T.C
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DURRMEYER TİPLİ SZASZ OPERATÖRLERİ

TUNCER ACAR

HAZİRAN 2011

Matematik Anabilim Dalı Tuncer ACAR tarafından hazırlanan DURRMEYER TİPLİ SZASZ OPERATÖRLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarız.

Doç. Dr. Ali ARAL

Danışman

Juri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	__________________
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Ali ARAL	__________________
Üye	:Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN	__________________

…/…./2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini Onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLER

ACAR, Tuncer

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ali ARAL

HAZİRAN 2011, ?????????sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Szasz operatörleri ve türevi sınırlı salınımlı olan fonsiyonlar için yakınsaklık hızı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Szasz operatörlerinin bir başka genelleştirilmesi tanımlanmış ve bu operatörlerinde türevi sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yakınsaklık hızı incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Linner pozitif operatör, Szasz operatörü, Sınırlı salınımlı fonksiyonlar

ABSTRACT

DURRMEYER TYPE SZASZ OPERATORS

ACAR, Tuncer

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ali Aral

June 2011, ?????? pages

This thesis consist of four chapters. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, some fundamental definitions and concepts are given.

In the third chapter, generalized Szasz operators and rate of convergence for the function with derivatives of bounded variation, are studied.

In the fourth chapter, another generalization of Szasz operators is introduced and rate of convergence for the function with derivatives of bounded variation, are studied also.

Key Words: Linear positive operators, Szasz operator, Bounded variation functions

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; bilgi, ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Ali ARAL'a, çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve beni yalnız bırakmayan sevgili aileme ve eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\|.\|_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında tanımlı norm
P_n	Derecesi n i geçmeyen polinomlar kümesi
$L(f;x)$	L lineer operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$L(f;x) \rightrightarrows f(x)$	L_n operatörler dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\overline{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş reel sayılar
(X,U)	Ölçülebilir uzay
$M(X,U)$	U ölçüsüne göre ölçülenilir fonksiyonlar kümesi
(X,U,μ)	Ölçü uzayı
$B(\mathbb{R}^n)$	Borel cebiri
$f^+(x)$	$\max\{f(x),0\}$
$f^-(x)$	$\max\{-f(x),0\}$
$S(X,U)$	U ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi
χ	Karakteristik fonksiyon
$S_n(f;x)$	Szasz operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$G_{n,r}(f;x)$	Genelleştirilmiş Szasz operatörleri
$S_{n,r,\alpha}(f;x)$	Genelleştirilmiş Szasz operatörleri
$BV[a,b]$	$[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlı fonksiyonlar kümesi
$V_a^b(f)$	f nin $[a,b]$ aralığındaki toplam salınımı
$f(t)=O(t^q)$	$\|f(t)\| \leq Mt^q$

GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisindeki asıl amaç keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir.

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$ e $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinomlar dizisinin varlığı Weierstrass tarafından ispatlanmıştır. Bu teoremi ispatlamak isteyen bir çok matematikçi birer dizi oluşturmuş ve bu dizilerin oluşturulma tekniği lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemini ortaya çıkarmıştır.

Bu dizilerden ilki S.N. Bernstein tarafından 1912 yılında sürekli fonksiyonlara yaklaşım için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^k$$

operatörünü tanımlayarak bu operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün olarak $f(x)$ e yaklaştığını ispatlamıştır. Daha sonra P. P. Korovkin sınırlı aralıklarda lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini el alarak Korovkin Teoremi olarak bilinen teoremini ispatlamıştır.

