KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVOLÜSYON TİPİNDEKİ İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN KARAKTERİSTİK NOKTALARDA YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI

MÜJDAT AĞCAYAZI

HAZİRAN 2011

Matematik Anabilim Dalı Müjdat AĞCAYAZI tarafından hazırlanan Konvolüsyon Tipindeki İntegral Operatörler Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklığı ve Yakınsaklık Hızı adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

<u>Prof. Dr. Kerim KOCA</u>
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

<u>Yrd. Doç. Dr. SEVGİ ESEN</u>
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Doç. Dr. Ali ARAL	____________________
Üye (Danışman)	: Yrd. Doç. Dr. Sevgi ESEN	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN	____________________

…/…./2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

<u>Prof. Dr. İhsan ULUER</u>
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KONVOLÜSYON TİPİNDEKİ İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN KARAKTERİSTİK NOKTALARDA YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI

AĞCAYAZI, Müjdat
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd.Doç. Dr. Sevgi ESEN
Haziran 2011, 59 Sayfa

Bu tez, ikisi açıklama ikisi de temel bölüm olmak üzere toplam dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş bölümüdür. İkinci bölümde, temel kavramlar ve yaklaşım teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, iki parametreye bağlı konvolüsyon tipli integral operatörler ailesinin süreklilik noktasında, Lebesgue noktasında d-noktasında ve genelleştirilmiş Lebesgue noktalarında yakınsaklığı incelenmiştir. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Lineer Operatör, Süreklilik Modülü, d-Noktası, Süreklilik Noktası, Lebesgue Noktası, Genelleştirilmiş Lebesgue Noktası, Konvolüsyon Tipli Operatör , Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar, A Sınıfı.

ABSTRACT

CONVERGENCE AND THE ORDER OF CONVERGENCE OF FAMILY OF CONVOLUTION TYPE INTEGRAL OPERATORS AT CHARASTERISTIC POINTS

AĞCAYAZI, Müjdat
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M.Sc.Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sevgi ESEN
JUNE 2011, 59 pages

This thesis consists of four chapters. First chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, definitions that are necessary fort his work, approximation theory, characteristic points are examined. Moreover, some theorems about convergence at these points are given. İn the third chapter, it is investigated at the lebesgue points , d- points, generalized Lebesgue points and continuity points, an convergence of convolution type singular integral operators depending on two parameters.

Key Words: Linear Operators, Continuity Modulus, d- Points, Continuity Points, Lebesgue Points, Generalized Lebesgue Points, Convolution Type Operator, Boundary Variations Functions, Class A.

TEŞEKKÜR

Eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, yüksek lisans öğrenimimde ve tezimin hazırlık ve gelişim aşamasında her türlü desteği veren, değerli danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Sevgi ESEN e ve kıymetli arkadaşlarım ve hocalarıma sonsuz teşekkürler ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Fonksiyonlar Teorisinin en önemli alanlarından biri Yaklaşımlar Teorisi'dir. Verilen bir f fonksiyonunu daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlar dizisinin veya ailesinin belirli bir noktada veya normda limiti şeklinde gösterebilmektir. Bir fonksiyonun kendisinden farklı daha iyi özelliklere sahip olması, türevlenebilmesi integrallenebilmesi, polinom olma veya bu aralığın dışında özdeş olarak sıfır olma gibi özelliklerdir. Yaklaşım problemleri ile ilgili ilk çalışma, Weierstrass tarafından 1885 yılında yapılmıştır. Bu temel iki teoremden oluşmaktadır. Bu teoremler Yaklaşım Teorisi'nin temel teoremleri olmuştur. Lineer Pozitif Operatörlerin özel bir hali olan pozitif çekirdekli Lineer integral operatörün yakınsaklığı, matematik ve fiziğin birçok dalında önemli bir yere sahiptir. Bu tür operatörlerin yakınsaklığı ile ilgili teoremler birçok matematikçi tarafından ispatlanmıştır. Bu matematikçiler Weierstrass, Lebesgue, Poisson, Fejer, Valle-Pussin gibi ünlü matematikçilerdir. Genellikle bu matematikçilerin çalışmaları, konvolüsyon tipinde olan integral operatör aileleri veya dizilerin yakınsaklığına aittir. Daha genel teoremler Faddeev, Natanson, Romanovski, Mammedov, Hacıyev tarafından ispatlanmıştır. 1962 yılında Taberski, integrallenebilen fonksiyon sınıfındaki yaklaşım problemini iki parametreye bağlı olarak genişletmiştir. Hacıyev (1968), ve Rydzewska (1973) yaklaşım problemi için daha genel teoremler ispatlamışlardır.

Bu tezde konvolüsyon tipinde pozitif çekirdekli integral operatörlerin yakınsaklığı problemi ele alınmış ve iki parametreye bağlı olan integral operatör ailesinin karakteristik noktalardaki yakınsaklığı, bazı çalışmalar temel alınarak incelenmiştir.

1.1 Kaynak özetleri

Bu tez hazırlanırken, materyal ve yöntem kısmında Akif HACIYEV' in ''Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi'' adlı lisansüstü ders notları temel alınarak, R,G. Mammedov'un ''Fonksiyonların lineer operatörlerle Yakınsaklığı'', Akif Hacıyev, H. Hilmi Hacısalihoğlu' nun '' Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı'' ve I. P. Natanson' un '' Theory of functions of a real variable’’ kitaplarından yararlanılmıştır. Araştırma bulguları kısmında da Taberski’nin ‘‘Singular integrals depending on two parameters’’ (1962) adlı makalesi ve Harun Karslı nın ‘’ Approximation Properties of Convolution type Singular Integral Operators depending on two parameters and their derivatives in $L_1(a,b)$ ‘’ (2005) makalesinden yararlanılarak iki parametreye bağlı integral operatörler ailesinin L_1 uzayında karakteristik noktalardaki yakınsaklığı incelenmiştir.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1. L_p Uzayları

Tanım 2.1.1: L boş olmayan bir cümle ve $\mathfrak{I}$ bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye $\mathfrak{I}$ üzerinde lineer uzay denir.

a) $(L, +)$ işlemine göre değişmeli gruptur.
b) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in \mathfrak{I}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.
L1) $\alpha.x \in L$ dir.
L2) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L3) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \alpha.y$ dir.
L4) $(\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$ dir.
L5) $1.x = x$ dir.

$\mathfrak{I} = \mathbb{R}$ olması halinde reel; $\mathfrak{I} = \mathbb{C}$ olması halinde ise L ye kompleks lineer uzay denir.

Tanım 2.1.2: N lineer bir uzay olsun.

$$\| \,\|: N \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlarsa $\| \,\|$ ye N de (veya N üzerinde) norm denir.

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ dır.
N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ $\alpha \in \mathbb{R}$
N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dir.

Lineer uzay üzerinde bir norm tarif edilmişse bu uzaya normlu lineer uzay denir.

Tanım 2.1.3: X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X den alınan f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonunu karşılık getiren kurala "operatör" denir.

$L: X \rightarrow Y$ seklindeki operatörü ele alalım. $f, g \in X$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için;

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$$

koşulu sağlanıyorsa L operatörüne " lineer operatör " denir.

Tanım 2.1.4: Kabul edelim ki D reel eksenin sonlu veya sonsuz bir alt aralığı olsun.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_D |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfı $L_p(D)$ sembolü ile gösterilir. $p = 1$ için ise $L_1(D)$ olarak gösterilir. Yani

$$\int_D |f(x)| dx < \infty$$

ise $f \in L_1(D)$ dir.

Tanım 2.1.5: Kabul edelim ki D reel eksenin sonlu veya sonsuz bir alt aralığı olsun.

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlarsa $f \in L_p(D)$ normundadır denir. $p = 1$ ise $f \in L_1(D)$ normundadır denir.

Teorem 2.1.1: (Weierstrass Teoremi) f, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyon olduğunda, derecesi n den büyük olmayan öyle bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır ki bu aralığın her noktasında;

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |P_n(x) - f(x)| = 0$$

dir.

Teorem 2.1.2: (Lusin Teoremi)$\forall\varepsilon > 0$, $f \in L_p$ ve $p \ge 1$ için $[a, b]$ de öyle bir φ sürekli fonksiyonu bulabiliriz ki

$$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$$

kalır.

Teorem 2.1.3: (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ için,

$$\int |f(x)g(x)|\, dx \le \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p . \|g\|_q$$

dir.

Teorem 2.1.4: (Minkowsky Eşitsizliği) $f \in L_p$ ve $g \in L_p$ için;

$$\left(\int |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$$

dir. Ayrıca Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğini de şu şekilde verebiliriz.

$$\left(\int \left|\int f(y)K(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int \left(\int |f(y)K(x,y)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

$$= \int |f(y)| \left(\int |K(x,y)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

Burada $K(x,y)$ hem x hem de y ye göre integrallenebilen bir fonksiyondur. Buradan çıkaracağımız sonuç, integralin normu, normun integralinden küçüktür.

