tx \preccurlyeq Tu$ ve üstelik $x \preccurlyeq Tu$ olur. Bu durumda $u = supQ$ olduğundan $u \preccurlyeq Tu$ dur. Diğer taraftan $Tu \preccurlyeq TTu$ olduğundan $Tu \in Q$ dur. Böylece $Tu \preccurlyeq u$ olup $u = Tu$ elde edilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3. 1. Sıralı Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerinde hem bir $\preccurlyeq$ kısmi sıralama bağıntısı hem de bir d metriği varsa X e sıralı metrik uzay diyeceğiz ve bunu $(X, \preccurlyeq, d)$ üçlüsü ile göstereceğiz. Eğer X kümesi d metriğine göre tam ise bu uzaya sıralı tam metrik uzay adını vereceğiz.

Ran ve Reurings 2007 yılında, Banach sabit nokta teoremi ile Tarski sabit nokta teoremlerinden yaralanarak sıralı metrik uzaylarda ilk sabit nokta teoremini vermişlerdir. Daha sonra bu sabit nokta teoremi de çeşitli yollarla genelleştirilmiştir.

Uygunluğu sağlamak açısından

"$\{x_n\}$, X içinde azalmayan ve $x_n \to z \in X$ olacak şekilde bir dizi ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z$"

şartını Nieto şartı olarak isimlendireceğiz.

Teorem 3.1.1. $(X, \preccurlyeq, d)$ bir sıralı tam metrik uzay ve $T: X \to X$ azalmayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$$

şartını sağlayan $L < 1$ sayısı ve $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda T sürekli veya X kümesi Nieto şartını sağlarsa T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ şartını sağlayan x_0 noktasını göz önüne alalım. $x_0 = Tx_0$ ise ispat biter. $x_0 \neq Tx_0$ olsun. $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ ve T azalmayan olduğundan

$$x_0 \preccurlyeq Tx_0 \preccurlyeq T^2x_0 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq T^nx_0 \preccurlyeq \cdots$$

olur. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^nx_0$ denirse $\{x_n\}$ dizisi azalmayan bir dizidir. Bu dizinin terimleri için büzülme şartı kullanılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq Ld(x_{n-1}, x_n) \\ &\ \ \vdots \\ &\leq L^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= [L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{m-1}] d(x_0, x_1) \\ &= \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. *X* tam olduğundan $lim x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır.

Eğer *T* sürekli ise

$$z = lim x_{n+1} = lim T x_n = T lim x_n = Tz$$

elde edilir ki bu *T* nin sabit noktasının var olduğunu gösterir.

Şimdi *X* kümesinin Nieto şartını sağladığını kabul edelim. O halde $lim x_n = z$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z$ dir. Böylece büzülme şartı kullanılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + L d(x_n, z) \end{aligned}$$

olur ki $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(z, Tz) = 0$ bulunur.

Uyarı. Yukarıda ki teoremde her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesi bir alt ve bir üst sınıra sahip ise *T* nin sabit noktasının tekliği garanti edilir.

Gerçekten, $w \in X$ noktası da T nin bir sabit noktası olsun. Eğer w ve z karşılaştırılabilir ise her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n w = w$ ve $T^n z = z$ da karşılaştırılabilirdir. Bu durumda

$$d(z,w) = d(T^n z, T^n w) \leq L^n d(z,w)$$

olur ki bu $d(z,w) = 0$ olduğunu gösterir. Eğer w ve z karşılaştırılabilir değil ise $\{w,z\}$ kümesi bir alt ve bir üst sınıra sahip olacağından w ve z ile karşılaştırılabilir bir $t \in X$ vardır. T nin azalmayan olduğu kullanılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n t$ noktası $T^n w = w$ ve $T^n z = z$ ile karşılaştırılabilirdir. Böylece

$$\begin{aligned} d(z,w) &= d(T^n z, T^n w) \\ &\leq d(T^n z, T^n t) + d(T^n t, T^n w) \\ &\leq L^n d(z,t) + L^n d(t,w) \end{aligned}$$

bulunur ki buradan $d(z,w) = 0$ elde edilir. Yani T nin sabit noktası tekdir.

3. 2. Caristi Tip Sabit Nokta Teoremi Ve Bazı Genelleştirmeleri

Tanım 3.2.1. X bir topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x_0 \in X$ için

$$f(x_0) \leq liminf_{x \to x_0} f(x) = sup_{V \in N_x} inf_{x \in V} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı sürekli fonksiyon denir. Benzer şekilde $x_0 \in X$ için

$$f(x_0) \geq limsup_{x \to x_0} f(x) = inf_{V \in N_x} sup_{x \in V} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında üstten yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında alttan (üstten) yarı sürekli ise f fonksiyonuna X de alttan (üstten) yarı sürekli fonksiyon denir.

Önerme 3.2.1. X bir topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$ kümesinin kapalı olmasıdır.

İspat. f alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$$

kümesinin kapalı olduğunu göstermek için

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

kümesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir. $x_0 \in \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ olsun. Bu durumda $x_0 \in X$ ve $f(x_0) > \alpha$ dır. f alttan yarı sürekli olduğundan

$$\alpha < f(x_0) \leq sup_{V \in N_{x_0}} inf_{x \in V} f(x)$$

olur. O halde $inf_{x \in V_0} f(x) > \alpha$ olacak şekilde bir $V_0 \in N_{x_0}$ vardır. Böylece

$$V_0 \subseteq \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

olur. Yani $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ kümesi açık, dolayısıyla $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ kümesi kapalıdır. Tersine

$$\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$$

kümesi kapalı olsun. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$V_\varepsilon = \{x \in X : f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$$

diyelim. Bu durumda V_ε kümesi açık, yani $V_\varepsilon \in N_{x_0}$ dır. Böylece

$$inf_{x \in V_\varepsilon} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

Olduğundan

$$liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan

$$liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

bulunur. Yani f alttan yarı sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.1. X bir kompakt topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x_0) = inf\ \{f(x): x \in X\}$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