$f(x)$ fonksiyonunun sınırsız aralıklarda olması durumunda da yaklaşım problemleri incelenmiştir. 1950 yılında O. Szasz, f fonksiyonun $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve $[0,\infty)$ aralığının her kapalı alt aralığında sınırlı olması durumunda

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f(\frac{k}{n}) \frac{(nx)^k}{k!}$$

olarak tanımlanan ve Szasz operatörleri olarak adlandırılan operatörler dizisini oluşturmuş ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

1960 yılında Durrmeyer, $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesini genişletmek için $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar yerine $[0,1]$ aralığında Lebeasgue integrallenebilir fonksiyonları alarak Bernstein operatörlerinin integral modifikasyonu olan ve Bernstein-Durrmeyer operatörleri olarak adlandırılan

$$D_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k \int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^k f(t) dt$$

operatörler dizisini tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

1960 yılında S. M. Mazhar ve V. Totik, Szasz operatörlerinin Durrmeyer tipli integral modifikasyonunu tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

1987 yılında S. Guo, Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yaklaşım hızını elde etmiştir. Szasz operatörlerinin değişik taban fonksiyonları alınarak elde edilen integral modifikasyonlarının sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yakınsaklık hızı X. M. Zeng, J. Sinha ve V. K. Singh tarafından elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında öncelikle T. Acar, V. Gupta ve A. Aral tarafından tanımlanan Szasz operatörlerinin integral modifikasyonunun sınırlı salınımlı fonksiyonlar için elde edilen yakınsaklık hızı incelenmiş ve Szasz operatörleri için yeni bir integral modifikasyonu tanımlanarak bu operatörlerin de sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yakınsaklık hızı elde edilmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Prof. Dr. Mustafa Balcı () nın ‘’Reel Analiz’’ ve A. N. Kolmogorov, S. N. Fomin (1975) in ‘’Introductory Real Analysis’’ adlı kitaplarından faydalanılmıştır. Szasz operatörleri ve yaklaşım özellikleri için O. Szasz (1950) ın ‘’…’’ adlı makalesinden, genelleştirilmiş Szasz operatörlerinin sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yakınsaklık hızının elde edilmesi hakkındaki bilgi ve teoremler için X. M. Zeng (1998) in ‘’On the rate of convergence of the generalized Szasz type operators for functions of bounded variation’’ adlı makalesinden yararlanılmıştır. T. Acar, V. Gupta ve A. Aral tarafından yayımlanan ‘’Rate of convergence for generalized Szasz operators’’ isimli makale, tez çalışmamızda da temel alınmıştır.

1.2.Çalışmanın Amacı

Bu tez çalıması ile Szasz operatörlerinin integral modofikasyonunun sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yakınsaklık hızının hesaplanması ayrıntılı olarak incelenecek ve Szasz operatörünün yeni bir intagral modofikasyonu tanımlanarak yakınsaklık hızı elde edilecektir.

2.TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde lineer pozitif operatörlerin tanımı, sağladıkları özellikler, Lebeasgue integrali, Riemann-Stieltjes integrali, sınırlı salınımlı fonksiyonlar ve daha sonraki bölümlerde de kullanacağımız tanımlar açıklanacaktır. Ayrıca lineer pozitif operatörlerin düzgün yakınsaklığını veren Korovkin teoremi de bu bölümde yer alacaktır.

2.1. Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

$C[a,b]$, sonlu $[a,b]$ aralığında tanımlanmış ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonlar uzayıdır. $C[a,b]$,

(i). $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ ve

(ii). $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır.

Weierstrass teoremine göre bu uzaydan olan her bir f fonksiyonu için sonlu bir $\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ sayısı vardır. Bu fonksiyonun $C[a,b]$ üzerinde bir norm olduğunu gösterebiliriz.

(i). $\max_{a\leq x\leq b}|f(x)| \geq 0$

(ii). Eğer f, uzayın sıfırı ise yani $[a,b]$ aralığında $f\equiv 0$ ise o zaman bu fonksiyonun maksimumu aynı aralıkta sıfırdır. Diğer yandan eğer $\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|=0$ ise o zaman $f\equiv 0$ olur.

(iii). a keyfi bir reel sayı olmak üzere $\max_{a\leq x\leq b}|af(x)|=|a|\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$.

(iv). f ve g, $[a, b]$ de sürekli iki fonksiyon olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

olduğundan

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} (|f(x)| + |g(x)|)$$
$$\leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

dir. Böylece norm aksiyomları sağlanır.