2.2. L_1 Uzayında Olan Fonksiyonların Süreklilik Modülü

Tanım 2.2.1: $f \in L_1(-\infty,\infty)$ olmak üzere bir süreklilik modülü ω ile gösterilir.

$$\omega_{L_1}(f;\delta) = \sup_{|t|\leq\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| \, dx$$

integraline f nin $L_1(-\infty,\infty)$ de süreklilik modülü denir. Şimdi süreklilik modülünün bazı özelliklerini verelim.

$\delta \leq \delta_1$ olduğunda

$$\omega_{L_1}(f;\delta) \leq \omega_{L_1}(f;\delta_1)$$

olduğundan L_1 deki süreklilik modülü negatif olmayan ve monoton artan bir fonksiyondur.

Lemma 2.2.1: $\omega_{L_1}(f;\delta)$ sürekli bir fonksiyondur.

Lemma 2.2.2: m doğal sayı olmak üzere,

$$\omega_{L_1}(f;m\delta) \leq m\omega_{L_1}(f;\delta)$$

dir.

İspat:

$$\omega_{L_1}(f;m\delta) = \sup_{|t|\leq m\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx$$

$t = my$ alınırsa

$$\omega_{L_1}(f;m\delta) = \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+my) - f(x)|\, dx$$

$$= \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} [|f(x+my) - f(x+(m-1)y) + f(x+(m-1)y)$$

$$-f(x+(m-2)y) + f(x+(m-2)y) \dots - f(x+y) + f(x+y) - f(x)|]dx$$

$$= \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{k=1}^{m} f(x+ky) - f(x+(k-1)y)\right| dx$$

$$\leq \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{m} |f(x+ky) - f(x+(k-1)y)|\, dx$$

$x + (k-1)y = z$ denirse,

$$\omega_{L_1}(f;m\delta) \leq \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{m} |f(z+y) - f(z)|\, dz$$

$$= m \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z+y) - f(z)|dz$$

$$= m\omega_{L_1}(f;\delta)$$

dir.

Sonuç: $\alpha > 0$ bir reel sayı olmak üzere

$$\omega_{L_1}(f;\alpha\delta) \leq (1+\alpha)\omega_{L_1}(f;\delta)$$

dir.

Lemma 2.2.3: $f \in L_1$ olmak üzere $\lim_{\delta\to 0}\omega_{L_1}(f;\delta) = 0$ dir.

İspat: $f \in L_1$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists a \in \mathbb{R}$ sayısı bulunabilir ki

$$\int_{-\infty}^{-a} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

ve

$$\int_{a}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

sağlanır. $\delta > 0$ için

$$\int_{-\infty}^{-a-\delta} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

ve

$$\int_{a+\delta}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

dir.

$$\int_{a+\delta}^{\infty} |f(x+t)|dx = \int_{a+\delta+t}^{\infty} |f(x)|dx < \int_{a}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

dir. Aynı şekilde

$$\int_{-\infty}^{-a-\delta} |f(x+t)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

elde edilir. Bunları birleştirirsek

$$\sup_{|t|\leq\delta} \int_{-\infty}^{-a-\delta} |f(x+t) - f(x)|\, dx + \int_{a+\delta}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|dx < \varepsilon$$

$$\sup_{|t|\leq\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx < \sup_{|t|\leq\delta} \int_{-a-\delta}^{a+\delta} |f(x+t) - f(x)|\, dx + \varepsilon$$

İspatı tamamlamak için sağ taraftaki ilk ifadeyi de istenildiği kadar küçük bırakmalıyız. Bunun için de Lusin teoreminden yararlanacağız. Bu teoremden dolayı $[-a-2\delta, a+2\delta]$ aralığında öyle bir sürekli φ fonksiyonu bulabiliriz ki

$$\int_{-a-2\delta}^{a+2\delta} |f(x) - \varphi(x)|dx < \varepsilon$$

dir. Bu durumda

$$\int_{-a-\delta}^{a+\delta} |f(x+t) - f(x)| = \int_{-a-\delta}^{a+\delta} |f(x+t) - \varphi(x+t)| dx$$

$$+ \int_{-a-\delta}^{a+\delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| dx + \int_{-a-\delta}^{a+\delta} |\varphi(x) - f(x)|\, dx$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$\int_{-a-\delta}^{a+\delta} |f(x+t) - \varphi(x+t)| dx < \int_{-a-\delta-t}^{a+\delta+t} |f(x) - \ \varphi(x)| dx$$

$$< \int_{-a-2\delta}^{a+2\delta} |f(x) - \ \varphi(x)| dx < \varepsilon$$

$$\int_{-a-\delta}^{a+\delta} |\varphi(x) - f(x)|\, dx < \int_{-a-2\delta}^{a+2\delta} |\varphi(x) - f(x)\ | dx < \varepsilon$$

olduğundan dolayı

$$\sup_{|t|\leq\delta} \int_{-a-\delta}^{a+\delta} |f(x+t) - f(x)| \leq 2\varepsilon + \int_{-a-\delta}^{a+\delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| dx$$

şeklinde yazılabilir. φ fonksiyonu sürekli olduğundan $|t| \leq \delta$ şartını sağlayan t ler için;

$$|\varphi(x+t) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2(a+\delta)}$$

süreklilikten dolayı yazılır. Dolayısıyla

$$\sup_{|t|\leq\delta} \int_{-a-\delta}^{a+\delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| dx < \ \varepsilon$$

elde edilir. Bu eşitsizlikleri yerlerine yazarsak ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2.4: $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\omega_{L_1}(f;\delta)}{\delta}=0$ ise f hemen hemen her yerde sabittir.

2.3. *L_1* de Olan Fonksiyonların Karakteristik Noktaları

$f\in L_1$ olmak üzere

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

$$F'(x)=f(x)$$

dir. Buna göre hemen hemen her x için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

$F(x)$ limitte yerine yazılırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(x)$$

türevde h yerine $-h$ yazılırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)\,dt=f(x)$$

yukarıdaki son iki eşitliği taraf tarafa toplarsak;

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik hemen hemen her yerde mevcuttur.

Tanım 2.3.1: Aşağıdaki özellikleri sağlayan x noktasına L_1 de olan f fonksiyonunun d-noktası denir.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h} [f(x+t)-f(x)]\,dt = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h} [f(x-t)-f(x)]\,dt = 0$$

ve bu eşitlikler toplanırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h} [f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\,dt = 0$$

ifadesi sağlanır.

Tanım 2.3.2: Eğer L_1 de olan f fonksiyonu için bir x noktasında;

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt = 0$$

sağlanıyorsa x noktasına Lebesgue noktası denir. Ya da daha genel yazılırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dt=0$$

dir.

Tanım 2.3.3: Eğer L_1 de olan f fonksiyonu için bir x noktasında;

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha+1}}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|\,dt=0 \qquad 0\le\alpha<1$$

sağlanıyorsa x noktasına genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir.

Tanım 2.3.4: Eğer L_1 de olan f fonksiyonu için bir x noktasında;

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\mu(h)}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|\,dt=0$$

sağlanıyorsa x noktasına $\mu -$ genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir. Burada $\mu(h)$, $[0,b-a]$ da tanımlı, artan, sürekli ve $\mu(0)=0$ dır.

Lemma 2.3.1: $f\in L_1$ fonksiyonu için $(-\infty,+\infty)$ aralığının hemen hemen her noktası aynı zamanda bir Lebesgue noktasıdır.

İspat: Şimdi $\varphi(x,h)$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\varphi(x,h)=\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt$$

olsun. φ fonksiyonunun integralini alırsak;

$$\|\varphi(x,h)\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| dt \right) dx$$

Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğinden

$$\leq \frac{1}{h} \int_0^h \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \right) dt$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_0^h \left(\sup_{|t| \leq h} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \right) dt$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h \omega_{L_1}(f;h)\, dt = \omega_{L_1}(f;h)$$

Buradan da söyleyebiliriz ki

$$\|\varphi(x,h)\|_{L_1} \leq \omega_{L_1}(f;h)$$

her iki tarafın h' ye göre limiti alınırsa

$$\lim_{h \to 0} \|\varphi(x,h)\|_{L_1} \leq \lim_{h \to 0} \omega_{L_1}(f;h)$$

$$\lim_{h \to 0} \omega_{L_1}(f;h) = 0$$

olduğundan

$$\lim_{h \to 0} \varphi(x,h) = 0$$

Hemen hemen her yerde bu eşitlik geçerlidir. Buna göre hemen hemen her x noktası aynı zamanda bir Lebesgue noktasıdır.

$f \in L_1$ fonksiyonunun Lebesgue noktalarının kümesini L(f), d noktalarının kümesini D(f), süreklilik noktalarının kümesini C(f) ile gösterelim. Bu durumda L(f) ⊂ D(f) olduğu açıktır. Gerçekten de

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)] \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt$$

olduğundan geçerlidir. C(f) ile süreklilik noktalarını gösterelim. f fonksiyonu x noktasında sürekli ise keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $|x - t| < \delta$ şartını sağlayan t ler için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. $h \leq \delta$ seçilirse

$$\frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} \varepsilon\, dt = \varepsilon$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt = 0$$

Bu da x noktasının Lebesgue noktası olduğunu söyler. Buradan da

$$C(f) \subset L(f) \subset D(f)$$

dir.