İspat. $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$G_\alpha = \{x \in X: f(x) > \alpha\}$$

olmak üzere $x_0 \in G_\alpha$ olsun. f alttan yarı sürekli bir fonksiyon olduğundan $inf_{x \in V_0} f(x) > \alpha$ olacak şekilde bir $V_0 \in N_{x_0}$ vardır. O halde her $x \in V_0$ için $f(x) > \alpha$ olduğundan $x \in G_\alpha$ olur. Yani $V_0 \subseteq G_\alpha$ olup x_0 noktası G_α kümesinin bir iç noktası olur. x_0 noktası keyfi olduğundan G_α kümesi açıktır. Ayrıca

$$X = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} G_\alpha$$

olduğundan $\{G_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ sınıfı X in bir açık örtüsüdür. X kompakt olduğundan bu açık örtünün $\{G_{\alpha_i} : i = 1,2, \dots n\}$ gibi bir sonlu alt örtüsü vardır. $\alpha_0 = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) > \alpha_0$ dır. Bu ise $\inf\{f(x) : x \in X\}$ in varlığını garanti eder. $m = inf\ \{f(x) : x \in X\}$ diyelim ve $\beta > m$ olsun. Bu durumda

$$F_\beta = \{x \in X : f(x) \leq \beta\}$$

kümesi X in boş olmayan kapalı bir alt kümesi olur. $\{F_\beta : \beta > m\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğu açıktır. X kompakt olduğundan

$$\bigcap_{\beta > m} F_\beta \neq \emptyset$$

olur. Böylece her $\beta > m$ için $x_0 \in F_\beta$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_0) \leq m + \frac{1}{n}$ olup $f(x_0) \leq m$ bulunur. Bu ise infimum tanımı gereği $f(x_0) = m$ demektir.

(X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kompakt, $\varphi : K \to \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $T : K \to K$, her $x \in K$ için

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\varphi(x_0) = \inf\{\varphi(x): x \in K\}$ olacak şekilde bir $x_0 \in K$ noktasının var olduğunu biliyoruz. $T: K \to K$ bir dönüşüm olduğundan $\varphi(Tx_0) \in K$ olup infimum tanımı gereği $\varphi(x_0) \leq \varphi(Tx_0)$ olur. Böylece

$$0 \leq d(x_0, Tx_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(Tx_0) \leq 0$$

olduğundan $x_0 = Tx_0$ bulunur. Yani T bir sabit noktaya sahiptir.

Lemma 3.2.1. (X, d) bir tam metrik uzay ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $\{x_n\}$, X içinde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsar ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, z) \leq \varphi(x_n) - \varphi(z)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

eşitsizliği sağlandığından $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi azalandır. Ayrıca φ fonksiyonu alttan sınırlı olduğundan $\{\varphi(x_n)\}$ yakınsaktır. Diğer taraftan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=0}^{m-1} d(x_n, x_{n+1}) = d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_m)$$

$$\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_m)$$

$$\leq \varphi(x_0) - inf_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)$$

olduğundan $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_0) - inf_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)$$

bulunur ki bu, serinin yakınsak olduğunu gösterir. Ayrıca $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} d(x_k, x_{k+1})$$

olur ki yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfır olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir. Yani $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan bu dizi bir $z \in X$ noktasına yakınsar. Ayrıca $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})$$

$$\leq \varphi(x_n) - \varphi(x_m)$$

olduğundan $m \to \infty$ için limit alınır ve φ fonksiyonunun alttan yarı sürekli olduğu düşünülürse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, z) \leq \varphi(x_n) - \varphi(z)$$

bulunur.

Teorem 3.2.2. (X, d) bir tam metrik uzay ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki

$$inf_{x \in X} \varphi(x) < \varphi(u)$$

olacak şekildeki her $u \in X$ için $u \neq v$ ve $d(u, v) \leq \varphi(u) - \varphi(v)$ şartlarını sağlayan bir $v \in X$ var olsun. Bu durumda

$$\varphi(x_0) = inf_{x \in X} \varphi(x)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır.

İspat. Her $y \in X$ için

$$inf_{x\in X}\varphi(x) < \varphi(y)$$

olduğunu kabul edelim. $u_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$inf_{x\in X}\varphi(x) < \varphi(u_0)$$

olduğundan $u_0 \neq u_1$ ve $d(u_0, u_1) \leq \varphi(u_0) - \varphi(u_1)$ olacak şekilde $u_1 \in X$ vardır. Yine

$$inf_{x\in X}\varphi(x) < \varphi(u_1)$$

olduğundan $u_1 \neq u_2$ ve $d(u_1, u_2) \leq \varphi(u_1) - \varphi(u_2)$ olacak şekilde $u_2 \in X$ vardır. Bu şekilde devam ederek $u_{n-1} \in X$ noktasını seçelim. Şimdi

$$S_n = \{w \in X: d(u_{n-1}, w) \leq \varphi(u_{n-1}) - \varphi(w)\}$$

olsun. Yukarıdaki düşünce ile $S_n \neq \emptyset$ olduğu gösterilebilir. İnfimum tanımı göz önüne alınırsa her $\varepsilon > 0$ için

$$\varphi(z) < inf_{w\in S_n}\varphi(w) + \varepsilon$$

olacak şekilde $z \in S_n$ vardır.

O halde

$$\varphi(u_{n-1}) - inf_{w \in S_n} \varphi(w) > 0$$

olduğundan

$$\varphi(u_n) < inf_{w \in S_n} \varphi(w) + \frac{1}{2}\{\varphi(u_{n-1}) - inf_{w \in S_n} \varphi(w)\}$$

olacak şekilde $u_n \in S_n$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(u_{n-1}, u_n) \leq \ \varphi(u_{n-1}) - \varphi(u_n)$$

olduğundan bir önceki lemma gereği $\{u_n\}$ dizisi bir $u \in X$ noktasına yakınsar. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(u_{n-1}, u) \leq \ \varphi(u_{n-1}) - \varphi(u)$$

eşitsizliği sağlanır. Yine

$$inf_{x \in X} \varphi(x) < \varphi(u)$$

olduğundan $u \neq v$ ve $d(u, v) \leq \varphi(u) - \varphi(v)$ olacak şekilde $v \in X$ vardır.

