KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI BÜZÜLME TEOREMLERİ

Ferhan ŞOLA

MAYIS 2011

Matematik Anabilim Dalında Ferhan Şola tarafından hazırlanan KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI BÜZÜLME TEOREMLERİ Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye (Danışman)	: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN	____________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI BÜZÜLME TEOREMLERİ

ŞOLA, Ferhan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Mayıs 2011, 46 sayfa

Bu tez çalışmasında kısmi metrik uzay üzerinde bazı büzülme dönüşümleri ve sabit nokta teoremleri incelenmiştir. İlk olarak metrik uzay, büzülme dönüşümleri ve sabit nokta teorisi ile ilgili ön bilgiler, temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci olarak metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri incelenip verilen büzülme şartını sağlayan fonksiyonlar ve bunların sabit noktaları üzerinde durulmuştur. Daha sonra son zamanlarda tanımlanan kısmi metrik uzay kavramı verilerek bu uzayın metrik uzaylarla olan ilişkileri ve farklılıkları incelenmiştir. Son olarak da bu tez çalışmasının orijinal kısmını oluşturan kısmi metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri ve sabit nokta teoremleri incelenmiş bununla birlikte bazı genelleştirmeler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Kısmi Metrik Uzay, Sabit Nokta, Büzülme Dönüşümleri

ABSTRACT

SOME CONTRACTION THEOREMS ON PARTIAL METRIC SPACES

ŞOLA, Ferhan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

May 2011, 46 pages

In this study some contraction mappings and fixed point theorems were analyzed on partial metric space. Firstly, advance informations, basic definitions and theorems were given about metric space, contraction mappings and fixed point theory. Secondly, contraction mappings in metric space were analyzed and functions which satisfy this contraction condition that was given and theirs fixed points were emphasized. After than, deninition of partial metric space which was described recently was given and relations and differences of between this space and metric spaces were analyzed. Finally, contraction mappings and fixed point theorems on partial metric spaces which form the original part of this study were anlayzed and also some generalizations were given.

Keywords: Partial Metric Space, Fixed Point, Contraction Mappings

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir yardımı eksik etmeyen Sayın Yrd. Doç Dr. İshak Altun'a, bilgisinden ve tecrübesinden fazlasıyla istifade ettiğim tez danışmanım Sayın Yrd. Doç Dr. Hakan Şimşek'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez yazımında karşılaştığım her türlü teknik sorunu çözerek bana destek olan kardeşim Birhan Şola'ya ve sabırlı aileme sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1.GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, araştırmacılar için son elli yıldır en ilginç çalışma alanlarından biri olmuştur. Pek çok matematikçi sabit nokta teorisini tam metrik uzaylarda büzülme tipi dönüşümler için incelemiştir. Bunların ilki ve en iyi bilineni Banach'dır. Bununla birlikte normlu uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları da yapılmış bu çalışmalar ise Brouwer ile başlamıştır. Sabit noktanın tanımına bakacak olursak;

boştan farklı bir küme olmak üzere bir dönüşüm olsun. Eğer olacak şekilde bir varsa bu noktasına dönüşümünün bir sabit noktası denir. Örneğin;

ve − , ,

olarak tanımlanırsa bu dönüşümlerden hiçbirinin sabit noktaya sahip olmadığı açıktır. Ancak olarak değiştirilirse dönüşümünün bir sabit noktası olurken dönüşümünün ve sabit noktalarıdır. Ancak her iki durumda da dönüşümünün sabit noktası yoktur. Yani sabit nokta olmayabileceği gibi birden fazla da olabilir. O halde sabit noktanın varlığı dönüşümün tanımına bağlı olduğu kadar tanımlandığı kümenin özelliklerine de bağlıdır.

Yukarıda değinildiği üzere tam metrik uzaylarda büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teorisi Banach ile başlamıştır. Banach, büzülme dönüşüm prensibi olarak da bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir.

“ bir tam metrik uzay ve dönüşümü her ve bir için şartını sağlıyorsa dönüşümü bir tek sabit noktasına sahiptir ve her için şeklinde tanımlanan dizisi noktasına yakınsar.”

Burada, olmak üzere her için şartını sağlayan dönüşümüne büzülme (daralma, contraction) dönüşümü denir. Eğer ise dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir. Ayrıca bu dönüşümler süreklidir.