2.4. İntegral Operatör Aileleri ve Yaklaşım Problemleri

D tüm reel eksen veya onun bir altkümesi olsun. X normu ile bu D kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların lineer normlu uzayını gösterelim. Y de bu uzayın başka bir alt uzayı olsun. Her bir $f \in X$ için;

$$\lim_{n \to \infty} \|f(x) - \varphi_n(x)\|_X = 0$$

özelliğini sağlayacak şekilde $\varphi_n \in Y$ bulunabiliyorsa Y cümlesine X cümlesinin yoğun alt uzayı denir. Yaklaşım problemlerinde φ_n in yapısını belirlemek bu teoremin esas amaçlarından biridir. Yaklaşım teorisinin esas problemlerinden ikincisi ise yaklaşım hızının bulunması problemidir.

$$\|f(x) - \varphi_n(x)\|_X = \alpha_n \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

ise bu, $\varphi_n(x)$in $f(x)$'e yaklaşım hızını belirtir. Bu hızı bulmak için α_n 'i sıfıra giden bir başka dizi ile karşılaştırmak yeterlidir. Yani

$$0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$$

ise ve β_n de sıfıra gidiyorsa yukarıdaki eşitsizlik α_n 'in β_n'den daha hızlı sıfıra gittiğini gösterir. Fonksiyon uzayında β_n'i süreklilik modülüyle de ifade edebiliriz. Çünkü f nin süreklilik modülü olan $\omega_{L_p}(f;\delta)$ sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.

X , D kümesinde tanımlı Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyon uzayı olsun. Bu uzaydaki operatörü $x \in D$ için

$$\int_D f(t)K(x,t)dt$$

biçiminde ifade edersek bu operatörün yaklaşım özellikleri $K(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerine bağlıdır. Bu fonksiyona operatörün çekirdeği diyeceğiz.

Tanım 2.4.1: Eğer; $K(x,t) = K_1(x-t)$ olmak üzere

$$\int_D f(t)K_1(x-t)dt$$

yada f veya K_1, 2π peryotlu olduğunda

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)K_1(x-t)dt$$

şeklindeki operatöre konvolüsyon tipli operatör denir. K çekirdeği integrallenebilir (veya türevlenebilir) olduğundan

$$\int_D f(t)K_1(x-t)dt$$

operatörünü bir $g(x)$ fonksiyonu gibi düşünebiliriz.

$$g(x) = \int_D f(t).K_1(x-t)dt$$

Eğer yukarıdaki integralin düzgün yakınsaklığı gösterilirse K_1 türevlenebilir olduğundan g fonksiyonu da türevlenebilirdir. Buradaki düzgün yakınsaklığa olan ihtiyaç, türev ile integralin yer değiştirebilmesi olduğundan kaynaklanır.

2.5 Deltasal Çekirdekli Konvolüsyon Operatörleri

Tanım 2.5.1: Λ sayılar kümesi, λ_0 bu kümenin yığılma noktası olsun. $K_\lambda(t)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa K fonksiyonuna deltasal çekirdek denir.

a) $K_\lambda(t)$ negatif olmayan ve çift fonksiyondur. $\forall\lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(0)$ sonludur ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} K_\lambda(0) = \infty$$

dir.

b) $\forall\lambda \in \Lambda$ için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda(t)dt = 1$$

dir.

c) Her belirli δ sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t)\right) = 0$$

ve

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)dt = 0$$

dir.

$K_\lambda(t)$, deltasal çekirdek olmak üzere, lineer A_λ integral operatörü

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K_\lambda(x-t)dt$$

şeklinde olsun.

Lemma 2.5.1: A_λ operatörü $L_1(-\infty,+\infty)$ dan $L_1(-\infty,+\infty)$ uzayına dönüşüm yapan sürekli bir operatördür.

Tanım 2.5.2: Λ sayılar kümesi, λ_0 bu kümenin yığılma noktası olsun. $\lambda \in \Lambda$ parametresine bağlı, 2π peryotlu $K_\lambda(t)$ çekirdeği aşağıdaki koşulları sağlarsa, 2π peryotlu deltasal çekirdek denir.

a) $K_\lambda(t)$ negatif olmayan ve çift fonksiyondur. $\forall\lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(0)$ sonludur ve

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} K_\lambda(0) = \infty$$

dir.

b) $\forall\lambda \in \Lambda$ için

$$\int_{-\pi}^{+\pi} K_\lambda(t)dt = 1$$

dir.

c) Önceden belirlenmiş δ sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left(\sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t) \right) = 0$$

dir.

2.6 Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörünün $L_1(-\infty, +\infty)$ Uzayında Yakınsaklığı

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K_\lambda(x-t)dt \qquad -\infty < x < \infty$$

operatörünü göz önüne alalım. Bu operatör için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.6.1: Kabul edelim ki $K_\lambda(t)$ operatörü $[0,+\infty)$ aralığında monoton azalan deltasal çekirdek olsun. Bu durumda $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ fonksiyonu için her d noktasında

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} A_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir.

İspat: $K_\lambda(t)$ çift fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} A_\lambda(f;x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)K_\lambda(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x+t)K_\lambda(t)dt + \int_{0}^{+\infty} f(x+t)K_\lambda(t)dt \end{aligned}$$

eşitliğin sağındaki birinci integralde t yerine $-t$ yazılırsa

$$= \int_{0}^{+\infty} [f(x+t)+f(x-t)]K_\lambda(t)dt$$

deltasal çekirdeğin tanımına göre b) özelliğinden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda(t)dt = \int_{-\infty}^{0} K_\lambda(t)dt + \int_{0}^{+\infty} K_\lambda(t)dt$$

yazabiliriz. Bu son eşitliğin her iki tarafını $f(x)$ ile çarparsak

$$f(x) = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)K_\lambda(t)dt$$

Buna göre $A_\lambda(f;x) - f(x)$ farkına bakalım.

$$A_\lambda(f;x) - f(x) = \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)]K_\lambda(t)dt - 2\int_0^{+\infty} f(x)K_\lambda(t)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]K_\lambda(t)dt$$

d- noktasının tanımına göre

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\, dt = 0$$

eşitliği sağlanır.

$$F(t) = \int_0^t [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]du$$

denirse, bu eşitliğe göre $t < \delta$ olduğunda $F(t) \leq \varepsilon t$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir δ sayısı vardır.

Ayrıca $\frac{F(t)}{t} < \varepsilon$ limitin sıfıra gitmesinden dolayı böyle bir sayı bulunabilir. Ayrıca

$$dF(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

eşitliği sağlanır. Yukarıdaki eşitlikte bu farkı

$$A_\lambda(f;x) - f(x) = \int_0^\delta [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]K_\lambda(t)dt$$

$$+ \int_\delta^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]K_\lambda(t)dt$$

$$= I_1(\lambda) + I_2(\lambda)$$

Her ikisinin de sıfıra yakınsadığını gösterelim.

$I_1(\lambda)$ yı ele alalım. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_1(\lambda) = \int_0^{\delta} K_\lambda(t)dF(t)$$

$$I_1(\lambda) = K_\lambda(t)F(t)|_0^{\delta} + \int_0^{\delta} F(t)d[-K_\lambda(t)] \leq K_\lambda(\delta)F(\delta) + \varepsilon \int_0^{\delta} td[-K_\lambda(t)]$$

son integrale tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_1(\lambda) \leq K_\lambda(\delta)F(\delta) + \varepsilon\left(-tK_\lambda(t)|_0^{\delta} + \int_0^{\delta} K_\lambda(t)dt\right)$$

$$\leq \varepsilon\delta K_\lambda(\delta) - \varepsilon\delta K_\lambda(\delta) + \varepsilon \int_0^{\delta} K_\lambda(t)dt$$

$$\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)dt = \varepsilon$$

Dolayısıyla $I_1(\lambda)$ in limiti sıfırdır. Şimdi $I_2(\lambda)$ yı göz önüne alalım.

$$|I_2(\lambda)| \leq \int_{\delta}^{+\infty} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|K_\lambda(t)dt$$

$$\leq K_\lambda(\delta)\int_{\delta}^{+\infty} |f(x+t) + f(x-t)|dt + 2|f(x)|\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)dt$$

$$\leq K_\lambda(\delta) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) + f(x-t)|dt + 2\,|f(x)|\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)dt$$

$$\leq 2\|f\|_{L_1}K_\lambda(\delta) + 2|f(x)|\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)dt$$

K_λ deltasal çekirdek olduğundan yukarıdaki toplamı oluşturan ifadelerden her birinin $\lambda \to \lambda_0$ a giderken limiti sıfırdır. Bu da ispatı tamamlar.

$$B_\lambda(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_\lambda(t)\,dt$$

operatörün yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.6.2: Kabul edelim ki $K_\lambda(t)$ operatörü $[0,\pi]$ aralığında monoton azalan deltasal çekirdek olsun. Bu durumda $f \in L_1(-\pi,+\pi)$ fonksiyonu için her d-noktasında

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} B_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir.

Teorem 2.6.3: $A_\lambda(f;x)$ integralinde $K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek ve $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ olsun. Eğer $x = x_0$ f'nin süreklilik noktası ise

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} A_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir.