Böylece

$$\begin{aligned}\varphi(v) &\leq \varphi(u) - d(u,v)\\ &\leq \varphi(u) - d(u,v) + \varphi(u_{n-1}) - \varphi(u) - d(u_{n-1},u)\\ &= \varphi(u_{n-1}) - [d(u,v) + d(u_{n-1},u)]\\ &\leq \varphi(u_{n-1}) - d(u_{n-1},v)\end{aligned}$$

olduğundan $v \in S_n$ olur. O halde

$$2\varphi(u_n) - \varphi(u_{n-1}) \leq inf_{w \in S_n}\varphi(w) \leq \varphi(v)$$

olup

$$\varphi(v) < \varphi(u) \leq \lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) \leq \varphi(v)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece

$$\varphi(x_0) = inf_{x \in X}\varphi(x)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır.

Şimdi Caristi sabit nokta teoremini ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 3.2.3. (Caristi) (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Eğer T dönüşümü sürekli ise teoremin ispatı basittir. Gerçekten $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

olacağından yukarıdaki lemma gereği $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla bu dizi bir $z \in X$ için noktasına yakınsar. T dönüşümü sürekli olduğundan $Tz = z$ bulunur.

Şimdi T dönüşümünün sürekli olmaması durumunda ispatı yapalım. Bunun için $u \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$C = \{x \in X: d(u, x) \leq \varphi(u) - \varphi(x)\}$$

kümesini göz önüne alalım. $Tu \in C$ olduğundan C boş değildir. Ayrıca C bir kapalı yuvar olduğundan bir kapalı kümedir. Şimdi $TC \subseteq C$ olduğunu gösterelim. $x \in C$ olsun. O halde $d(u,x) \leq \varphi(u) - \varphi(x)$ olup

$$\begin{aligned} \varphi(Tx) &\leq \varphi(x) - d(x,Tx) \\ &\leq \varphi(x) - d(x,Tx) + \varphi(u) - \varphi(x) - d(u,x) \\ &= \varphi(u) - [d(x,Tx) + d(u,x)] \\ &\leq \varphi(u) - d(u,Tx) \end{aligned}$$

olduğundan $Tx \in C$ dir.

Şimdi kabul edelim ki her $x \in C$ için $Tx \neq x$ olsun. O halde her $x \in C$ için $x \neq w$ ve $d(x,w) \leq \ \varphi(x) - \varphi(w)$ olacak şekilde $w \in C$ vardır. Dolayısıyla

$$\varphi(x_0) = inf_{x \in C} \varphi(x)$$

olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır. Böylece

$$0 < d(x_0, Tx_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(Tx_0) = 0$$

olup bu bir çelişkidir. O halde $Tz = z$ olacak şekilde bir $z \in C \subseteq X$ vardır.

Caristinin teoremi sabit noktanın tekliğini garanti etmez

Örnek 3.2.1. $X = [0, \infty)$ alışılmış metrik ile birlikte göz önüne alınsın. $T: X \to X$ dönüşümü $Tx = x$ ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi(x) = 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) = 0 \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

olduğundan Caristi sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanır. Ancak T dönüşümünün sabit noktası tek değildir.

Şimdi Caristi sabit nokta teoremi yardımıyla Banach sabit nokta teoreminin ispatını verelim.

Teorem 3.2.4. (Banach) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise *T* nin *X* de bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $\varphi: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $\varphi(x) = (1 - L)^{-1} d(x, Tx)$ şeklinde tanımlayalım. φ fonksiyonunun alttan sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca T bir büzülme dönüşümü olduğundan sürekli ve dolayısıyla φ de süreklidir. O halde φ alttan yarı süreklidir. Yine T bir büzülme dönüşümü olduğundan her $x \in X$ için $d(Tx, T^2x) \leq Ld(x, Tx)$ eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$d(x, Tx) - Ld(x, Tx) \leq d(x, Tx) - d(Tx, T^2x)$$

olup buradan

$$d(x, Tx) \leq (1 - L)^{-1}[d(x, Tx) - d(Tx, T^2x)] = \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

elde edilir. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

olacağından yukarıdaki lemma gereği $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla bu dizi bir $z \in X$ için noktasına yakınsar. T dönüşümü sürekli olduğundan $Tz = z$ bulunur.

Şimdi Caristi sabit nokta teoreminin kısmi sıralama bağıntısı yardımıyla yapılan ispatını vermek için aşağıdaki lemmayı göz önüne alalım.

Lemma 3.2.2. (X, d) bir metrik uzay ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x, y \in X$ için

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

şeklinde tanımlanan $\preccurlyeq$ bağıntısı X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat. Her $x \in X$ için $d(x, x) = 0 \leq \varphi(x) - \varphi(x)$ olduğundan $x \preccurlyeq x$ dir. Yani $\preccurlyeq$ yansımalıdır. $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq x$ ise $d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$ ve $d(y, x) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$ olacağından $2d(x, y) \leq 0$ veya $x = y$ olur. Yani $\preccurlyeq$ ters simetriktir.

Son olarak $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z$ ise $d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$ ve $d(y, z) \leq \varphi(y) - \varphi(z)$ olacağından $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \varphi(x) - \varphi(z)$ olur. O halde $x \preccurlyeq z$ olup $\preccurlyeq$ geçişmelidir.

Örnek 3.2.2. $X = \mathbb{R}$ ve d alışılmış metrik olsun. $\varphi: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi(x) = -x$ olarak tanımlanırsa φ ve d yardımıyla elde edilen sıralama $\mathbb{R}$ üzerinde bilinen sıralama olur.

