KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVOLÜSYON TİPLİ OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN KARAKTERİSTİK NOKTALARDA YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI

Kenan BOZKURT

HAZİRAN 2011

Matematik Anabilim Dalında Kenan BOZKURT tarafından hazırlanan KONVOLÜSYON TİPLİ OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN KARAKTERİSTİK NOKTALARDA YAKINSAKLIĞI ve YAKINSAKLIK HIZI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Sevgi ESEN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Doç. Dr. Ali ARAL	____________________
Üye (Danışman)	: Yrd. Doç. Dr. Sevgi ESEN	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	____________________

……/…../2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KONVOLÜSYON TİPLİ OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN KARAKTERİSTİK NOKTALARDA YAKINSAKLIĞI ve YAKINSAKLIK HIZI

BOZKURT, Kenan
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Sevgi ESEN
Haziran 2011, 128 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde konvolüsyon tipli olmayan integral operatörler ailesinin L_1 ve L_p uzaylarındaki karakteristik noktalarda yakınsaklığı ve yakınsaklık hızı verilmiştir. Dördüncü bölümde konvolüsyon tipli olmayan non-lineer integral operatörler ailesinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Son bölüm olan beşinci bölüm ise sonuçlar için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Yaklaşım, Noktasal Yakınsaklık, Yakınsaklık Hızı, Çekirdek, Lineer Olmayan Singüler İntegral, Lebesgue Noktası

ABSTRACT

CONVERGENCE and ORDER of CONVERGENCE at CHARACTERISTIC POINTS of NON-CONVOLUTION TYPE INTEGRAL OPERATORS

BOZKURT, Kenan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Sevgi ESEN

June 2011, 128 pages

This thesis contains five chapters. First chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some fundamental definition and concepts are given. In third chapter, some approximation theorems concerning pointwise convergence and its rate at some characteristic points for a class of non-convolution type integral operators in L_1 and L_p spaces are studied. In fourth chapter, some approximation properties concerning pointwise convergence and its rate at some characteristic points for a class of non-convolution type nonlinear integral operators are given.

Key Words: Approximation, Pointwise Convergence, Rate of Convergence, Kernel Nonlinear Singular Integral, Lebesgue Point

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, tez yöneticisi hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. SEVGİ ESEN'e, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm hocam Sayın Doç. Dr. ALİ ARAL'a, büyük fedakarlıklarla bana destek olan arkadaşım ABDULLAH KARTAL'a ve HALİL ANAÇ'a, ayrıca katkılarından dolayı Kırıkkale Üniversitesi matematik bölümündeki değerli hocalarıma teşekkür eder şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

1. GİRİŞ 1

1.1. Kaynak Özetleri 2

1.2. Çalışmanın Amacı 3

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR 4

2.1. Temel Tanımlar 4

2.2. $L_p(D)$ Uzayları 11

2.2.1. D Sonlu Aralık Olduğunda $L_p(D)$ Uzayları 16

2.2.2. D Sonsuz Aralık Olduğunda $L_p(D)$ Uzayları 18

2.3. Deltasal Çekirdekli Konvolüsyon Tipli Operatörler 21

2.4. İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi 27

2.5. Süreklilik Modülü ve Özellikleri 35

2.5.1. $L_1(D)$ Uzayında Süreklilik Modülü ve Özellikleri 41

2.5.2. $L_p(D)$ Uzayında Süreklilik Modülü ve Özellikleri 43

2.6. Karakteristik Noktalar 44

3. KONVOLÜSYON TİPLİ OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİ 52

3.1. Lebesgue Noktasında Yakınsaklık ve Yakınsaklık Hızı 52

3.2.p-Lebesgue Noktasında Yakınsaklık ve Yakınsaklık Hızı 87

3.3. Süreklilik Noktasında Yakınsaklık 103

4. KONVOLÜSYON TİPLİ OLMAYAN NON-LİNEER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE 109

4.1. Notasyonlar ve Tanımlamalar 109

4.2. Noktasal Yakınsaklık ve Yakınsaklık Hızı 111

5. SONUÇLAR 126

KAYNAKLAR 127

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi, fonksiyonlar teorisinin en önemli alanlarından birisidir. Bu teorinin amacı; fonksiyonlar uzayını oluşturan elemanlara yada fonksiyonlara herhangi bir yaklaşımın varlığını göstermektir. Yani verilen bir fonksiyonu, daha iyi özelliklere sahip olan bir fonksiyonlar dizisinin limiti biçiminde bir gösterimi bulmaya çalışmaktır. Bu şekilde oluşturulan dizinin verilen fonksiyona yaklaşımı söz konusu olduğundan bu dizi verilen fonksiyona yakınsar veya yaklaşır denir. Bu yakınsama düzgün veya belirli bir noktada olabileceği gibi belirli bir normda da olabilir. Dolayısıyla oluşturulan dizinin iyi özelliklere sahip olması gerekir. Bu tür iyi özelliklere sahip olan dizilere örnek olarak cebirsel ve trigonometrik polinomlar, tam fonksiyonlar ve ayrıca bir bölgenin dışında özdeş olarak sıfır olan fonksiyonlar verilebilir.

Yaklaşım teorisi ayrıca operatörler yardımıyla da ortaya konulabilmektedir. Bilindiği gibi operatörler fonksiyonları, fonksiyonlara dönüştüren ve iki fonksiyon uzayı arasındaki ilişkiyi veren yapılardır. Dolayısıyla operatörler hem değişkenlerden hemde fonksiyonlardan oluşmaktadır. Bu durum yaklaşım teorisinde oldukça kolaylık sağlar. Özellikle lineer pozitif operatörlerin kendisini oluşturan fonksiyona yakınsaklığını gösterme problemi, yaklaşım teorisinin önemli bir problemi olmuştur. Çünkü fonksiyonları yaklaştıran en basit yapılar lineer pozitif operatörlerin yardımıyla tanımlanabildiğinden son kırk yıldır yaklaşımlar teorisindeki çalışmalar lineer pozitif operatörler için yoğunlaşmıştır.

Yaklaşım teorisinin diğer problemlerinden biri ise lineer pozitif operatörlerin özel bir hali olan pozitif çekirdekli lineer integral operatörlerin kendisini oluşturan fonksiyona yakınsaklığı problemidir. Bu tür operatörlerin yakınsaklığına ait teoremler birçok matematikçi tarafından ispatlanmıştır. Bu matematikçilerin en önemlileri, Lebesgue, Fejer, Jacson, Valle-Pussin, Poisson, Weierstrass ve Gauss olarak gösterilebilir. Genellikle bu matematikçilerin çalışmaları konvolüsyon tipli integral opertörler ailesinin yakınsaklığı üzerine olmuştur. Daha genel teoremler ise Romanowski, Faddiev, Natanson, Mamedov ve Hacıyev tarafından ispatlanmıştır.

Fakat konvolüsyon tipli integrallerden farklı olarak, bu tipte olmayan integral operatörlerin yakınsaklığı problemi çok incelenmemiştir.

Bu tezde konvolüsyon tipli olmayan integral operatörler ailesinin L_1 ve L_p uzaylarında olan ve olmayan fonksiyonlara noktasal yakınsaklığı incelenmiştir. Daha önceki çalışmalar integrallenebilen fonksiyonların noktasal yakınsaklığı üzerine olmuştur. S. ESEN'de bu çalışmaları daha genişleterek L_1 ve L_p uzaylarında olmayan ve ρ ağırlık fonksiyonu ile bölümü L_1 ve L_p uzaylarında olan fonksiyonların karakteristik noktalarda yakınsaklığı ve yakınsaklık hızını incelemiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde gerekli olan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca integrallenebilir fonksiyon uzayları ayrıntılı bir şekilde anlatılmış ve bununla ilgili özellikler verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde konvolüsyon tipli olmayan integral operatörler ailesinin, öncelikle L_1 uzayında olan ve olmayan fonksiyonlara karakteristik noktalarda yakınsaklık ve yakınsaklık hızı incelenmiştir. Daha sonra ise bu tür operatörler ailesinin L_p uzayında olmayan fonksiyonlara karakteristik noktalarda yakınsaklık ve yakınsaklık hızı verilmiştir.

Dördüncü bölümde de hem lineer hemde konvolüsyon tipli olmayan integral operatörler ailesinin L_1 uzayında olan fonksiyonlara noktasal yakınsaklığı ve yakınsaklık hızı verilmiştir.

Son bölüm olan beşinci bölüm ise sonuçlar kısmı için ayrılmıştır.

1.1 Kaynak Özetleri

Bu tez hazırlanırken temel tanım ve kavramlar kısmında A. Hacıyev'in ' Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi' adlı lisansüstü ders notları ve R. G. Mamedov'un ' Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yakınsaklığı' adlı kitabı temel alınarak I. P. Natanson’un ‘ Theory of Functions of a Real Variable’ kitaplarından faydalanılmıştır.

Üçüncü bölümde A. D. Hacıyev’in ‘ On The Order of Convergence of Some Class of Singulars’ çalışması, yine A. Hacıyev’in ‘ Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi’ adlı lisans üstü ders notları, R. G. Mamedov’un ‘ Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yakınsaklığı’ adlı kitabı ve S. Esen’in doktora çalışmasından yararlanılmıştır.

Dördüncü bölümde R. G. Mamedov’un ‘ On The Order of Convergence of Singular Integrals in Generalized Lebesgue Points and ’ $L_p(-\infty,\infty)$ makalesinden yararlanılmış ve H. Karslı’nın ‘ On Approximation Properties of Non-Convolution Type Nonlinear Integral Operators’ adlı çalışması incelenmiştir.

1.2 Çalışmanın Amacı

Konvolüsyon tipli olmayan integral operatör ailelerinin noktasal yakınsaklığı ve yakınsalık hızı incelenmiştir. Ayrıca konvolüsyon tipinde olmayan nonlineer integral operatörlerinde yakınsaklık özellikleri verilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1: $V \neq \emptyset$ ve K da bir cisim olsun. V de bir iç işlem $\oplus: V \times V \longrightarrow V$ ve bir dış işlem $\odot: K \times V \longrightarrow V$ şeklinde tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, bu işlemlerle birlikte V ye K üzerinde tanımlı *lineer uzay* veya *vektör uzayı* denir ve $(V, \oplus, (K, +, .), \odot)$ ile gösterilir.

1) $(V, \oplus)$ değişmeli gruptur. Yani her $x, y, z \in V$ için aşağıdaki şartlar sağlanır.

a_1) $x \oplus y \in V$

a_2) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

a_3) $x \oplus \theta = \theta \oplus x = x$ olacak şekilde $\theta \in V$ dir.

a_4) $x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = \theta$ olacak şekilde $(-x) \in V$ dir.

a_5) $x \oplus y = y \oplus x$

2) Her $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

b_1) $\alpha \odot x \in V$

b_2) $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$

b_3) $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$

b_4) $(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$

b_5) $\varepsilon \odot x = x$ dir. Burada ε sayısı, K nin birim elemanıdır.

Yukarıdaki b_3) şartında $+$ işlemi, eşitliğin solunda K daki toplamayı; eşitliğin sağındaki $\oplus$ işlemi ise V deki toplamayı belirtmektedir. b_4) deki çarpma işlemleride aynı anlamdadır. Tanımdan anlaşıldığı üzere lineer uzay, V cümlesi ve sırasıyla 1) ve 2) şartlarını sağlayan toplama ve skalerle çarpma işlemlerinden ibarettir.

Tanım 2.1.2: X bir lineer uzay olsun. $\| \quad \|: X \to R$ fonksiyonunun $x \in X$ deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer bu fonksiyon için

$a)$ $\|x\| \geq 0$

$b)$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$c)$ $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$d)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \quad \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. Eğer bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay denir ve $(X, \| \quad \|)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.3: X ve Y iki fonksiyon uzayı (bu uzaylar aynı skaler cisim üzerinde tanımlı lineer uzaylardır) olsun.

$$
\begin{aligned}
L : X &\to Y \\
f &\to L(f) = g
\end{aligned}
$$

dönüşümüne *operatör* denir. Gösterim olarak $L(f) = g$ yerine $L(f(t); x) = g(x)$ veya $L(f; x) = g(x)$ kullanılır. Bu operatörün lineer olması ise aşağıdaki gibidir. Her α, β skalerleri ve her $k, l \in X$ için

$$L(\alpha k + \beta l) = \alpha L(k) + \beta L(l)$$

eşitliği sağlanıyorsa L operatörüne $lineer\ operat$ör denir.

Tanım 2.1.4: $X^+ = \{ f \in X : f \geq 0 \}$, $Y^+ = \{ g \in Y : g \geq 0 \}$ fonksiyon sınıflarını tanımlayalım. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa o taktirde bu lineer operatöre *Lineer Pozitif Operatör* denir. $f \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ dır. Özel olarak $L(0; x) = 0$ olduğu görülür.

Lemma 2.1.1: Lineer pozitif operatörler monotondur.

İspat: Her *t* için $f(t) \leq g(t)$ ise $g(t) - f(t) \geq 0$ dır. L lineer olduğundan

$$L(g(t) - f(t); x) \geq L(0; x) = 0$$

ve yine L lineer olduğundan

$$L(g(t); x) - L(f(t); x) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$L(g(t); x) \geq L(f(t); x)$$

bulunur. Sonuç olarak $\forall t$ için $f(t) \leq g(t)$ ise $L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$ dir.Yani büyük olan fonksiyonun operatör altındaki görüntüsüde büyüktür. Bu özelliğe operatörün monotonluk özelliği denir. Ayrıca L operatörünün monotonluğundan yada pozitifliğinden

$$-|f| \leq f \leq |f| \implies L(-|f(t)|; x) \leq L(f(t); x) \leq L(|f(t)|; x)$$

ve L nin lineerliğinden

$$-L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x) \implies |L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

yazılabilir. L lineer opertörünün başka bir özelliği ise $\forall t$ için $f(t) \leq 0$ ise $-f(t) \geq 0$ olup L lineer olduğundan $L(-f(t);x) \geq 0$ ve yine L lineer olduğundan $-L(f(t);x) \geq 0$ dır. Buradan $L(f(t);x) \leq 0$ elde edilir. Yani $\forall t$ için

$$f(t) \leq 0 \Rightarrow L(f(t);x) \leq 0$$

elde edilir.

Tanım 2.1.5: $(X, \| \quad \|_X)$ ve $(Y, \| \quad \|_Y)$ normlu lineer uzaylar ve $L: X \to Y$ lineer operatör olsun. $D(L)$, L lineer operatörünün tanım kümesi olmak üzere $\forall x \in D(L)$ için

$$\|L(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \tag{2.1}$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa L lineer operatörüne *sınırlı lineer operatör* denir.

Yukarıdaki sınırlılık kavramı bildiğimiz sınırlılık kavramından farklıdır. Reel değerli operatörlerde (fonksiyonlarda) fonksiyonun sınırlı olması görüntü kümesinin sınırlı olması demektir. Fakat bu durum operatörler için geçerli değildir. Örneğin $f: R \to R$, $f(x) = x$ dönüşümünü göz önüne alalım

$$\|f(x)\|_R = |f(x)| = |x| = \|x\|_R \leq 2\|x\|_R$$

olup f operatörü (2.1) anlamında sınırlıdır. Ama f fonksiyon olarak sınırlı değildir. Çünkü $\forall x \in R$ için $|f(x)| < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı bulunamaz.

Örnek 2.1.1: $\left(C_{[0,1]}, \| \quad \|_\infty\right)$ ve $(R, | \quad |)$ iki normlu uzay ve $L: C_{[0,1]} \to R,\ L(f) = f(1)$ şeklinde tanımlı L dönüşümü sınırlı lineer operatördür.

Önce L nin lineer olduğunu gösterelim. $\forall \alpha, \beta$ skalerleri ve $\forall f, g \in C_{[0,1]}$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

olduğundan L lineerdir. $f \in C_{[0,1]}$ keyfi olsun.

$$|L(f)| = |f(1)| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \|f\|_{\infty}$$

O halde $M = 1$ için eşitsizlik sağlandığından L sınırlı lineer operatördür.

Şimdi (2.1) den

$$\frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq M \qquad (x \neq \theta_X, \qquad \theta_X\text{: } X \text{ uzayının sıfırı})$$

yazılabilir. Buradan

$$\left\{\frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \neq \theta_X, x \in D(L)\right\}$$

kümesi R de sınırlıdır. Bu küme üstten sınırlı olup bu kümenin üst sınırlarının en küçüğü vardır. Dolayısıyla kümenin supremumu sıfırdan farklıdır ve sıfırdan farklı x ler için bir reel sayıdır. Bu reel sayı $\|L\|$ ile gösterilir.

$$\|L\| = \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X}} \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X} \in R$$

dir. Buradaki $\|L\|$ sayısına *operatörün normu* denir. Supremumun özelliğinden dolayıda $\forall x \in D(L)$ için

$$\|L(x)\|_Y \leq \|L\| \|x\|_X$$

eşitliği (2.1) den dolayı yazılabilir.

Lemma 2.1.2: $L: D(L) \subset X \ \rightarrow Y$ sınırlı ve lineer operatör olsun. Bu durumda

1)
$$\|L\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|L(x)\|_Y$$

2)
$$\|L\| = \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

ifadeleri birbirine denktir ve bu dönüşümler norm aksiyomlarını sağlar.

İspat: Bu ifadelerin birbirine denk olduğunu gösterelim.

$$\|L\| = \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{1}{\|x\|_X} \|L(x)\|_Y$$

normun özelliğinden

$$= \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \left\| \frac{1}{\|x\|_X} \ L(x) \right\|_Y$$

dir. L lineer olduğundan

$$= \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \left\| \ L\left(\frac{x}{\|x\|_X} \right) \right\|_Y$$

yazılabilir. Burada $Y = \left(\frac{x}{\|x\|_X} \right)$ ve $\|y\|_X = 1$ alınırsa bu durumda

$$\|L\| = \sup_{\|y\|_X = 1} \|L(y)\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|L(x)\|_Y$$

elde edilir. Şimdi norm özelliklerine bakalım.

N$_1$) $\|L\| = 0 \Leftrightarrow L = 0$ mıdır ?

$$\|L\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in D(L), x \neq \theta_X \text{ için } \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D(L), x \neq \theta_X \text{ için } \|L(x)\|_Y = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D(L), x \neq \theta_X \text{ için } L(x) = \theta_Y$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in D(L), x \neq \theta_X \text{ için } L = 0$$

N$_2$) $\|\lambda L\| = |\lambda|\|L\|$ midir?

$$\|\lambda L\| = \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{\|\lambda L(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{|\lambda|\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X} = |\lambda| \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X} = |\lambda|\|L\|$$

N$_3$) $\|T + L\| \leq \|T\| + \|L\|$ midir?

$$\|T + L\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \cap D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{\|(T + L)(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

$$\leq \sup_{\substack{x \in D(T) \cap D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{\|T(x)\|_Y + \|L(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

$$\leq \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} + \sup_{\substack{x \in D(L) \\ x \neq \theta_X,}} \frac{\|L(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

$$\leq \|T\| + \|L\|$$

elde edilir ki şu halde ispat tamamdır.

Tanım 2.1.6: X ve Y normlu uzaylar $L: X \to Y$ lineer operatör olsun.$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ bulunabilir öyle ki $\|x - x_0\|_X < \delta$ şartını sağlayan $x \in D(L)$ için

$$\|L(x) - L(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

ise L operatörüne x_0 *da süreklidir* denir.

Lineer operatörlerin daha önce verilen anlamda sınırlılığı ile sürekliliği arasında önemli bir ilişki vardır. Bu kavramlar aşağıdaki teoremden anlaşılacağı gibi birbirine denktir.

Teorem 2.1.1: X ve Y normlu uzaylar $L: X \to Y$ lineer operatör olsun.

1. L nin sürekli olması için $\Leftrightarrow$ L nin sınırlı olmasıdır.

2. L bir noktada sürekli ise X in tamamında süreklidir.

2.2. $L_p(D)$ Uzayları

Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon uzayları genellikle L harfiyle gösterilir.

Kabul edelimki D kümesi $(-\infty, \infty)$ reel ekseninin sonlu veya sonsuz (yani sınırsız) bir alt aralığı olsun. Yani $D = (-\infty, \infty)$, $D = (a, \infty)$, $D = (-\infty, b)$, $D = (a, b)$ tipindeki bir aralık olabilir. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_D |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir fonksiyonlar sınıfına $L_p(D)$ *uzayı* denir. Bu durumda $f \in L_p(D)$ dir. $L_p(D)$ uzayı lineer uzaydır. Yani

$a)$ $f, g \in L_p(D)$ ise $f + g \in L_p(D)$

$b)$ $\lambda \in R, f \in L_p(D)$ ise $\lambda f \in L_p(D)$

dir. Gerçekten, $f, g \in L_p(D)$ için

$$(|f(x) + g(x)|^p) \leq (|f(x) + g(x)|)^p$$

$$\leq (2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p$$

$$\leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_D (|f(x) + g(x)|^p)dx \leq 2^p\left(\int_D |f(x)|^p dx + \int_D |g(x)|^p dx\right) < \infty$$

elde edilir ki buradan $f + g \in L_p(D)$ dir. Diğer yandan $\lambda \in R$, $f \in L_p(D)$ olmak üzere

$$\int_D (\lambda|f(x)|^p)dx = \lambda^p \int_D (|f(x)|^p)dx < \infty$$

elde edilir ki buradan $\lambda f \in L_p(D)$ olduğu görülür. O halde $L_p(D)$ uzayı bir lineer uzaydır.

$L_p(D)$ uzayları $p = \infty$ içinde tanımlanabilir.