Daha sonra pek çok matematikçi tarafından bu teorem genişletilmiştir. Örneğin Kannan 1968'de teoremdeki büzülme şartı yerine – olmak üzere

eşitsizliğini kullanmıştır. Bu eşitsizliğin Banach büzülme prensibinden bağımsız olduğunu da iki örnekle göstermiştir. Reich,1971'de Banach ve Kannan sabit nokta teoremlerini genişletmiştir. pozitif reel sayılar ve olmak üzere

eşitsizliğini kullanarak bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Yine 1971'de iri , olacak şekilde : fonksiyonlar olmak üzere

eşitsizliğini kullanarak bir sabit nokta teoremi ve ispatı verip bu eşitsizliği sağlayan dönüşümleri de genelleştirilmiş büzülmeler olarak adlandırmıştır. Tekrar 1972'de iri 'in de gösterdiği gibi bir dönüşümün genelleştirilmiş büzülme olması için gerek ve yeter şart

, –

olmak üzere

şartını sağlamasıdır.

Büzülme şartının diğer genelleştirilmesi 1977'de Matkowski tarafından, lineer olmayan (nonlineer) ve bazı şartları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

eşitsizliği kullanılarak sabit noktanın varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Daha sonra Agarwal, O'Regan ve diğer matematikçiler genelleştirilmiş lineer olmayan büzülme denilen

eşitsizliğini kullanarak sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır.

1.1 Kaynak Özetleri

1994 yılında Genel Topoloji ve Uygulamaları 8.Yaz Konferansında yeni bir tanım olan kısmi metrik uzay kavramı S.G. Matthews tarafından tanıtılmıştır [15]. Bilinen anlamdaki metrikten farklı olarak kısmi metrik, kendisine uzaklığı sıfırdan farklı olan küme kavramını da içermektedir. Bu açıdan kısmi metrik daha geniş bir kavramdır.

1996'da ise S.J. O'Neill, bu kavrama negatif uzaklığı da ekleyerek tanımı biraz daha genişletmiş yani kısmi metrik uzayın değer kümesini $\mathbb{R}^+$ dan $\mathbb{R}$ ye genişleterek negatif uzaklık kavramını getirmiştir. Elde ettiği bu yeni metriğe dualistik kısmi metrik adını vermiştir [18]. Daha sonra Heckmann SSD (small self distance) şartını kaldırarak zayıf kısmi metrik, T_0 ayırma aksiyomu şartını kaldırarak da zayıf pseudo kısmi metrik tanımını vermiştir [11].

Sabit nokta teorisinin kısmi metrik uzaylara taşınmasında S.G. Matthews, Banach sabit nokta teoremini bu uzaylara uygulayarak öncülük etmiştir [15]. Daha sonra S. Oltra ve O. Valero, İ. Altun ve H. Şimşek dualistik kısmi metrik uzayda sabit nokta teoremleri vermişlerdir [17,22,2].

Ayrıca topoloji ve fonksiyonel analizin temel kavramlarında C. Yıldız'ın Genel Topolololoji, O. Mucuk'un Topoloji ve Y. Soykan'ın Fonksiyonel Analiz adlı kitaplarından yararlanılmıştır [23,16,21].

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, burada bahsedilen kısmi metrik uzaylarda daha önceden verilmemiş olan büzülme tipi dönüşümler için sabit noktanın varlığını ve tekliğini vermektir. Buradan hareketle yapılan çalışma, "kısmi metrik uzayda genelleştirilmiş büzülmeler" adıyla özgün bir makale olarak basılmıştır [3].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlara değinilecektir.

2.1. Bazı Temel Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 2.1.1 : boştan farklı bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli bir fonksiyonuna bir metrik, ikilisine de bir metrik uzay denir.

1)

2) için

3) için

Bu aksiyomlardan,

olduğundan her için dır. O halde pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.2 : bir metrik uzay, ve bir reel sayı olsun.

kümesine merkezli yarı çaplı açık yuvar,

kümesine merkezli yarı çaplı kapalı yuvar,

kümesine merkezli yarı çaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.1.3 : Bir metrik uzayındaki tüm açık yuvarların sınıfını baz kabul eden topolojiye metrik topolojisi adı verilir.

Tanım 2.1.4 : Bir topolojik uzayı verilsin. Eğer metrik topolojisi olacak şekilde üzerinde bir metrik varsa bu topolojisine metriklenebilir denir.

Tanım 2.1.5 : bir metrik uzay, ve olsun.

değerine noktasının kümesine uzaklığı,

değerine ve kümeleri arasındaki uzaklık ve

değerine de kümesinin çapı denir. Çapı sonlu olan bir kümeye sınırlı küme, çapı sonlu olmayan bir kümeye ise sınırsız küme denir.

Tanım 2.1.6 : bir metrik uzay, terimleri de olan bir dizi ve olsun. Eğer her için olduğunda olacak şekilde bir varsa dizisi noktasına yakınsar denir ve veya şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7 : bir metrik uzay ve de de bir dizi olsun. olmak üzere dizisine dizisinin bir alt dizisi denir.

Önerme 2.1.1 : Bir metrik uzayında bir dizisi yakınsak ise her alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Önerme 2.1.2 : Bir metrik uzayında yakınsak her dizisi bir tek değere yakınsar.