Teorem 3.2.5. (Bishop-Phelps) (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her bir $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq z$ şartını sağlayan bir $z \in X$ vardır. Yani her bir $x_0 \in X$ için

$$\varphi(z) + d(x_0, z) \leq \varphi(x_0)$$

ve $x \neq z$ olacak şekildeki her $x \in X$ için

$$\varphi(z) < d(x, z) + \varphi(x)$$

olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

İspat. Her $u \in X$ için

$$A(u) = \{y \in X: u \preccurlyeq y\}$$

olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} A(u) &= \{y \in X: d(u, y) \leq \varphi(u) - \varphi(y)\} \\ &= \{y \in X: \varphi(y) + d(u, y) \leq \varphi(u)\} \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\mu: X \to \mathbb{R}$, $\mu(y) = \varphi(y) + d(u, y)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli olduğundan $A(u)$ kümesi kapalıdır. Şimdi $x_0 \in X$ verilsin. $x_1 \in A(x_0)$ noktasını

$$\varphi(x_1) \leq 1 + inf_{x \in A(x_0)} \varphi(x)$$

olacak şekilde seçelim. Bu durumda $x_1 \in A(x_0)$ olduğundan $x_0 \preccurlyeq x_1$ olur. Yine $x_2 \in A(x_1)$ noktasını

$$\varphi(x_2) \leq \frac{1}{2} + inf_{x \in A(x_1)} \varphi(x)$$

olacak şekilde seçelim. Bu durumda $x_2 \in A(x_1)$ olduğundan $x_1 \preccurlyeq x_2$ olur. Bu şekilde devam ederek $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ noktaları için $x_n \in A(x_{n-1})$ noktasını

$$\varphi(x_n) \leq \frac{1}{n} + inf_{x \in A(x_{n-1})} \varphi(x)$$

olacak şekilde seçelim.

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A(x_{n-1})$ olduğundan

$$x_0 \preccurlyeq x_1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_n \preccurlyeq \cdots$$

olur. Böylece bu şekilde oluşturulan $\{A(x_n)\}$ küme dizisi iç içe azalan bir dizidir. Şimdi $A(x_n)$ kümesinin çapını hesaplayalım. $v \in A(x_n) \subseteq A(x_{n-1})$ olsun. O halde

$$\varphi(v) \geq inf_{x \in A(x_{n-1})} \varphi(x) \geq \varphi(x_n) - \frac{1}{n}$$

ve $x_n \preccurlyeq v$ olduğundan

$$d(x_n, v) \leq \varphi(x_n) - \varphi(v) \leq \frac{1}{n}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \text{Ç}apA(x_n) &= \sup\{d(u,v): u, v \in A(x_n)\} \\ &\leq \sup\{d(u,x_n) + d(x_n,v): u, v \in A(x_n)\} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

elde edilir.O halde Cantor teoremi gereği

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A(x_n)$$

kümesi tek noktadır. Bu noktayı z ile gösterelim. O halde $z \in A(x_0)$ olduğundan $x_0 \preccurlyeq z$ olur. Üstelik z maksimaldir. Çünkü bir $u \in X$ için $z \preccurlyeq u$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z \preccurlyeq u$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için $u \in A(x_n)$ olur. Yani

$$u \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A(x_n)$$

olur ki burada $u = z$ olmalıdır.

Şimdi Caristinin teoreminin bu sıralama yardımıyla yapılan ispatına yer verelim.

İspat. X üzerinde φ ve d yardımıyla elde edilen sıralamayı göz önüne alırsak Bishop-Phelps teoreminin tüm şartları sağlanır. Bu durumda X in z gibi bir maksimal elemanı vardır. Böylece

$$d(z, Tz) \leq \varphi(z) - \varphi(Tz)$$

eşitsizliği sağlandığından $z \preccurlyeq Tz$ elde edilir. z maksimal olduğundan $Tz = z$ olmalıdır.

Caristinin teoreminin Zorn lemma yardımıyla yapılan ispatını vermek için topolojideki ağ tanımını hatırlayalım.

Tanım 3.2.2. Λ bir küme ve $\preccurlyeq$ de Λ üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer

i) her $\alpha \in \Lambda$ için $\alpha \preccurlyeq \alpha$,

ii) $\alpha \preccurlyeq \beta$ ve $\beta \preccurlyeq \gamma$ olacak şekildeki her $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ için $\alpha \preccurlyeq \gamma$,

iii) her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $\alpha \preccurlyeq \theta$ ve $\beta \preccurlyeq \theta$ olacak şekilde bir $\theta \in \Lambda$ var

özellikleri sağlanıyorsa Λ ya $\preccurlyeq$ bağıntısına göre yönlendirilmiş bir küme denir.

Örneğin $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri bilinen sıralama bağıntısına göre birer yönlendirilmiş kümedir. Üstelik her tam sıralı küme üzerindeki sıralama bağıntısına göre bir yönlendirilmiş kümedir.

Tanım 3.2.3. Λ yönlendirilmiş bir küme ve X herhangi bir küme olsun. Her bir $x: \Lambda \to X$ fonksiyonuna X in elemanlarından oluşan bir ağ denir. $\alpha \in \Lambda$ nın x fonksiyonun altındaki görüntüsünü x_α ile gösterecek ve dolayısıyla X deki bir ağı $\{x_\alpha\}$ şeklinde göstereceğiz.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi her dizi bir ağdır. Yine $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı her fonksiyon bir ağdır. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $C \subseteq X$ bir zincir olsun. Bu durumda C tam sıralı bir küme olduğundan bir yönlendirilmiş kümedir. Bu nedenle C üzerinde tanımlı her fonksiyon bir ağdır. Özellikle $x: C \to X$, $x_\alpha = \alpha$ şeklinde tanımlı fonksiyon bir ağ olduğundan her zinciri bir ağ olarak göz önüne alabiliriz. (X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\preccurlyeq$ bağıntısı φ ve d yardımıyla elde edilen kısmi sıralama olsun. Bu durumda $C \subseteq X$ bir zincir ise $x_\alpha = \alpha$ olarak tanımlanan $\{x_\alpha\}$ ağı azalmayandır. Yani $\alpha \preccurlyeq \beta$ ise $x_\alpha \preccurlyeq x_\beta$ dır.