Tanıma göre $L_\infty(D)$ uzayının elemanları ölçülebilir ve ölçümü sıfır olan bir $D_1 \subset D$ kümesinin dışında sınırlı kalan fonksiyonlardır. Yani D_1 kümesi ölçülebilir ve ölçümü sıfır olan bir küme olmak üzere eğer

$$\sup_{\substack{x\in D\setminus D_1 \\ mes(D_1)=0}} |f(x)| < \infty$$

şartı sağlanıyorsa $f \in L_\infty(D)$ dir. Burada $mes(D_1)$, D_1 kümesinin Lebesgue ölçülümüdür. Bu uzaya kısaca *esaslı sınırlı uzay* da denir ve yukarıdaki şart

$$\operatorname*{esssup}_{x\in D}|f(x)| < \infty$$

olarakta gösterilir. Burada esssup; " essential supremum" un kısaltılmışıdır ve D kümesi ise ölçüsü sıfır olan kümenin dışıdır.

Açıktır ki $L_\infty(D)$ uzayıda bir lineer uzaydır.

$L_p(D)$ uzaylarında da norm tanımlanabilir ve tanımlanan bu norma göre $L_p(D)$ uzayları *normlu lineer uzaylardır*. Şimdi bu uzaylar üzerindeki normu tanımlayalım.

Tanım 2.2.1: $f \in L_p(D)$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bu uzaylarda norm

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.Ayrıca $p = \infty$ için bu norm

$$\|f\|_{L_\infty(D)} = \operatorname*{esssup}_{x\in D}|f(x)| \tag{2.3}$$

ile tanımlanır.

Bu tanımlamaların norm olduğunu göstermek için norm aksiyomlarının sağlanması gerekir. Şimdi bu aksiyomlara bakalım.

$a)$ $\forall f \in L_p(D)$ ise $\|f\|_{L_p(D)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$b)$ $\forall\lambda \in R, \forall f \in L_p(D)$ ise $\|\lambda f\|_{L_p(D)} = |\lambda| \|f\|_{L_p(D)}$

$c)$ $\forall f, g \in L_p(D)$ ise $\|f + g\|_{L_p(D)} \leq \|f\|_{L_p(D)} + \|g\|_{L_p(D)}$

Bu şartlar sağlanıyorsa $L_p(D)$ normlu uzay olur.

Hatırlatalımki

$$\int_D |f(x)|^p dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

dır. Yani bu integral ölçüsü sıfır olan küme dışında sıfırsa f hemen hemen her yerde sıfırdır. Bildiğimiz gibi ölçümü sıfır olan küme üzerinde Lebesgue integrali sıfırdır ve integral sıfırsa o fonksiyon hemen hemen her yerde sıfırdır. Ayrıca hemen hemen her yerde eşit olan iki fonksiyonun integralide eşittir. Bu nedenle hemen hemen her yerde $f = g \equiv f \sim g$ ile bir denklik bağıntısı oluşturursak bu denklik bağıntısı $L_p(D)$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Buna göre hemen hemen her yerde eşit olan fonksiyonlar birbirine eşittir. Buna göre denklik sınıfıyla düşünüldüğünde normun birinci şartı sağlanmış olur. Normun ikinci şartı açıktır. Üçüncü şartı ise aşağıda tanımlanan Minkowsky eşitsizliği ile sağlanmış olur. O halde (2.2) ifadesi bir normdur. Benzer şekilde (2.3) ifadesi de bir normdur.

Tanım 2.2.2: $p \geq 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartını sağlayan q için $L_q(D)$ uzayına $L_p(D)$ uzayının *eşlenik uzayı* denir.

Tanım 2.2.3: $1 \leq p \leq \infty, -\infty < a < b < \infty$ ve p nin eşlenik sayısı q olsun. Yani $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f \in L_p(a,b)$ ve g $\in L_q(a,b)$ olmak üzere

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

veya

$$\|fg\|_{L_1(a,b)} \leq \|f\|_{L_p(a,b)} \|g\|_{L_q(a,b)}$$

eşitsizliğine *Hölder Eşitsizliği* denir.

Tanım 2.2.4: $p \geq 1, -\infty < a < b < \infty$ ve $f, g \in L_p(D)$ olmak üzere

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

veya

$$\|f+g\|_{L_p(a,b)} \leq \|f\|_{L_p(a,b)} + \|g\|_{L_p(a,b)}$$

eşitsizliğine *Minkowsky Eşitsizliği* denir.

Tanım 2.2.5: $p \geq 1, -\infty < a < b < \infty$ ve f iki değişkenli ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(\int_a^b \left|\int_a^b f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_a^b \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

eşitsizliğine *Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği* veya *Minkowsky İntegral Eşitsizliği* denir. Bunun anlamı ise

$$\left\|\int f\right\|_{L_p(a,b)} \leq \int \|f\|_{L_p(a,b)}$$

dir. Yani integralin normu, normun integralinden küçük veya eşittir.

2.2.1. D Sonlu Aralık Olduğunda $L_p(D)$ Uzayları

$L_p(a,b)$ uzaylarının özellikleri, D nin sınırlı veya sınırsız olmasına göre değişebilir. Kabul edelimki $a<b$ sonlu sayılar olmak üzere $D=(a,b)$ olsun. Bu durumda Hölder eşitsizliğini $g(x)\equiv 1$ durumunda kullanırsak

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L_p(a,b)}(b-a)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Buda gösterirki

$$\|f\|_{L_1(a,b)} \le \|f\|_{L_p(a,b)}(b-a)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Bu eşitsizliğin sağ tarafı sonlu ise yani $f\in L_p(a,b)$ ise sol tarafıda sonludur. Buradan $f\in L_1(a,b)$ dir. Bu ise her $p\ge 1$ için

$$L_p(a,b) \subset L_1(a,b) \tag{2.4}$$

olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \le \left(\operatorname*{esssup}_{x\in[a,b]}|f(x)|\right)^p \left(\int_a^b dx\right) = \|f\|^p_{L_\infty(a,b)}(b-a)$$

eşitsizliğinden her $p\ge 1$ için

$$L_\infty(a,b) \subset L_p(a,b) \tag{2.5}$$

olduğu görülür. (2.4) ve (2.5) eşitsizliklerinden

$$L_\infty(a,b) \subset L_p(a,b) \subset L_1(a,b) \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.6) gösteriyor ki (a,b) sonlu olduğunda $L_p(a,b)$ uzaylarının içinde en geniş uzay $L_1(a,b)$ uzayıdır. En dar uzay ise $L_\infty(a,b)$ uzayıdr.

Şimdi $p_2 \geq p_1 \geq 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\frac{p_2}{p_1} \geq 1$ ve $p = \frac{p_2}{p_1}$ denilirse, $\frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}} = 1$ den $\frac{1}{\mathrm{q}} = \frac{p_2 - p_1}{p_2}$ elde edilir. Kabul edelimki $\varphi \in L_{p_1}(a,b)$ olsun. Hölder eşitsizliğinde $|f(x)| = |\varphi(x)|^{p_1}$, $g(x) = 1$, $p = \frac{p_2}{p_1}$ ve $\frac{1}{\mathrm{q}} = \frac{p_2 - p_1}{p_2}$ alınırsa

$$\int_a^b |\varphi(x)|^{p_1} dx \leq \left(\int_a^b |\varphi(x)|^{p_1 \frac{p_2}{p_1}} dx \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\int_a^b dx \right)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}$$

$$= \left(\int_a^b |\varphi(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{p_1}{p_2}} (b-a)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}$$

elde edilir ve buradanda

$$\left(\int_a^b |\varphi(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\int_a^b |\varphi(x)|^{p_2} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} (b-a)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}$$

olduğu görülür. Yani $p_2 \geq p_1 \geq 1$ ise

$$\|\varphi\|_{L_{p_1}(a,b)} \leq \|\varphi\|_{L_{p_2}(a,b)} (b-a)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}$$

dir yada başka bir deyişle $p_2 \geq p_1 \geq 1$ ise

$$L_{p_2}(a,b) \subset L_{p_1}(a,b)$$

dir. Bu durum gösteriyorki (a,b) sonlu aralık olmak üzere $L_p(a,b)$ uzayları p ler küçüldükçe genişlemektedir. Yani yukarıdaki sonuçlarla birlikte $p_2 \geq p_1$ için

$$L_\infty(a,b) \subset L_{p_2}(a,b) \subset L_{p_1}(a,b) \subset L_1(a,b) \tag{2.7}$$

dir.

2.2.2. $\boldsymbol{D}$ Sonsuz Aralık Olduğunda $\boldsymbol{L_p(D)}$ Uzayları

D sonlu bir aralık olduğunda $L_p(D)$ uzayları arasında elde edilen bağıntı , D sonsuz bir aralık olduğunda geçerli değildir. Bu uzayların özelliği p ye bağlı olarak değişir. Örneğin $f_1(x) = 1$ fonksiyonu $L_\infty(-\infty,\infty)$ uzayının elemanıdır; fakat bu fonksiyon hiçbir $L_p(-\infty,\infty)$ uzayının veya $L_p(a,\infty), L_p(-\infty,b)$ uzaylarının elemanı değildir. Yani

$$L_\infty(-\infty,\infty) \not\subset L_p(-\infty,\infty)$$

dir. Öte yandan $\alpha > 0$ bir sayı olmak üzere

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2p}}}\,, & 0 < x \leq a \\ \quad 0\,, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

fonksiyonu $L_p(-\infty,\infty)$ uzayının elemanıdır; fakat $x = 0$ noktasının komşuluğunda fonksiyon sonsuz artan olduğundan $f_2(x) \notin L_\infty(-\infty,\infty)$ olur. Yani

$$L_p(-\infty,\infty) \not\subset L_\infty(-\infty,\infty)$$

olur. Diğer durumlar için örnek verelim. $p_1 > p_2 \geq 1$ için

$$f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[p_1]{x}}\,, & 0 < x \leq a \\ \quad 0\,, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda $\frac{p_2}{p_1} < 1$ olduğundan

$$\|f_3\|_{L_{p_2}(-\infty,\infty)} = \left(\int_0^a \frac{1}{|x|^{\frac{p_2}{p_1}}} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty$$

yani $f_3 \in L_{p_2}(-\infty,\infty)$ dir. Diğer yandan

$$\|f_3\|_{L_{p_1}(-\infty,\infty)} = \left(\int_0^a \frac{1}{x} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} = \infty$$

olup $f_3 \notin L_{p_1}(-\infty,\infty)$ dir. Buda gösteriyorki $p_1 > p_2$ olduğunda

$$L_{p_2}(-\infty,\infty) \not\subset L_{p_1}(-\infty,\infty)$$

dir. Ayrıca yine $\alpha > 0$ ve $p_1 > p_2$ olmak üzere

$$f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[p_2]{x}}, & a < x \leq \infty \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

fonksiyonunu düşünürsek $\frac{p_1}{p_2} > 1$ olduğundan

$$\|f_4\|_{L_{p_1}(-\infty,\infty)} = \left(\int_a^\infty \frac{1}{x^{\frac{p_1}{p_2}}} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty$$

olur. Yani $f_4 \in L_{p_1}(-\infty,\infty)$ dir. Fakat

$$\|f_4\|_{L_{p_2}(-\infty,\infty)} = \left(\int_a^\infty \frac{1}{x} dx \right)^{\frac{1}{p_2}} = \infty$$

olduğundan $f_4 \notin L_{p_2}(-\infty,\infty)$ dir. Dolayısıyla $p_1 > p_2$ içinde

$$L_{p_1}(-\infty,\infty) \not\subset L_{p_2}(-\infty,\infty)$$

elde edilir. Bu örnekler gösteriyorki $L_p(-\infty,\infty)$ uzayları arasında (2.7) biçiminde hiçbir bağıntı olamaz. Benzer örnekler $L_p(a,\infty)$ veya $L_p(-\infty,b)$ uzayları içinde geçerlidir. $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve bu aralığın dışında sıfır olan fonksiyonları düşünelim. Bu tür fonksiyonların $L_p(-\infty,\infty)$ uzayında olduğu açıktır. Gerçekten de f bu tür bir fonksiyon ise f, $[a,b]$ aralığında sınırlıdır. Buna göre keyfi $p \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(-\infty,\infty)} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \leq \left(\int_a^b \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| (b-a)^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

dir. Ayrıca bu tür f fonksiyonu $L_\infty(-\infty,\infty)$ uzayınında elemanıdır, çünkü

$$\|f\|_{L_\infty(-\infty,\infty)} = \operatorname*{esssup}_{-\infty\leq x\leq\infty} |f(x)| = \operatorname*{esssup}_{a\leq x\leq b} |f(x)| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| < \infty$$

dir. Dolayısıyla bir $[a,b]$ aralığında sürekli ve bu aralığın dışında sıfıra eşit olan tüm fonksiyonlar $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere tüm $L_p(-\infty,\infty)$ uzaylarının ortak elemanıdır. Buda gösteriyorki $1 \leq p_1 \leq \infty$ ve $1 \leq p_2 \leq \infty$ olmak üzere

$$L_{p_1} \cap L_{p_2} \neq \emptyset$$

dur. Dolayısıyla sınırsız bölgeye ait $L_p(D)$ uzaylarının hepsi birbiriyle kesişmektedir. Fakat hiçbiri diğerini kapsamaz.

Tanım 2.2.6: $f \in L_p(-\infty, \infty)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\int_a^{\infty} |f(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $a > 0$ sayısı bulunabilir. Bu şart yerine

$$\int_{|x| \geq a} |f(x)|^p dx < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu $L_p(-\infty, \infty)$ uzayında sıkça kullanılan özelliklerden biridir.

2.3. Deltasal Çekirdekli Konvolüsyon Tipli Operatörler

Tanım 2.3.1: D tüm reel eksen veya onun bir alt kümesi olmak üzere X, D kümesinde tanımlı ve Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olsun. $f \in X$ için

$$\int_D f(t)K(x,t)dt \qquad , x \in D \tag{2.8}$$

integralinde f nin yerine X uzayından değişik fonksiyonlar yazmakla her zaman *x* e bağlı değişik fonksiyonlar elde edilir. Bundan dolayı (2.8) integrali bir integral operatördür. Bu integral operatör $D = (a, b)$ olmak üzere

$$L(f;x) = \int_a^b f(t)K(x,t)dt$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.8) integralinin tüm özellikleri $D \times D$ de tanımlı $K(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerine bağlı olduğundan $K(x,t)$ ifadesine *integral operatörün* *çekirdeği* denir. Eğer K fonksiyonu negatif değilse (2.8) integral operatörü her bir pozitif f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürür. Bu tür integral operatörlere *pozitif çekirdekli operatör* denir.

(2.8) integralinde $K(x,t)$ yerine $K(x-t)$ fonksiyonu alınırsa yani

$$\int_D f(t)K(x-t)\,dt \qquad ,x \in D \tag{2.9}$$

veya $K(x-t)$ ve *f* , 2π periyotlu olduğunda

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)\,dt$$

şeklindeki integral operatörlere , *konvolüsyon tipli operatör* denir. K çekirdeği integrallenebilir veya türevlenebilir olduğunda

$$\int_D f(t)K(x-t)\,dt$$

operatörü *x* in bir fonksiyonu şeklinde düşünülebileceğinden

$$g(x) = \int_D f(t)K(x-t)\,dt$$

şeklindeki tanımı anlamlıdır. L operatörü λ parametresine bağlanırsa

$$L(x,\lambda,f) = \int_D f(t)K_\lambda(x-t)dt$$

şeklinde gösterilebilir. Eğer yukarıdaki integralin düzgün yakınsaklığı gösterilirse K_λ türevlenebilir olduğunda g_λ fonksiyonuda türevlenebilirdir.

Tanım.2.3.2: Λ bir indis kümesi ve $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $K_\lambda(t)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa K fonksiyonuna *deltasal çekirdek* denir.

$a)$ $K_\lambda(t)$ negatif olmayan çift fonksiyondur. Ayrıca $\forall\lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(0)$ sonludur ve

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} K_\lambda(0) = \infty$$

dir.

$b)$ $\forall\lambda \in \Lambda$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)\,\mathrm{dt} = 1$$

dir.

$c)$ Her belirli δ sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t)\right) = 0 \ \text{ ve } \ \lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)\,\mathrm{dt} = 0$$

dır.

$K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olmak üzere lineer L integral operatörünü

$$L(x,\lambda,f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\lambda(x-t)dt$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda $L\colon f \to L(x,\lambda,f)$ operatörü konvolüsyon operatörüdür.

Eğer yukarıdaki tanımda $K_\lambda(t)$ fonksiyonu 2π periyotlu ise 2π periyotlu deltasal çekirdek denir. Bu fonksiyon $c)$ şıkkındaki

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)\,\mathrm{dt} = 0$$

özelliği hariç tüm özellikleri $[-\pi,\pi]$ aralığında sağlar.

Örnek 2.3.1:

$$P_\varepsilon(f;x) = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\varepsilon^2+(t-x)^2}\,\mathrm{dt}$$

şeklinde tanımlanan Abel-Poisson integralinin çekirdeği olan

$$A_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}$$

ifadesi deltasal çekirdektir. Gerçekten

$a)$ $A_\varepsilon(x) \geq 0$ ve $A_\varepsilon(x) = A_\varepsilon(-x)$ olduğundan $A_\varepsilon(x)$ çekirdeği negatif olmayan çift fonksiyondur. $A_\varepsilon(0) = \frac{1}{\pi\varepsilon}$ sonlu ve $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$ dur. Ayrıca $x \neq 0$ için $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x) = 0$ dır.

$b)$ $\varepsilon \in \Lambda$ için

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}\,dx$$

integralinde $x = \varepsilon u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du=1$$

olur.

$c)$ $A_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}$ ifadesinin x e göre türevi negatif olduğundan azalan bir fonksiyondur. Bu taktirde $x\geq\delta$ için supremum değerini $x=\delta$ da alır. Dolayısıyla

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{|x|\geq\delta}A_\varepsilon(x)\right)=0$$

olur. Ayrıca $\delta>0$ olmak üzere

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\delta}^{\infty}A_\varepsilon(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^2+x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du=0$$

dır. Böylece $A_\varepsilon(x)$ nın deltasal çekirdek olduğu görülür.

Lemma 2.3.1: $1\leq p\leq\infty$ olmak üzere L_λ operatörü sürekli olup $L_p(-\infty,\infty)$ uzayından $L_p(-\infty,\infty)$ uzayına dönüşüm yapan bir operatördür.

İspat: Eğer

$$L(x,\lambda,f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)K_\lambda(x-t)dt$$

operatörünün sınırlı olduğu gösterilirse Teorem 2.1.1 den operatörün sürekli olduğu söylenebilir. Bunun için

$$\|L(x,\lambda,f)\|_{L_p(-\infty,\infty)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |L(x,\lambda,f)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\lambda(x-t)dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılabilir. Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğinden

$$\|L(x,\lambda,f)\|_{L_p(-\infty,\infty)} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)K_\lambda(x-t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

elde edilir. Bu integralde $x - t = u$ alınırsa

$$\|L(x,\lambda,f)\|_{L_p(-\infty,\infty)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u)|^p {K_\lambda}^p(u)du \right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} du$$

$$\leq \|f\|_{L_p(-\infty,\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(u)du$$

$$= \|f\|_{L_p(-\infty,\infty)}$$

elde edilir. O halde

$$\|L(x,\lambda,f)\|_{L_p(-\infty,\infty)} \leq \|f\|_{L_p(-\infty,\infty)}$$

dir. Böylece L operatörü $L_p(-\infty,\infty)$ uzayından $L_p(-\infty,\infty)$ uzayına dönüşüm yapan bir operatördür. Ayrıca

$$\|L\|_{L_p(-\infty,\infty)\to L_p(-\infty,\infty)} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|L(x,\lambda,f)\|_{L_p(-\infty,\infty)}}{\|f\|_{L_p(-\infty,\infty)}} \leq 1$$

olduğundan L operatörü sınırlıdır. Dolayısıyla süreklidir.

Lemma 2.3.2: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere 2π periyotlu deltasal çekirdekli konvolüsyon tipli operatörü sürekli olup $L_p[-\pi,\pi]$ uzayından $L_p[-\pi,\pi]$ uzayına dönüşüm yapan bir operatördür.

2.4. İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi

Daha önce Tanım 2.3.1 de integral operatörü ve çekirdeğini tanımlamıştık. Tekrar hatırlamak gerekirse;

D tüm reel eksen veya onun bir alt kümesi olmak üzere X, D kümesinde tanımlı ve Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olsun. $f \in X$ için

$$\int_D f(t)K(t,x)dt \qquad , x \in D$$

integralinin bir integral operatör olduğunu ve bu integral operatörün $D = (a,b)$ olmak üzere

$$L(f;x) = \int_a^b f(t)K(t,x)dt$$

şeklinde ifade edilebileceğini söylemiştik.

Eğer $K(t,x)$ türevlenebilir bir çekirdek ve $K(t,x)$ nın özellikleri

$$\int_D f(t)K(t,x)dt \qquad , x \in D$$

integralinin x e göre düzgün yakınsak integral olmasını sağlar ise bu taktirde integral altında x e göre türev alınabilir ve

$$h(x) = \int_D f(t)K(t,x)dt \qquad , x \in D$$

ile tanımlı bir h fonksiyonuda türevlenebilirdir. Yani integral operatörler X uzayında olan f fonksiyonunu daha iyi özellikleri olan bir h fonksiyonuna dönüştürebilir. Buna göre Λ bir sayılar kümesi, λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olmak üzere $K_\lambda(t,x)$ çekirdekler ailesi ele alınırsa,

$$h_\lambda(x) = \int_D f(t)K_\lambda(t,x)dt$$

biçiminde bir fonksiyon ailesi elde edilir. Bu taktirde integrallenebilir f fonksiyonu $\lambda \to \lambda_0$ iken daha iyi özellikleri olan $h_\lambda(x)$ fonksiyonlarının limiti şeklinde gösterilmesi problemi ortaya konulabilir. Bu problemin çözümü integrallenebilir fonksiyonlar sınıfında yaklaşım problemidir.