$C[a, b]$ uzayında norm;

$$\|f\|_{C[a.b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \tag{2.1.1}$$

ile gösterilir. Bu uzayda yakınsaklığın düzgün yakınsaklık olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $C[a, b]$ de olan bir $\big(f_n(x)\big)$ fonksiyonlar dizisi $[a, b]$ aralığında $f(x)$ e düzgün yakınsasın. Bu taktirde keyfi $\epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N = N(\epsilon)$ bulunur ki $n > N$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ eşitsizliği $\forall x \in [a, b]$ için sağlanır.

$f(x) \in C[a, b]$ ve dolayısıyla $f_n(x) - f(x) \in C[a, b]$ dir. Weierstrass teoreminden öyle bir $x^* \in [a, b]$ vardır ki $f_n(x) - f(x)$ fark fonksiyonunun x^* daki değeri $[a, b]$ nin diğer noktalarındaki değerinden büyüktür. Ayrıca $x^* \in [a, b]$ olduğundan

$$|f_n(x^*) - f(x^*)| = \max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

sağlanır. Dolayısıyla keyfi $\epsilon > 0$ için $N(\epsilon)$ vardır öyleki $n > N$ olduğunda

$$\max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

sağlanır ve

$$\|f_n - f\|_{C[a,b]} < \epsilon \qquad\qquad (n > N(\epsilon))$$

olur. $C[a,b]$ de olan $\big(f_n(x)\big)$ dizisi $C[a,b]$ uzayının normunda yakınsasın. Bu durumda keyfi pozitif ϵ sayısına göre öyle bir N bulunabilir ki, $n \ge N$ olan tüm n ler için

$$\max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

sağlanır. Bundan dolayı $[a,b]$ de olan tüm x ler için

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,, \qquad n \ge N$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak, $C[a,b]$ uzayının normuna göre yakınsama, düzgün yakınsamadır.

Düzgün yakınsama

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$$

ile gösterilir.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu durumda X uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x) = L(f,x)$$

biçiminde gösterilir. X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f,x) = g(x)$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine L operatörünün değer kümesi denir. Bu küme de $R(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1. $L : X \to Y$ bir operatör olsun. Her $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2;x) = \alpha_1 L(f_1;x) + \alpha_2 L(f_2;x)$$

eşitliği sağlanıyor ise L ye lineer operatör denir.

Tanım 2.2.2. $L : X \to Y$ bir operatör olsun. $D(L) \subset X$, L nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f \in D(L)$ için

$$\|L(f;x)\|_Y \leq M\|f\|_X \tag{2.2.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \mathbb{R}^+$ varsa L ye $D(L)$ de sınırlı operatör denir.

$$\|L\|_{X\to Y} = inf\{M: \|L(f;x)\|_Y \leq M\|f\|_X\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

Lemma 2.2.1. $L : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü için

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\|L\|_{X\to Y}$ tanımından

$$\frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X\to Y}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X\to Y} \tag{2.2.2}$$

eşitsizliği bulunur.

Diğer taraftan infimum tanımından her $\epsilon > 0$ için en az bir $f_\varepsilon \in X$ vardır öyle ki,

$$\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y \geq (\|L\|_{X\to Y} - \varepsilon)\|f_\varepsilon\|_X$$

eşitsizliği bulunur. Buradan da

$$\frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y} - \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y} - \varepsilon$$

elde edilir. Sol taraf ε'a bağlı olmadığından $\varepsilon \to 0$ için eşitsizlik bozulmaz. Buna göre

$$\sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y} \tag{2.2.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak (2.2.2) ve (2.2.3) eşitsizliklerinden

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

bulunur.

Sonuç 2.2.1. $L : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü için

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X=1} \|L(f;x)\|_Y$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: Lemma 2.2.1.' den

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{\|f\|_X} \left\| \frac{1}{\|f\|_X} L(f;x) \right\|_Y$$

$$= \sup_{\|f\|_X} \left\| L(\frac{f}{\|f\|_X};x) \right\|_Y$$

yazabiliriz.

$$g(x) = \frac{f}{\|f\|_X}$$

dersek $\|g\|_X = 1$ olur. Buradan

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X=1} \|L(f;x)\|_Y$$

elde edilir.