Bu durumda

$$d(x_\alpha, x_\beta) \leq \varphi(x_\alpha) - \varphi(x_\beta)$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Şimdi Caristinin teoreminin Zorn lemma yardımıyla yapılan ispatını inceleyelim.

İspat. X üzerinde φ ve d yardımıyla elde edilen kısmi sıralamayı göz önüne alalım. $C \subseteq X$ bir zincir olsun. Önce C nin bir üst sınıra sahip olduğunu göstereceğiz. C nin bütün elemanlarını $x_\alpha = \alpha$ olarak tanımlanan $\{x_\alpha\}$ ağı ile tarayabiliriz. Bu durumda $\{x_\alpha\}$ ağı azalmayan olduğundan $\{\varphi(x_\alpha)\}$ reel sayıların artmayan bir ağıdır. O halde φ alttan sınırlı olduğundan $inf_{\alpha\in C}\varphi(x_\alpha)$ mevcuttur. Şimdi $\{\alpha_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(\alpha_n) = inf_{\alpha\in C}\varphi(x_\alpha)$$

olacak şekilde C nin elemanlarından oluşan ve artan bir dizi olsun. Böylece $m > n$ için $\alpha_n \preccurlyeq \alpha_m$ olduğundan $x_{\alpha_n} \preccurlyeq x_{\alpha_m}$ olur. O halde

$$d(x_{\alpha_n}, x_{\alpha_m}) \le \varphi(x_{\alpha_n}) - \varphi(x_{\alpha_m})$$

olacağından

$$\lim_{n,m\to\infty} d\left(x_{\alpha_n}, x_{\alpha_m}\right) = 0$$

olur. Yani $\{x_{\alpha_n}\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_{\alpha_n} = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Yukarıdaki eşitsizlikte $m \to \infty$ için limit alınır ve φ alttan yarı sürekli olduğu dikkate alınırsa

$$d(x_{\alpha_n}, z) \le \varphi(x_{\alpha_n}) - \varphi(z)$$

elde edilir. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{\alpha_n} \preccurlyeq z$ olur. Bu durumda z, $\{x_{\alpha_n}\}$ dizisinin bir üst sınırıdır. z nin aynı zamanda $\{x_\alpha\}$ ağının bir üst sınırı olduğunu görmeliyiz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{\alpha_n} \preccurlyeq x_\beta$ olacak şekilde $\beta \in C$ elemanını göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi(x_\beta) \leq \varphi(x_{\alpha_n})$$

olduğundan

$$\varphi(x_\beta) = inf_{\alpha \in C}\varphi(x_\alpha)$$

elde edilir. Buradan

$$d(x_{\alpha_n}, x_\beta) \leq \varphi(x_{\alpha_n}) - \varphi(x_\beta)$$

olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d\left(x_{\alpha_n}, x_\beta\right) &\leq \lim_{n\to\infty} \varphi\left(x_{\alpha_n}\right) - \varphi\left(x_\beta\right) \\ &= inf_{\alpha \in C}\varphi(x_\alpha) - \varphi\left(x_\beta\right) = 0 \end{aligned}$$

veya $lim_{n\to\infty} x_{\alpha_n} = x_\beta$ bulunur. Limitin tekliğinden $x_\beta = z$ elde edilir. Diğer yandan en az bir $\beta \in C$ için $x_\beta \preccurlyeq x_{\alpha_n}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda $x_\beta \preccurlyeq z$ olur.

Sonuç olarak her $\alpha \in C$ için $x_\alpha \preccurlyeq z$ olduğundan z, C nin bir üst sınırıdır. O halde Zorn lemmadan X in u gibi bir maksimal elemanı vardır. Böylece

$$d(u,Tu) \leq \varphi(u) - \varphi(Tu)$$

eşitsizliği sağlandığından $u \preccurlyeq Tu$ elde edilir. u maksimal olduğundan $Tu = u$ olmalıdır.

Caristi teoreminin bazı genelleştirmelerini incelemek için ilk olarak aşağıdaki teoremi göz önüne alalım.

Teorem 3.2.6. X boş olmayan bir küme olmak üzere $\lhd$, X üzerinde yansımalı bir bağıntı ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca

i) $x \lhd y$ ve $x \neq y$ ise $\varphi(y) < \varphi(x)$,

ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \lhd x_{n+1}$ olacak şekildeki her $\{x_n\}$ dizisi için, öyle bir $z \in X$ vardır ki her bir $k \in \mathbb{N}$ için $x_m \lhd z$ olacak şekilde $m \geq k$ vardır.

şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

a) $2 \leq i \leq n$ için $x_{i-1} \lhd x_i$ ve $x_n \lhd z$ olacak şekilde X in sonlu sayıda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanı vardır.

b) $z \lhd x$ olması $z = x$ olmasını gerektirir.

Bu teoremde $\lhd$ bağıntısının sadece yansımalı olduğu kabul edilmiştir. Ancak (i) şartından bu bağıntının ters simetrik olduğu elde edilebilir. Yine de geçişme özelliği var olmadığından $\lhd$ bağıntısı bir sıralama bağıntısı olmayabilir. Burada $\ll$

bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğu kabul edilirse yukarıdaki teoremden Brezis-Browder ın sıralama prensibi olarak bilinen aşağıdaki teoremi bir özel hal olarak elde edebiliriz.

Teorem 3.2.7. (Brezis-Browder) $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca

i) $x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ ise $\varphi(y) < \varphi(x)$,

ii) X de azalmayan her dizi, X de bir üst sınıra sahip olsun.

şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda verilen her $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq z$ olacak şekilde maksimal bir $z \in X$ noktası vardır.

Şimdi Caristi teoreminin bazı genelleştirmelerine yer verelim.