İntegrallenebilir fonksiyonlar sınıfında yaklaşım problemi, belirtilmiş bir x_0 noktasında

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} h_\lambda(x_0) = f(x_0)$$

veya norma göre

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|h_\lambda(x) - f(x)\|_X = 0$$

gibi çözülebilir. Bu çözümler $K_\lambda(t,x)$ çekirdeklerinin özellikleri ile ilişkilidir.

Yaklaşım teorisinin ikinci esas problemi ise yaklaşım hızının bulunması problemidir.

Her belirli bir x_0 noktasında;

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} h_\lambda(x_0) = f(x_0)$$

veya norma göre

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|h_\lambda(x) - f(x)\|_X = 0$$

ise bu taktirde $\lambda \to \lambda_0$ için

$$\|h_\lambda(x) - f(x)\|_X \to 0$$

olduğundan λ parametresine göre birinci durumda;

$$|h_\lambda(x_0) - f(x_0)|$$

ve ikinci durumda;

$$\|h_\lambda(x) - f(x)\|_X$$

limiti sıfır olan bir ifadedir. O zaman örneğin

$$\|h_\lambda(x) - f(x)\|_X = \alpha_\lambda$$

dır ve α_λ sıfır ailesidir. Yani

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \alpha_\lambda = 0$$

dır. Bu (α_λ) ailesinin $\lambda \to \lambda_0$ iken hangi hızla sıfıra yakınsaklığının bulunması $\big(h_\lambda(x)\big)$ ailesinin f ye yaklaşım hızını belirtmektedir. Bunun için (α_λ) ailesini başka bir sıfır ailesi ile karşılaştırmak yeterlidir. Çünkü her λ için $0 \leq \alpha_\lambda \leq \beta_\lambda$ olmak üzere

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} = 0$$

veya gösterim olarak

$$(\alpha_\lambda) = o(\beta_\lambda)$$

eşitliğinin sağlanması, (α_λ) ailesinin (β_λ) ailesinden daha hızlı sıfıra gittiğini göstermektedir.

$-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere

$$A_\lambda(f;x) = \int_a^b f(t) K_\lambda(x-t)\,dt \tag{2.10}$$

şeklindeki konvolüsyon tipli integral operatörler ailesi matematiğin birçok dalında önemli bir yer tutmaktadır. Birçok diferensiyel denklem için sınır-değer probleminin çözümü bu tip integrallerle verilmektedir. Bunlara örnek olarak, bir daire için Dirichlet probleminin çözümünü veren

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+2r\cos(t-\theta)+r^2} f(t)\,dt$$

Poisson integrali, ısı denklemi için Cauchy probleminin çözümünü veren

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{\frac{-(y-x)^2}{4a^2 t}} dy$$

Gauss-Weierstrass İntegrali, yine Dirichlet probleminin üst yarı düzlem için çözümünü veren

$$U(x,t) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{y^2 + (t-x)^2} dt$$

Abel-Poisson integrali verilebilir. Ayrıca Fourier serisi için kullanılan bazı toplama yöntemlerinin incelenmesi de bu tür integral operatörler ile ilgilidir. 2π periyotlu bir f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmî toplamı

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olsun. Burada a_k ve b_k Fourier katsayıları olan

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \qquad , \qquad k = 0,1,2 \ldots$$

ve

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \qquad , \qquad k = 0,1,2 \ldots$$

ifadeleri kısmî toplamda yerine yazılırsa

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right) dt \qquad (2.11)$$

elde dilir.

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha$$

olsun.

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} cosk\alpha=\frac{2sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} cosk\alpha\right]}{2sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{sin\frac{\alpha}{2}+\sum_{k=1}^{n} 2sin\frac{\alpha}{2}cosk\alpha}{2sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{sin\frac{\alpha}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2sin\frac{\alpha}{2}}$$

dir. Bu ifade (2.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$S_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2sin\frac{(t-x)}{2}}dt \quad , \quad n=0,1,2\ldots$$

Fejer integrali elde edilir.

Birçok problemde daha genel olan $-\infty\leq a<b\leq\infty$ olmak üzere

$$L_\lambda(f;x)=\int_a^b f(t)K_\lambda(t,x)dt \tag{2.12}$$

tipindeki integrallere rastlanabilir. (2.12) integrali (2.10) integralinin bir genellemesi olduğundan dolayı (2.10) integraline ait toremler (2.12) için geçerli olmayabilir. Bu tür integrallerle örneğin, ortogonal serilerin toplanabilme yöntemlerinde karşılaşabiliriz.

$(\varphi_n(x))$ ortonormal bir dizi olsun. Yani

$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

dir. $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun (φ_n) sistemine göre genelleştirilmiş Fourier serisi

$$f(x) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} c_k\, \varphi_k(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Serinin kısmî toplamlar dizisi

$$S_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \varphi_k(x)$$

olsun. Buradaki c_k Fourier katsayıları olan

$$c_k = \int_a^b f(y)\overline{\varphi_k(y)}dy$$

dir. Bu c_k değeri kısmî toplamda yerine yazılırsa

$$S_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b f(y)\overline{\varphi_k(y)}dy\right)\varphi_k(x) = \int_a^b f(y)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(y)}dy$$

bulunur. Burada

$$K_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\,\overline{\varphi_k(y)}$$

alınırsa

$$S_n(f;x) = \int_a^b f(y)\, K_n(x,y)dy$$

elde edilir. Bu ise (2.12) şeklindeki integral operatör ailesidir. (2.12) tipli integrallerin $\lambda \to \infty$ için yakınsaklığının ve yakınsaklık hızının incelenmesi yaklaşım teorisinin önemli problemlerinden biridir.

Tanım 2.4.1: (2.12) ile verilen integralin yani

$$L_\lambda(f;x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t,x)dt$$

integralinin K_λ çekirdeği, belirli bir t_0 noktası için

$$\lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda(t_0,x) = \infty$$

özelliğini sağladığı taktirde $L_\lambda(f;x)$ integral operatörler ailesine, *singüler integral operatörler ailesi* denir.

Şimdi ileride adından bahsedileceği için aşağıdaki teoremleri ispatsız bir şekilde vereceğiz.

Teorem 2.4.1:[Weirstrass Teoremi]
$f, [a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olduğunda derecesi *n* den büyük olmayan öyle bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır ki bu aralığın her noktasında

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) \ = f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |P_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması $P_n(x)$ in $f(x)$ e düzgün yakınsaklığını gösterir.

Teorem 2.4.2: [Lusin Teoremi]

$f \in L_p(a,b), p \geq 1$ için $[a,b]$ kapalı aralığında öyle sürekli bir φ fonksiyonu bulunabilir öyleki $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(a,b)} < \varepsilon$$

dir.

Bu teoremde $L_p(a,b)$ de olan bir fonksiyonu $L_p(a,b)$ normunda bir P_n polinomunun limiti şeklinde gösterebiliriz. Yani $f \in L_p(a,b)$ ise Lusin teoremi gereğince öyle sürekli bir φ fonksiyonu bulabiliriz ki $\|f - \varphi\|_{L_p} < \varepsilon$ olur.

Yine $\varphi(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır ki $[a,b]$ kapalı aralığında $\varphi(x)$ e düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \leq x \leq b} |P_n(x) - \varphi(x)| = 0$$

dir. Dolayısıyla $P_n(x)$ polinomu $f(x)$ e L_p normunda düzgün yakınsar.

2.5. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Tanım 2.5.1: $f(x)$ ve g(x) $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli iki fonksiyon olsun.

$$d = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

sayısına f ve g fonksiyonları arasındaki uzaklık veya f fonksiyonunun g fonksiyonundan *sapması* veya *sapma miktarı* denir.

Tanım 2.5.2: f , $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $x, y \in [a,b]$ olmak üzere $|x - y| \leq \delta$ şartını sağlayan $\delta > 0$ sayısı için $|f(x) - f(y)|$ nin en küçük üst sınırına f nin *süreklilik modülü* denir ve

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|x-y|\le\delta} |f(x) - f(y)|$$

ile ifade edilir. Başka bir şekilde

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|h|\le\delta} |f(x+h) - f(x)|$$

ile de ifade edilebilir. Burada $\omega(f;\delta)$ gösterimi yerine $\omega_f(\delta)$ veya $\omega(\delta)$ gösterimleride kullanılabilir. $\omega(f;\delta)$ fonksiyonu değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini belirler. ω, δ nın birfonksiyonudur. $\delta > 0$ için $\omega(f;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur. Yani

$$\begin{aligned} &\omega: R^+ \to R^+ \cup \{0\} \\ &\quad \delta \ \ \to \omega(f;\delta) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi süreklilik modülünün özelliklerini verelim.

Lemma 2.5.1: ω fonksiyonu monoton artandır.

İspat: $0 < \delta_1 \le \delta_2$ olsun. Gösterelim ki

$$\delta_1 \le \delta_2 \Rightarrow \omega(f;\delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$$

dir. $\delta_1 \le \delta_2$ olduğundan $|x-y| \le \delta_2$ koşulunu sağlayan (x,y) sayı çiftlerinin kümesi, $|x-y| \le \delta_1$ koşulunu sağlayan (x,y) sayı çiftlerinin kümesinden daha geniştir. Büyük küme üzerinden supremum daha büyük olacağından eşitsizlik açıktır.

Süreklilik modülü sınırlı fonksiyonlar için tanımlanabilir. Fakat süreklilik modülünün en önemli özelliği sürekli fonksiyonlar için tanımlı olanlardır.

Lemma 2.5.2: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f; \delta) = 0$$

dir.

İspat: Bu durum süreklilik dolayısıyla düzgün süreklilik tanımından açıktır. Yani f sürekli olduğundan $\forall\, \varepsilon > 0$ için bir $\lambda > 0$ vardır öyleki $|t - x| < \lambda$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ dur. Süreklilik modülünde $\delta < \lambda$ aldığımızda $\omega(f; \delta) < \varepsilon$ olur. Böylece $\forall\, \varepsilon > 0$ için bir $\lambda > 0$ sayısı bulunur öyleki $\delta < \lambda$ olduğunda $\omega(f; \delta) < \varepsilon$ dur. Yani

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f; \delta) = 0$$

dir.

Lemma 2.5.3: $m \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$$

dir.

İspat:

$$\omega(f; m\delta) = \sup_{|x-y| \leq m\delta} |f(x) - f(y)|$$

ifadesinde $x = y + mh$ seçilirse

$$\begin{aligned} \omega(f; m\delta) &= \sup_{|h| \leq \delta} |f(y + mh) - f(y)| \\ &= \sup_{|h| \leq \delta} |f(y + mh) - f(y + (m-1)h) + \cdots + f(y + h) - f((y)| \end{aligned}$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left| \sum_{k=1}^{m} [f(y+kh) - f(y+(k-1)h)] \right|$$
$$\le \sum_{k=1}^{m} \sup_{|h|\le\delta} |[f(y+kh) - f(y+(k-1)h)]|$$
$$= m\,\omega(f;\delta)$$

elde edilir ki

$$\omega(f; m\delta) \le m\omega(f;\delta)$$

bulunur.

Lemma 2.5.4: $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$\omega(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\omega(f;\delta)$$

dir.

İspat: $\lambda > 0$ bir reel sayı ve m, λ nın tam kısmı olsun. Yani $m = [\![\lambda]\!]$ olsun. Bu taktirde $m \le \lambda < m+1$ olur. Süreklilik modülü artan bir fonksiyon olduğundan ve bir önceki lemmadan

$$\omega(f;\lambda\delta) < \omega(f;(m+1)\delta) \le (m+1)\omega(f;\delta) \le (\lambda+1)\omega(f;\delta)$$

olur. Dolayısıyla

$$\omega(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\omega(f;\delta)$$

olarak elde edilir.

Lemma 2.5.5: δ_n sıfıra yakınsayan bir dizi ve K_f, f ye bağlı bir sabit olmak üzere

$$\omega(f;\delta_n) \ge K_f\delta_n$$

dir.

İspat: $\omega(f;1) = \omega\left(f;\frac{1}{\delta_n}\delta_n\right)$ olarak yazılabilir. Bir önceki lemmadan

$$\omega\left(f;\frac{1}{\delta_n}\delta_n\right) \leq \left(\frac{1}{\delta_n}+1\right)\omega(f;\delta_n) \leq \left(\frac{1+\delta_n}{\delta_n}\right)\omega(f;\delta_n)$$

olur. Ayrıca δ_n yakınsak bir dizi olduğundan $\delta_{n+1} \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti mevcuttur. O halde

$$\omega(f;1) \leq \frac{K}{\delta_n}\omega(f;\delta_n)$$

olur. Eğer $K_f = \frac{\omega(f;1)}{K}$ seçilirse bu durumda

$$\omega(f;\delta_n) \geq K_f\delta_n$$

elde edilir.

Lemma 2.5.6: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı ise her $x,y \in [a,b]$ için

$$|f(x)-f(y)| \leq \left(1+\frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

dir.

İspat: Süreklilik modülü tanımından

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x)-f(y)|$$

olduğunu biliyoruz. Burada $|x-y|$ değeri en fazla δ kadardır. Yani $|x-y| = \delta$ olduğu durumda,

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|$$

ve

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(f;\delta)$$

olduğundan

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(f; |x-y|\,)$$

yazılabilir. Buradan

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega\left(f; \frac{|x-y|}{\delta}\delta\right)$$

elde edilir ki $\frac{|x-y|}{\delta} = \lambda$ denilirse; Lemma 2.5.4 den

$$|f(x) - f(y)| \leq (1+\lambda)\omega(f;\delta) = \left(1 + \frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

elde edilir. O halde

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(1 + \frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

bulunur.

2.5.1. $\boldsymbol{L_1(D)}$ Uzayında Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Tanım 2.5.1.1: $f \in L_1(-\infty,\infty)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$\omega_{L_1}(f;\delta) = \sup_{|t|\leq\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|dx$$

şeklindeki fonksiyona f nin $L_1(-\infty,\infty)$ uzayındaki *süreklilik modülü* denir. Bu fonksiyon δ nın bir fonksiyonudur. Bu süreklilik modülünün en önemli özelliği aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 2.5.1.1: $f \in L_1(-\infty,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_{L_1}(f;\delta) = 0$$

dir.

İspat: $|t| \leq \delta$ olmak üzere $f \in L_1(-\infty,\infty)$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir yeterince büyük a bulunur öyleki

$$\left(\int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{\infty}\right)|f(x)|dx < \varepsilon$$

yazılabilir. Açıktır ki $b > a$ içinde

$$\left(\int_{-\infty}^{-b} + \int_{b}^{\infty}\right)|f(x)|dx < \varepsilon$$

yazılabilir. Böylece

$$\int_{a+\delta}^{\infty} |f(x+t)|dx = \int_{a+\delta+t}^{\infty} |f(x)|dx < \varepsilon$$

ve

$$\int_{-\infty}^{-a-\delta} |f(x+t)|dx = \int_{-\infty}^{-a-\delta-t} |f(x)|dx < \varepsilon$$

yazılır. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{|t|\le\delta}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|dx \le c\varepsilon+\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|f(x+t)-f(x)|dx \quad (2.13)$$

dir. Ayrıca Lusin teoreminden $f\in L_1(a,b)$ ise $\forall\varepsilon>0$ için öyle bir φ fonksiyonu bulunur ki $\|f-\varphi\|_{L_1}<\varepsilon$ olur. Bu teoremi kullanarak $[-a-2\delta,a+2\delta]$ aralığında Lusin toreminde adı geçen sürekli φ fonksiyonunu bulalım. Yani öyle bir φ fonksiyonu bulalım ki

$$\int_{-a-2\delta}^{a+2\delta}|f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon$$

olsun. (2.13) eşitsizliğinin sağındaki integrali düşünelim.

$$\begin{aligned}
\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|f(x+t)-f(x)|dx &\le \sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|f(x+t)-\varphi(x+t)|dx\\
&+\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx+\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|\varphi(x)-f(x)|dx\\
&\le 2\int_{-a-2\delta}^{a+2\delta}|\varphi(x)-f(x)|dx+\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx\\
&=2\|f-\varphi\|_{L_1[-a-2\delta,a+2\delta]}+\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx\\
&\le 2\varepsilon+\varepsilon[2(a+\delta)]
\end{aligned}$$

elde edilir. $\delta\to 0$ için limit alınırsa

$$\lim_{\delta\to 0}\omega_{L_1}(f;\delta)=0$$

bulunur ki ispat tamamdır.

Bu süreklilik modülünün diğer özellikleri ise ispatsız bir şekilde verilebilir çünkü daha önce fonksiyonlar için verilen süreklilik modülündeki özelliklerin ispatları ile benzerdir.

Lemma 2.5.1.1: ω_{L_1} fonksiyonu monoton artandır.

Lemma 2.5.1.2: $m \in \mathbb{N}$ için $\omega_{L_1}(f; m\delta) \leq m\omega_{L_1}(f;\delta)$ dır.

Lemma 2.5.1.3: $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$\omega_{L_1}(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega_{L_1}(f;\delta)$$

dir.

2.5.2. $L_p(D)$ Uzayında Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Tanım 2.5.2.1: $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L_p(a,b)$ ise her $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega_{L_p}(f;\delta) = \sup_{|t|\leq\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

integraline f nin L_p *süreklilik modülü* denir. ω_{L_p}, δ nın bir fonksiyonudur.

Bu süreklilik modülünün özellikleri ise bir önceki alt kesimde verilen teorem ve lemmalara benzer olup ispatsız olarak verilebilir.

Teorem 2.5.2.1: $f \in L_p(a,b)$ ise bu durumda

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_{L_p}(f;\delta) = 0$$

dir.

Lemma 2.5.2.1: ω_{L_p} fonksiyonu monoton artandır.

Lemma 2.5.2.2: $m \in \mathbb{N}$ için $\omega_{L_p}(f;m\delta) \leq m\omega_{L_p}(f;\delta)$ dır.

Lemma 2.5.2.3: $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$\omega_{L_p}(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega_{L_p}(f;\delta)$$

dir.

2.6. Karakteristik Noktalar

Öncelikle $L_1(D)$ uzayında olan fonksiyonların karakteristik noktalarından bahsedelim.

$f \in L_1(a,b)$ ise

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

integralinin türevi her x için hemen hemen her yerde $f(x)$ dir. Yani

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

demektir. F fonksiyonunun ifadesi kullanılırsa bu eşitlik hemen hemen her yerde

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt = f(x) \tag{2.14}$$

olur. Burada h yerine $-h$ yazılırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)dt = f(x) \tag{2.15}$$

elde edilir. (2.14) ve (2.15) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa elde edilen

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt = f(x)$$

eşitliği hemen hemen her yerde sağlanır.

Tanım 2.6.1: (2.14) eşitliğini sağlayan her x noktasına $L_1(a,b)$ de olan f fonksiyonunun *d-noktası* denir.

(2.14) ve (2.15) eşitlikleri sırayla

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}[f(x+t)-f(x)]dt = 0$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}[f(x-t)-f(x)]dt = 0$$

şeklinde de ifade edilebilirler. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]dt=0 \tag{2.16}$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan şu anlaşılır ki *x*, $L_1(a,b)$ de olan bir fonksiyonun *d* noktası ise o zaman (2.14) ve (2.16) eşitlikleri hemen hemen her *x* için geçerlidir.

Tanım 2.6.2: $f \in L_1(a,b)$ olmak üzere, eğer f fonksiyonu

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|dt=0 \tag{2.17}$$

veya

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(t)-f(x)|dt=0 \tag{2.18}$$

eşitliklerini sağlarsa, *x* noktasına $L_1(a,b)$ de olan f fonksiyonunun *Lebesgue noktası* denir.

(2.17) ve (2.18) den her bir Lebesgue noktasında

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)-f(x)|dt=0 \tag{2.19}$$

olduğu görülür. Ayrıca (2.17) ve (2.18) ifadeleri sırayla

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}|f(x+t)-f(x)|dt=0$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}|f(x-t)-f(x)|dt=0$$

şeklinde de ifade edilebilirler. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|dt = 0$$

elde edilir ki x, f nin Lebesgue noktası ise yukarıdaki son eşitlik geçerlidir.

Şimdi gösterelim ki $L_1(a,b)$ de olan her fonksiyon için hemen hemen her nokta Lebesgue noktasıdır. Bunun için

$$|\phi(x,h)| = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt$$

fonksiyonunu ele alalım. $f \in L_1(a,b)$ olduğundan $\phi(x,h) \in L_1(a,b)$ dir.

$$\begin{aligned}
\|\phi(x,h)\|_{L_1(a,b)} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt\right)\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{\mathrm{h}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|dx\right)\mathrm{dt} \\
&\le \frac{1}{h}\int_0^{\mathrm{h}}\sup_{|t|\le\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|dx\right)\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{\mathrm{h}}\omega_{L_1(a,b)}(f,|t|)\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{h}\,\omega_{L_1(a,b)}(f,h)\int_0^{\mathrm{h}}\mathrm{dt} \qquad , \qquad (|t|<h) \\
&= \omega_{L_1(a,b)}(f,h)
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\|\phi(x,h)\|_{L_1(a,b)} \le \omega_{L_1(a,b)}(f,h)$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 2.5.1.1 den $h \to 0$ olduğunda

$$\lim_{h\to 0}\phi(x,h) = 0$$

dir. Buradan $\phi(x,h)$ fonksiyonunun tanımından hemen hemen her x noktasının Lebesgue noktası olduğu görülür.