İspat:

$$|A_\lambda(f;x) - f(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| K_\lambda(t)dt$$

$x = x_0$ bir süreklilik noktası ise keyfi ε verildiğinde $|t| < \delta$ şartını sağlayan t ler için

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Bu fonksiyon x_0 noktasında süreklidir. Buna göre

$$|A_\lambda(f;x_0)-f(x_0)| \le \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{+\delta}^{+\infty} \right\} |f(x_0+t)-f(x_0)| K_\lambda(t)dt$$
$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_2 = \int_{-\delta}^{+\delta} |f(x_0+t)-f(x_0)| K_\lambda(t)dt \le \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda(t)dt = \varepsilon$$

$K_\lambda(t)$ çift fonksiyon olduğundan

$$I_1 + I_3 = \int_{+\delta}^{+\infty} |f(x_0+t)-f(x_0)| K_\lambda(t)dt + \int_{-\infty}^{-\delta} |f(x_0+t)-f(x_0)| K_\lambda(t)dt$$

eşitliğin sağındaki ikinci integralde $t \to -t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I_1 + I_3 = \int_{+\delta}^{+\infty} |f(x_0+t)-f(x_0)| K_\lambda(t)dt + \int_{+\delta}^{+\infty} |f(x_0-t)-f(x_0)| K_\lambda(t)dt$$
$$\le \sup_{|t|\ge\delta} K_\lambda(t) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_0+t)|dt + 2\,|f(x_0)| \int_{+\delta}^{+\infty} K_\lambda(t)dt + \sup_{|t|\ge\delta} K_\lambda(t) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_0-t)|dt$$

$K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olduğundan $\lambda \to \lambda_0$ için verilen özellikler sağladığından $I_1 + I_3$ ün limiti sıfırdır. Bu da ispatı tamamlar.

NOT: Aynı teorem süreklilik noktalarında $B_\lambda(f;x)$, 2π peryotlu fonksiyonlar için de geçerlidir.

2.7. L_1 Uzayının Normunda Yakınsaklık

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K_\lambda(x-t)dt$$

deltasal çekirdekli integral operatörünün L_1 normunda yakınsaklığını inceleyeceğiz.

Teorem 2.7.1: $A_\lambda(f;x)$ operatöründe $f \in L_1(-\infty,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_{L_1} = 0$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} A_\lambda(f;x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)K_\lambda(t)dt - f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+t) - f(x)]K_\lambda(t)dt \\ |A_\lambda(f;x) - f(x)| &\le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|K_\lambda(t)dt \end{aligned}$$

$K_\lambda(t)$ çift fonksiyon olduğundan

$$|A_\lambda(f;x) - f(x)| \le \int_{0}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|K_\lambda(t)dt + \int_{-\infty}^{0} |f(x+t) - f(x)|K_\lambda(t)dt$$

eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci integralde $t \to -t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$|A_\lambda(f;x)-f(x)|\leq\int_0^{+\infty}|f(x+t)-f(x)|K_\lambda(t)dt+\int_0^{\infty}|f(x-t)-f(x)|K_\lambda(t)dt$$
$$=\int_0^{+\infty}[|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|]\,K_\lambda(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A_\lambda(f;x)-f(x)|dx\leq\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty}|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|\,K_\lambda(t)dt\right)dx$$
$$\leq\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|)\,dx\right)K_\lambda(t)dt$$

Keyfi bir $\delta>0$ sayısı için integrali iki kısma ayıralım.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|A_\lambda(f;x)-f(x)|dx\leq\int_0^{\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|)\,dx\right)K_\lambda(t)dt$$
$$+\int_{\delta}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(|f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)|)\,dx\right)K_\lambda(t)dt$$

Her iki parçanın da ayrı ayrı sıfıra gittiğini gösterelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x\pm t)-f(x)|\,dx\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(x\pm t)|\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$$
$$\leq 3\|f\|_{L_1}$$

Yukarıdaki ve süreklilik modülünün özellikleri göz önüne alınırsa

$$\|A_\lambda(f;x)-f(x)\|_{L_1}\leq\int_0^{\delta}\left(\sup_{|t|\leq\delta}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x\pm t)-f(x)|\,dx\right)K_\lambda(t)dt$$
$$+3\|f\|_{L_1}\int_{\delta}^{\infty}K_\lambda(t)dt$$

$$= 2\omega_{L_1}(f;\delta)\int_0^{\delta} K_\lambda(t)dt + 3\|f\|_{L_1}\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)dt$$

$K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olduğundan ve süreklilik modülünün özelliklerinden

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_{L_1} = 0$$

elde edilir.

Teorem 2.7.2: $f \in L_1(-\pi,+\pi)$ için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|B_\lambda(f;x) - f(x)\|_{L_1} = 0$$

dir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1: f , $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $p = \{x_0, x_1 \dots x_n\}$, $[a,b]$ nin bir parçalanması ve P de $[a,b]$ aralığının tüm p parçalanmalarının kümesi olsun. f nin $[a,b]$ deki toplam salınımı;

$$\bigvee_a^b f = \sup_{p \in P} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

genişletilmiş reel sayısıdır. Eğer $\bigvee_a^b f < \infty$ ise f ye sınırlı salınımlıdır denir. Sınırlı salınımlı fonksiyonların sınıfı $BV[a,b\,]$ olarak gösterilir. İleride sınırlı salınımlılık var ile gösterilecek.

Tanım 3.1.2: f ve g $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı sınırlı salınımlı iki fonksiyon olsun.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

aralığının parçalanmasını alalım. $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $i = (0,1,\dots,n-1)$ ile Riemann toplamını düşünürsek

$$\sigma = \sum_{i=0}^{i-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]$$

parçalanmanın boyu $\sigma = maks(x_i, x_{i+1}) \to 0$ giderken sonlu I limitine yakınsar. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun Stieltjes integrali, $g(x)$ e bağlı olarak

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

şeklinde gösterilir. $g(x) = x$ alınırsa Riemann integrali elde edilir.

Teorem 3.1.1: Monoton fonksiyonlar sınırlı salınımlıdır.

İspat: Bilindiği gibi monoton fonksiyonlar artmayan veya azalmayan fonksiyonlardır. Örneğin f fonksiyonu artmayan olsun. Bu durumda

$x_{k-1} < x_k$ için $f(x_{k-1}) \geq f(x_k)$ olduğundan

$$\bigvee_a^b f = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = f(a) - f(b) < \infty$$

dir. Eğer f fonksiyonu azalmayan olduğunda da

$x_k > x_{k-1}$ için $f(x_k) \geq f(x_{k-1})$ olduğundan

$$\bigvee_a^b f = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = f(b) - f(a) < \infty$$

olacaktır. Bu da teoremi ispatlar.

Teorem 3.1.2: (Natanson'un genelleştirilmiş lemması) : $\varphi(t)$, $(a + \eta, b)$ aralığında tanımlı, sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun. $(0 < \eta < b - a)$. Öyle ki

$$\int_a^b v(s)ds < \infty$$

olsun. Burada $v(s) = var_{s \le t \le b}\, \varphi(t), a \le s < b$ ve $v(b) = 0$
dır. Eğer

$$M = \sup_{0<h\le b-a} \left| \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(t)dt \right| < \infty \qquad f \in L_1(a,b)$$

ise

$$I = \int_{a^+}^{b} f(t)\varphi(t)dt$$

genelleştirilmiş integrali mevcuttur ve

$$|I| \le M \int_{a}^{b} [v(s) + |\varphi(b)|]\, ds$$

dir.

İspat:

$$F(t) = \int_{a}^{t} f(u)du \qquad a \le t \le b$$

$$I_{a,b} = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\varphi(t)dt \qquad a < \alpha < \beta \le b$$

olsun. Buradan

$$I_{\alpha,\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)dF(t)$$

olup kısmi integrasyon uygularsak

$$I_{\alpha,\beta} = \varphi(t)F(t)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F(t)d\varphi(t)$$

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)d\varphi(t)\right| \leq M\int_{\alpha}^{\beta} (t-a)\, d[-v(t)]$$

sağ tarafa tekrar kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} M\int_{\alpha}^{\beta} (t-a)\, d[-v(t)] &= M\left[(\alpha - t)v(t)|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)dt\right] \\ &\leq M\left[(\alpha-\beta)v(b) + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)dt\right] \end{aligned}$$

$v(b) = 0$ olduğundan

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)d\varphi(t)\right| \leq M\int_{\alpha}^{\beta} v(t)dt$$

dir. Şimdi ilk kısmı ele alalım.

$|\varphi(t)F(t)||_{\alpha}^{\beta} \ \rightarrow\ |\varphi(t)F(t)||_{a}^{b}$ olarak genişletebiliriz. Buradan da

$$\begin{aligned} |\varphi(t)F(t)||_{a}^{b} &= |\varphi(b)F(b) - \varphi(a)F(a)| \\ &\leq |\varphi(b)|\int_{a}^{b} f(t)dt \\ &\leq |\varphi(b)|M(b-a) \\ &= |\varphi(b)|M\int_{a}^{b} ds = M\int_{a}^{b} |\varphi(b)|ds \end{aligned}$$

sonuç olarak

$$|I| \leq M \int_a^b [v(s) + |\varphi(b)|]\, ds$$

dir.