Teorem 3.2.8. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq maks\{c(\varphi(x)), c(\varphi(Tx))\}\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. X üzerinde

$$x \lhd y \Leftrightarrow d(x, y) \leq maks\{c(\varphi(x)), c(\varphi(y))\}\{\varphi(x) - \varphi(y)\}$$

şeklinde tanımlı $\lhd$ bağıntısını göz önüne alalım. Bu bağıntının yansımalı olduğu açıktır. Ayrıca $x \lhd y$ ve $x \neq y$ ise $d(x,y) > 0$ olduğundan $\varphi(y) < \varphi(x)$ olur. Şimdi $\{x_n\}$ dizisi X de her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \ll x_{n+1}$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Böylece $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi reel sayıların artmayan ve alttan sınırlı bir dizisi olur. O halde $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = r$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ vardır. c fonksiyonu üstten yarı sürekli olduğundan $limsupc(\varphi(x_n)) \leq c(r)$ olur. Böylece her $n \geq n_0$ için $c(\varphi(x_n)) \leq c(r) + 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. Şimdi her $n \geq n_0$ için $x_n \lhd x_{n+1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq maks\{c(\varphi(x_n)), c(\varphi(x_{n+1}))\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\} \\ &\leq \{c(r)+1\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\} \end{aligned}$$

olup $m > n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \{c(r)+1\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için $x_m \lhd z$ olacak şekilde $m \geq k$ sayısının var olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki üç durumu inceleyelim.

Durum 1. Kabul edelim ki

$$c(\varphi(x_m)) = \sup\{c(\varphi(x_n)) : n \geq m\}$$

olacak şekilde bir $m \geq k$ var olsun. Bu durumda her $n \geq m$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

olur. Böylece $n \geq m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - \varphi(x_n)\} \end{aligned}$$

elde edilir ki $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_m, z) \leq c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - \varphi(z)\}$$

bulunur. Bu ise $x_m \lhd z$ olduğunu gösterir.

Durum 2. Kabul edelim ki $m \geq k$ için $c\big(\varphi(x_n)\big) > c\big(\varphi(x_m)\big)$ olacak şekilde bir $n > m$ var fakat $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = r = \varphi(z)$ olsun. Bu durumda c üstten yarı sürekli olduğundan

$$\sup\{c\big(\varphi(x_n)\big) : n \geq k\} = limsupc\big(\varphi(x_n)\big) \leq c\big(\varphi(z)\big)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece $n \geq k$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \max\{c\big(\varphi(x_n)\big), c\big(\varphi(x_{n+1})\big)\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

$$\leq c\big(\varphi(z)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

olacağından yukarıdaki düşünce ile

$$d(x_n, x_k) \leq c\big(\varphi(z)\big)\{\varphi(x_k) - \varphi(x_n)\}$$

elde edilebilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_k, z) \leq c\big(\varphi(z)\big)\{\varphi(x_k) - \varphi(z)\}$$

bulunur ki bu $x_m \lhd z$ olduğunu gösterir.

Durum 3. Kabul edelim ki $m \geq k$ için $c\big(\varphi(x_n)\big) > c\big(\varphi(x_m)\big)$ olacak şekilde bir $n > m$ var fakat $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = r > \varphi(z)$ olsun. Bu durumda

$$\sup\big\{c\big(\varphi(x_n)\big) : n \geq k\big\} = limsupc\big(\varphi(x_n)\big) = \beta$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısının var olduğunu biliyoruz. Böylece $c\big(\varphi(x_m)\big) \geq \frac{\beta}{2}$ ve $n \geq m$ için $\varphi(x_n) \leq 2r - \varphi(z)$ olacak şekilde $m > k$ tam sayısı bulabiliriz. Buradan $n \geq m$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \max\{c\big(\varphi(x_n)\big), c\big(\varphi(x_{n+1})\big)\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

$$\leq \beta\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

$$\leq 2c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

bulunur. O halde $n \geq m$ için

$$d(x_n, x_m) \leq 2c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - \varphi(x_n)\}$$

elde edilir ki $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_m, z) \leq 2c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - r\}$$

bulunur. Diğer taraftan $\varphi(x_m) \leq 2r - \varphi(z)$ olduğundan

$$2\{\varphi(x_m) - r\} = \varphi(x_m) - 2r + \varphi(x_m) \leq \varphi(x_m) - \varphi(z)$$

olur. O halde son olarak

$$d(x_m, z) \leq c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - \varphi(z)\}$$

bulunur ki bu $x_m \lhd z$ olduğunu gösterir.

O halde Teorem 3.2.6 uygulanırsa $z \lhd y$ olması $z = y$ olmasını gerektirir. Bununla birlikte

$$d(z, Tz) \leq maks\big\{c\big(\varphi(z)\big), c\big(\varphi(Tz)\big)\big\}\{\varphi(z) - \varphi(Tz)\}$$

olduğundan $z \lhd Tz$ olur ki buradan $z = Tz$ bulunur.

Teorem 3.2.9. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artmayan bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq c\big(\varphi(x)\big)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa T dönüşümü bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x_0 \in X$ için

$$d(x_0, z) \leq \int_0^{\varphi(x_0)} c(t)dt$$

olur.

İspat. $\mu: X \to \mathbb{R}^+$, $\mu(x) = \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt$ şeklinde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. φ alttan yarı sürekli olduğundan $x_n \to x$ için $\varphi(x) \leq liminf\varphi(x_n)$ olup

$$liminf\mu(x_n) = liminf \int_0^{\varphi(x_n)} c(t)dt \geq liminf \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt = \mu(x)$$

bulunur. Yani μ fonksiyonu da alttan yarı süreklidir. Şimdi *X* üzerinde

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \mu(x) - \mu(y)$$

şeklinde tanımlı $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısını göz önüne alalım. Bu durumda Brezis-Browder sıralama prensibinin tüm şartlarının sağlandığını görmek kolaydır. O halde her $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq z$ olacak şekilde maksimal bir $z \in X$ noktası vardır. Buradan

$$d(z,Tz) \leq c\big(\varphi(z)\big)\{\varphi(z) - \varphi(Tz)\} \leq \int_{\varphi(Tz)}^{\varphi(z)} c(t)dt \ = \mu(z) - \mu(Tz)$$

elde edilir ki bu $z \preccurlyeq Tz$ olduğunu gösterir. z maksimal olduğundan $z = Tz$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$d(x_0, z) \leq \mu(x_0) - \mu(z) = \int_{\varphi(z)}^{\varphi(x_0)} c(t)dt \leq \int_{0}^{\varphi(x)} c(t)dt$$

elde edilir.