$f \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun tüm Lebesgue noktaları kümesi $L(f)$, tüm d noktaları kümesi $D(f)$ ve tüm süreklilik noktaları kümesi $C(f)$ ile gösterilirse bu durumda

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h (f(x+t)-f(x))dt\right| \le \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt$$

eşitsizliği herbir Lebesgue noktasının aynı zamanda d-noktası olduğunu gösterir. Yani $L(f) \subset D(f)$ dir. $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonu x noktasında sürekli olsun. Bu taktirde süreklilik tanımından, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ vardır öyleki $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ sağlanır. Eğer $h \le \delta$ alınırsa

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt = 0$$

olduğunu gösterir. Yani $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun herbir süreklilik noktası aynı zamanda onun Lebesgue noktasıdır. O halde

$$C(f) \subset L(f) \subset D(f)$$

şeklinde bir ilişki olduğu görülür.

Tanım 2.6.3: $f \in L_p(a,b)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \tag{2.20}$$

veya

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(t)-f(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \tag{2.21}$$

eşitliklerinin sağlandığı her *x* noktasına f fonksiyonunun *p-Lebesgue noktası* denir.

(2.20) ve (2.21) eşitliklerine göre

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t)-f(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

eşitliğide her bir *p*-Lebesgue noktasında sağlanır. Ayrıca (2.20) ve (2.21) ifadeleri sırayla

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}|f(x+t)-f(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}|f(x-t)-f(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

biçiminde de ifade edilebilir.

$f \in L_p(-\infty,\infty)$ olsun. Reel eksenin hemen hemen her x noktası f fonksiyonunun p-Lebesgue noktasıdır. Bu ise şu şekilde gösterilebilir.

$$\psi_p(x,h) = \left(\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

olsun. $\psi_p(x,h)$ fonksiyonunun L_p normu;

$$\begin{aligned}\|\psi_p(x,h)\|_{L_p(-\infty,\infty)} &= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|^p dt\right)dx\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^h |f(x+t)-f(x)|^p dt\right)dx\right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

dir. Genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliğinden

$$\|\psi_p(x,h)\|_{L_p(-\infty,\infty)} \le \frac{1}{h}\int_0^h\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

elde edilir. Buradan da

$$\sup_{|t|\le\delta}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \omega_{L_p}(f,h)$$

olduğundan

$$\|\psi_p(x,h)\|_{L_p(-\infty,\infty)} \le \omega_{L_p}(f,h)$$

yazılabilir. Teorem 2.5.2.1 den

$$\lim_{h\to 0}\left\|\psi_p(x,h)\right\|_{L_p(-\infty,\infty)} = 0$$

elde edilir. Buradaki norm *x* değişkenine göre alındığı için

$$\lim_{h\to 0}\psi_p(x,h) = 0$$

eşitliği hemen hemen her *x* için sağlanır. $\psi_p(x,h)$ fonksiyonunun tanımından hemen hemen her *x* noktasının f fonksiyonunun *p*-Lebesgue noktası olduğu görülür.

Tanım 2.6.4: $f \in L_1(a,b)$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, eğer f fonksiyonu

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha+1}}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt = 0$$

veya

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha+1}}\int_{x-h}^{x}|f(t)-f(x)|dt = 0$$

eşitliklerini sağlarsa, *x* noktasına f fonksiyonunun *Genelleştirilmiş Lebesgue noktası* denir.

3.KONVOLÜSYON TİPLİ OLMAYAN İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİ

Bu bölümde

$$L_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\lambda(t,x)dt$$

integral operatörler ailesinin $L_1(D)$ ve $L_p(D)$ uzaylarında olan fonksiyonların karakteristik noktalarda yakınsaklık ve yakınsaklık hızı ile ilgili bazı teoremler verilecektir.

3.1. Lebesgue Noktasında Yakınsaklık ve Yakınsaklık Hızı

Bu kesimde öncelikle $L_1(a,b)$ uzayından $L_1(a,b)$ uzayına dönüşüm yapan

$$L_\lambda(f;x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t,x)dt\ , \qquad a \leq x \leq b\ , \qquad \lambda > 0 \tag{3.1}$$

integral operatör ailesinin, $L_1(a,b)$ uzayında olan fonksiyonların karakteristik noktalarda yakınsaklığı ve yakınsaklık hızı, ardından ise $L_1(a,b)$ uzayında olmayan ama bir ρ ağırlık fonksiyonu ile bölümü $L_1(a,b)$ uzayında olan fonksiyonların karakteristik noktalarda yakınsaklığı ve yakınsaklık hızı incelenecektir.

Tanım 3.1.1: K_λ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın. Bu koşulları sağladığı taktirde K_λ fonksiyonu *A-şartını sağlıyor* denir.

Negatif olmayan K_λ fonksiyonu, $x,t \in [a,b]$ değişkenlerine ve $\lambda > 0$ reel parametresine bağlı olmak üzere

$a)$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b K_\lambda(t,x)dt = 1\,, \qquad a\le x\le b\,, \qquad \lambda>0 \tag{3.2}$$

$b)$ Her belirli λ ve x için, t ye göre $[a,x]$ aralığında artan, $[x,b]$ aralığında azalandır.

$c)$ Her belirli $x\in[a,b]$ ve belirli $\delta>0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda(x\pm\delta,x)=0 \tag{3.3}$$

dir.

Teorem 3.1.1: $f\in L_1(a,b)$ ve negatif olmayan K_λ fonksiyonu, A-şartını sağlasın. Bu taktirde f fonksiyonunun her *x* Lebesgue noktasında,

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_\lambda(f;x)=f(x)$$

dir.

İspat: Lebesgue noktası tanımından

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt=0$$

veya

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}|f(t)-f(x)|dt=0$$

eşitlikleri mevcuttur. Buradan $\forall\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki, her $0<h\le\delta$ için

$$\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|dt < \varepsilon h \tag{3.4}$$

ve

$$\int_{x-h}^{x} |f(t) - f(x)|dt < \varepsilon h \tag{3.5}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Belirlenen δ ya göre Tanım 3.1.1 in $a)$ ve $b)$ koşulları kullanılarak ve $K_\lambda(t,x)$ çekirdeğinin pozitif olmasından dolayı (3.1) integrali,

$$|L_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \left\{ \int_{a}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x} + \int_{x}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{b} \right\} |f(t) - f(x)| K_\lambda(t,x)dt$$

$$+ |f(x)| \left| \int_{a}^{b} K_\lambda(t,x)dt - 1 \right|$$

$$= I_{1,\lambda} + I_{2,\lambda} + I_{3,\lambda} + I_{4,\lambda} + |f(x)| \left| \int_{a}^{b} K_\lambda(t,x)dt - 1 \right| \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi bu integralleri hesaplayalım. Öncelikle $I_{1,\lambda}$ ve $I_{4,\lambda}$ yı gözönüne alalım. Tanım 3.1.1 in $b)$ şartından

$$I_{1,\lambda} < K_\lambda(x-\delta,x) \int_{a}^{x-\delta} |f(t) - f(x)|\, dt$$

$$\leq K_\lambda(x-\delta,x) \left[\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x)|(b-a) \right]$$

ve

$$I_{4,\lambda} < K_\lambda(x+\delta,x) \int_{x+\delta}^{b} |f(t) - f(x)|\, dt$$

$$\leq K_\lambda(x+\delta,x)\left[\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x)|(b-a)\right]$$

elde edilir. $I_{1,\lambda}$ ve $I_{4,\lambda}$ toplanır ve Tanım 3.1.1 in c) şartı kullanılırsa

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(I_{1,\lambda} + I_{4,\lambda}\right) = 0 \tag{3.7}$$

bulunur. Şimdi $I_{3,\lambda}$ yı hesaplayalım. Bunun için

$$F(t) = \int_x^t |f(u) - f(x)|\, du$$

biçimde bir fonksiyon tanımlayalım. (3.4) eşitsizliğinden, $t - x \leq \delta$ olduğunda

$$|F(t)| \leq \varepsilon(t-x) \tag{3.8}$$

yazılabilir. Buna göre $I_{3,\lambda}$ integrali

$$I_{3,\lambda} = \int_x^{x+\delta} K_\lambda(t,x)dF(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kısmî integrasyon uygulanırsa;

$$I_{3,\lambda} = F(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x) - F(x)K_\lambda(x,x) + \int_x^{x+\delta} F(t)d_t\left(-K_\lambda(t,x)\right)$$

$$\left|I_{3,\lambda}\right| \leq |F(x+\delta)|K_\lambda(x+\delta,x) - |F(x)|K_\lambda(x,x) + \int_x^{x+\delta} |F(t)|d_t\left(-K_\lambda(t,x)\right)$$

elde edilir. K_λ fonksiyonu $[x,b]$ aralığında azalan olduğundan; $-K_\lambda(t,x)$ artandır. Dolayısıyla diferensiyeli pozitiftir. Böylece (3.8) eşitsizliği kullanılabilir. Yani

$$\left|I_{3,\lambda}\right| \le \varepsilon\delta K_\lambda(x+\delta,x) + \varepsilon \int_{x}^{x+\delta} (t-x)d_t\big(-K_\lambda(t,x)\big)$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağındaki integrale tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa;

$$\left|I_{3,\lambda}\right| \le \varepsilon \int_{x}^{x+\delta} K_\lambda(t,x)dt$$

olur ve $K_\lambda(t,x)$ pozitif olduğundan,

$$\left|I_{3,\lambda}\right| \le \varepsilon \int_{a}^{b} K_\lambda(t,x)dt$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan $I_{2,\lambda}$ integrali de benzer olarak hesap edilebilir. Bunun için bir G fonksiyonu

$$G(t) = \int_{t}^{x} |f(y) - f(x)|\, dy$$

şeklinde tanımlansın. O halde $G(t)$ nin diferensiyeli

$$dG(t) = -|f(y) - f(x)|dt$$

dir. (3.5) ten, $x - t \le \delta$ olduğunda

$$|G(t)\,| \le \varepsilon(x-t) \tag{3.9}$$

eşitsizliği yazılabilir. $G(t)$ nin tanımından $I_{2,\lambda}$ integrali

$$\left|I_{2,\lambda}\right| = \left| - \int_{x-\delta}^{x} K_\lambda(t,x)dG(t)\right|$$

biçiminde yazılabilir. Burada kısmî integrasyon uygulanırsa

$$\left|I_{2,\lambda}\right| \leq |G(x-\delta)|K_\lambda(x-\delta,x) + \int_{x-\delta}^{x} |G(t)|d_t\big(K_\lambda(t,x)\big)$$

elde edilir ve (3.9) dan

$$\left|I_{2,\lambda}\right| \leq \varepsilon\delta K_\lambda(x-\delta,x) + \varepsilon \int_{x-\delta}^{x} (x-t)\; d_t\big(K_\lambda(t,x)\big)$$

bulunur. Tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa

$$\left|I_{2,\lambda}\right| \leq \varepsilon \int_{x-\delta}^{x} K_\lambda(t,x)dt$$

olur ve $K_\lambda(t,x)$ nin pozitifliğinden

$$\left|I_{2,\lambda}\right| \leq \varepsilon \int_{a}^{b} K_\lambda(t,x)dt$$

elde edilir. Buradan

$$\left|I_{2,\lambda}\right| + \left|I_{3,\lambda}\right| \leq 2\varepsilon \int_{a}^{b} K_\lambda(t,x)dt \tag{3.10}$$

dir. Son olarak (3.2), (3.6), (3.7) ve (3.10) birleştirilirse ve $\lambda \to \infty$ için limit alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.2: $f \in L_1(a,b)$ ve $-\infty < a < b < \infty$ olsun. Negatif olmayan K_λ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

$a)$

$$\int_a^x K_\lambda(t,x)dt = \int_x^b K_\lambda(t,x)dt = \frac{1}{2}$$

$b)$ Verilmiş bir λ ve x için K_λ fonksiyonu t ye göre $[a,x]$ aralığında artan, $[x,b]$ aralığında azalandır.

$c)$ Belirli $N > 0$ ve $\delta_0 > 0$ için $\lambda \to \infty$ iken

$$\Delta_\lambda = \int_{x-\delta_0}^{x+\delta_0} |t-x|^N K_\lambda(t,x)dt \longrightarrow 0$$

dır.

$d)$ $0 \leq a \leq N$ olduğunda istenilen $\delta > 0$ için $\lambda \to \infty$ iken

$$K_\lambda(x \pm \delta, x) = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right)$$

ifadesi sağlanır.

Eğer sonlu $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ değerleri ve f fonksiyonu için *x* noktasında

$$\int_0^h [f(x+t) - \varphi(x)]dt = o(h^{\alpha+1}) \qquad , \quad (h \to 0) \tag{3.11}$$

ve

$$\int_0^h [f(x-t) - \psi(x)]dt = o(h^{\alpha+1}) \qquad , \quad (h \to 0) \tag{3.12}$$

şartları sağlanır ise bu taktirde

$$T_\lambda(f;x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t,x)dt \tag{3.13}$$

singüler integralinin (3.11) ve (3.12) ifadelerinin sağlandığı her x noktasında $\lambda \to \infty$ için

$$\left| T_\lambda(f;x) - \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2} \right| = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}} \right) \tag{3.14}$$

ifadesi gerçeklenir.

İspat: Teoremin a) şıkkından

$$T_\lambda(f;x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t,x)dt + \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{\psi(x)}{2} - \frac{\psi(x)}{2}$$

$$T_\lambda(f;x) - \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2} = \int_a^x [f(t)-\psi(x)]K_\lambda(t,x)dt + \int_x^b [f(t)-\varphi(x)]K_\lambda(t,x)dt$$

$$= A_1 + A_2 \tag{3.15}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi A_1 ve A_2 değerlerini hesaplayalım.

(3.12) şartına göre, istenilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta_0 > 0$ seçilebilirki $h < \delta < \delta_0$ olduğunda

$$\frac{1}{h^{\alpha+1}} \left| \int_0^h [f(x-t) - \psi(x)]dt \right| < \varepsilon \tag{3.16}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan bir F fonksiyonu

$$F(t) = \int_0^t [f(x-u) - \psi(x)]du$$

biçiminde tanımlansın. (3.16) eşitsizliğine göre $t \leq \delta$ olduğunda

$$|F(t)| \ < \varepsilon t^{\alpha+1} \tag{3.17}$$

olur. Ayrıca $F(t)$ nin tanımından

$$dF(t) = [f(x-u) - \psi(x)]dt \tag{3.18}$$

olduğu açıktır. Buna göre A_1 integrali yukarıda belirlenen $\delta > 0$ sayısı için

$$A_1 = \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x}\right)[f(t) - \psi(x)]K_\lambda(t,x)dt = A_1^1 + A_1^2 \tag{3.19}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi A_1^2 integralini hesaplayalım.

$$A_1^2 = \int_{x-\delta}^{x}[f(t) - \psi(x)]K_\lambda(t,x)dt$$

integralinde $t = x - u$ dönüşümü yapılır, sonra $u = t$ alınırsa

$$A_1^2 = \int_0^{\delta}[f(x-t) - \psi(x)]K_\lambda(x-t,x)dt$$

olur. (3.18) eşitliği kullanılırsa

$$A_1^2 = \int_0^{\delta} K_\lambda(x-t,x)dF(t)$$

elde edilir. Kısmî integrasyon yardımıyla

$$|A_1^2| \leq |F(\delta)|K_\lambda(x-\delta,x) + \int_0^\delta |F(t)|d_t\big(K_\lambda(x-t,x)\big)$$

bulunur. (3.17) eşitsizliğinden

$$|A_1^2| \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1}\, K_\lambda(x-\delta,x) + \varepsilon \int_0^\delta t^{\alpha+1} d_t\big(K_\lambda(x-t,x)\big)$$

olur. Bu ifadede tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa

$$|A_1^2| \leq (\alpha+1)\varepsilon \int_0^\delta t^\alpha K_\lambda(x-t,x)dt \tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi A_1^1 integraline bakalım.

$$A_1^1 = \int_a^{x-\delta} [f(t)-\psi(x)]K_\lambda(t,x)dt$$

$$|A_1^1| \leq \int_a^{x-\delta} |f(t)-\psi(x)|K_\lambda(t,x)dt$$

$$\leq \int_a^{x-\delta} |f(t)|K_\lambda(t,x)dt + |\psi(x)|\int_a^{x-\delta} K_\lambda(t,x)dt$$

eşitsizliği sağlanır. Teoremin $b)$ şıkkından $K_\lambda(t,x)$, $[a, x-\delta]$ aralığında t ye göre artan olduğundan

$$|A_1^1| \leq K_\lambda(x-\delta,x)\left[\int_a^{x-\delta} |f(t)|dt + |\psi(x)|\int_a^{x-\delta} dt\right]$$

dir. Buradan da

$$|A_1^1| \leq K_\lambda(x-\delta, x)\left[\int_a^b |f(t)|dt + |\psi(x)|\int_a^b dt\right]$$

$$= K_\lambda(x-\delta, x)\left[\|f\|_{L_1(a,b)} + |\psi(x)|(b-a)\right]$$

elde edilir. Böylece teoremin $d)$ şıkkından dolayı $\lambda \to \infty$ iken istenilen $\delta > 0$ için

$$A_1^1 = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right) \tag{3.21}$$

olur. Yukarıdakilere benzer şekilde A_2 de aynı yolla hesaplanabilir.

(3.11) eşitliğinden $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\ \delta_0 > 0$ vardır öyleki $h < \delta \leq \delta_0$ olduğunda

$$\frac{1}{h^{\alpha+1}}\left|\int_0^h [f(x+t) - \varphi(x)]dt\right| < \varepsilon \tag{3.22}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer yandan bir G fonksiyonu

$$G(t) = \int_0^t [f(x+u) - \varphi(x)]du \tag{3.23}$$

şeklinde tanımlansın. (3.22) eşitsizliğinden $t \leq \delta$ için

$$|G(t)| < \varepsilon t^{\alpha+1} \tag{3.24}$$

yazılabilir. (3.23) ifadesinden

$$dG(t) < [f(x+t) - \varphi(x)]dt \tag{3.25}$$

elde edilir. A_2 integrali, belirli bir $\delta > 0$ için

$$A_2 = \left(\int_{x}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{b} \right) [f(x+t) - \varphi(x)] K_\lambda(t,x) dt = A_2^1 + A_2^2 \qquad (3.26)$$

şeklinde yazılabilir. A_1^2 nin bulunmasında kullanılan işlemlere benzer olarak A_2^1 için kullanılırsa,

$$A_2^1 = \int_0^\delta [f(x+t) - \varphi(x)] K_\lambda(x+t,x) dt = \int_0^\delta K_\lambda(x+t,x) dG(t)$$

eşitliği bulunur. Kısmî integrasyondan

$$A_2^1 = G(\delta) K_\lambda(x+\delta,x) + \int_0^\delta G(t) d_t \left(-K_\lambda(x+t,x)\right)$$

olur. Burada K_λ fonksiyonu, $[x,b]$ de azalan olduğundan $-K_\lambda$ bu aralıkta artandır. dolayısıyla $d_t\left(-K_\lambda(x+t,x)\right)$ pozitiftir. Böylece integral altında (3.24) eşitsizliğini kullanabiliriz. buna göre

$$\begin{aligned} |A_2^1| &\leq |G(\delta)| K_\lambda(x+\delta,x) + \int_0^\delta |G(t)| d_t \left(-K_\lambda(x+t,x)\right) \\ &\leq \varepsilon \delta^{\alpha+1} K_\lambda(x+\delta,x) + \varepsilon \int_0^\delta t^{\alpha+1} d_t \left(-K_\lambda(x+t,x)\right) \end{aligned}$$

dir. Tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa

$$|A_2^1| \leq (\alpha+1)\varepsilon \int_0^\delta t^\alpha K_\lambda(x+t,x) d\,t$$

olup yine $t = u - x$ ve sonra $t = u$ dönüşümü ile

$$|A_2^1| \leq (\alpha+1)\varepsilon \int_x^{x+\delta} (t-x)^\alpha K_\lambda(t,x)d\,t \tag{3.27}$$

eşitsizliği elde edilir. A_2^2 de A_1^1 gibi hesap edilirse,

$$|A_2^2| \leq \; K_\lambda(x+\delta,x)\big[\|f\|_{L_1(a,b)} + |\varphi(x)|(b-a)\big]$$

ve teoremin $d)$ şıkkından $\lambda \to \infty$ iken

$$A_2^2 = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right) \tag{3.28}$$

elde edilir. Öte yandan (3.20) ve (3.27) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$|A_1^2| + |A_2^1| \leq (\alpha+1)\varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^\alpha K_\lambda(t,x)d\,t$$

elde edilir. $\alpha < N$ olduğundan $\frac{N}{\alpha} > 1$ dir. Dolayısıyla eşleniği $1-\frac{\alpha}{N}$ dir. Δ_λ nın tanımından

$$|A_1^2| + |A_2^1| \leq (\alpha+1)\varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^\alpha K_\lambda(t,x)dt$$

$$= (\alpha+1)\varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^\alpha [K_\lambda(t,x)]^{\frac{\alpha}{N}} [K_\lambda(t,x)]^{1-\frac{\alpha}{N}} dt$$

yazılabilir. Son eşitlikte Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$|A_1^2| + |A_2^1| \leq (\alpha+1)\varepsilon \left\{ \int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(|t-x|^\alpha K_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}(t,x) \right)^{\frac{N}{\alpha}} dt \right\}^{\frac{\alpha}{N}} \left\{ \int_{x-\delta}^{x+\delta} K_\lambda(t,x)dt \right\}^{\frac{N}{N-\alpha}}$$

$$\leq (\alpha+1)\varepsilon\left\{\int_{x-\delta}^{x+\delta}|t-x|^N K_\lambda(t,x)dt\right\}^{\frac{\alpha}{N}}$$

$$=(\alpha+1)\varepsilon\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right) \qquad (3.29)$$

elde edilir. Son olarak (3.29), $|A_1^1|$ ve $|A_2^2|$ yerlerine yazılırsa

$$\left|T_\lambda(f;x)-\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\right| \leq (\alpha+1)\varepsilon\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right)$$

$$+K_\lambda(x-\delta,x)\left[\|f\|_{L_1(a,b)}+|\psi(x)|(b-a)\right]$$

$$+K_\lambda(x+\delta,x)\left[\|f\|_{L_1(a,b)}+|\varphi(x)|(b-a)\right]$$

bulunur. $\lambda\to\infty$ iken (3.21) ve (3.28) den istenilen sonuç elde edilir.