Tanım 2.1.8 : bir metrik uzay ve de de bir dizi olsun. Eğer her için olduğunda olacak şekilde bir varsa dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Önerme 2.1.3 : Bir metrik uzayında yakınsak olan her dizisi Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.9 : Bir metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.10 : Bir metrik uzayında bir dizisi verilsin. Eğer her için olacak şekilde pozitif bir sayısı varsa ye sınırlı dizi denir.

Önerme 2.1.4 : bir metrik uzay ve olsun. kapalıdır ancak ve ancak , da bir dizi ve ise dır.

Tanım 2.1.11 : metrik uzaylar, bir fonksiyon ve olsun. Eğer noktasının her açık komşuluğu için olacak şekilde noktasının bir açık komşuluğu varsa fonksiyonu noktasında süreklidir denir. Eğer fonksiyonu in her noktasında sürekli ise ye sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.12 : ve iki metrik uzay, herhangi bir fonksiyon ve olsun. içinde herhangi bir dizisi ’ e yakınsak iken, içindeki dizisi ’ e yakınsak ise fonksiyonuna noktasında dizisel sürekli denir.

Tanım 2.1.13 : ve metrik uzaylar olmak üzere bire bir ve örten bir fonksiyonu verilsin. Eğer her için ise fonksiyonuna bir izometri, ve ye de izometrik uzaylar denir.

Tanım 2.1.14 : kümesi üzerinde ve üç metrik reel sayılar olsun. Eğer her için bağıntısı varsa bu metriklere denk metrikler denir.

Tanım 2.1.15 : boş olmayan bir küme ve reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer her ve her için

a)
b)
c) olacak şekilde var.
d) olacak şekilde var.
e)
f)
g)
h)
i)
j) (Burada ' nın birim elemanıdır.)

şartları sağlanıyorsa e cismi üzerinde bir Lineer uzay veya Vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.16 : , ℝ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her elemanını bir elemanına eşleyen ve olmak üzere,

a)
b)
c)

şartlarını sağlayan fonksiyonuna bir norm ve ikilisine ise bir normlu uzay denir.

Tanım 2.1.17 : Bir normlu uzayında her için şeklinde tanımlanan metriğe norm metriği ve bu metrik tarafından üretilen topolojiye de norm topolojisi denir. O halde her normlu uzay bir metrik uzay, dolayısıyla bir topolojik uzaydır.

Tanım 2.1.18 : Bir vektör uzayı üzerinde ve normları verilsin. Eğer bu normlar tarafından elde edilen metrikler denk ise bu normlara denk normlar denir.

Tanım 2.1.19 : bir normlu uzay olsun. Eğer norm metriğine göre tam ise uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 2.1.20 : boş olmayan bir küme ve , de bir bağıntı olsun. Eğer

a) Her için
b) ve ise
c) ve ise

şartları sağlanıyorsa bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir. ikilisine de kısmi sıralı küme denir.

Tanım 2.1.21 : kısmi sıralı bir küme ve bir dönüşüm olsun. Eğer olacak şekildeki her için oluyorsa ye azalmayan, oluyorsa artmayan dönüşüm denir.

Tanım 2.1.22 : bir metrik uzay ve bir fonksiyon olsun noktasını göz önüne alalım. olacak şekildeki her dizisi için oluyorsa fonksiyonuna noktasında alttan yarı sürekli fonksiyon, oluyorsa fonksiyonuna noktasında üstten yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer , in her noktasında alttan (üstten) yarı sürekli ise ye alttan (üstten) yarı sürekli fonksiyon denir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 3.1.1 : bir tam metrik uzay olmak üzere bir büzülme dönüşümü ise o zaman;

1) nin bir ve yalnız bir sabit noktası vardır.
2) Herhangi bir için iterasyon dizisi, nin bu sabit noktasına yakınsar. (Yani için ile tanımlı iterasyon dizisi, olacak şekildeki noktasına yakınsar.) [4]

İspat: keyfi başlangıç noktasını seçelim.

, , , … ,

iterasyon dizisini göz önüne alalım. için,

—

elde edilir. olduğundan iken limit alınırsa dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. bir tam metrik uzay olduğundan dizisi içinde yakınsaktır. Dizinin yakınsadığı noktaya diyelim. Şimdi elemanının nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

olup iken limit alınırsa dizisi e yakınsak olduğundan elde edilir ve buradan

bulunur. Şimdi bu sabit noktanın bir tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki olmak üzere olacak şekilde bir var olsun. O zaman olup

bulunur. olduğundan olmalıdır ki bu bir çelişkidir. O halde dir.