3.2 İki Parametreye Bağlı Konvolüsyon Tipli Singüler İntegral Operatörlerin Yakınsaklığı

Aşağıdaki teoremi vermeden önce bu teoremde kullanılmak üzere birkaç tane önemli özelliği verelim.

$L_{2\pi}$, $(-\pi,\pi)$ de Lebesgue integrallenebilen 2π peryotlu fonksiyonların sınıfı, $L_1(a,b)$ de, (a,b) de integrallenebilen fonksiyonların sınıfı olsun. E sayılar kümesi olmak üzere, $K: ExE \to \mathbb{R}^+$ olarak belirlenmiş $\xi \in E$ için $K(t,\xi)$, 2π peryotlu, çift, sınırlı ve t nin fonksiyonu için ölçülebilir bir fonksiyon olarak tanımlansın.
$\xi_0 \in E'$ olsun.

$K(t,\xi)$ fonksiyonunu çekirdek kabul eden

$$U(x,\xi,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(t-x,\xi)dt, \qquad f \in L_{2\pi} \tag{3.1}$$

singüler integralinin düzlemin keyfi noktalarında $(x,\xi) \to (x_0,\xi_0)$ iken yakınsaklığı incelenmiştir. Yani $(x,\xi) \to (x_0,\xi_0)$ iken $U(x,\xi,f) \to f(x_0)$ a götürecek (x,ξ) noktasını ele alacağız. Eğer,

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \int_{-\pi}^{\pi} K(t-x,\xi)dt = 1 \qquad \xi \in E \tag{3.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K(t,\xi)|dt \leq C \qquad K \in L_1\,, \qquad \text{C} = \text{sabit} \tag{3.3}$$

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \sup_{\delta \leq t \leq \pi} |K(t,\xi)| = 0 \ \ , \ \ 0 < \delta \leq \pi \tag{3.4}$$

ise f nin sürekli olduğu her x_0 noktasında

$$\lim_{(x,\xi)\to(x_0,\xi_0)} U(x,\xi,f) = f(x_0) \tag{3.5}$$

sağlanır.

Teorem 3.2.1: $K(t,\xi)$ fonksiyonunun $\forall\xi \in E$ için t nin bir fonksiyonu olarak $[0,\pi]$ de negatif olmayan ve artmayan olsun. Öyle ki (3.2) koşulunu sağlasın ve

$$\lim_{\xi \to \xi_0} K(\delta,\xi) = 0 \ \ , \tag{3.6}$$

olsun. Keyfi x_0 noktasında;

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0) \ , \qquad f \in L_{2\pi} \tag{3.7}$$

sağlansın. Bu durumda

$\lambda(\ x,\xi) = (x - x_0)K(0,\xi)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu noktalar kümesinde $(x,\xi) \to (x_0,\xi_0)$ için

$$\lim_{(x,\xi)\to(x_0,\xi_0)} U(x,\xi,f) = f(x_0)$$

dir.

İspat:

$$I(x,\xi)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K(t-x,\xi)dt-f(x_0)$$

$$\begin{aligned}I(x,\xi)&=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,K(t-x,\xi)dt-f(x_0)+f(x_0)\int_{-\pi}^{\pi} K(t-x,\xi)dt\;-f(x_0)\int_{-\pi}^{\pi} K(t-x,\xi)\,dt\\&=\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-f(x_0)]\,K(t-x,\xi)dt+f(x_0)\left[\int_{-\pi}^{\pi} K(t-x,\xi)dt\;-1\right]\end{aligned}$$

(3.2) özelliğinden sağ taraftaki ikinci integralin limiti sıfırdır. Sadece sağ taraftaki birinci integralin limitinin sıfıra gittiği gösterilirse ispat tamamlanır.

Yalnızca $-\pi<x_0\le 0$ durumunu ele alalım. (3.7) den

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır öyle ki

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0\pm h}[f(t)-f(x_0)]dt\right|<\varepsilon\quad,\qquad 0<h\le\delta$$

Varsayalım ki $\delta<\pi+x_0,\;0<x_0-x<\frac{\delta}{2}$ olsun.

$$I(x,\xi)=\int_{-\pi}^{x_0-\delta}+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}+\int_{x_0+\delta}^{\pi}[f(t)-f(x_0)]\;K(t-x,\xi)dt=I_1+I_2+I_3$$

$$|I_1|\le K(x_0-x-\delta,\xi)\int_{-\pi}^{x_0-\delta}|f(t)-f(x_0)|\,dt\le K(\frac{\delta}{2},\xi)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(x_0)|dt$$

$$|I_3|\le K(x_0-x+\delta,\xi)\int_{x_0+\delta}^{\pi}|f(t)-f(x_0)|\le K(\frac{\delta}{2},\xi)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f(x_0)|dt$$

Bu yüzden (3.6)’ dan

$$\lim_{x,\xi} I_1 = 0 \text{ ve } \lim_{x,\xi} I_3 = 0 \qquad (x,\xi) \to (x_0,\xi_0)$$

dir. Natanson'un genelleştirilmiş lemmasından dolayı

$$|I_2| \le \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left[\underset{x_0-\delta\le t\le s}{var} K(t-x,\xi) + K(x_0-x-\delta,\xi) \right] ds$$

$$+\varepsilon \int_{x_0}^{x_{0+}\delta} \left[\underset{s\le t\le x_{0+}\delta}{var} K(t-x,\xi) + K(x_0-x+\delta,\xi) \right] ds$$

$$\le \varepsilon \left[\int_{-\pi}^{\pi} K(s,\xi)ds + 2(x_0-x)K(0,\xi) \right]$$

Bu yüzden (x,ξ) noktaları (x_0,ξ_0) noktalarına yeterince yakın olurlarsa ve ayrıca $\theta = sup|(x_0-x)K(0,\xi)|$ ise $|I_2| \le 2\varepsilon(\theta+1)$ olur. Bu da teoremi ispatlar. Aralık (a,b) olduğunda aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilmiştir. Teoreme geçmeden çekirdekle ilgili tanımı verelim.

Tanım 3.2.1: Λ bir indis kümesi ve λ_0 bu kümenin yığılma noktası olsun. $K(t,\lambda)$ fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağladığı takdirde A sınıfındandır denir.

a) $K(t,\lambda)$ fonksiyonu, her bir $\lambda \in \Lambda$ için t nin bir fonksiyonu olarak tüm reel eksende tanımlıdır.

b) Her bir $\lambda \in \Lambda$ için

$$\|K(t,\lambda)\|_1 \le M < \infty$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır.

c) Her bir $\lambda \in \Lambda$ için $K(0,\lambda)$ sonludur.

d) $< a, b >$ reel eksenin herhangi bir alt aralığını göstermek üzere

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} \int_a^b K(t-x,\lambda)\,dt = 1 \qquad , \qquad x \in < a, b >$$

e) Belirlenmiş her $\gamma > 0$ sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left[\sup_{\gamma\leq|t|} |K(t,\lambda)|\right] = 0$$

dir.

$$L(f;x,\lambda) = \int_a^b f(t)K(t-x,\lambda)dt$$

operatörünün (a, b) aralığında süreklilik noktası için aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 3.2.2: $K(t,\lambda)$ fonksiyonu A sınıfından olsun ve $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için t ye göre $[a, x_0]$ aralığında azalmayan, $[x_0, b]$ aralığında artmayan olsun. Bu durumda, x_0 noktası $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun süreklilik noktası ise,

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

olur.

İspat:

$x_0 + \delta < b,\ x_0 - \delta > a$ ve $0 \leq x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ olsun.

f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan, $\forall\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|t - x_0| < \delta$ iken $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ sağlanır. Bu özelliği kullanarak $L(f; x, \lambda)$ ile $f(x_0)$ arasındaki farkın limit konumunda sıfıra gittiğini göstermeye çalışacağız. $K(t, \lambda)$ fonksiyonunun özelliğinden yararlanarak

$$|L(f; x, \lambda) - f(x_0)| = \left| \int_a^b f(t)K(t - x, \lambda)dt - f(x_0) \right|$$

$$= \left| \int_a^b f(t)K(t - x, \lambda)dt - f(x_0) \int_a^b K(t - x, \lambda)dt + f(x_0) \int_a^b K(t - x, \lambda)dt - f(x_0) \right|$$

$$\leq \int_a^b |f(t) - f(x_0)||K(t - x, \lambda)|dt + |f(x_0)| \left| \int_a^b K(t - x, \lambda)dt - 1 \right|$$

eşitsizliği yazılabilir. x_0 noktası f fonksiyonunun süreklilik noktası olduğundan, bu eşitsizliği

$$|L(f; x, \lambda) - f(x_0)| = \left\{ \int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t) - f(x_0)|\,|K(t - x, \lambda)|dt \right\}$$

$$+|f(x_0)| \left| \int_a^b K(t - x, \lambda)dt - 1 \right|$$

$$= I_1(x, \lambda) + I_2(x, \lambda) + I_3(x, \lambda) + I_4(x, \lambda)$$

şeklinde yazabiliriz.