Aynı yöntemle aralığın herhangi bir sınırı sonsuz olduğunda aşağıdaki teorem ispat edilmiştir.

Teorem 3.1.3: $f\in L_1(a,\infty)$ olsun. Negatif olmayan K_λ fonksiyonu Teorem 3.1.2 deki $a)-d)$ şartlarını ve $\lambda\to\infty$ iken belirli $\delta>0$ için

$$\int_{x+\delta}^{\infty} K_\lambda(t,x)dt = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right) \quad , \qquad (0\leq\alpha\leq N)$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde verilmiş x noktasında f fonksiyonu için

$$\int_0^h [f(x+t)-\varphi(x)]dt = o(h^{\alpha+1}) \quad , \quad (h\to 0)$$

ve

$$\int_0^h [f(x-t)-\psi(x)]dt = o(h^{\alpha+1})\ , \quad (h \to 0)$$

koşulları sağlandığında ve $\lambda \to \infty$ iken

$$\left| T_\lambda(f;x) - \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2} \right| = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right)$$

ifadesi gerçeklenir.

İspat: İspat için Teorem 3.1.2 den yararlanarak, benzer şekilde A_2^2 integrali yerine

$$\int_{x+\delta}^{\infty} [f(t)-\varphi(x)]K_\lambda(t,x)dt$$

alınarak sadece bu integrali bulmak yeterlidir.

$$A_2^2 = \int_{x+\delta}^{\infty} [f(t)-\varphi(x)]K_\lambda(t,x)dt$$

$$|A_2^2| \leq \int_{x+\delta}^{\infty} |f(t)|K_\lambda(t,x)dt + |\varphi(x)| \int_{x+\delta}^{\infty} K_\lambda(t,x)dt$$

bulunur. $K_\lambda(t,x)$, (x,∞) aralığında azalan olduğundan

$$|A_2^2| \leq K_\lambda(x+\delta,x) \int_{x+\delta}^{\infty} |f(t)|dt + |\varphi(x)| \int_{x+\delta}^{\infty} K_\lambda(t,x)dt$$

elde edilir. Hipotezden $\lambda \to \infty$ iken

$$A_2^2 = \|f\|_{L_1(a,\infty)} o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right) + |\varphi(x)| o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right)$$

olur ki buda ispatı tamamlar.

Şimdi Teorem 3.1.1 yardımıyla daha genel ve önemli bir teorem ispatlayacığız.

$\rho \in L_1(a,b)$ ve ρ nun Lebesgue noktalarının kümesi E_ρ olsun. Buna göre $x \in E_\rho$ olmak üzere

$$L_\lambda(\rho; x) = \int_a^b \rho(t) K_\lambda(t,x) dt$$

integral operatörler ailesi, $K_\lambda(t,x)$ çekirdeği A-şartını sağlıyorsa, $\lambda \to \infty$ için, $\rho(x)$ e yakınsaktır. $\frac{f}{\rho}$ nun Lebesgue noktalarının kümesi $E_{\frac{f}{\rho}}$ olsun. Bu taktirde hem ρ nun hemde $\frac{f}{\rho}$ nin Lebesgue noktalarının kümesi, $E = E_\rho \cap E_{\frac{f}{\rho}}$ olur. Bundan hareketle, $f \notin L_1(a,b)$ olduğu zaman,

$$L_\lambda(f; x) = \int_a^b f(t) K_\lambda(t,x) dt$$

integral operatörünün $x \in E$ noktasında $\lambda \to \infty$ için $f(x)$ e yakınsaklığını veren aşağıdaki teorem elde edilmiştir. Yani daha önce verilen teoremlerden farklı olarak $L_1(a,b)$ uzayında olmayan fonksiyonlara yaklaşımın varlığı gösterilmiştir.

Teorem 3.1.4: Kabul edelim ki $\rho > 0$ ve $f \notin L_1(a,b)$ olmak üzere, $\frac{f}{\rho} \in L_1(a,b)$ olsun. Negatif olmayan $K_\lambda(t,x)$ çekirdeği Tanım 3.1.1 in şartlarını yani A-şartını sağlasın. Aynı zamanda ρ ve $K_\lambda(t,x)$ fonksiyonları *t* ye göre, hemen hemen her yerde türevlenebilir fonksiyon ve belirli *x* ve λ için

$$\rho'(t)\frac{\partial}{\partial t}K_\lambda(t,x) > 0 \tag{3.30}$$

olsun. Bu taktirde $x \in E$ Lebesgue noktasında (3.1) integrali $f(x)$ e yakınsaktır. Yani

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir.

Not: $f \in L_1(a,b)$ olduğunda, $\rho(t) = 1$ alınabilir. Bu durumda (3.30) ifadesine ihtiyaç yoktur.

İspat: (3.1) in sağındaki integralin içindeki ifade $\rho(t)$ ile çarpıp bölünürse;

$$L_\lambda(f;x) = \int_a^b \frac{f(t)}{\rho(t)}\rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

olur ve bu durumda

$$L_\lambda(f;x) - f(x) = \int_a^b \left[\frac{f(t)}{\rho(t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)}\right]\rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$+ \frac{f(x)}{\rho(x)}\left[\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt - \rho(x)\right] \tag{3.31}$$

yazılabilir. Diğer yandan $\frac{f}{\rho} \in L_1(a,b)$ ve x de $\frac{f}{\rho}$ nin Lebesgue noktası olduğundan;

$$\lim_{h\to 0}\int_0^h \left|\frac{f(x+t)}{\rho(x+t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)}\right| dt = 0$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\int_0^h \left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| dt = 0$$

ifadeleri sağlanır. O halde her $\varepsilon > 0$ için öyle bir δ pozitif sayısı bulunabilir ki her $h \le \delta$ olduğunda

$$\int_0^h \left|\frac{f(x+t)}{\rho(x+t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| dt < \varepsilon h \tag{3.32}$$

ve

$$\int_0^h \left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| dt < \varepsilon h \tag{3.33}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu belirlenen δ sayısına göre, $K_\lambda(t,x)$ in pozitif olmasından dolayı (3.31) ifadesi,

$$|L_\lambda(f;x)-f(x)| \le \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x} + \int_x^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{b}\right)\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$+ \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| \left|\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt - \rho(x)\right|$$

$$= A_{1,\lambda} + A_{2,\lambda} + A_{3,\lambda} + A_{4,\lambda} + A_{5,\lambda} \tag{3.34}$$

şeklinde yazılabilir. Burada belirtelimki, E de olan her *x* noktası ρ nun da Lebesgue noktasıdır. Çünkü ρ, $[a,b]$ aralığında türevlenebilir olduğundan aynı zamanda $L_1(a,b)$ uzayındadır. O halde, bu *x* noktasında önceki teoreme göre,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt = \rho(x)$$

dir. Yani,

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_{5,\lambda} = 0$$

dir. Şimdi $A_{1,\lambda}$ ve $A_{4,\lambda}$ integrallerini hesaplayalım.

$$A_{1,\lambda} = \int_a^{x-\delta} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)}\right| \rho(t) K_\lambda(t,x)dt$$

$$\leq \int_a^{x-\delta} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\right| \rho(t) K_\lambda(t,x)dt + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| \int_a^{x-\delta} \rho(t) K_\lambda(t,x)dt$$

yazılabilir. Tanım 3.1.1 e göre K_λ fonksiyonu $[a, x-\delta]$ aralığında artandır.

$$A_{1,\lambda} < \rho(x-\delta) K_\lambda(x-\delta, x) \left[\int_a^{x-\delta} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\right| dt + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| \int_a^{x-\delta} dt\right]$$

$$\leq \rho(x-\delta) K_\lambda(x-\delta, x) \left[\int_a^{b} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\right| dt + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| \int_a^{b} dt\right]$$

$$\leq \rho(x-\delta) K_\lambda(x-\delta, x) \left[\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)} + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| (b-a)\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $A_{4,\lambda}$ integralide aynı yolla hesap edilebilir. O halde

$$A_{1,\lambda} < \rho(x+\delta) K_\lambda(x+\delta, x) \left[\int_{x+\delta}^{b} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\right| dt + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right| \int_{x+\delta}^{b} dt\right]$$

$$\leq \rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\left[\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)}+\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|(b-a)\right]$$

elde edilir. Böylece

$$A_{1,\lambda}+A_{4,\lambda}<\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\left[\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)}+\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|(b-a)\right]$$

$$+\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left[\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)}+\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|(b-a)\right]$$

elde edilir. Tanım 3.1.1 in $c)$ şartından

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(A_{1,\lambda}+A_{4,\lambda}\right)=0 \tag{3.35}$$

bulunur. Şimdi de $A_{2,\lambda}$ integralini hesaplayalım.

Bir Φ fonksiyonu

$$\Phi(t)=\int_0^t\left|\frac{f(x-u)}{\rho(x-u)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|du$$

şeklinde tanımlansın. (3.33) eşitsizliğinden, $t\leq\delta$ için

$$\Phi(t)<\varepsilon t \tag{3.36}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca Φ nin t ye göre diferensiyeli;

$$d\Phi(t)=\left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|dt \tag{3.37}$$

dir. Öte yandan, $A_{2,\lambda}$ integralinde $t = x - u$ dönüşümü yapılır ve sonra $u = t$ alınırsa,

$$A_{2,\lambda} = \int_0^{\delta} \left| \frac{f(x-t)}{\rho(x-t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)} \right| \rho(x-t) K_\lambda(x-t,x) dt$$

elde edilir. Bu ifadede (3.37) kullanılırsa

$$A_{2,\lambda} = \int_0^{\delta} \rho(x-t) K_\lambda(x-t,x) d\Phi(t)$$

yazılabilir. Burada kısmî integrasyon uygulanırsa

$$A_{2,\lambda} = \Phi(\delta)\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x) + \int_0^{\delta} \Phi(t) d_t\big(\rho(x-t)K_\lambda(x-t,x)\big)$$

elde edilir. (3.30) dan eşitsizliğin sağındaki integralde diferensiyel pozitiftir. Böylece (3.36) dan

$$A_{2,\lambda} \leq \varepsilon\delta\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x) + \varepsilon \int_0^{\delta} t d_t\big(\rho(x-t)K_\lambda(x-t,x)\big)$$

yazılabilir. Tekrar kısmî integrasyon yardımıyla;

$$A_{2,\lambda} \leq \varepsilon \int_0^{\delta} \rho(x-t) K_\lambda(x-t,x) dt$$

elde edilir. Burada $x - t = u$ ve sonra $t = u$ dönüşümü yapılırsa;

$$A_{2,\lambda} \leq \varepsilon \int_{x-\delta}^{x} \rho(t) K_\lambda(t,x) dt$$

eşitsizliği elde edilir. ρ ve K_λ pozitif olduğundan

$$A_{2,\lambda} \leq \varepsilon \int_a^b \rho(t) K_\lambda(t,x) dt \tag{3.38}$$

yazılabilir. Son olarak $A_{3,\lambda}$ yı bulalım. Bunun için Ψ fonksiyonunu

$$\Psi(t) = \int_0^t \left| \frac{f(x+u)}{\rho(x+u)} - \frac{f(x)}{\rho(x)} \right| du$$

şeklinde tanımlayalım. (3.32) den $t \leq \delta$ olduğunda

$$\Psi(t) < \varepsilon t \tag{3.39}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$d\Psi(t) = \left| \frac{f(x+t)}{\rho(x+t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)} \right| dt$$

dir. $A_{3,\lambda}$ integralinde $t = x + u$ ve sonra $t = u$ dönüşümü yapılırsa

$$A_{3,\lambda} = \int_0^\delta \left| \frac{f(x+t)}{\rho(x+t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)} \right| \rho(x+t) K_\lambda(x+t,x) dt$$

integrali bulunur. Burada $\Psi(t)$ nin diferensiyeli kullanılırsa

$$A_{3,\lambda} = \int_0^\delta \rho(x+t) K_\lambda(x+t,x) d\Psi(t)$$

olur. Kısmî integrasyon uygulanırsa

$$A_{3,\lambda} = \Psi(\delta)\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x) + \int_0^\delta \Psi(t)d_t\big(-\rho(x+t)K_\lambda(x+t,x)\big)$$

elde edilir. Tanım 3.1.1 in $b)$ koşulundan ve (3.30) dan $\rho(x+t)K_\lambda(x+t,x)$ bu aralıkta azalandır. Dolayısıyla $-\rho(x+t)K_\lambda(x+t,x)$ artan olup diferensiyeli pozitiftir. O halde (3.39) kullanılabilir olup

$$A_{3,\lambda} \le \varepsilon\delta\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x) + \varepsilon\int_0^\delta t d_t\big(-\rho(x+t)K_\lambda(x+t,x)\big)$$

elde edilir. Sağdaki integrale tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa

$$A_{3,\lambda} \le \varepsilon\int_0^\delta \rho(x+t)K_\lambda(x+t,x)dt$$

elde edilir ki burada $t = x - u$ ve sonra $t = u$ dönüşümüyle

$$A_{3,\lambda} \le \varepsilon\int_x^{x+\delta} \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

bulunur. ρ ve K_λ fonksiyonları pozitif olduğundan

$$A_{3,\lambda} \le \varepsilon\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \qquad (3.40)$$

yazılabilir. Böylece (3.38) ve (3.40) toplanırsa

$$A_{2,\lambda} + A_{3,\lambda} \le 2\varepsilon\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

elde edilir. Tanım 3.1.1 in b) koşulu ve (3.30) dan görülüyor ki, belirli bir x için ρ, $[a,x]$ aralığında artan, $[x,b]$ aralığında azalandır. Buna göre $K_\lambda(t,x)$ çekirdeğinin pozitifliğini kullanırsak

$$\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt = \int_a^x \rho(t)K_\lambda(t,x)dt + \int_x^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$\leq \rho(x)\int_a^x K_\lambda(t,x)dt + \rho(x)\int_x^b K_\lambda(t,x)dt$$

$$\leq \rho(x)\int_a^b K_\lambda(t,x)dt + \rho(x)\int_a^b K_\lambda(t,x)dt$$

$$= 2\rho(x)\int_a^b K_\lambda(t,x)dt$$

olduğu görülür. Tanım 3.1.1 in a) şartından yani

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b K_\lambda(t,x)dt = 1$$

olduğundan bu integral sınırlıdır. Dolayısıyla her belirli x ve tüm λ lar için

$$\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

integrali sınırlıdır. Yani öyle bir C sabiti bulunur ki,

$$A_{2,\lambda} + A_{3,\lambda} \leq \varepsilon C \tag{3.41}$$

dir. Son olarak (3.35) ve (3.41) ifadelerinden $\lambda \to \infty$ için (3.34) sıfıra yakınsaktır. Yani

$$|L_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\left[\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)} + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|(b-a)\right]$$

$$+\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left[\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)} + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|(b-a)\right]$$

$$+\varepsilon C + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\left|\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt - \rho(x)\right|$$

olup eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yakınsaktır ve dolayısıyla

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir.

Bu teoremde $a = -\infty$ ve $b = \infty$ olduğunda aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 3.1.5: $\rho > 0$ fonksiyonu, $\rho \in L_1(-\infty,\infty)$ ve $f \notin L_1(-\infty,\infty)$ olmak üzere, $\frac{f}{\rho} \in L_1(-\infty,\infty)$ olsun. Negatif olmayan $K_\lambda(t,x)$ çekirdeği Tanım 3.1.1 in şartlarını yani A-şartını ve her belirli $\delta > 0$ için

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{x-\delta} K_\lambda(t,x)dt = 0 \tag{3.42}$$

ve

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{x+\delta}^{\infty} K_\lambda(t,x)dt = 0 \tag{3.43}$$

şartlarını sağlasın. Ayrıca ρ ve $K_\lambda(t,x)$ fonksiyonları t ye göre, hemen hemen her yerde türevlenebilir fonksiyon ve her belirli x ve λ için

$$\rho'(t)\frac{\partial}{\partial t}K_\lambda(t,x) > 0$$

koşulu sağlanıyorsa, bu taktirde $x \in E$ noktasında

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir.

İspat: Yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi aynı işlemler buradada yapılabilir. O zaman

$$|L_\lambda(f;x) - f(x)| \le \left(\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x} + \int_{x}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\infty}\right)\left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$+ \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\left|\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)K_\lambda(t,x)dt - \rho(x)\right|$$

$$= A_{1,\lambda} + A_{2,\lambda} + A_{3,\lambda} + A_{4,\lambda} + A_{5,\lambda}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.30) ve Tanım 3.1.1 in b) şartından;

$$A_{1,\lambda} < \int_{-\infty}^{x-\delta}\left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$\le \rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(-\infty,\infty)} + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\rho(x-\delta)\int_{-\infty}^{x-\delta}K_\lambda(t,x)dt$$

ve aynı zamanda

$$A_{4,\lambda} \leq \rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(-\infty,\infty)} + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\rho(x+\delta)\int_{x+\delta}^{\infty} K_\lambda(t,x)dt$$

eşitsizlikleri elde edilir. $A_{1,\lambda}$ ve $A_{4,\lambda}$ toplanır $\lambda \to \infty$ için limit alımırsa, (3.42), (3.43) ve Tanım 3.1.1 in c) koşulundan

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(A_{1,\lambda} + A_{4,\lambda}\right) = 0$$

bulunur. Diğer yandan $A_{2,\lambda}$ ve $A_{3,\lambda}$ integralleri de yukarıdaki teoremin ispatına benzer şekilde yapılırsa

$$A_{2,\lambda} + A_{3,\lambda} < \varepsilon C$$

bulunabilir. Bu değerler yerine yazılırsa;

$$|L_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(-\infty,\infty)} [\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x) + \rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)]$$

$$+\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\left[\rho(x-\delta)\int_{-\infty}^{x-\delta} K_\lambda(t,x)dt + \rho(x+\delta)\int_{x+\delta}^{\infty} K_\lambda(t,x)dt\right]$$

$$+\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\left|\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)K_\lambda(t,x)dt - \rho(x)\right|$$

$$+\varepsilon C$$

elde edilir. Şimdi burada $\lambda \to \infty$ için limit alınırsa, Teoremin hipotezinden yani (3.42) ve (3.43) den aynı zamanda da Tanım 3.1.1 in c) koşulundan yukarıdaki eşitsizliğin sağındaki ifade sıfıra yakınsak olup istenilen elde edilmiştir. Yani

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir.

Bu kesimin son teoremi ise yakınsaklık hızı ile ilgili olan aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 3.1.6: $\rho > 0$, $\rho \in L_1(a,b)$, $f \notin L_1(a,b)$ ve $\frac{f}{\rho} \in L_1(a,b)$ olsun. Negatif olmayan $K_\lambda(t,x)$ çekirdeği aşağıdaki şartları sağlasın.

1) Belirli bir λ ve x için K_λ fonksiyonu t ye göre $[a,x]$ aralığında artan, $[x,b]$ aralığında azalandır.

2) $\delta > 0$, $\alpha \geq 0$ ve $\lambda \to \infty$ için

$$\Delta_\lambda = \int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^\alpha K_\lambda(t,x)dt \longrightarrow 0 \tag{3.44}$$

dir.

3) İstenilen $\delta > 0$ ve $\lambda \to \infty$ için

$$K_\lambda(x \pm \delta, x) = o(\Delta_\lambda) \tag{3.45}$$

dir.

Ayrıca

$$\int_a^x \rho(t)K_\lambda(t,x)dt = A(x) \tag{3.46}$$

$$\int_{x}^{b} \rho(t)K_{\lambda}(t,x)dt = B(x) \tag{3.47}$$

mevcut olsun. ρ ve K_{λ} fonksiyonları *t* ye göre hemen hemen her yerde türevlenebilir fonksiyonlar ve her belirli *x* ve λ için

$$\rho'(t)\frac{\partial}{\partial t}K_{\lambda}(t,x) > 0$$

yani (3.30) koşulu sağlansın.