Teorem 3.1.2 : bir tam metrik uzay ve bir dönüşüm olsun. bir pozitif tam sayı olmak üzere bir büzülme dönüşümü ise bir tek sabit noktasına sahiptir. Ayrıca keyfi olmak üzere dizisi ye yakınsar. [8]

İspat: diyelim. O halde bir büzülme dönüşümü olup Banach Sabit Nokta Teoreminden bir tek sabit noktasına sahiptir. Üstelik keyfi olmak üzere dizisi ye yakınsar.

olduğundan , nin bir sabit noktasıdır. nin sabit noktası tek olduğundan olmalıdır. Yani , nin de bir sabit noktasıdır. , nin bir başka sabit noktası ise olur ki bu nin sabit noktasının tek olmasıyla çelişir. nin den başka sabit noktası yoktur. için

dizisini göz önüne alalım. Bu durumda

olduğu dikkate alınırsa

olacaktır. O halde dizisini

olarak yeniden yazabiliriz. Bu aslında

şeklindeki tane dizinin bir kombinasyonudur. Bunların her biri in bir noktasından başlayarak büzülme dönüşümüyle elde edilen iterasyon dizileridir. Böylece her biri nin bir tek sabit noktası olan ye yakınsar. O halde

dizisi dolayısıyla

dizisi ye yakınsar.

Şimdi de Banach Sabit Nokta Teoreminin bir lokal versiyonunu verelim.

Teorem 3.1.3 : bir tam metrik uzay ve olsun. dönüşümü 0 olmak üzere her için

ve

şartlarını sağlasın. Bu durumda dönüşümü de bir tek sabit noktaya sahiptir. [9]

İspat: olduğundan olacak şekilde vardır. Şimdi dönüşümü için olduğunu göstereceğiz. olsun.

olur. Böylece dir. Banach Sabit Nokta Teoremi gereğince içinde olacak şekilde bir tek sabit noktaya sahiptir. olduğundan bu sabit nokta ye aittir. Bu sabit noktanın tek olduğunu büzülme şartını kullanarak gösterelim. nin başka bir sabit noktası olsun. Buradan

olup yani bulunur.

Teorem 3.1.4 : bir tam metrik uzay bir dönüşüm ve her bir için olmak üzere iken olacak şekilde var olsun. Bir için ise o zaman dizisi nin bir sabit noktasına yakınsar. [9]

İspat: olsun. İddia ediyoruz ki bir Cauchy dizisidir. Herhangi bir verilsin. da teoremin ifadesindeki gibi seçilsin. un seçiminden tüm ler için olacak şekilde yeterince büyük bir seçebiliriz. Şimdi

olup hipotezden

ve böylece

olmasını garanti eder.

Tümevarım yoluyla için

olduğu görülür. Böylece için

bulunur ve bu sebeple bir Cauchy dizisidir. tam metrik uzay olduğundan olacak şekilde bir vardır. , dönüşümünün bir sabit noktası olmasın. Bu durumda diyelim. Aynı zamanda

olacak şekilde bir – seçebiliriz. Hipotezden

– –

olur. Sonuç olarak,

–

olur.

– – —

olduğundan bu durum bir çelişkidir. O halde , dönüşümünün bir sabit noktası yani dir.

Teorem 3.1.5 : bir tam metrik uzay ve bir dönüşüm olsun. Eğer için

(

olacak şekilde – sayısı varsa, bu durumda nin bir tek sabit noktası vardır. [12]

İspat: keyfi bir nokta olsun ve iterasyon dizisini için olarak belirleyelim. O halde

bulunur ki buradan

veya

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek için

bulunur. olduğundan olur. Böylece iken limit alınırsa

bulunur. Diğer taraftan denirse ve için

olduğundan dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Böylece tam olduğundan olacak şekilde vardır. O halde için olur ki iken limit alınırsa

dolayısıyla da elde edilir. Bu ise yani, nin sabit noktasının var olduğunu gösterir. Şimdi bu noktanın tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki olmak üzere nin bir diğer sabit noktası olsun. Bu durumda olup

çelişkisi elde edilir. O halde olmalıdır.

Burada dikkat edelim ki bir dönüşümün büzülme şartı ile şartı birbirinden bağımsızdır. Ayrıca şartını sağlayan bir dönüşümün sürekli olması gerekmez. Bu durumu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 3.1.1 : Önce büzülme şartını sağlamayan fakat şartını sağlayan dönüşüme örnek verelim. ve için olsun. dönüşümü

$-$ $-$

$-$ $-$

olarak tanımlansın. dönüşümü, $-$ noktasında sürekli olmadığından büzülme şartını sağlamaz. Ancak $-$ için şartını sağlar. Gerçekten $-$ ise ve

olduğundan

olur. − ise,

ve

olduğundan

olur. Son olarak − ve − ise,

ve

olduğundan

bulunur. Bu ise şartının sağlandığını gösterir.