Teorem 3.2.10. (X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x,Tx) \leq c\big(\varphi(Tx)\big)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa T dönüşümü bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x_0 \in X$ için

$$d(x_0, z) \leq \int_0^{\varphi(x_0)} c(t)dt$$

olur.

İspat. $\mu: X \to \mathbb{R}^+$, $\mu(x) = \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt$ şeklinde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. φ alttan yarı sürekli olduğundan μ fonksiyonu da alttan yarı süreklidir. Şimdi X üzerinde

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \mu(x) - \mu(y)$$

şeklinde tanımlı $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısını göz önüne alalım. Bu durumda Brezis-Browder sıralama prensibinin tüm şartlarının sağlanır. O halde her $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq z$ olacak şekilde maksimal bir $z \in X$ noktası vardır. Buradan

$$d(z, Tz) \leq c\big(\varphi(Tz)\big)\{\varphi(z) - \varphi(Tz)\} \leq \int_{\varphi(Tz)}^{\varphi(z)} c(t)dt = \mu(z) - \mu(Tz)$$

elde edilir ki bu $z \preccurlyeq Tz$ olduğunu gösterir. z maksimal olduğundan $z = Tz$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$d(x_0, z) \leq \mu(x_0) - \mu(z) = \int_{\varphi(z)}^{\varphi(x_0)} c(t)dt \leq \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt$$

elde edilir.

Teorem 3.2.11. (X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x,Tx) \leq c\big(\varphi(x)\big)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. *X* üzerinde

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow d(x,y) \leq c\big(\varphi(x)\big)\{\varphi(x) - \varphi(y)\}$$

şeklinde tanımlı $\preccurlyeq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Buna göre $x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ ise $\varphi(x) > \varphi(y)$ olduğu açıktır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisi *X* de azalmayan bir dizi olsun. Bu durumda $m > n$ için $x_n \preccurlyeq x_m$ olduğundan

$$d(x_n, x_m) \leq c\big(\varphi(x_n)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\}$$

olur. $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi artmayan olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $c\big(\varphi(x_n)\big) \leq c\big(\varphi(x_1)\big)$ dir. Böylece

$$d(x_n, x_m) \leq c\big(\varphi(x_1)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\}$$

olur ki bu $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi yakınsak olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. φ

alttan yarı sürekli olduğundan $\varphi(z) \leq \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ olur ki yukarıdaki eşitsizlikten $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_n, z) \leq c\big(\varphi(x_n)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(z)\}$$

bulunur. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z$ olur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin z gibi bir üst sınıra sahip olduğunu gösterir. Böylece Brezis-Browder sıralama prensibi gereği X in u gibi bir maksimal elemanı vardır. Bu u elemanı için

$$d(u, Tu) \leq c\big(\varphi(u)\big)\{\varphi(u) - \varphi(Tu)\}$$

olduğundan $u \preccurlyeq Tu$ olur ki u maksimal olduğundan $u = Tu$ elde edilir.

Teorem 3.2.10 ve Teorem 3.2.11 karşılaştırılacak olursa aradaki farkın sadece her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq c\big(\varphi(Tx)\big)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliği yerine her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq c\big(\varphi(x)\big)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğinin kullanıldığı görülmektedir. Eğer yukarıdaki ilk eşitsizlik sağlanırsa her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olup c fonksiyonu azalmayan olduğundan

$c\big(\varphi(Tx)\big) \leq c\big(\varphi(x)\big)$ olur. Bu durumda ikinci eşitsizlikte sağlanır. Yani Teorem 3.2.11 sabit noktanın varlığı konusunda Teorem 3.2.10 dan daha geneldir. Ancak Teorem 3.2.10 da sabit noktanın uzaydaki herhangi bir nokta ile arasındaki uzaklığı veren bir kriter vardır.

Teorem 3.2.12. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için $d(x, Tx) \leq \varphi(x)$ ve

$$d(x, Tx) \leq \psi(d(x, Tx))\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliklerini sağlarsa, T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $c(t) = \sup\{\psi(s): 0 \leq s \leq t\}$ ifadesini göz önüne alalım. Bu durumda ψ fonksiyonu üstten yarı sürekli olduğundan $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ iyi tanımlı ve azalmayandır. Böylece her $x \in X$ için $d(x, Tx) \leq \varphi(x)$ olduğundan $c(d(x, Tx)) \leq c(\varphi(x))$ olur ki hipotezdeki eşitsizlikten her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq c(\varphi(x))\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.11 den ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ ve $\gamma: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli fonksiyonlar olmak üzere her $t > 0$ için

$$\gamma(t) > 0 \text{ ve } limsup_{t\to 0^+} \frac{t}{\gamma(t)} < \infty$$

olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için $d(x, Tx) \leq \varphi(x)$ ve

$$\gamma(d(x, Tx)) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliklerini sağlarsa T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\psi(0) = limsup_{t\to 0^+} \frac{t}{\gamma(t)}$$

ve $t > 0$ için

$$\psi(t) = \frac{t}{\gamma(t)}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda ψ üstten yarı sürekli bir fonksiyondur. Bu ψ fonksiyonu ile Teorem 3.2.12 nin tüm şartları sağlanır. Böylece T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Yukarıdaki sonuçta $limsup_{t\to 0^+} \frac{t}{\gamma(t)} < \infty$ şartı kaldırılamaz. Bu durumu gösteren bir örnek verelim.