Sonlu $\Phi(x)$ ve $\Psi(x)$ değerleri $\frac{f}{\rho}$ fonksiyonu için belirli bir *x* noktasında $h \to 0$ iken

$$\int_{0}^{h} \left|\frac{f(x+t)}{\rho(x+t)} - \Phi(x)\right| dt = o(h^{\alpha+1}) \qquad , \quad (h \to 0) \tag{3.48}$$

ve

$$\int_{0}^{h} \left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)} - \Psi(x)\right| dt = o(h^{\alpha+1}) \qquad , \quad (h \to 0) \tag{3.49}$$

şartları sağlanıyorsa bu taktirde aynı *x* noktasında (3.1) yani

$$L_{\lambda}(f;x) = \int_{a}^{b} f(t)K_{\lambda}(t,x)dt$$

integrali için $\lambda \to \infty$ iken

$$|L_{\lambda}(f;x) - [\Psi(x)A(x) + \Phi(x)B(x)]| = o(\Delta_{\lambda})$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (3.48) ve (3.49) den $\forall\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir öyleki her $h \le \delta$ için

$$\int_0^h \left|\frac{f(x+t)}{\rho(x+t)} - \Phi(x)\right| dt < \varepsilon h^{\alpha+1} \tag{3.50}$$

ve

$$\int_0^h \left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)} - \Psi(x)\right| dt < \varepsilon h^{\alpha+1} \tag{3.51}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Belirlenen δ ya göre (3.46), (3.47) ve teoremin 1) şartından;

$$\begin{aligned}
|L_\lambda(f;x) - [\Psi(x)A(x) + \Phi(x)B(x)]| \le & \int_a^{x-\delta} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \Psi(x)\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \\
& + \int_{x-\delta}^{x} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \Psi(x)\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \\
& + \int_{x}^{x+\delta} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \Phi(x)\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \\
& + \int_{x+\delta}^{b} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \Phi(x)\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \\
& = B_{1,\lambda} + B_{2,\lambda} + B_{3,\lambda} + B_{4,\lambda}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

eşitsizliği yazılabilir. Önce $B_{1,\lambda}$ ve $B_{4,\lambda}$ yı hesaplayalım.

$$B_{1,\lambda} = \int_a^{x-\delta} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \Psi(x)\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$\leq \int_a^{x-\delta} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt + |\Psi(x)| \int_a^{x-\delta} \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

yazılabilir. Teoremin 1) koşulundan, K_λ fonksiyonu t ye göre $[a, x-\delta]$ aralığında artan ve (3.30) dan $\rho(t)$ de bu aralıkta artandır. Aynı zamanda $K_\lambda(t,x)$ pozitif olduğundan,

$$B_{1,\lambda} < \rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left\{\int_a^{x-\delta} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\right| dt + |\Psi(x)| \int_a^{x-\delta} dt\right\}$$

$$\leq \rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left\{\int_a^{b} \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\right| dt + |\Psi(x)| \int_a^{b} dt\right\}$$

$$= \rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left\{\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)} + |\Psi(x)|(b-a)\right\} \tag{3.53}$$

elde edilir. Aynı metodla, $[x+\delta, b]$ aralığında K_λ fonksiyonunun azalan olmasından ve (3.30) dan,

$$B_{4,\lambda} < \rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\left\{\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)} + |\Phi(x)|(b-a)\right\} \tag{3.54}$$

bulunur. Önceki teoremin ispatına benzer olarak şimdi de $B_{2,\lambda}$ ve $B_{3,\lambda}$ integrallerini hesap edelim. Bunun için bir G fonksiyonu

$$G(t) = \int_0^t \left|\frac{f(x-u)}{\rho(x-u)} - \Psi(x)\right| du$$

şeklinde tanımlansın. (3.51) dan $t \leq \delta$ olduğunda

$$G(t) < \varepsilon t^{\alpha+1} \tag{3.55}$$

olur. Buradan

$$dG(t) = \left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)} - \Psi(x)\right| dt$$

olduğu açıktır. Buna göre $B_{2,\lambda}$ $t = x - u$ dönüşümü yapılır ve sonra da $t = u$ alınırsa

$$B_{2,\lambda} = \int_0^{\delta} \rho(x-t) K_\lambda(x-t,x) dG(t)$$

olur. Kısmî integrasyondan

$$B_{2,\lambda} = \mathrm{G}(\delta)\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x) + \int_0^{\delta} G(t) d_t\big(\rho(x-t)K_\lambda(x-t,x)\big)$$

olup sağdaki integralin içindeki ifade pozitif olduğundan (3.55) eşitsizliği kullanılabilir ve böylece

$$B_{2,\lambda} \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1}\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x) + \varepsilon\int_0^{\delta} t^{\alpha+1} d_t\big(\rho(x-t)K_\lambda(x-t,x)\big)$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağındaki integral için tekrar kısmî integrasyon uygulanır ve (3.30) dan,

$$B_{2,\lambda} \leq (\alpha+1)\rho(x)\varepsilon\int_0^{\delta} t^{\alpha} K_\lambda(x-t,x) dt$$

elde edilir. Burada $u = x - t$ dönüşümü yapılır ve sonra $u = t$ alınırsa;

$$B_{2,\lambda} \leq (\alpha+1)\rho(x)\varepsilon\int_{x-\delta}^{x} (x-t)^{\alpha} K_\lambda(t,x) dt \qquad (3.56)$$

bulunur. Benzer şekilde $B_{3,\lambda}$ integralini hesaplayalım. Öncelikle $B_{3,\lambda}$ integraline $t = x + u$ ve ardından $u = t$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $B_{3,\lambda}$ integrali

$$B_{3,\lambda} = \int_0^\delta \left| \frac{f(x+t)}{\rho(x+t)} - \Phi(x) \right| \rho(x+t) K_\lambda(x+t, x) dt$$

şeklinde olur. Yine bu integralin hesaplanmasında yardımcı olacak bir H fonksiyonu

$$H(t) = \int_0^t \left| \frac{f(x+u)}{\rho(x+u)} - \Phi(x) \right| du$$

biçimde tanımlansın. (3.50) dan $t \le \delta$ için

$$H(t) < \varepsilon t^{\alpha+1} \tag{3.57}$$

yazılabilir. H nın *t* ye göre diferensiyeli

$$dH(t) = \left| \frac{f(x+t)}{\rho(x+t)} - \Phi(x) \right| dt$$

dir. Bunun yardımıyla $B_{3,\lambda}$ integrali

$$B_{3,\lambda} = \int_0^\delta \rho(x+t) K_\lambda(x+t, x) dH(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kısmî integrasyon uygulanırsa,

$$B_{3,\lambda} = H(\delta)\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta, x) + \int_0^\delta H(t) d_t\big(-\rho(x+t)K_\lambda(x+t, x)\big)$$

olduğu görülür. Eşitliğin sağındaki integralde diferensiyel, teoremin 1) koşulundan ve (3.30) dan pozitiftir. Dolayısıyla (3.57) kullanılabilir. Bu durumda

$$B_{3,\lambda} \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1}\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x) + \varepsilon\int_0^\delta t^{\alpha+1} d_t\big(-\rho(x+t)K_\lambda(x+t,x)\big)$$

bulunur. Yine kısmî integrasyon uygulanırsa,

$$B_{3,\lambda} \leq (\alpha+1)\varepsilon\int_0^\delta t^\alpha \rho(x+t)K_\lambda(x+t,x)dt$$

elde edilir. Son olarak $t = u - x$ ve ardından $u = t$ dönüşümü yapılırsa aynı zamanda ρ bu aralıkta azalan olduğundan

$$B_{3,\lambda} \leq (\alpha+1)\rho(x)\varepsilon\int_x^{x+\delta} (t-x)^\alpha K_\lambda(t,x)dt \tag{3.58}$$

elde edilir. $B_{2,\lambda}$ ve $B_{3,\lambda}$ toplanırsa

$$B_{2,\lambda} + B_{3,\lambda} \leq (\alpha+1)\rho(x)\varepsilon\int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^\alpha K_\lambda(t,x)dt$$

$$= \varepsilon(\alpha+1)\rho(x)\Delta_\lambda \tag{3.59}$$

bulunur. Son olarak bu ifadeler yerlerine yazılırsa yani (3.53), (3.54) ve (3.59) değerleri (3.52) de yerlerine yazılırsa,

$$|L_\lambda(f;x) - [\Psi(x)A(x) + \Phi(x)B(x)]| \leq \rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)}$$

$$+ \rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)|\Psi(x)|(b-a)$$

$$+ \rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)}$$

$$+\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)|\Phi(x)|(b-a)$$

$$+\varepsilon(\alpha+1)\rho(x)\Delta_\lambda$$

olur. Burada eşitsizliğin her iki tarafı Δ_λ ya bölünürse,

$$\frac{|L_\lambda(f;x)-[\Psi(x)A(x)+\Phi(x)B(x)]|}{\Delta_\lambda}\leq\frac{\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)}}{\Delta_\lambda}$$

$$+\frac{\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)|\Psi(x)|(b-a)}{\Delta_\lambda}$$

$$+\frac{\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_1(a,b)}}{\Delta_\lambda}$$

$$+\frac{\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)|\Phi(x)|(b-a)}{\Delta_\lambda}$$

$$+\varepsilon(\alpha+1)\rho(x)$$

elde edilir ki $\lambda\to\infty$ limit alınırsa ve teoremin 3) şartından da

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{|L_\lambda(f;x)-[\Psi(x)A(x)+\Phi(x)B(x)]|}{\Delta_\lambda}\leq\frac{o(\Delta_\lambda)}{\Delta_\lambda}+\varepsilon(\alpha+1)\rho(x)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{|L_\lambda(f;x)-[\Psi(x)A(x)+\Phi(x)B(x)]|}{\Delta_\lambda}\leq\varepsilon(\alpha+1)\rho(x)$$

bulunur. ε yeterince küçük sayı ve *x* belirli olduğundan $\rho(x)$ sabit sayı olup

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{|L_\lambda(f;x)-[\Psi(x)A(x)+\Phi(x)B(x)]|}{\Delta_\lambda}=0$$

dır. Bu ise

$$|L_\lambda(f;x) - [\Psi(x)A(x) + \Phi(x)B(x)]| = o(\Delta_\lambda)$$

anlamına gelir ki şu halde ispat tamamdır.

3.2. *p*-Lebesgue Noktasında Yakınsaklık ve Yakınsaklık Hızı

Bu kesimde $f \notin L_p(a,b)$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$T_\lambda(f,x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t,x)dt \tag{3.60}$$

integral operatör ailesinin aşağıda tanımlanan $\frac{f}{\rho}$ fonksiyonunun p-Lebesgue noktasında yakınsaklığı ve yakınsaklık hızı incelenecektir. Ayrıca bir teoremde $f \in L_p(a,b)$ için verilecektir.

Teorem 3.2.1: Kabul edelim ki $\rho > 0$, $f \notin L_p(a,b)$ olmak üzere $\frac{f}{\rho} \in L_p(a,b)$ olsun. Negatif olmayan K_λ fonksiyonu Tanım 3.1.1 i yani A-şartını sağlasın. Ayrıca ρ ve K_λ fonksiyonları *t* ye göre, hemen hemen her yerde türevlenebilir fonksiyon ve belirli *x* ve λ için (3.30) yani

$$\rho'(t)\frac{\partial}{\partial t}K_\lambda(t,x) > 0$$

sağlanıyorsa bu durumda $\frac{f}{\rho}$ fonksiyonunun her p-Lebesgue noktasında

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(f,x) = f(x)$$

gerçeklenir.

İspat: x, $\frac{f}{\rho}$ fonksiyonunun p-Lebesgue noktası olduğundan, $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyleki $\forall h \leq \delta$ olduğunda

$$\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\left|\frac{f(x+t)}{\rho(x+t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{3.61}$$

ve

$$\left(\frac{1}{h}\int_{0}^{h}\left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \tag{3.62}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Diğer yandan $\rho \in L_p(a,b)$ ve $K_\lambda(t,x)$ çekirdeği A-şartını sağladığı için Teorem 3.1.1 den

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{a}^{b}\rho(t)K_\lambda(t,x)dt = \rho(x)$$

olduğu görülür. O halde

$$|T_\lambda(f,x)-f(x)| \leq \int_{a}^{b}\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$+\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\left|\int_{a}^{b}\rho(t)K_\lambda(t,x)dt-\rho(x)\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$|T_\lambda(f,x)-f(x)| \leq \int_{a}^{b}\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|[\rho(t)K_\lambda(t,x)]^{\frac{1}{p}}[\rho(t)K_\lambda(t,x)]^{\frac{1}{q}}dt$$

$$+\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\left|\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt-\rho(x)\right|$$

şeklinde yazılabilir. Burada Hölder Eşitsizliği uygulanırsa;

$$|T_\lambda(f,x)-f(x)|\leq\left(\int_a^b\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p\rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b\rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|\left|\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt-\rho(x)\right|$$

elde edilir. Ayrıca a ve b pozitif sayılar olmak üzere

$$(a+b)^p\leq 2^p(a^p+b^p) \tag{3.63}$$

eşitsizliği yukarıda kullanılırsa

$$|T_\lambda(f,x)-f(x)|^p\leq 2^p\left(\int_a^b\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p\rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)$$

$$.\left(\int_a^b\rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$+2^p\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p\left|\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt-\rho(x)\right|^p$$

bulunur. Yukarıda belirlenen δ sayısına göre

$$|T_\lambda(f,x)-f(x)|^p \leq 2^p\left\{\int_a^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^{x}+\int_x^{x+\delta}+\int_{x+\delta}^{b}\right\}$$

$$.\left(\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p\rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)$$

$$.\left(\int_a^b\rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$+2^p\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p\left|\int_a^b\rho(t)K_\lambda(t,x)dt-\rho(x)\right|^p$$

$$=2^p\left(E_{1,\lambda}+E_{2,\lambda}+E_{3,\lambda}+E_{4,\lambda}\right)\left(\int_a^b\rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$+2^p\left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p\left|\int_a^b\rho(t)K_\lambda(t,x)dt-\rho(x)\right|^p \tag{3.64}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi $E_{1,\lambda}$, $E_{2,\lambda}$, $E_{3,\lambda}$, $E_{4,\lambda}$ integrallerini hesaplayalım.

$$E_{1,\lambda}+E_{4,\lambda}=\int_a^{x-\delta}\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p\rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$+\int_{x+\delta}^{b}\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p\rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

eşitliğinde (3.63), (3.30) ve $K_\lambda(t,x)$ çekirdeğinin $[a,x-\delta]$ aralığında artan, $[x+\delta,b]$ aralığında azalan olması kullanılırsa,

$$E_{1,\lambda} + E_{4,\lambda} \leq 2^p\{\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x) + \rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\}$$

$$\cdot\left[\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_p(a,b)}^p + \left|\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p (b-a)\right] \tag{3.65}$$

elde edilir. Şimdi $E_{2,\lambda}$ integralini hesaplayalım. Bunun için

$$B(t) = \int_0^t \left|\frac{f(x-u)}{\rho(x-u)} - \frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p du$$

biçiminde bir B fonksiyonu tanımlayalım. (3.62) eşitsizliğinden $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyleki $h \leq \delta$ olduğunda

$$B(t) < \varepsilon^p t$$

eşitsizliği vardır. $E_{2,\lambda}$ integraline $t = x - u$ ve ardından $u = x$ dönüşümü uygulanırsa

$$E_{2,\lambda} = \int_0^\delta \left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)} - \frac{f(x)}{\rho(x)}\right|^p \rho(x-t)K_\lambda(x-t,x)dt$$

elde edilir. B fonksiyonunun diferensiyelinden $E_{2,\lambda}$ integrali

$$E_{2,\lambda} = \int_0^\delta \rho(x-t)K_\lambda(x-t,x)dB(t)$$

şeklinde yazılabilir. Burada önceki teoremlerin ispatlarına benzer olarak kısmî integrasyon uygulanması ve $K_\lambda(t,x)$ çekirdeğinin pozitifliğinin kullanılmasıyla

$$E_{2,\lambda} \leq \varepsilon^p \rho(x) \int_a^b K_\lambda(t,x)dt \tag{3.66}$$

eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde $E_{3,\lambda}$ integralide

$$E_{3,\lambda} \leq \varepsilon^p \rho(x) \int_a^b K_\lambda(t,x)dt \tag{3.67}$$

olarak elde edilebilir. Son olarak (3.65), (3.66) ve (3.67) eşitsizlikleri (3.64) de yerlerine yazılırsa

$$|T_\lambda(f,x) - f(x)|^p \leq 2^p \langle 2^p \{\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x) + \rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\}$$

$$\cdot \left[\left\| \frac{f}{\rho} \right\|_{L_p(a,b)}^p + \left| \frac{f(x)}{\rho(x)} \right|^p (b-a) \right]$$

$$+2^p 2\, \varepsilon^p \rho(x) \int_a^b K_\lambda(t,x)dt \rangle \left(\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$+2^p \left| \frac{f(x)}{\rho(x)} \right|^p \left| \int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt - \rho(x) \right|^p$$

bulunur. Burada, her $t \neq x$ için $\lambda \to \infty$ iken $K_\lambda(t,x) \longrightarrow 0$ ve

$$\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \longrightarrow \rho(x)$$

hipotezlerinden yola çıkarak $\lambda \to \infty$ için limit alınırsa

$$|T_\lambda(f,x) - f(x)|^p \leq C_1\big(K_\lambda(x-\delta,x) + K_\lambda(x+\delta,x)\big) + C_2\varepsilon^p \longrightarrow 0$$

elde edilir. Yani

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(f,x) = f(x)$$

bulunur ki buda ispatı tamamlar.

Not: $K_\lambda(t,x)$ çekirdeği, yukarıdaki teoremin koşullarına ilaveten $\lambda \to \infty$ için

$$\int_{x+\delta}^{\infty} \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \longrightarrow 0$$

ve

$$\int_{-\infty}^{x-\delta} \rho(t)K_\lambda(t,x)dt \longrightarrow 0$$

koşullarını da sağlıyorsa Teorem 3.2.1 $(a,b) = (-\infty,\infty)$ içinde geçerlidir.

Teorem 3.2.2: $f \in L_p(a,b)$, $p \geq 1$ ve negatif değerler almayan K_λ fonksiyonu Teorem 3.1.2 in şartlarını sağlasın. Eğer $h \to 0$ iken *x* noktasında

$$\int_0^h |f(x+t) - \varphi(x)|^p dt = o(h^{\alpha+1}) \quad , \quad (h \to 0) \tag{3.68}$$

ve

$$\int_0^h |f(x-t) - \psi(x)|^p dt = o(h^{\alpha+1}) \quad , \quad (h \to 0) \tag{3.69}$$

şartları sağlanıyorsa, bu durumda $\lambda \to \infty$ iken (3.68) ve (3.69) ifadelerini gerçekleyen *x* noktasında

$$\left| T_\lambda(f;x) - \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2} \right| = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}}\right) \tag{3.70}$$

ifadesi gerçeklenir.

İspat: Teorem 3.1.2 ye göre (3.70) ifadesini

$$\left|T_\lambda(f;x)-\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\right|\le\int_a^x[f(t)-\psi(x)]K_\lambda(t,x)dt$$
$$+\int_x^b[f(t)-\varphi(x)]K_\lambda(t,x)dt$$

şeklinde yazabiliriz. $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$\left|T_\lambda(f;x)-\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\right|\le\int_a^x[f(t)-\psi(x)]K_\lambda^{\frac{1}{p}}(t,x)K_\lambda^{\frac{1}{q}}(t,x)dt$$
$$+\int_x^b[f(t)-\varphi(x)]K_\lambda^{\frac{1}{p}}(t,x)K_\lambda^{\frac{1}{q}}(t,x)dt$$

biçiminde yazılabilir. Hölder eşitsizliğinden

$$\left|T_\lambda(f;x)-\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\right|\le\left(\int_a^x|f(t)-\psi(x)|^pK_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_x^b|f(t)-\varphi(x)|^pK_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Burada düzenleme yapılırsa

$$\frac{1}{2}\left|T_\lambda(f;x)-\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\right|^p\le\int_a^x|f(t)-\psi(x)|^pK_\lambda(t,x)dt$$
$$+\int_x^b|f(t)-\varphi(x)|^pK_\lambda(t,x)dt$$

$$= B_1 + B_2 \tag{3.71}$$

eşitsizliği elde edilir. B_1 ve B_2 integralleri Teorem 3.1.2 in ispatındaki gibi hesap edilir. (3.69) a göre istenilen $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta_0 > 0$ seçilebilir ki $h < \delta \leq \delta_0$ olduğunda

$$\frac{1}{h^{\alpha+1}}\left|\int_0^h |f(x-t) - \psi(x)|^p dt\right| < \varepsilon \tag{3.72}$$

dir.

$$H(t) = \int_0^t |f(x-u) - \psi(x)|^p du$$

ile tanımlı bir H fonksiyonu (3.72) eşitsizliğine göre $t \leq \delta$ için

$$|H(t)| < \varepsilon t^{\alpha+1}$$

dir.Aynı zamanda

$$dH(t) = |f(x-t) - \psi(x)|^p dt$$

olduğu görülür. Belirlenen δ sayısına göre, B_1 integrali

$$B_1 = \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x}\right)|f(t) - \psi(x)|^p K_\lambda(t,x)dt = B_1^1 + B_1^2$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$B_1^2 = \int_{x-\delta}^{x} |f(t) - \psi(x)|^p K_\lambda(t,x)dt$$

integralinde $t = x - v$ dönüşümü yapılır ve sonra $t = v$ alınırsa

$$B_1^2 = \int_0^{\delta} |f(x-t) - \psi(x)|^p K_\lambda(x-t, x)dt$$

integrali elde edilir. Teorem 3.1.2 in ispatındaki gibi devam edilirse

$$|B_1^2| \leq (\delta + 1)\varepsilon \int_{x-\delta}^{x} (x-t)^\alpha K_\lambda(t, x)dt \tag{3.73}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan

$$|B_1^1| = \int_a^x |f(t) - \psi(x)|^p K_\lambda(t, x)dt$$

$$\leq 2^p K_\lambda(x-\delta, x) \left[\int_a^b |f(t)|^p dt + |\psi(x)|^p (b-a) \right]$$

$$\leq 2^p K_\lambda(x-\delta, x) \left[\|f\|_{L_p(a,b)}^p + |\psi(x)|^p (b-a) \right]$$

olup Teorem 3.1.2 in $b)$ şıkkından $\lambda \to \infty$ olduğunda $\delta > 0$ için

$$B_1^1 = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{\alpha}{N}} \right) \tag{3.74}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$B_2 = \left(\int_x^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{b} \right) |f(t) - \varphi(x)|^p K_\lambda(t, x)dt = B_2^1 + B_2^2$$

şeklinde yazılabilir. Yine yukarıdaki benzer yöntemle

$$|B_2^1| \leq (\delta+1)\varepsilon \int_{x}^{x+\delta} (t-x)^{\alpha} K_{\lambda}(t,x)dt \tag{3.75}$$

ve

$$|B_2^2| \leq 2^p K_{\lambda}(x+\delta,x)\left[\|f\|_{L_p(a,b)}^p + |\psi(x)|^p (b-a)\right] \tag{3.76}$$

olduğu görülür. B_1^1, B_1^2, B_2^1, ve B_2^2 ifadeleri (3.71) de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\left|T_{\lambda}(f;x) - \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\right|^p \leq (\delta+1)\varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^{\alpha} K_{\lambda}(t,x)dt$$

$$+2^p K_{\lambda}(x-\delta,x)\left[\|f\|_{L_p(a,b)}^p + |\psi(x)|^p (b-a)\right]$$

$$+2^p K_{\lambda}(x+\delta,x)\left[\|f\|_{L_p(a,b)}^p + |\psi(x)|^p (b-a)\right]$$

elde edilir ki eşitsizliğin sağındaki ilk terim Δ_{λ} ya eşittir. Bu ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\left|T_{\lambda}(f;x) - \frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}\right|^p \leq (\delta+1)\varepsilon \left(\Delta_{\lambda}^{\frac{\alpha}{N}}\right)$$

$$+2^p K_{\lambda}(x-\delta,x)\left[\|f\|_{L_p(a,b)}^p + |\psi(x)|^p (b-a)\right]$$

$$+2^p K_{\lambda}(x+\delta,x)\left[\|f\|_{L_p(a,b)}^p + |\psi(x)|^p (b-a)\right]$$

bulunur. Böylece $\lambda \to \infty$ olduğunda Teorem 3.1.2 nin $d)$ şıkkından istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.3: $-\infty < a < b < \infty$, $\rho > 0$, $\rho \in L_p(a,b)$, $f \notin L_p(a,b)$ ve $\frac{f}{\rho} \in L_p(a,b)$ olsun. Negatif olmayan $K_{\lambda}(t,x)$ çekirdeği aşağıdaki şartları sağlasın.