Şimdi de büzülme şartını sağlayan fakat şartını sağlamayan dönüşüme örnek verelim. ve için olsun. dönüşümü

olarak tanımlansın. Bu durumda için

olduğundan – için büzülme şartı sağlanır. Ancak – ve alınırsa

– ve –

olduğundan şartını sağlayan – sayısının olmadığı açıktır. Böylece büzülme şartı ve şartının birbirinden bağımsız olduğu gösterilmiş olur. [13]

Teorem 3.1.6 : bir tam metrik uzay reel sayılar ve olmak üzere dönüşümü için,

eşitsizliğini sağlasın. O zaman bir tek sabit noktaya sahiptir. [19]

İspat: keyfi bir nokta olsun ve iterasyon dizisini için

olarak belirleyelim.O halde

olup dolayısıyla

bulunur. olduğundan dir. Bu şekilde devam edilerek

elde edilir. Buradan ve için

olup bir Cauchy dizisidir. tam olduğundan olacak şekilde vardır. Şimdi olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki olsun. Bu durumda

olup iken limit alınırsa çelişkisi elde edilir. O halde

bulunur.

Son olarak da bu sabit noktanın tekliğini gösterelim. nin bir diğer sabit noktası olsun. Bu durumda

bulunur. O halde ve dolayısıyla da dir.

Reich'ın yapmış olduğu bu teoremdeki büzülme şartı Banach ve Kannan büzülme şartlarından daha kuvvetlidir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1.2 : ve için olsun. dönüşümü

$-$

$-$

şeklinde tanımlansın. dönüşümü, noktasında sürekli olmadığından Banach büzülme şartını sağlamaz. Ayrıca

$-$ $-$ $-$ $-$

olduğundan dönüşümü, Kannan büzülme şartı olarak bilinen şartını da sağlamaz. Ancak Reich büzülme şartı olan şartı $-$, $-$, $-$ alınması halinde sağlanır. [19]

Teorem 3.1.7 : bir tam metrik uzay ve bir dönüşüm olsun. Eğer için

şartını sağlatacak şekilde 0 $-$ sayısı varsa bir tek sabit noktaya sahiptir. [5]

İspat: keyfi olsun. için

şeklinde tanımlı dizisini göz önüne alalım.

olup buradan

bulunur. Yani olmak üzere için

elde edilir. Bu ise

olduğunu gösterir. dizisinin Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.1.1 ya da Teorem 3.1.5 deki gibi gösterilebilir. Bu durumda

olacak şekilde vardır. Yine

olup iken limit alınırsa

olur bu ise olmasını gerektirdiğinden nin bir sabit noktasıdır. Tekliğini göstermek için nin diğer bir sabit noktası olsun. O halde

elde edilir. Bu durumda ve dolayısıyla bulunur.

Banach büzülme prensibinin bir genelleştirmesi olan nonlineer (lineer olmayan) büzülme tipi dönüşümler için sabit noktanın varlığını vermeden önce nonlineer fonksiyonun özelliklerini verelim.

ve bir fonksiyon olsun. için aşağıdaki şartları göz önüne alalım.

1) azalmayandır. Yani ise
2) için
3)
4) sürekli
5) için
6) için yakınsak
7)
8) alt toplamsal yani

Bu durumda fonksiyonu (1) ve (2) yi sağlarsa (3) sağlanır. Gerçekten, olsun. O halde dır. azalmayan olduğundan olup (2) koşulundan < olur ki bu bir çelişkidir. dır.

fonksiyonu (2) ve (4) ü sağlarsa (3) sağlanır. Gerçekten sürekli olduğundan olduğundan bulunur.

fonksiyonu (1) ve (5) i sağlarsa (2) sağlanır. Gerçekten için olsun. O halde azalmayan olduğundan

olur. Bu durumda

olduğundan bu bir çelişkidir. O halde için dir.

Tanım 3.1.1 : Eğer fonksiyonu (1) ve (5) koşullarını sağlarsa ye kıyaslama fonksiyonu denir. [8]

Tanım 3.1.2 : Eğer fonksiyonu (1) ve (6) koşullarını sağlarsa ye c-kıyaslama fonksiyonu denir. [8]

Tanım 3.1.3 : bir metrik uzay ve bir dönüşüm olsun. için

olacak şekilde kıyaslama fonksiyonu varsa dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir. [8]

Teorem 3.1.8 : bir tam metrik uzay ve bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda bir tek sabit noktasına sahiptir ve için dir. [14]

İspat: keyfi bir nokta olsun. için şeklinde tanımlı dizisini göz önüne alalım. Bu durumda için

olduğundan nin (5) özelliği gereğince

olur. Diğer yandan (1) ve (5) sağlandığından (2) de sağlanır. için dir. olduğundan için

olacak şekilde bulunabilir. O halde

ve yine

bulunur. Bu şekilde devam edilerek için bulunur. Böylece için

olduğundan bir Cauchy dizisidir. tam olduğundan olacak şekilde vardır.

kıyaslama fonksiyonu olduğundan için sağlanır. O halde her büzülme dönüşümü süreklidir. Buradan

olup limitin tekliğinden bulunur. Sabit noktanın tekliğini için olmak üzere nin diğer sabit noktası olsun. olup buradan

çelişkisi bulunacağından olmalıdır.