Öncelikle $I_1(x, \lambda)$ ve $I_3(x, \lambda)$ integrallerini ele alalım.

$$I_1(x, \lambda) = \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)||K(t - x, \lambda)|dt$$

olup, $|K(t - x, \lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için t nin fonksiyonu olarak $[a, x_0]$ aralığında azalmayan olduğundan,

$$I_1(x,\lambda) \le |K(x_0 - x - \delta, \lambda)| \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)| dt$$

olur. Ayrıca $0 \le x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_1(x,\lambda) &\le \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\le \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |f(x_0)| dt\right\} \\ &= \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a)\right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer biçimde, $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için t nin fonksiyonu olarak $[x_0, b]$ aralığında artmayan olduğundan,

$$\begin{aligned} I_3(x,\lambda) &\le |K(x_0 - x + \delta, \lambda)| \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\le \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\le \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |f(x_0)| dt\right\} \\ &= \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a)\right\} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi ise $I_2(x,\lambda)$ yı göz önüne alalım.

$$I_2(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(t) - f(x_0)|\, |K(t-x,\lambda)| dt$$

olup, x_0 noktası f fonksiyonunun süreklilik noktası olduğundan ve A sınıfı özelliğinden,

$$I_2(x,\lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |K(t-x,\lambda)|dt \leq \varepsilon \int_a^b |K(t-x,\lambda)|dt \leq \varepsilon M < \infty$$

yazılır. Tüm bu eşitsizliklerin kullanılması sonucunda,

$$\begin{aligned} |L(f;x,\lambda)-f(x_0)| \leq & \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}}+|f(x_0)|(b-a)\right\} \\ & +\left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}}+|f(x_0)|(b-a)\right\}+\varepsilon M \\ & +|f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt-1\right| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $K(t,\lambda)$ çekirdek fonksiyonunun özelliklerinden,

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

eşitliği elde edilir. $0 \leq x - x_0 < \frac{\delta}{2}$ olması durumunda da ispat benzer biçimde yapılır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

$(-\infty,\infty)$ için de bu teorem aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.3 Kabul edelim ki $K(t,\lambda)$ fonksiyonu A sınıfından olsun. Eğer $f \in L_1(-\infty,\infty)$ için x_0 noktası süreklilik noktası ise, bu durumda

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

dir.

Lebesgue noktası için aşağıdaki teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 3.2.4: $K(t,\lambda)$ fonksiyonu A sınıfından olsun ve $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için t ye göre $[a,x_0]$ aralığında azalmayan, $[x_0,b]$ aralığında artmayan olsun. Bu durumda, x_0 noktası $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonun her bir noktası için,

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

dir.

İspat:

$x_0+\delta < b,\ x_0-\delta > a$ ve $0 \le x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ olsun.

x_0 noktası $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonun Lebesgue noktası olduğundan

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|\,dt = 0$$

ve

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{-h}^0 |f(x_0+t) - f(x_0)|\,dt = 0$$

eşitlikleri vardır. Yukarıdaki son iki eşitlikten ve limit tanımından $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyle ki $\forall h$, $0 < h \le \delta$ için,

$$\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt < \varepsilon h \tag{3.9}$$

ve

$$\int_{x_0-h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|dt < \varepsilon h \tag{3.10}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür.

$K(t,\lambda)$ fonksiyonunun özelliğinden ve x_0 Lebesgue noktası olduğundan

$$|L(f,x,\lambda) - f(x_0)| = \left|\int_a^b f(t)K(t-x,\lambda)dt - f(x_0)\right|$$

$$= \left|\int_a^b f(t)K(t-x,\lambda)dt - f(x_0)\int_a^b K(t-x,\lambda)dt + f(x_0)\int_a^b K(t-x,\lambda)dt - f(x_0)\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(t) - f(x_0)||K(t-x,\lambda)|dt + |f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt - 1\right|$$

$$= \int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{b} [|f(t) - f(x_0)||K(t-x,\lambda)|dt]$$

$$+|f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt - 1\right|$$

$$= I_1(x,\lambda) + I_2(x,\lambda) + I_3(x,\lambda) + I_4(x,\lambda) + I_5(x,\lambda)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu integralleri teker teker hesaplayalım.

Öncelikle $I_1(x,\lambda)$ integrali için bir eşitsizlik elde edelim.

$$I_1(x,\lambda) = \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)||K(t-x,\lambda)|dt$$

$$\leq |K(x_0 - x - \delta, \lambda)| \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)|dt$$

$$\leq \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \int_{a}^{b} |f(t)-f(x_0)|dt$$

$$\leq \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\int_{a}^{b} |f(t)|dt + \int_{a}^{b} |f(x_0)|dt\right\}$$

$$= \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a)\right\}$$

bulunur. Benzer biçimde,

$$I_4(x,\lambda) = \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t)-f(x_0)|\,|K(t-x,\lambda)|dt$$

$$\leq |K(x_0-x+\delta,\lambda)| \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t)-f(x_0)|dt$$

$$\leq \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \int_{a}^{b} |f(t)-f(x_0)|dt$$

$$\leq \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\int_{a}^{b} |f(t)|dt + \int_{a}^{b} |f(x_0)|dt\right\}$$

$$= \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a)\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$I_2(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |f(t)-f(x_0)|\,|K(t-x,\lambda)|dt$$

olup, (3.10) dan eşitsizliğin sağlandığını göz önüne alarak aşağıdaki gibi bir F fonksiyonu tanımlayalım.

$$F(t) = \int_{t}^{x_0} |f(y)-f(x_0)|dy \tag{3.11}$$

Burada $0 < x_0 - t \leq \delta$ iken

$$F(t) \leq \varepsilon(x_0 - t)$$

eşitsizliği sağlanır. $I_2(x,\lambda)$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \left| -F(x_0-\delta)K(x_0-\delta-x,\lambda) + \int_{x_0-\delta}^{x_0} F(t)\, d_t(|K(t-x,\lambda)|) \right|$$
$$\leq |F(x_0-\delta)| \left| K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right) \right| + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(t)|\, d_t(|K(t-x,\lambda)|)$$

eşitsizliği elde edilir. $[x_0-\delta, x_0]$ aralığında $d_t(|K(t-x,\lambda)|) \geq 0$ olması ve son eşitsizlikteki $|F(t)|$ fonksiyonu için, (3.11) eşitsizliğinin kullanılabileceğini gösterir. Buradan ise

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta \left| K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right) \right| + \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)\, d_t(|K(t-x,\lambda)|)$$

olacaktır. Burada tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta \left| K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right) \right| + \varepsilon \left(-\delta \left| K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right) \right| + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |K(t-x,\lambda)| dt \right)$$
$$= \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} |K(t-x,\lambda)| dt$$
$$\leq \varepsilon \int_a^b |K(t-x,\lambda)| dt$$
$$\leq \varepsilon M$$

eşitsizliğine ulaşılmış olur.

Benzer yöntemin kullanılmasıyla $I_3(x,\lambda)$ integrali ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$I_3(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} |f(t) - f(x_0)||K(t-x,\lambda)|dt$$

Bir G fonksiyonu tanımlayalım.

$$G(t) = \int_{x_0}^{t} |f(y) - f(x_0)|dy \tag{3.12}$$

G fonksiyonu, $0 < t - x_0 \leq \delta$ iken

$$G(t) \leq \varepsilon(t - x_0)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. $I_3(x,\lambda)$ integralinde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$|I_3(x,\lambda)| = \left| G(x_0+\delta)K(x_0+\delta-x,\lambda) + \int_{x_0}^{x_0+\delta} G(t)\, d_t(-|K(t-x,\lambda)|) \right|$$

$$\leq |G(x_0+\delta)| \left| K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right) \right| + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(t)|\, d_t(-|K(t-x,\lambda)|)$$

bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integrali göz önüne alalım. $[x_0, x_0+\delta]$ aralığı üzerinde $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonunun artmayan, dolayısıyla $d_t(-|K(t-x,\lambda)|) \geq 0$ olmasından dolayı ve (3.12) eşitliğinden

$$|I_3(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta \left| K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right) \right| + \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t - x_0)\, d_t(-|K(t-x,\lambda)|)$$

olacaktır. Burada tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$|I_3(x,\lambda)| \le \varepsilon\delta \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| + \varepsilon\left\{-\delta\left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |K(t-x,\lambda)|dt\right\}$$

$$= \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} |K(t-x,\lambda)|dt$$

$$\le \varepsilon \int_a^b |K(t-x,\lambda)|dt$$

$$\le \varepsilon M$$

elde edilir. Bütün eşitsizllikerin kullanılmasıyla

$$|L(f,x,\lambda) - f(x_0)| \le \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a)\right\}$$
$$+\left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a)\right\} + 2\varepsilon M$$
$$+|f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt - 1\right|$$

eşitsizliği bulunur.