Örnek 3.2.3. $X = \mathbb{R}$ ve d alışılmış metrik olsun. $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \geq -1 \\ -\dfrac{1}{x} \quad , & x < -1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. φ nin sürekli olduğu açıktır. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\varepsilon(x)$ sayısını

$$0 < \varepsilon(x) \leq \min\{\frac{1}{4}, \varphi(x)\}$$

ve $p > 1$ olmak üzere $x < -\frac{3}{4}$ için

$$\varepsilon(x)^{p-1}(|x| + \varepsilon(x))^2 \leq 1$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde seçelim. $T: X \to X$, her $x \in X$ için $Tx = x - \varepsilon(x)$ olarak tanımlanırsa her $x \in X$ için

$$d(x, Tx)^p \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, $d(x, Tx) = \varepsilon(x)$olur. Diğer taraftan $x \geq -\frac{3}{4}$ ise

$$Tx = x - \varepsilon(x) \geq x - \min\left\{\frac{1}{4}, \varphi(x)\right\} \geq -1$$

olacağından

$$\varphi(x) - \varphi(Tx) = 2\varepsilon(x) \geq d(x, Tx)^p$$

elde edilir. Şimdi $x < -\frac{3}{4}$ olsun. Bu durumda

$$\varphi(x) - \varphi(Tx) \geq -\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \varepsilon(x)} = \frac{\varepsilon(x)}{x(x - \varepsilon(x))}$$

olur. Diğer taraftan $x < -\frac{3}{4}$ için $\varepsilon(x)^{p-1}(|x| + \varepsilon(x))^2 \leq 1$ eşitsizliği sağlandığından

$$\varepsilon(x)^p \leq \frac{\varepsilon(x)}{x(x - \varepsilon(x))}$$

elde edilir. Yani

$$\varphi(x) - \varphi(Tx) \geq \varepsilon(x)^p$$

bulunur. O halde her iki durumda da

$$d(x, Tx)^p \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

elde edilir fakat T dönüşümünün sabit noktası yoktur. Burada $\gamma(t) = t^p, p > 1$ olup

$$limsup_{t\to 0^+} \frac{t}{\gamma(t)} = \infty$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 3.2.13. (X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $\psi: X \to \mathbb{R}^+$ en az bir $\delta > 0$ için

$$\sup\{\psi(x): \varphi(x) \leq \delta + \inf\{\varphi(w): w \in X\}\} < \infty$$

olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x,Tx) \leq \psi(x)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa, T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\psi(x) > 0$ olması durumunda $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ dir. Yine $\psi(x) = 0$ ise $d(x,Tx) = 0$ olacağından $\varphi(Tx) = \varphi(x)$ olur. O halde her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olur.

Şimdi

$$Y = \{x \in X: \varphi(x) \leq \delta + \inf\{\varphi(w): w \in X\}\}$$

ve $\rho = \sup\{\psi(x): x \in Y\}$ olsun. $\rho < \infty$ olduğu hipotezde verilmiştir. φ alttan yarı sürekli olduğundan Y kümesi kapalıdır. Dolayısıyla X tam olduğundan Y de tamdır. Ayrıca infimum tanımı göz önüne alınırsa Y kümesi boş değildir. Yine her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olduğundan $TY \subseteq Y$ olur. Diğer taraftan her $x \in Y$ için

$$d(x, Tx) \leq \rho\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliği de sağlanır. Şimdi $\varphi_1 : Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi_1(x) = \rho\varphi(x)$ olarak tanımlanırsa φ_1 fonksiyonu da alttan yarı sürekli olur. Sonuç olarak Y üzerinde Caristi teoreminin tüm şartları sağlandığından T dönüşümü Y de ve dolayısıyla X de bir sabit noktaya sahiptir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, matematiğin çeşitli alanlarında pek çok uygulaması bulunan Caristi sabit nokta teoreminin direkt ispatının yanı sıra, Bishop ve Phelps tarafından verilen bir kısmi sıralama bağıntısı yardımıyla Cantor arakesit teoremi ve Zorn lemması kullanılarak yapılan ispatları da detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca, Caristi sabit nokta teoreminin, Bae, Cho ve Yeom tarafından verilen ve Brezis-Browder sıralama prensibi kullanılarak yapılan bir genelleştirmesi ele alınmıştır. Daha sonra yine Bae ve Suzuki tarafından verilen farklı iki genelleştirmesi de incelenmiştir.

KAYNAKLAR

(1) Koçak. M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

(2) Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2008.

(3) Özer, O., Çöker, D., Taş, K., Soyut Matematik, İzgi Yayınları, Ankara, 1996.

(4) Granas, A., Dugundji, J., Fixed Point Theory, Springer, New York, 2003.

(5) Ran, A. C. M., Reurings, M. C. B., A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Proc. Amer. Math. Soc., 132, 1435-1443, 2004.

(6) Nieto, J. J., Rodriguez-Lopez, R., Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order, 22, 223-239, 2005.

(7) Caristi, J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amar. Math. Soc., 215, 241-251, 1976.

(8) Singh, S., Watson, B., Srivastava, P., Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-Map Principle, Kluwer Academic Publishers, 1997.

(9) Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sahu, D. R., Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer, New York, 2009.

(10) Khamsi, M. A., Remarks on Caristi's fixed point theorem, Nonlinear Anal., 71, 227-231, 2009.

(11) Bae, J. S., Cho, E. W., Yeom, S. H., A generalization of the Caristi-Kirk fixed point theorem and its applications to mapping theorems, J. Korean. Math. Soc., 31, 29-48, 1994.

(12) Suzuki, T., Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others, J. Math. Anal. Appl., 302, 502-508, 2005.

(13) Kirk, W. A., Caristi, J., Mappings theorems in metric and Banach spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 23, 891-894, 1975.

(14) Kirk, W. A., Caristi's fixed point theorem and metric convexity, Colloquium Mathematicum, 36, 81-86, 1976.

(15) Bae, J. S., Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps, J. Math. Anal. Appl., 284, 690-697, 2003.

(16) Brezis, H., Browder, F. E., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, Advances in Math., 21, 355-364, 1976.