Örnek 3.1.3 : ve için olsun.

dönüşümü — ve dönüşümü de için —

şeklinde tanımlansın.

Açık olarak görülmektedir ki bir tam metrik uzay, için ve dır. Ayrıca,

olup Teorem 3.1.8 in bütün şartları sağlanmış olur. O halde dönüşümünün de bir tek sabit noktası vardır. [14]

UYARI: Eğer olmak üzere seçilirse Teorem 3.1.1, Teorem 3.1.8 in özel bir durumu olur.

Teorem 3.1.9 : bir tam metrik uzay, bir dönüşüm ve fonksiyonu bir c-kıyaslama fonksiyonu olmak üzere için

genelleştirilmiş lineer olmayan büzülme şartı sağlansın. Bu durumda bir tek sabit noktaya sahiptir. [1]

İspat: keyfi bir nokta olmak üzere şeklinde tanımlı dizisini göz önüne alalım. için olduğunu kabul edelim. Aksi takdirde ispat biter. Böylece için bulunur. Eğer ise

olur ki bu bir çelişkidir. O halde olup için

elde edilir. Böylece

ve

olur. verilsin. olacak şekilde bulunabilir.
O halde,

olur.

–

$-$

$-$

elde edilir.

Eğer $-$ ise

$-$

$-$ $-$

$-$ $-$

olup buradan

$-$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $-$ olmalıdır. Buradan

elde edilir. Benzer şekilde olduğu gösterilebilir. Bu şekilde devam edilerek için

bulunur. O halde dizisi de bir Cauchy dizisidir. tam olduğundan

olacak şekilde vardır.

Şimdi de olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki olsun. O halde olduğundan için $-$ olarak yazılabilir.

Böylece için

–

– – – – – –

ve buradan iken limit alınırsa

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde olup dir. Yani , nin bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliğini görmek kolaydır.

3.2. Kısmi Metrik Uzaylar ve Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.2.1 : boştan farklı bir küme olmak üzere fonksiyonu için,

1)

2)

3)

4)

şartlarını sağlıyorsa ye üzerinde bir kısmi metrik, ikilisine de bir kısmi metrik uzay denir. [15]

Buradan ise 1. ve 2. şarttan olduğu açıktır ancak ise olmayabilir. Buna en temel örnek; pozitif reel sayılar olmak üzere şeklinde tanımlanan kısmi metriktir.

Tanım 3.2.2 : bir kısmi metrik uzay olsun. ve için kümesine açık yuvar denir. [15]

Önerme 3.2.1 : üzerindeki her kısmi metrik, ve için tabanı ailesi olan bir topoloji üretir. [15]

İspat : Önce ailesinin tarafından üretilen topolojisi için bir taban olduğunu gösterelim. Bunun için taban aksiyomlarını sağlatalım.

B1) ve için olduğundan olarak yazılabilir.

B2)) ve iki açık yuvar olsun. için

olarak alınırsa dir. Gerçekten,

alalım. O halde olur.

Eğer ise

olup buradan

ve kısmi metriğin 4. şartından

elde edilir. Yani dır.

Ayrıca nın tanımından olup

bulunur. Buradan

ve yine kısmi metriğin 4. şartından

elde edilir. Yani dır.

Eğer ise benzer işlemler yapılarak olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak olacak şekilde bulunmuş olur.

Şimdi de nin olduğunu gösterelim.

olacak şekildeki için kısmi metriğin 1. ve 2. şartından ya ya da olur. sayısını,

olarak seçersek ve ,

olarak seçersek ve bulunur.

Önerme 3.2.2 : , üzerinde bir kısmi metrik olmak üzere fonksiyonu şeklinde tanımlansın. Bu durumda , üzerinde bir metriktir. [15]

İspat : nin metrik aksiyomlarını sağladığını gösterelim. için

1) olsun. olduğunu gösterelim.

olup buradan

elde edilir. O halde kısmi metriğin 1. şartından dir.

Tersine olsun. olduğunu gösterelim.

2)

3)

O halde için metrik aksiyomları sağlandığından , üzerinde bir metriktir.