1) Belirli bir λ ve x için K_λ fonksiyonu t ye göre $[a,x]$ aralığında artan, $[x,b]$ aralığında azalandır.

2) $\delta > 0$, $\alpha \geq 0$ ve $\lambda \to \infty$ için

$$\Delta_\lambda = \int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^\alpha K_\lambda(t,x)dt \longrightarrow 0$$

dir.

3) İstenilen $\delta > 0$ ve $\lambda \to \infty$ için

$$K_\lambda(x \pm \delta, x) = o(\Delta_\lambda)$$

dir.

4)

$$\int_a^x \rho(t)K_\lambda(t,x)dt = C(x)$$

ve

$$\int_x^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt = D(x)$$

mevcut olsun. Aynı zamanda ρ ve K_λ fonksiyonları t ye göre hemen hemen her yerde türevlenebilir fonksiyonlar ve her belirli x ve λ için (3.30) yani

$$\rho'(t)\frac{\partial}{\partial t}K_\lambda(t,x) > 0$$

koşulunu sağlansın.

Sonlu $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ değerleri $\frac{f}{\rho}$ fonksiyonu için belirli bir x noktasında $h \to 0$ iken

$$\int_0^h \left|\frac{f(x+t)}{\rho(x+t)} - \beta(x)\right|^p dt = o(h^{\alpha+1}) \qquad , \quad (h \to 0) \tag{3.77}$$

ve

$$\int_0^h \left|\frac{f(x-t)}{\rho(x-t)} - \alpha(x)\right|^p dt = o(h^{\alpha+1}) \qquad , \quad (h \to 0) \tag{3.78}$$

şartları sağlanıyorsa bu taktirde aynı *x* noktasında $\lambda \to \infty$ için

$$|T_\lambda(f;x) - [\alpha(x)C(x) + \beta(x)D(x)]| = o\left(\Delta_\lambda^{\frac{1}{p}}\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teoremin 4. koşulundan,

$$|T_\lambda(f;x) - [\alpha(x)C(x) + \beta(x)D(x)]| \leq \int_a^x \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \alpha(x)\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

$$+ \int_x^b \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \beta(x)\right| \rho(t)K_\lambda(t,x)dt$$

eşitsizliği yazılabilir. $1 < p < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Yukarıda Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$|T_\lambda(f;x) - [\alpha(x)C(x) + \beta(x)D(x)]| \leq \left(\int_a^x \left|\frac{f(t)}{\rho(t)} - \alpha(x)\right|^p \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$.\left(\int_a^x \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_x^b \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\beta(x)\right|^p \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$.\left(\int_x^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. (3.63) eşitsizliğinden yararlanarak

$$|T_\lambda(f;x)-[\alpha(x)C(x)+\beta(x)D(x)]|^p \leq 2^p\left(\int_a^x \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\alpha(x)\right|^p \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)$$

$$.\left(\int_a^x \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$+2^p\left(\int_x^b \left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\beta(x)\right|^p \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)$$

$$.\left(\int_x^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

ve belirlenen δ sayısı için

$$\leq 2^p\left(\int_a^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^x\right)\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\alpha(x)\right|^p \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\left(\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$+2^p\left(\int_x^{x+\delta}+\int_{x+\delta}^b\right)\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\beta(x)\right|^p \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\left(\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

$$= 2^p\left(F_{1,\lambda} + F_{2,\lambda} + F_{3,\lambda} + F_{4,\lambda}\right)\left(\int_a^b \rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

yazılabilir. Teoremin 1. şartından ve $K_\lambda(t,x)$ pozitif olduğundan

$$F_{1,\lambda} \leq 2^p\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\left(\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_p(a,b)}^{\mathrm{p}} + |\alpha(x)|^p(b-a)\right)$$

ve

$$F_{4,\lambda} \leq 2^p\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\left(\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_p(a,b)}^{\mathrm{p}} + |\beta(x)|^p(b-a)\right)$$

olduğu yukarıdaki teoremden açıktır. Yine önceki teoremlerin ispatlarına benzer şekilde (3.77), (3.78) ve kısmî integrasyondan

$$F_{2,\lambda} \leq (\alpha+1)\varepsilon^p\rho(x)\int_{x-\delta}^{x}(x-t)^\alpha K_\lambda(t,x)dt$$

ve

$$F_{3,\lambda} \leq (\alpha+1)\varepsilon^p\rho(x)\int_{x}^{x+\delta}(t-x)^\alpha K_\lambda(t,x)dt$$

eşitsizlikleri kolaylıkla bulunabilir. $F_{1,\lambda}$, $F_{2,\lambda}$, $F_{3,\lambda}$ ve $F_{4,\lambda}$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$|T_\lambda(f;x) - [\alpha(x)C(x) + \beta(x)D(x)]|^p \leq 2^{2p}\langle\left(\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\right)\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_p(a,b)}^{\mathrm{p}}$$

$$+\left(\rho(x-\delta)K_\lambda(x-\delta,x)\right)|\alpha(x)|^p(b-a)$$

$$+\left(\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\right)\left\|\frac{f}{\rho}\right\|_{L_p(a,b)}^{\mathrm{p}}$$

$$+\big(\rho(x+\delta)K_\lambda(x+\delta,x)\big)|\beta(x)|^p(b-a)$$

$$+(\alpha+1)\varepsilon^p\rho(x)\int_{x-\delta}^{x+\delta}|t-x|^\alpha K_\lambda(t,x)dt$$

$$.\left(\int_a^b\rho(t)K_\lambda(t,x)dt\right)^{\frac{p}{q}}$$

olur. Burada C_1, C_2, C_3 sabitler olmak üzere

$$|T_\lambda(f;x)-[\alpha(x)C(x)+\beta(x)D(x)]|^p\leq C_1K_\lambda(x-\delta,x)+C_2K_\lambda(x+\delta,x)+\varepsilon C_3\Delta_\lambda$$

eşitsizliği elde edilir. eşitsizliğin her iki tarafı Δ_λ ya bölünürse

$$\frac{|T_\lambda(f;x)-[\alpha(x)C(x)+\beta(x)D(x)]|^p}{\Delta_\lambda}\leq C_1\frac{K_\lambda(x-\delta,x)}{\Delta_\lambda}+C_2\frac{K_\lambda(x+\delta,x)}{\Delta_\lambda}+\varepsilon C_3$$

buradan da $\lambda\to\infty$ için limite geçilirse, hipotezden, $K_\lambda(x\pm\delta,x)=o(\Delta_\lambda)$ olduğundan

$$0\leq\lim_{\lambda\to\infty}\frac{|T_\lambda(f;x)-[\alpha(x)C(x)+\beta(x)D(x)]|^p}{\Delta_\lambda}\leq\varepsilon C_3$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{|T_\lambda(f;x)-[\alpha(x)C(x)+\beta(x)D(x)]|^p}{\Delta_\lambda}=0$$

$$|T_\lambda(f;x)-[\alpha(x)C(x)+\beta(x)D(x)]|^p=o(\Delta_\lambda)$$

veya

$$|T_\lambda(f;x)-[\alpha(x)C(x)+\beta(x)D(x)]|=o(\Delta_\lambda^{\frac{1}{p}})$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar.

3.3. Süreklilik Noktasında Yakınsaklık

Bu kesimde $f \in L_1(a,b)$ olmak üzere, (3.1) yani

$$L_\lambda(f;x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t,x)dt \ , \qquad a \le x \le b \, , \qquad \lambda > 0$$

integral operatör ailesinin, f fonksiyonunun süreklilik noktasında yakınsaklığı incelenmiştir.

Teorem 3.3.1: $f \in L_1(a,b)$ olsun. Negatif olmayan K_λ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

1)

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b K_\lambda(t,x)dt = 1 \, , \qquad a < x < b \, , \qquad \lambda > 0$$

2) Her belirli x ve λ sayısı için, $K_\lambda(t,x)$ çekirdeği t ye göre $[a,x]$ aralığında artan, $[x,b]$ aralığında azalandır.

3) $\forall t \neq x$ için,

$$\lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda(t,x) = 0$$

dir.

Eğer x, f nin süreklilik noktası ise bu taktirde,

$$\lim_{\lambda\to\infty} L_\lambda(f,x) = f(x)$$

dir.

İspat: x süreklilik noktası olduğundan dolayı, keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunur ki, $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.79}$$

dur. δ yı belirledikten sonra (3.1) ifadesi, teoremin 1) koşulundan,

$$|L_\lambda(f,x) - f(x)| \leq \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{b} \right) |f(t) - f(x)| K_\lambda(t,x)dt$$

$$+|f(x)| \left| \int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right|$$

$$= C_{1,\lambda} + C_{2,\lambda} + C_{3,\lambda} + |f(x)| \left| \int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right| \tag{3.80}$$

yazılabilir. Öncelikle $C_{2,\lambda}$ integralini hesap edelim. (3.79) dan

$$C_{2,\lambda} = \int_{x-\delta}^{x+\delta} |f(t) - f(x)| K_\lambda(t,x)dt < \varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} K_\lambda(t,x)dt$$

bulunur ve $K_\lambda(t,x)$ pozitif olduğundan

$$C_{2,\lambda} < \varepsilon \int_a^b K_\lambda(t,x)dt \tag{3.81}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$C_{1,\lambda} + C_{3,\lambda} = \int_a^{x-\delta} |f(t) - f(x)| K_\lambda(t,x)dt + \int_{x+\delta}^{b} |f(t) - f(x)| K_\lambda(t,x)dt$$

eşitliğinde teoremin 2) koşulu kullanılırsa,

$$C_{1,\lambda} + C_{3,\lambda} < K_\lambda(x-\delta,x)\int_a^{x-\delta} |f(t)-f(x)|dt + K_\lambda(x+\delta,x)\int_{x+\delta}^{b} |f(t)-f(x)|dt$$

elde edilir ve $K_\lambda(t,x)$ pozitif olduğundan

$$C_{1,\lambda} + C_{3,\lambda} < K_\lambda(x-\delta,x)\int_a^{b} |f(t)-f(x)|dt + K_\lambda(x+\delta,x)\int_{a}^{b} |f(t)-f(x)|dt$$

yazılabilir. Buradan

$$C_{1,\lambda} + C_{3,\lambda} \leq \{K_\lambda(x-\delta,x) + K_\lambda(x+\delta,x)\}\left[\int_a^b |f(t)|dt + |f(x)|\int_a^b dt\right]$$

$$= \{K_\lambda(x-\delta,x) + K_\lambda(x+\delta,x)\}\left[\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x)|(b-a)\right] \qquad (3.82)$$

ifadesi bulunur. Böylece (3.81) ve (3.82), (3.80) de yerlerine yazılırsa,

$$|L_\lambda(f,x) - f(x)| \leq \{K_\lambda(x-\delta,x) + K_\lambda(x+\delta,x)\}\left[\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x)|(b-a)\right]$$

$$+\varepsilon\int_a^b K_\lambda(t,x)dt + |f(x)|\left|\int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1\right|$$

olur ve burada $\lambda \to \infty$ için limit alınırsa teoremin 1) ve 3) koşullarından

$$|L_\lambda(f,x) - f(x)| \longrightarrow 0 \qquad (\lambda \to \infty)$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamdır.

Teorem 3.3.2: $f \in C_{[a-\mu,b+\mu]}$ olsun. Negatif olmayan K_λ fonksiyonu;

1)

$$\sup_{a \le x \le b} \left| \int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right| \longrightarrow 0 \qquad (\lambda \to \infty)$$

2) Her belirli x ve λ sayısı için, $K_\lambda(t,x)$ çekirdeği t ye göre $[a,x]$ aralığında artan, $[x,b]$ aralığında azalandır.

3) $\forall \delta > 0$ için

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{a \le x \le b} |K_\lambda(x \pm \delta, x)| = 0$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda $\lambda \to \infty$ için

$$L_\lambda(f,x) \rightrightarrows f(x)\,, \qquad a \le x \le b$$

dir. Yani

$$\sup_{a \le x \le b} |L_\lambda(f,x) - f(x)| \longrightarrow 0 \qquad (\lambda \to \infty)$$

gerçeklenir.

İspat: f fonksiyonu $[a-\mu, b+\mu]$ aralığında sürekli ise $[a,b]$ aralığında düzgün süreklidir. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı vardır ki $\forall t, x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ dur. Kabul edelimki $\delta < \mu$ olsun. Teoremin 1. koşulundan

$$|L_\lambda(f,x) - f(x)| \le \int_a^b |f(t) - f(x)| K_\lambda(t,x)dt + |f(x)| \left| \int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right|$$

olur ve belirlenen δ ya göre

$$|L_\lambda(f,x)-f(x)| \leq \left(\int_a^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{b} \right) |f(t)-f(x)| K_\lambda(t,x)dt$$

$$+|f(x)| \left| \int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right|$$

$$= D_{1,\lambda} + D_{2,\lambda} + D_{3,\lambda} + |f(x)| \left| \int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right|$$

yazılabilir. Bir önceki teoremin ispatında olduğu gibi

$$D_{2,\lambda} \leq \varepsilon \int_a^b K_\lambda(t,x)dt = \varepsilon \left[\int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right] + \varepsilon$$

ve

$$D_{1,\lambda} + D_{3,\lambda} < \{K_\lambda(x-\delta,x) + K_\lambda(x+\delta,x)\}\left[\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x)|(b-a)\right]$$

eşitsizlikleri bulunur. Bu değerler yukarıda yerlerine yazılırsa

$$|L_\lambda(f,x)-f(x)| \leq \varepsilon \left[\int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right] + \varepsilon$$

$$+ \{K_\lambda(x-\delta,x) + K_\lambda(x+\delta,x)\}\left[\|f\|_{L_1(a,b)} + |f(x)|(b-a)\right]$$

$$+|f(x)| \left| \int_a^b K_\lambda(t,x)dt - 1 \right|$$

bulunur. Burada $x \in [a,b]$ için supremum alınırsa

$$\sup_{a\le x\le b}|L_\lambda(f,x)-f(x)|\le \varepsilon \sup_{a\le x\le b}\left[\int_a^b K_\lambda(t,x)dt-1\right]+\varepsilon$$

$$+\sup_{a\le x\le b}\{K_\lambda(x-\delta,x)+K_\lambda(x+\delta,x)\}$$
$$.\left[\|f\|_{L_1(a,b)}+\sup_{a\le x\le b}|f(x)|(b-a)\right]$$

$$+\sup_{a\le x\le b}|f(x)|\sup_{a\le x\le b}\left(\int_a^b K_\lambda(t,x)dt-1\right)$$

elde edilir ki buradan

$$\sup_{a\le x\le b}|L_\lambda(f,x)-f(x)|= \varepsilon \sup_{a\le x\le b}\left[\int_a^b K_\lambda(t,x)dt-1\right]+\varepsilon$$

$$+\left\{\sup_{a\le x\le b}K_\lambda(x-\delta,x)+\sup_{a\le x\le b}K_\lambda(x+\delta,x)\right\}$$
$$.\left[\|f\|_{L_1(a,b)}+\|f\|_{C[a,b]}(b-a)\right]$$
$$+\|f\|_{C[a,b]}\sup_{a\le x\le b}\left(\int_a^b K_\lambda(t,x)dt-1\right)$$

bulunur. $\forall\delta>0$ için $K_\lambda(x\pm\delta,x)$ sıfıra düzgün yakınsak olduğundan $\lambda\to\infty$ iken

$$\sup_{a\le x\le b}|L_\lambda(f,x)-f(x)|\longrightarrow 0$$

sağlanır. Buda ispatı tamamlar.

4. KONVOLÜSYON TİPLİ OLMAYAN NON-LİNEER İNTEGRAL OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Bu bölümde, $f \in L_1 < A, B >$, Λ boş olmayan bir indis kümesi ve λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası, $< a, b >$ ve $< A, B >$ aralıkları R nin herhangi bir tipindeki keyfi alt aralıkları olmak üzere $(x, \lambda) \to (x_0, \lambda_0)$ iken

$$T_\lambda(f; x) = \int_A^B K_\lambda(t, x, f(t))dt\ , \qquad x \in < a, b >, \qquad \lambda \in \Lambda$$

integral operatör ailesinin f fonksiyonunun bazı x_0 karakteristik noktalarında noktasal yakınsaklık ve yakınsaklık hızı verilecektir.

Not: Bu bölümdeki $< A, B >$ ve $< a, b >$ aralıkları R reel sayılar kümesinin herhangi bir tipindeki alt aralıklarıdır. Örneğin $< A, B >= (-\infty, a)$, $< A, B >= (-\infty, a]$, $< A, B >= (a, b)$ gibi aralıklardır.

4.1. Notasyonlar Ve Tanımlamalar

Λ boş olmayan bir indis kümesi, $\lambda > 0$ bu küme üzerinde değişen reel parametre ve λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $G \subset R$ üzerinde ilk değişkene göre integrallenebilen $K_\lambda: G \times G \times R \longrightarrow R$ fonksiyonları ele alalım. Her $t, x \in G$ ve $\lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(t, x, 0) = 0$ olsun. Buradaki K fonksiyonu çekirdek olarak adlandırılacaktır.

Tanım 4.1.1: Kabul edelimki $K_\lambda: R \times R \times R \longrightarrow R$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

$a)$ $\forall t, x, u, v \in R$ ve herhangi $\lambda \in \Lambda$ için $L_\lambda(t, x)$ bir fonksiyon olmak üzere

$$|K_\lambda(t, x, u) - K_\lambda(t, x, v)| \leq L_\lambda(t, x)|u - v|$$

dir. Ayrıca herbir $\lambda \in \Lambda$ ve herhangi bir $x \in <a, b>$ sabiti için $L_\lambda(t, x)$, t ye göre integrallenebilir olsun.

$b)$ Herhangi bir $x \in <a, b>$ sabiti için öyle bir $x_0 \in <A, B>$ vardır öyleki her $U \in \mathcal{U}(x_0)$ için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_{R \setminus U} L_\lambda(t, x) dt = 0$$

dır. Burada $\mathcal{U}(x_0)$, x_0 ın R deki tüm komşuluklarının ailesidir.

$c)$ Herhangi bir $x \in <a, b>$ sabiti için öyle bir $x_0 \in <A, B>$ vardır öyleki her $\forall \delta > 0$ için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{t \in R \setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t, x) = 0$$

dır. Burada $\mathcal{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dır.

$d)$ Herhangi bir $x \in <a, b>$ sabiti için öyle bir $x_0 \in <A, B>$ ve $\delta > 0$ vardır öyleki herbir $\lambda \in \Lambda$ için $L_\lambda(t, x)$, t ye göre $<x_0 - \delta, x_0]$ üzerinde azalmayan ve $[x_0, x_0 + \delta>$ üzerinde artmayan bir fonksiyondur.

$e)$ $\forall u \in R$ için

$$\lim_{(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)} \int_R K_\lambda(t, x, u) dt = u$$

dır.

Bu tanımda $a)$ şartında verilen tüm $K_\lambda(t, x, u)$ fonksiyonlarının sınıfına *çekirdek* denir.

4.2. Noktasal Yakınsaklık ve Yakınsaklık Hızı

$L_1 < A, B >$, $< A, B >$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olsun. $g \in L_1(R)$ fonksiyonunu

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in < A, B > \\ 0 \;, & t \notin < A, B > \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlayalım.

Başlangıçta $< A, B >$ aralığının R de keyfi sonlu aralık olduğunu kabul edelim.

Teorem 4.2.1: Farz edelim ki $K_\lambda(t, x, u)$ çekirdeği Tanım 4.1.1 deki şartları sağlasın. Ayrıca $(x, \lambda) \to (x_0, \lambda_0)$ iken

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} L_\lambda(t, x)|t - x_0|^\alpha dt \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

olsun. Eğer x_0, $f \in L_1 < A, B >$ fonksiyonunun

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^{\alpha+1}} \int_0^h |f(x_0 + t) - f(x_0)|\, dt = 0 \;, \qquad 0 \le \alpha < 1 \tag{4.3}$$

şartını sağlayan genelleştirilmiş Lebesgue Noktası ise bu durumda

$$\lim_{(x,\lambda) \to (x_0, \lambda_0)} |T_\lambda(f; x) - f(x_0)| = 0$$

dır.