$K(t,\lambda)$ fonksiyonunun özelliklerinden

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.5 : $K(t,\lambda)$ fonksiyonu A sınıfından olsun ve $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için t ye göre $[a,x_0]$ aralığında azalmayan, $[x_0,b]$ aralığında artmayan olsun ve

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |x_0 - t|\, |d_t K(t-x,\lambda)| \le C < \infty$$

şartı sağlansın. Bu durumda, x_0 noktası f fonksiyonunun bir d- noktası ise,

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.6 : $K(t,\lambda)$ fonksiyonu A sınıfından olsun. Ayrıca $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ ler için t nin fonksiyonu olarak $[a,x_0]$ aralığında azalmayan, $[x_0,b]$ aralığında ise artmayan olsun. $f \in L_1(a,b)$ için

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha+1}} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt = 0 \qquad 0 \le \alpha < 1$$

eşitliğinin sağlandığı x_0 noktasında,

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |K(t-x,\lambda)||t-x_0|^{\alpha}\, dt + 2|K(0,\lambda)||x-x_0|^{\alpha+1}$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu noktalar kümesinde,

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

eşitliği doğrudur.

İspat:

$x_0+\delta<b,\ x_0-\delta>a$ ve $0\leq x_0-x<\frac{\delta}{2}$ olsun.

$$|I(x,\lambda)|=|L(f;x,\lambda)-f(x_0)|$$

tanımını yapalım.

$K(t,\lambda)$ fonksiyonunun özelliklerini ve x_0 noktası, $f\in L_1(a,b)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası olduğu düşünülürse,

$$|I(x,\lambda)|=\left|\int_a^b f(t)|K(t-x,\lambda)|dt-f(x_0)\right|$$
$$=\left|\int_a^b f(t)|K(t-x,\lambda)|dt-f(x_0)\int_a^b|K(t-x,\lambda)|dt+f(x_0)\int_a^b|K(t-x,\lambda)|dt-f(x_0)\right|$$
$$\leq\int_a^b|f(t)-f(x_0)||K(t-x,\lambda)|dt+|f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt-1\right|$$
$$=\left\{\int_a^{x_0-\delta}+\int_{x_0-\delta}^{x_0}+\int_{x_0}^{x_0+\delta}+\int_{x_0+\delta}^{b}\right\}|f(t)-f(x_0)||K(t-x,\lambda)|dt$$
$$+|f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt-1\right|$$
$$=I_1(x,\lambda)+I_2(x,\lambda)+I_3(x,\lambda)+I_4(x,\lambda)+I_5(x,\lambda)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Şimdi bu integralleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$$I_1(x,\lambda)=\int_a^{x_0-\delta}|f(t)-f(x_0)||K(t-x,\lambda)|dt$$

$|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ ler için t nin fonksiyonu olarak $[a, x_0]$ aralığında azalmayan olduğundan

$$I_1(x,\lambda) \leq |K(x_0 - x - \delta, \lambda)| \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)| dt$$

olur. Ayrıca $0 \leq x_0 - x < \frac{\delta}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} I_1(x,\lambda) &\leq \left| K\left(-\frac{\delta}{2}, \lambda\right)\right| \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \left| K\left(-\frac{\delta}{2}, \lambda\right)\right| \left\{ \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |f(x_0)| dt \right\} \\ &= \left| K\left(-\frac{\delta}{2}, \lambda\right)\right| \left\{ \|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a) \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde,

$$\begin{aligned} I_4(x,\lambda) &= \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t) - f(x_0)|\, |K(t-x,\lambda)| dt \\ &\leq |K(x_0 - x + \delta, \lambda)| \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \left| K\left(\frac{\delta}{2}, \lambda\right)\right| \int_a^b |f(t) - f(x_0)| dt \\ &\leq \left| K\left(\frac{\delta}{2}, \lambda\right)\right| \left\{ \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |f(x_0)| dt \right\} \\ &= \left| K\left(\frac{\delta}{2}, \lambda\right)\right| \left\{ \|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a) \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$I_2(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\,|K(t-x,\lambda)|dt$$

olup, genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımını kullanırsak;

$$U(t) = \int_{t}^{x_0} |f(y) - f(x_0)|dy$$

fonksiyonu tanımlayalım. $x_0 - t \leq \delta$ iken

$$U(t) \leq \varepsilon(x_0 - t)^{\alpha+1}$$

eşitsizliği sağlanır. $I_2(x,\lambda)$ integralinde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \left| -U(x_0-\delta)K(x_0-\delta-x,\lambda) + \int_{x_0-\delta}^{x_0} U(t)\, d_t(|K(t-x,\lambda)|) \right|$$

$$\leq |U(x_0-\delta)| \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |U(t)|\, d_t(|K(t-x,\lambda)|)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1} \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| + \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha+1}\, d_t(|K(t-x,\lambda)|)$$

olacaktır. Eşitsizliğin sağındaki integralde tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1} \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| + \varepsilon\left(-\delta^{\alpha+1}\left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\right)$$
$$+\varepsilon\left((\alpha+1)\int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha}|K(t-x,\lambda)|dt\right)$$

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon(\alpha+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^\alpha |K(t-x,\lambda)|\, dt$$

eşitsizliğine ulaşılmış olur.

$$I_{2,1}(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^\alpha |K(t-x,\lambda)|\, dt$$

diyelim. $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ ler için t nin fonksiyonu olarak $[a,x_0]$ aralığında azalmayan olduğundan;

$$I_{2,1}(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} \left\{ \underset{x_0-\delta\leq s\leq t}{var} |K(s-x,\lambda)| + |K(x_0-\delta-x,\lambda)| \right\} (x_0-t)^\alpha dt$$

$$= \int_{x_0-\delta}^{x_0} \underset{x_0-\delta\leq s\leq t}{var} |K(s-x,\lambda)|\, (x_0-t)^\alpha dt + |K(x_0-\delta-x,\lambda)| \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^\alpha dt$$

eşitliği elde edilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki birinci integralde $s-x=z$ değişken değiştirmesi yaptıktan sonra z yerine s yazılırsa;

$$I_{2,1}(x,\lambda) = \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \underset{x_0-x-\delta\leq s\leq t}{var} |K(s,\lambda)|\, (x_0-x-t)^\alpha dt + |K(x_0-\delta-x,\lambda)| \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^\alpha dt$$

$$= \int_{x_0-x-\delta}^{0} \underset{x_0-x-\delta\leq s\leq t}{var} |K(s,\lambda)|\, (x_0-x-t)^\alpha dt$$

$$+ \int_{0}^{x_0-x} \underset{x_0-x-\delta\leq s\leq t}{var} |K(s,\lambda)|\, (x_0-x-t)^\alpha dt + |K(x_0-\delta-x,\lambda)| \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^\alpha dt$$

elde edilir. Birinci ve ikinci integrallerdeki varyasyonlu ifadeler açılırsa;

$$I_{2,1}(x,\lambda) = \int_{x_0-x-\delta}^{0} [|K(t,\lambda)| - |K(x_0-\delta-x,\lambda)|]\,(x_0-x-t)^{\alpha}dt$$

$$+|K(x_0-\delta-x,\lambda)| \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha}dt$$

$$+\int_{0}^{x_0-x} [|K(0,\lambda) - K(x_0-\delta-x,\lambda)| + |K(0,\lambda) - K(t,\lambda)|](x_0-x-t)^{\alpha}dt$$

$$= \int_{x_0-x-\delta}^{0} |K(t,\lambda)|\,(x_0-x-t)^{\alpha}dt + 2|K(0,\lambda)| \int_{0}^{x_0-x} (x_0-x-t)^{\alpha}dt$$

$$-|K(x_0-\delta-x,\lambda)| \left\{ \int_{x_0-x-\delta}^{0} (x_0-x-t)^{\alpha}dt + \int_{0}^{x_0-x} (x_0-x-t)^{\alpha}dt \right\}$$

$$-\int_{0}^{x_0-x} |K(t,\lambda)|\,(x_0-x-t)^{\alpha}dt + |K(x_0-\delta-x,\lambda)| \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha}dt$$

bulunur. Burada gerekli düzenlemelerin yapılması ile

$$I_{2,1}(x,\lambda) = \int_{x_0-x-\delta}^{0} |K(t,\lambda)|\,(x_0-t)^{\alpha}dt - \int_{0}^{x_0-x} |K(t,\lambda)|(x_0-x-t)^{\alpha}dt$$

$$+2|K(0,\lambda)|(x-x_0)^{\alpha+1} - |K(x_0-\delta-x,\lambda)| \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} (x_0-x-t)^{\alpha}dt$$

$$+|K(x_0-\delta-x,\lambda)| \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha}dt$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikteki birinci ve ikinci integral toplanırsa

$$I_{2,1}(x,\lambda) \leq \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} |K(t,\lambda)|(x_0-x-t)^{\alpha} dt + 2|K(0,\lambda)|(x-x_0)^{\alpha+1}$$

$$+|K(x_0-\delta-x,\lambda)| \left\{ \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha} dt - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha} dt \right\}$$

$$= \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} |K(t,\lambda)|(x_0-x-t)^{\alpha} dt + 2|K(0,\lambda)||x-x_0|^{\alpha+1}$$

eşitsizliğine ulaşılmış olur. Sonuç olarak

$$I_{2,1}(x,\lambda) \leq \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} |K(t-x,\lambda)|(x_0-t)^{\alpha} dt + \frac{2|K(0,\lambda)||x-x_0|^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

olur. O halde tamamıyla eşitsizlik yazılırsa

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon \left\{ (\alpha+1) \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} |K(t-x,\lambda)|(x_0-t)^{\alpha} dt + 2|K(0,\lambda)||x-x_0|^{\alpha+1} \right\}$$

eşitsizliğine ulaşılmış oldu. Benzer yöntemin kullanılmasıyla $I_3(x,\lambda)$ integralini de bulabiliriz.