Tanım 3.2.3 : bir kısmi metrik uzay, terimleri de olan bir dizi ve olsun. Eğer ise dizisi noktasına yakınsar denir. [15]

Tanım 3.2.4 : bir kısmi metrik uzay ve terimleri de olan bir dizi olsun. Eğer değeri var ve sonlu ise dizisine Cauchy dizisi denir. [15]

bir kısmi metrik uzay ve deki her Cauchy dizisi olacak şekilde bir noktasına yakınsak ise e tam kısmi metrik uzay denir. [15]

Önerme 3.2.3 : bir kısmi metrik uzay olsun.

a) in de bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart de bir Cauchy dizisi olmasıdır.

b) kısmi metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart metrik uzayının tam olmasıdır. Ayrıca, sağlanır. [17]

Örnek 3.2.1 : olmak üzere fonksiyonu için şeklinde tanımlı olsun. bir kısmi metrik uzaydır. de bir – dizisini alalım. olmak üzere

– — —

bulunur. var ve sonlu olduğundan , de bir Cauchy dizisidir. O halde Önerme 3.2.3.den , de bir Cauchy dizisidir. Gerçekten,

— – —

— –

bulunur ve

olur. Bu da bize in de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.1 : bir tam kısmi metrik uzay azalmayan, sürekli ve için olacak şekilde bir fonksiyon olmak üzere dönüşümü için, eşitsizliğini sağlasın. O zaman , de bir tek sabit noktaya sahiptir. [3]

İspat: nin üzerindeki şarttan için =0 olduğu açıktır. keyfi başlangıç noktasını seçelim. için olmak üzere de bir dizisi tanımlayalım. Eğer için ise nin bir sabit noktası olacağından için olduğunu kabul edelim. O zaman,

bulunur. Eğer

ise buradan

olup olduğundan bu bir çelişkidir. O halde için olmalıdır. Buradan

ve dolayısıyla

.

Diğer taraftan

olduğundan

elde edilir ve dolayısıyla

olup bu da olduğunu gösterir. Buradan hareketle

elde edilir. Bu da dizisinin metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. tam olduğundan Önerme 3.2.3 gereğince de tamdır ve dolayısıyla dizisi de yakınsaktır. Yakınsadığı noktaya denirse olur. Tekrar Önerme 3.2.3 gereğince, elde edilir.

Bununla birlikte dizisi metrik uzayında Cauchy dizisi olduğundan dır. Ayrıca olduğundan olup nin tanımından dır. Dolayısıyla

elde edilir.

Şimdi olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim yani olsun. O zaman

–

–

–

bulunur. nin sürekliliği kullanılarak iken limit alınırsa

çelişkisi elde edilir. O halde dolayısıyla da olur.

Şimdi bu in bir tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki olmak üzere nin diğer bir sabit noktası olsun. Bu durumda çelişkisi elde edileceğinden olmalıdır.

Örnek 3.2.2 : olmak üzere için şeklinde tanımlanan kısmi metrik ile bir tam kısmi metrik uzaydır. dönüşümü için şeklinde, da şeklinde tanımlanmış olsun. O zaman için olmak üzere,

olup bu da Teorem 3.2.1 deki tüm şartların sağlandığını gösterir. Dolayısıyla , de bir tek sabit noktaya sahiptir. [3]

Dikkat edelim ki Matthews'in sonucu bu örneğe uygulanamaz, çünkü için olacak şekilde yoktur.

Eğer için Teorem 3.2.1 de olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

SONUÇ 1 : bir tam kısmi metrik uzay ve olmak üzere dönüşümü için,

–

eşitsizliğini sağlasın. O zaman , bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.2.2 : bir tam kısmi metrik uzay olsun. Eğer ise , ise olacak şekilde reel sabitler olmak üzere dönüşümü için,

şartını sağlasın. O zaman nin bir tek sabit noktası vardır. [3]

İspat: keyfi başlangıç noktasını seçelim. için olmak üzere de bir dizisi tanımlayalım. Eğer için ise nin bir sabit noktası olacağından için olduğunu kabul edelim. O zaman,

.

için, eğer ise,

eğer ise,

elde edilir.

denirse olduğu açıktır ve buradan

elde edilir. Diğer taraftan

olduğundan

bulunur ve dolayısıyla

olup bu da bize sonucunu verir. Buradan

bulunur. Bu da dizisinin metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. tam olduğundan Önerme 3.2.3 gereğince de tamdır ve dolayısıyla dizisi de yakınsaktır. Yakınsadığı noktaya denirse olur. Tekrar Önerme 3.2.3 gereğince,

elde edilir.

Bununla birlikte dizisi metrik uzayında Cauchy dizisi olduğundan dır. Ayrıca olduğundan olup nin tanımından dır. Dolayısıyla

elde edilir. Şimdi olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim yani olsun. O zaman

ve iken limit alınırsa

çelişkisi elde edilir. O halde olmalıdır dolayısıyla da olur. Şimdi bu in bir tek olduğun gösterelim. Kabul edelim ki olmak üzere nin diğer bir sabit noktası olsun. Bu durumda

bulunur ancak, olduğundan bu bir çelişkidir. O halde dir.