İspat: $\forall \delta > 0$ için $x_0 + \delta < B$, $x_0 - \delta > A$ olsun. $I(x, \lambda) := T_\lambda(f; x) - f(x_0)$ ile gösterilsin. (4.1) den ve Tanım 4.1.1 in e) şartından

$$I(x,\lambda)=\int_A^B K_\lambda(t,x,f(t))dt-f(x_0)$$

$$=\int_R K_\lambda(t,x,g(t))dt-\int_R K_\lambda(t,x,g(x_0))dt+\int_R K_\lambda(t,x,g(x_0))dt-f(x_0)$$

yazılabilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınır ve eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|I(x,\lambda)|\le\int_R |K_\lambda(t,x,g(t))-K_\lambda(t,x,g(x_0))|dt$$

$$+\left|\int_R K_\lambda(t,x,g(x_0))dt-f(x_0)\right| \tag{4.4}$$

elde edilir. Tanım 4.1.1 deki $a)$ şartından $\forall\lambda\in\Lambda$ için

$$|K_\lambda(t,x,g(t))-K_\lambda(t,x,g(x_0))|\le L_\lambda(t,x)|g(t)-g(x_0)| \tag{4.5}$$

yazılabilir. (4.5), (4.4) te yerine yazılırsa

$$|I(x,\lambda)|\le\int_R L_\lambda(t,x)|g(t)-g(x_0)|dt+\left|\int_R K_\lambda(t,x,g(x_0))dt-f(x_0)\right|$$

elde edilir. Buradan

$$|I(x,\lambda)|\le\left(\int_{t\notin <A,B>}+\int_{<A,B>\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)}+\int_{x_0-\delta}^{x_0}+\int_{x_0}^{x_0+\delta}\right)|g(t)-g(x_0)|L_\lambda(t,x)dt$$
$$+\left|\int_R K_\lambda\big(t,x,g(x_0)\big)dt-f(x_0)\right|$$

$$= I_1(x,\lambda) + I_2(x,\lambda) + I_3(x,\lambda) + I_4(x,\lambda) + I_5(x,\lambda)$$

yazılabilir. (4.1) den ve Tanım 4.1.1 in e) şartından $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken $I_5(x,\lambda) \longrightarrow 0$ dır. $I_2(x,\lambda)$ integralini hesaplayalım.

$$I_2(x,\lambda) = \int\limits_{<A,B>\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} |g(t) - g(x_0)| L_\lambda(t,x)dt$$

$t \in < A, B >\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)$ üzerinden supremum alınırsa ve (4.1) den

$$I_2(x,\lambda) \leq \sup_{t\in <A,B>\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x) \int\limits_{<A,B>\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} |f(t) - f(x_0)|dt$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integralde üçgen eşitsizliği uyulanırsa

$$I_2(x,\lambda) \leq \sup_{t\in <A,B>\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x) \int\limits_{<A,B>\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} (|f(t)| + |f(x_0)|)dt$$

$$\leq \sup_{t\in <A,B>\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x) \left(\int_A^B |f(t)|dt + |f(x_0)| \int_A^B dt \right)$$

$$\leq \sup_{t\in <A,B>\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x) \left[\|f\|_{L_1<A,B>} + |f(x_0)|(B-A) \right] \qquad (4.6)$$

elde edilir. Burada $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken limit alınırsa Tanım 4.1.1 in c) şıkkından $I_2(x,\lambda) \longrightarrow 0$ dır. Şimdi ise $I_3(x,\lambda)$ integralini hesaplayalım. Bunun için bir F fonksiyonu

$$F(t) := \int_t^{x_0} |f(y) - f(x_0)|dy \qquad (4.7)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F(t)$ nin diferensiyeli

$$dF(t) = |f(t) - f(x_0)|dt$$

olur. (4.3) e göre $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ bulunabilir öyle ki $x_0 - t \leq \delta$ olduğunda

$$F(t) \leq \varepsilon (x_0 - t)^{\alpha+1} \tag{4.8}$$

dir.

$$I_3(x, \lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |g(t) - g(x_0)| L_\lambda(t, x) dt$$

integrali (4.1) den

$$I_3(x, \lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |f(t) - f(x_0)| L_\lambda(t, x) dt$$

yazılabilir. Burada $F(t)$ nin diferensiyeli kullanılırsa

$$I_3(x, \lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} L_\lambda(t, x) dF(t)$$

elde edilir. (4.7) den

$$|I_3(x, \lambda)| = \left| - \int_{x_0-\delta}^{x_0} L_\lambda(t, x) dF(t) \right|$$

yazılabilir. Burada kısmî integrasyon uygulanırsa

$$|I_3(x, \lambda)| \leq |F(x_0 - \delta)| L_\lambda(x_0 - \delta, x) + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(t)| d_t\big(L_\lambda(t, x)\big)$$

elde edilir. (4.8) den

$$|I_3(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1}L_\lambda(x_0-\delta,x) + \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha+1} d_t\big(L_\lambda(t,x)\big)$$

bulunur. Tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa

$$|I_3(x,\lambda)| \leq \varepsilon(\alpha+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha} L_\lambda(t,x)dt \tag{4.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde $I_4(x,\lambda)$ integrali de hesaplanabilir. Bunun için bir G fonksiyonu

$$G(t) \coloneqq \int_{x_0}^{t} |f(y)-f(x_0)|dy \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $G(t)$ nin diferensiyeli

$$dG(t) = |f(t)-f(x_0)|dt$$

olur. (4.3) e göre $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ bulunabilir öyle ki $t-x_0 \leq \delta$ olduğunda

$$G(t) \leq \varepsilon(t-x_0)^{\alpha+1} \tag{4.11}$$

dir.

$$I_4(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} |g(t)-g(x_0)|L_\lambda(t,x)dt$$

integrali (4.1) den

$$I_4(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} |f(t) - f(x_0)| L_\lambda(t,x)dt$$

yazılabilir. Burada $G(t)$ nin diferensiyeli kullanılırsa

$$I_4(x,\lambda) = \int_{x_0}^{x_0+\delta} L_\lambda(t,x)dG(t)$$

elde edilir. (4.10) dan

$$|I_4(x,\lambda)| = \left| - \int_{x_0}^{x_0+\delta} L_\lambda(t,x)dG(t) \right|$$

yazılabilir. Burada kısmî integrasyon uygulanırsa

$$|I_4(x,\lambda)| \leq |G(x_0+\delta)| L_\lambda(x_0+\delta, x) + \int_{x_0}^{x_0+\delta} |G(t)| d_t\big(L_\lambda(t,x)\big)$$

elde edilir. (4.11) den

$$|I_4(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1} L_\lambda(x_0+\delta, x) + \varepsilon \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha+1} d_t\big(L_\lambda(t,x)\big)$$

bulunur. Tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa

$$|I_4(x,\lambda)| \leq \varepsilon(\alpha+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^{\alpha} L_\lambda(t,x)dt \tag{4.12}$$

elde edilir. O halde (4.9) ve (4.12) birleştirilirse

$$|I_3(x,\lambda)| + |I_4(x,\lambda)| \leq \varepsilon(\alpha+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} L_\lambda(t,x)|t-x_0|^\alpha dt \tag{4.13}$$

elde edilir. Burada $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken limit alınırsa (4.13) ün sağındaki ifade teoremin hipotezinden yani (4.2) den dolayı sıfıra gider. Böylece sol tarafıda sıfırdır.

Son olarak $I_1(x,\lambda)$ yı hesaplayalım.

$$I_1(x,\lambda) = \int_{t \notin <A,B>} |g(t) - g(x_0)| L_\lambda(t,x) dt$$

integrali (4.1) den $\forall t \notin <A,B>$ için $g(t) = 0$ dır. Böylece

$$I_1(x,\lambda) = |f(x_0)| \int_{t \notin <A,B>} L_\lambda(t,x) dt$$

elde edilir. $t \notin <A,B>$ olduğundan ya $t < A$ dır yada $B < t$ dir. $x_0 \in (A,B)$ olduğundan herhangi $\delta > 0$ için x_0 ın $\mathcal{U}_\delta(x_0) \coloneqq (x_0 - r, x_0 + r) \subset <A,B>$ şartını sağlayan bir komşuluğu vardır öyle ki

$$\int_{t \notin <A,B>} L_\lambda(t,x) dt \leq \int_{R \setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x) dt$$

dir. Böylece

$$I_1(x,\lambda) \leq |f(x_0)| \int_{R \setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x) dt \tag{4.14}$$

elde edilir. Tanım 4.1.1 in b) şartından $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken $I_1(x,\lambda) \longrightarrow 0$ dır.

O halde (4.6), (4.13) ve (4.14) yerlerine yazılırsa $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken istenilen elde edilmiş olur. Bu durumda ispat tamamdır.

Başlangıçta $< A, B >$ aralığı R nin sonlu bir aralığı idi. Şimdi yukarıdaki teoremi $< A, B > = R$ olması durumunda yeniden ispatlayalım.

Teorem 4.2.2: $f \in L_1(R)$ ve x_0 noktası genelleştirilmiş Lebesgue noktası olsun. Ayrıca Teorem 4.2.1 in hipotezleri sağlansın. Bu durumda

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} |T_\lambda(f;x) - f(x_0)| = 0$$

dır.

İspat: $\forall\delta > 0$ için $x_0 + \delta < \infty$, $x_0 - \delta > -\infty$ olsun. $I(x,\lambda) := T_\lambda(f;x) - f(x_0)$ ile gösterilsin. Tanım 4.1.1 in e) şartından

$$I(x,\lambda) = \int_R K_\lambda(t,x,f(t))dt - f(x_0)$$

$$= \int_R K_\lambda(t,x,f(t))dt - \int_R K_\lambda(t,x,f(x_0))dt + \int_R K_\lambda(t,x,f(x_0))dt - f(x_0)$$

yazılabilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınır ve eşitliğin sağ tarafına üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|I(x,\lambda)| \le \int_R |K_\lambda(t,x,f(t)) - K_\lambda(t,x,f(x_0))|dt + \left|\int_R K_\lambda(t,x,f(x_0))dt - f(x_0)\right| \tag{4.15}$$

elde edilir. Tanım 4.1.1 deki a) şartından $\forall\lambda \in \Lambda$ için

$$|K_\lambda(t,x,f(t)) - K_\lambda(t,x,f(x_0))| \le L_\lambda(t,x)|f(t) - f(x_0)| \tag{4.16}$$

yazılabilir. (4.16), (4.15) te yerine yazılırsa

$$|I(x,\lambda)| \leq \int_R L_\lambda(t,x)|f(t)-f(x_0)|dt + \left|\int_R K_\lambda(t,x,f(x_0))dt - f(x_0)\right|$$

elde edilir. Buradan

$$|I(x,\lambda)| \leq \left(\int_{R\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} + \int_{x_0-\delta}^{x_0} + \int_{x_0}^{x_0+\delta} \right) |f(t)-f(x_0)|L_\lambda(t,x)dt$$

$$+ \left|\int_R K_\lambda\big(t,x,f(x_0)\big)dt - f(x_0)\right|$$

$$= I_1(x,\lambda) + I_2(x,\lambda) + I_3(x,\lambda) + I_4(x,\lambda)$$

yazılabilir. Tanım 4.1.1 in $e)$ şartından $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken $I_4(x,\lambda) \longrightarrow 0$ dır. $I_1(x,\lambda)$ integralini hesaplayalım.

$$I_1(x,\lambda) = \int_{R\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} |f(t)-f(x_0)|L_\lambda(t,x)dt$$

Eşitsizliğin sağ tarafındaki integralde üçgen eşitsizliği uyulanırsa

$$I_1(x,\lambda) \leq \int_{R\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} (|f(t)| + |f(x_0)|)L_\lambda(t,x)dt$$

ve buradan

$$I_1(x,\lambda) \leq \int_{R\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} |f(t)|L_\lambda(t,x)dt + |f(x_0)| \int_{R\setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x)dt$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağındaki ilk integralde $t \in R \setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)$ üzerinden supremum alınırsa

$$I_1(x,\lambda) \leq \sup_{t\in R\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x)\int_R |f(t)|dt + |f(x_0)| \int_{R\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x)dt$$

$$\leq \sup_{t\in R\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x)\,\|f\|_{L_1(R)} + |f(x_0)| \int_{R\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x)dt \qquad (4.17)$$

elde edilir. Burada $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken limit alınırsa Tanım 4.1.1 in $b)$ ve $c)$ şıkkından $I_1(x,\lambda) \longrightarrow 0$ dır. Şimdi ise $I_2(x,\lambda)$ integralini hesaplayalım. Bunun için bir F fonksiyonu

$$F(t) := \int_t^{x_0} |f(y) - f(x_0)|dy \qquad (4.18)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F(t)$ nin diferensiyeli

$$dF(t) = |f(t) - f(x_0)|dt$$

olur. (4.3) e göre $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ bulunabilir öyle ki $x_0 - t \leq \delta$ olduğunda

$$F(t) \leq \varepsilon(x_0 - t)^{\alpha+1} \qquad (4.19)$$

dir.

$$I_2(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|L_\lambda(t,x)dt$$

Burada $F(t)$ nin diferensiyeli kullanılırsa

$$I_2(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0} L_\lambda(t,x)dF(t)$$

elde edilir. (4.18) den

$$|I_2(x,\lambda)| = \left| -\int_{x_0-\delta}^{x_0} L_\lambda(t,x)dF(t) \right|$$

yazılabilir. Burada kısmî integrasyon uygulanırsa

$$|I_2(x,\lambda)| \leq |F(x_0-\delta)|L_\lambda(x_0-\delta,x) + \int_{x_0-\delta}^{x_0} |F(t)|d_t\big(L_\lambda(t,x)\big)$$

elde edilir. (4.19) den

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon\delta^{\alpha+1}L_\lambda(x_0-\delta,x) + \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^{\alpha+1}d_t\big(L_\lambda(t,x)\big)$$

bulunur. Tekrar kısmî integrasyon uygulanırsa

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon(\alpha+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0} (x_0-t)^\alpha L_\lambda(t,x)dt \tag{4.20}$$

elde edilir. Benzer şekilde $I_3(x,\lambda)$ integrali de hesaplanabilir. Bu durumda

$$|I_3(x,\lambda)| \leq \varepsilon(\alpha+1) \int_{x_0}^{x_0+\delta} (t-x_0)^\alpha L_\lambda(t,x)dt \tag{4.21}$$

elde edilir. O halde (4.20) ve (4.21) birleştirilirse

$$|I_2(x,\lambda)| + |I_3(x,\lambda)| \leq \varepsilon(\alpha+1) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} L_\lambda(t,x)|t-x_0|^\alpha dt \tag{4.22}$$

elde edilir. . Burada $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken limit alınırsa (4.22) in sol tarafı sıfırdır.

O halde tüm bu sonuçlar birleştirilirse $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken istenilen elde edilmiş olur. Bu durumda ispat tamamdır.

Şimdi noktasal yakınsaklık hızı ile ilgili teoremi verelim. Öncelikle teoremin ispatı için aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$\Delta(x,\lambda,\delta) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} L_\lambda(t,x)|t-x_0|dt$$

ve $\forall t \in R \setminus \mathcal{U}_\delta(x_0)$ ve keyfi $0 < \alpha < 1$ için

$$\sup_{t\in R\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x) = o\big(\Delta^\alpha(x,\lambda,\delta)\big) \tag{4.23}$$

$$\left|\int_R K_\lambda\big(t,x,g(x_0)\big)dt - f(x_0)\right| = o\big(\Delta^\alpha(x,\lambda,\delta)\big) \tag{4.24}$$

ayrıca $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken

$$\int_{R\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x)dt = o\big(\Delta(x,\lambda,\delta)\big) \tag{4.25}$$

olsun. Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.3: Kabul edelim ki $K_\lambda(t,x,u)$ çekirdeği Tanım 4.1.1 deki şartları sağlasın. x_0, $f \in L_1 < A,B >$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Lebesgue noktası olsun. Bu durumda $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken

$$|T_\lambda(f;x) - f(x_0)| = o\big(\Delta^\alpha(x,\lambda,\delta)\big)$$

dir.

İspat: Herhangi $\delta > 0$ için $x_0 + \delta < B$ ve $x_0 - \delta > A$ olduğunu varsayalım.

$$|I(x,\lambda)| = |T_\lambda(f;x) - f(x_0)|$$

olsun. Teorem 4.2.1 den

$$|I(x,\lambda)| \le |f(x_0)| \int\limits_{R\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x)dt$$

$$+ \sup_{t\in <A,B>\setminus\mathcal{U}_\delta(x_0)} L_\lambda(t,x)\left[\|f\|_{L_1<A,B>} + |f(x_0)|(B-A)\right]$$

$$+ \varepsilon(\alpha+1) \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} L_\lambda(t,x)|t-x_0|^\alpha dt$$

$$+ \left|\int\limits_R K_\lambda\big(t,x,g(x_0)\big)dt - f(x_0)\right|$$

yazılabilir. Yukarıdaki

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} L_\lambda(t,x)|t-x_0|^\alpha dt$$

integralini göz önüne alalım.

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |t-x_0|^\alpha L_\lambda(t,x)dt = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |t-x_0|^\alpha L_\lambda(t,x)^{1-\alpha+\alpha}dt$$

$$= \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [|t-x_0|L_\lambda(t,x)]^\alpha L_\lambda(t,x)^{1-\alpha}dt$$

olarak yazılabilir. Son eşitlikte $p=\frac{1}{\alpha}$ ve $q=\frac{1}{1-\alpha}$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uyulanırsa

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [|t-x_0|L_\lambda(t,x)]^\alpha L_\lambda(t,x)^{1-\alpha} dt \leq \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (L_\lambda(t,x)^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} dt \right)^{1-\alpha}$$

$$.\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \{[|t-x_0|L_\lambda(t,x)]^\alpha\}^{\frac{1}{\alpha}} dt \right)^{\alpha}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağındaki ikinci integral

$$\Delta^\alpha(x,\lambda,\delta) = \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [|t-x_0|L_\lambda(t,x)] dt \right)^{\alpha}$$

olup

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [|t-x_0|L_\lambda(t,x)]^\alpha L_\lambda(t,x)^{1-\alpha} dt \leq \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (L_\lambda(t,x)^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} dt \right)^{1-\alpha} \Delta^\alpha(x,\lambda,\delta)$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağındaki integralin sınırlarını genişleterek

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [|t-x_0|L_\lambda(t,x)]^\alpha L_\lambda(t,x)^{1-\alpha} dt \leq \left(\int_{A}^{B} (L_\lambda(t,x)^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} dt \right)^{1-\alpha} \Delta^\alpha(x,\lambda,\delta)$$

$$= o\big(\Delta^\alpha(x,\lambda,\delta)\big)$$

elde edilir. Son olarak (4.23)-(4.25) şartalarından

$$|T_\lambda(f;x) - f(x_0)| = o\big(\Delta^\alpha(x,\lambda,\delta)\big)$$

bulunur. O halde ispat tamamdır.

Not: Bu teorem $< A, B > = R$ olduğunda da geçerlidir.

Not: Eğer $< A, B >$ aralığını R de keyfi sonlu bir aralık olarak düşünürsek, $f(t)$ fonksiyonu ve $K_\lambda(t, x, u)$ çekirdeği t ye göre $(B - A)$ periyodlu olduğunda yukarıdaki teoremlerin ispatları benzer olarak yapılabilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada Konvolüsyon tipli olmayan integral operatörlerinin kendisini oluşturan, L_1 ve L_p uzaylarındaki fonksiyonlara karakteristik noktalarda noktasal yakınsaklığı ve yakınsaklık hızı incelenmiştir. Daha önemlisi bu operatörlerin kendisini oluşturan; fakat L_1 ve L_p uzaylarında olmayan fonksiyonlara da yaklaşımın varlığı yine karakteristik noktalarda gösterilmiştir. Ayrıca dördüncü bölümde Konvolüsyon tipli olmayan nonlineer integral operatörlerin de L_1 uzayında olan fonksiyonlara yaklaşım özellikleri verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] B.Yılmaz, Hölder Uzayında Yakınsaklık Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale, 2006

[2] Esen.S., Approximation of Functions by the Family of Integral Operators with Positive Kernels, Transactions of Nat. of Acad. of Sinc. of Azb. 1, 56-60, 2002.

[3] Gadjiev,A.D., On the Order of Convergence of some Class of Singular Integrals. İzvestiya, Acad. Sci. of Azerbaijan, SSSR. 6, 27-31, 1963.

[4] Hacıyev,A.D., Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi, Lisansüstü Ders Notları, Ankara, 1999.

[5] Hacıyev,A.D., and Hacısalihoğlu,H.H. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsalığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 1995.

[6] Karsli,H., On Approximation Properties of Non-Convolution Type nonlinear Integral Operators. Anal. Theory Appl. 26 (2): 140-152, 2010

[7] Mamedov,R.G., Fonksiyonların Lineer Operatörlerle Yakınsaklığı. Azerbaycan Devlet Neşriyatı, Bakü, 1967

[8] Mamedov,R.G., On the Order of Convergence of Singular Integrals in Generalized Lebesgue Points and $L_p(-\infty,\infty)$. Izv. Acad. Nauk USSR ser. mat., 27, 287-304, 1963.

[9] Natanson,I.P., Theory of Functions of a Real Variable. Transleted from the Russian by Loef.Boron.Frederick Ungar Pub.Co.New York, 1964.

[10] S.Esen., Konvolüsyon Tipinde Olmayan İntegral Operatörler Ailesinin Karakteristik Noktalarda Yakınsaklığı ve Yakınsaklık Hızı, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2002