$$I_3(x,\lambda) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} |f(t)-f(x_0)||K(t-x,\lambda)| dt$$

olup, yine genelleştirilmiş Lebesgue noktası tanımını kullanarak

$$V(t) = \int\limits_{x_0}^{t} |f(y)-f(x_0)|\, dy$$

burada $t-x_0 \leq \delta$ iken

$$V(t) \leq \varepsilon (t - x_0)^{\alpha+1}$$

olduğu görülür. $I_3(x, \lambda)$ integralinde kısmi integrasyon uygulandığında

$$|I_3(x,\lambda)| = \left| V(x_0+\delta)|K(x_0+\delta-x,\lambda)| - \int_{x_0}^{x_0+\delta} V(t)d_t(|K(t-x,\lambda)|) \right|$$

$$\leq |V(x_0+\delta)||K(x_0+\delta-x,\lambda)| - \int_{x_0}^{x_0+\delta} |V(t)|d_t(|K(t-x,\lambda)|)$$

eşitsizliği elde edilir. $d_t(|K(t-x,\lambda)|)$ ifadesinin $[x_0, x_0+\delta]$ aralığı üzerinde negatif olmamasından ve $V(t)$ nin özelliğinden

$$|I_3(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1}|K(x_0+\delta-x,\lambda)| - \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha+1} \, d_t(|K(t-x,\lambda)|)$$

olacaktır. Eşitsizliğin sağındaki integrale tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |I_3(x,\lambda)| &\leq \varepsilon\delta^{\alpha+1}|K(x_0+\delta-x,\lambda)| + \varepsilon(-\delta^{\alpha+1}|K(x_0+\delta-x,\lambda)|) \\ &+\varepsilon(\alpha+1)\int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha}\, |K(t-x,\lambda)|dt \\ &= \varepsilon(\alpha+1)\int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha}\, |K(t-x,\lambda)|dt \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılmış olur.

$$I_{3,1}(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha}\, |K(t-x,\lambda)|dt$$

tanımını yapalım. $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonunun $[x_0, x_0+\delta]$ aralığında artmayan olmasından dolayı,

$$I_{3,1}(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left\{ \underset{t\le s\le x_0+\delta}{var} |K(s-x,\lambda)| + |K(x_0+\delta-x,\lambda)| \right\} (t-x_0)^{\alpha} dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\delta} \underset{t\le s\le x_0+\delta}{var} |K(s-x,\lambda)|\, (t-x_0)^{\alpha} dt$$

$$+|K(x_0+\delta-x,\lambda)| \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha} dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\delta} [|K(t-x,\lambda)| - |K(x_0+\delta-x,\lambda)|]\, (t-x_0)^{\alpha} dt$$

$$+|K(x_0+\delta-x,\lambda)| \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha} dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+\delta} |K(t-x,\lambda)|\, (t-x_0)^{\alpha} dt$$

bulunur. O halde

$$|I_3(x,\lambda)| \le \varepsilon(\alpha+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha}\, |K(t-x,\lambda)| dt$$

elde edilir. Hepsinin ortak yazılmasıyla

$$|I(x,\lambda)| \leq \left\{\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x_0)|(b-a)\right\}\left\{\left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| + \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\right\}$$

$$+\varepsilon(\alpha+1)\int_{x_0}^{x_0+\delta}(t-x_0)^{\alpha}\,|K(t-x,\lambda)|dt + |f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt - 1\right|$$

$$+\varepsilon\left\{(\alpha+1)\int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x}|K(t,\lambda)|(x_0-x-t)^{\alpha}dt + 2|K(0,\lambda)||x-x_0|^{\alpha+1}\right\}$$

$$= \left\{\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x_0)|(b-a)\right\}\left\{\left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| + \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\right\}$$

$$+\varepsilon(\alpha+1)\left[\int_{x_0-\delta}^{x_0}|K(t-x,\lambda)|(x_0-t)^{\alpha}dt + \int_{x_0}^{x_0+\delta}|K(t-x,\lambda)|(x_0-t)^{\alpha}dt\right]$$

$$+2\varepsilon|K(0,\lambda)||x-x_0|^{\alpha+1} + |f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt - 1\right|$$

$$\leq \left\{\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x_0)|(b-a)\right\}\left\{\left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| + \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\right\}$$

$$+\varepsilon\left\{(\alpha+1)\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|K(t-x,\lambda)||t-x_0|^{\alpha}dt + 2|K(0,\lambda)||x-x_0|^{\alpha+1}\right\}$$

$$+|f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)dt - 1\right|$$

eşitsizliğine ulaşılmış olur. $K(t,\lambda)$ fonksiyonun özellikleri ve teoremin şartları dikkate alınırsa

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}|K(t-x,\lambda)||t-x_0|^{\alpha}dt + 2|K(0,\lambda)||x-x_0|^{\alpha+1}$$

fonksiyonunun sınırlı olduğu noktalar kümesinde

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

yakınsaması vardır. Bu da ispatı tamamlar.

$(-\infty, \infty)$ aralığında Lebesgue noktasındaki yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki teorem ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.7: Kabul edelim ki $K(t, \lambda)$ fonksiyonu A sınıfından olsun. x_0 noktası $f \in L_1(-\infty, \infty)$ fonksiyonunun bir Lebesgue noktası olsun. Bu durumu sağlayan x_0 noktası için

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0 + t) - f(x_0)|\, dt = 0$$

ve

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 |f(x_0 + t) - f(x_0)|\, dt = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\lim_{(x,\lambda) \to (x_0, \lambda_0)} L(f; x, \lambda) = f(x_0)$$

dir.

4.SONUÇLAR

Bu çalışmada Konvolüsyon tipli integral operatörlerinin kendisini oluşturan, L_1 Uzayındaki fonksiyonlara, d- noktasına, süreklilik noktasına, Lebesgue noktasına, genelleştirilmiş Lebesgue noktasına noktasal yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca iki parametreye bağlı integral operatör aileleri için yakınsaklığı için de bazı çalışmalar verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Alexis, G. Converges Problems of Orthogonal Series.Pergaman Press, Oxford, London, New York, Paris.1961

[2] Altomare, F. And Campiti, M. Korovkin Type Approximation Theory and its Applications. Wather de Cruyter, Berlin and New York. 1994.

[3] Anastassiou, G. A and Sorin, G. Approximation Theory, Birkhouser Boston, Basel, Berlin. 2000

[4] Butzer, P. L. Represantation and Approximation of functions by General, Singular Integrals. Prooceeding Konikel. Nederland. Acad. Wet 63, 1-24 1960

[5] Butzer, P. L. and Nessel, R. J. Fourier Analysis and Approximation. Academic Press, New York, London 1971

[6] Gadjiev, A. D. .On the Order of Convergence of some Class of Singular Integrals. İzvestiya Acad. Sci. Of Azerbaijan, SSSR. N6, p. 27-31 1963

[7] Hacıyev, A.D. Deltasal Çekirdekli İntegral Operatör Ailesi ve Yaklaşım Teorisi. Lisansüstü Ders Notları Ankara Üniversitesi, Ankara 1999

[8] Karslı, H. İki Parametreye Bağlı Konvolüsyon Tipi Singüler İntegral Operatörler Ailelerinin $L_1(a,b)$ .Karakteristik Noktalardaki Yakınsaklığı ve Yakınsaklık Hızı. Doktora tezi 2005

[9] Karslı, H. and İbikli, E. Approximation Properties of Convolution Type Singular Integrals depending on two parameters and of their Derivatives in $L_1(a,b)$, Proc. 16th Int. Conf. Jangjeon Math. Soc, 16 66-76 2005

[10] Korovkin, P. P. Linear Positive Operators and Approximation Theory, Hindustan Press, Delhi 1960

[11] Mamedov, R. Fonksiyonların Hattı Operatörlerle Yakınlaşması. Azerbaycan Devlet Neşriyatı, Bakü 1967

[12] Natanson, I.P. Consructive Functions Theory. Frederick Ungar Publishing Co. New York 1964

[13] Natanson, I. P. Theory of Functions of a Real Variable. Translated from the Russian by Loef. Boron. Frederick Ungar Pub. Co. New York 1964

[14] Kırcı Serenbay, S. , İbikli , E. (2007). İki Parametreye Bağlı Singüler İntegrallerin Yaklaşım Özellikleri, Sakarya University Faculty of Art and Science The Journal of Art and Science, cilt:9 sayı: ek 338-346 (II. Türk Dünyası uluslararası Matematik Sempozyumu)

[15] Taberski, R. Singular Integrals depending on two parameters, Prace Matematyczne VII, 173-179 1962