Teorem 3.3.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

SONUÇ 2 (Banach Tipi) : bir tam kısmi metrik uzay ve dönüşümü olmak üzere için,

eşitsizliğini sağlasın. O zaman bir tek sabit noktaya sahiptir.

SONUÇ 3 (Kannan Tipi) : bir tam kısmi metrik uzay olsun. ve olmak üzere dönüşümü için,

eşitsizliğini sağlasın. O zaman bir tek sabit noktaya sahiptir.

SONUÇ 4 (Reich Tipi) : bir tam kısmi metrik uzay olsun. ve olmak üzere dönüşümü için,

eşitsizliğini sağlasın. O zaman bir tek sabit noktaya sahiptir.

4. SONUÇLAR

[16] da tanıtılan kısmi metrik kavramı ve elde edilen sabit nokta sonuçları genelleştirilerek [1,5,11,13,15,20] de verilen büzülme tipleri ile kısmi metrik uzaylarda uygulanmış özgün sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Bu teoremlerin geçerliliği verilen örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca teoremlerin özel durumları sonuç olarak verilmiştir. Böylece bu alanda bir alt yapı oluşturulmuştur. Burada elde edilen sonuçlar kısmi metrik uzaylarda yeni birtakım büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremlerinin ispatında kullanılabilecektir.

KAYNAKLAR

[1] Agarwal R.P., O'Regan D., Sambandham M., Random and Deterministic Fixed Point Theory for Generalized Contractive Maps, Appl. Anal. (83) 711-725, 2004.

[2] Altun İ., Şimşek H., Some Fixed Point Theorems on Dualistic Partial Metric Spaces, J. Adv. Math. Studies, Vol. 1, 1-8, 2008.

[3] Altun İ., Şola F., Şimşek H., Generalized Contractions on Partial Metric Spaces, Topology and Its Applications, 157, 2778-2785, 2010.

[4] Banach S., Sur less Operations dans les Ensembles Abstarits et Leur Applications aux Equations İntegrals, Fund. Math. (3) 133-181, 1922.

[5] Chatterjea S.K., Fixed Point Theorems, C.R. Acad Bulgare Sci., 25, 727-730, 1972.

[6] iri Lj.B., Generalized Contractions and Fixed Point Theorems, Publ. Inst. Math. 12 (26), 19-26, 1971.

[7] iri Lj.B., Fixed Point for Generalized Multi-valued Mappings, Mat. Vesnik 9 (24), 265-272, 1972.

[8] iri Lj.B., Fixed Point Theory Contraction Mapping Principle, Belgrad, 2003.

[9] Granas A., Dugundji J., Fixed Point Theory, New York, 2003.

[10] Hardy G.E., Rogers T.D., A Generalization of a Fixed Point Theorems of Reich, Canad. Math. Bull. 16, 201-206, 1973.

[11] Heckmann R., Approximation of Metric Spaces by Partial Meric Spaces, Appl. Categ. Structures 7, 71-83, 1999.

[12] Kannan R., Some Results on Fixed Points, Bull. Calcutta Math. Soc. 60, 71-76, 1968.

[13] Kannan R., Some Results on Fixed Points-II, Amer. Math. Monthly 76, 405-408, 1969.

[14] Matkowski J., Fixed Point Theorems for Mappings with Contractive Iterate at a Point, Proc. Amer. Math. Soc. 62 (2), 344-348, 1977.

[15] Matthews S.G., Partial Metric Topology, in:Proc 8th Summer Conference on General Topology and its Applications, Ann. New York Acad. Sci., vol 728, pp 183-197, 1994.

[16] Mucuk O., Topoloji, Nobel Yayın Dağıtım, 2009.

[17] Oltra S., Valero O., Banach Fixed Point Theorem for Partial Metric Spaces, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 36, 17-26, 2004.

[18] O'Neill S.J., Partial Metric Valuations and Domain Theory, in: Proc 11th Summer Conference in General Topology and Applications in Ann. New York Acad. Sci. Vol 806, pp 304-315, 1996.

[19] Reich S., Kannan's Fixed Point Theorem, Boll. Unione. Mat. Ital. 4 (4) 1-11, 1971.

[20] Romaguera S., A Kirk Type Characterization of Completeness for Partial Metric Spaces, Fixed Point Theory Appl. Article ID 493298, 6 pp., 2010.

[21] Soykan Y., Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, 2008.

[22] Valero O., On Banach Fixed Point Theorems for Partial Metric Space, Appl. Gen. Topol. 6 (2), 229-240, 2005.

[23] Yıldız C., Genel Topoloji, Gazi Kitapevi, Ankara, 2005.