Tanım 2.2.1. $L : X \to Y$ bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $\delta(\varepsilon, f_0) > 0$ sayısı, $\|f - f_0\|_X < \delta$ olduğunda $\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunuyorsa L operatörü $f_0 \in X$ için süreklidir denir.

Teorem 2.2.1. X, Y normlu uzaylar $L : X \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda L operatörü için sınırlılık ve süreklilik birbirine denktir.

Tanım 2.2.2. $X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(t) \geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını göz önüne alalım. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesindeki bir fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne lineer pozitif operatör denir. L lineer pozitif operatör ise $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur.

Lemma 2.2.2. Lineer pozitif operatörler monotondur.

İspat: Her x için $g(x) \geq f(x)$ ise $g(x) - f(x) \geq 0$ dır. L lineer pozitif operatör olduğundan

$$L(g-f;x) \geq 0$$

ve L lineer olduğundan

$$L(g;x) - L(f;x) \geq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$L(g;x) \geq L(f;x)$$

dır. Bu eşitsizlikte lineer pozitif L operatörünün monoton olduğunu gösterir. Ayrıca L operatörünün monotonluğundan

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow L(-|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

ve L nin lineerliğinden

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x) \Rightarrow |L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

yazılabilir.

Tanım 2.2.3. $n \in N$ olmak üzere $(L_n(f;x))$ dizisine operatör dizisi denir.

Tanım 2.2.4. $L_n((t-x)^s;x)$, $\{s=0,1,2,\ldots\}$ ifadesine (L_n) operatör dizisinin s −yinci merkezi momenti denir.

2.3. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Yaklaşım teorisinin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Böyle bir gösterim fonksiyon hakkında bilgi elde etmenin daha basit bir yolunu verir.

1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir.

Teorem 2.3.1. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayında olmak üzere her $\varepsilon>0$ için $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$ olacak şekilde n. dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifade ile $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$' e $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\left(P_n(x)\right)$ polinomlar dizisi vardır.

Bu teoremin birçok ispatı bulunmaktadır. Bu ispatlardan birini de 1912 yılında S.N.Bernstein (Bernstein, 1912) yaparak, lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan Bernstein Polinomları' nı tanımlamıştır.

1952 yılında H. Bohmann, toplam şeklinde lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

H. Bohmann (Bohmann, 1952) göstermiştir ki $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{n,k} \leq 1$ ve $k < r$ için $\alpha_{n,k} < \alpha_{n,r}$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{n,k}) P_{n,k}(x), P_{n,k}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $n \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul üç tanedir. Bunlar:

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2;x) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$$

şeklindedir.

Aşikardır ki Bohmann' ın araştırdığı operatörlerin değeri, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında P. P. Korovkin, H. Bohmann' ın teoremini daha genel bir halde vermiştir.

Teorem 2.3.2. (Korovkin Teoremi): $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere

$\forall x \in [a,b]$ için

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x) \tag{2.3.1}$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x) \tag{2.3.2}$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x) \tag{2.3.3}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsar. Burada f, $[a,b]$ de sürekli, a da sağdan, b de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur.

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm x ler için

$$|f(x)| \leq M \tag{2.3.4}$$

olacak şekilde M pozitif sayısı vardır. $f \in C[a,b]$ olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.3.5}$$

sağlanır.

$x, t \in [a,b]$ olduğunda (2.3.5) eşitsizliği f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında düzgün sürekli olmasından dolayı gerçeklenir. $x \in [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise (2.3.5) eşitsizliği f fonksiyonu a noktasında soldan ve b noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir. (2.3.4) ve (2.3.5) eşitsizliklerinden dolayı her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{2.3.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ayrıca $\frac{M}{\delta^2}(t-x)^2$ sağlanır.

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için (11) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq 2M \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)L_n(1;x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x);x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} \end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim (2.3.1) den dolayı sıfıra yakınsar. Yani,

$\|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$ ($n \to \infty$ iken $\varepsilon_n \to 0$)

eşitsizliğini sağlayan ε_n dizisi vardır. O halde

$$\|L_n(f(t)-f(x);x)\|_{C[a,b]} \leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]} + \varepsilon_n \tag{2.3.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi birinci terimi hesaplayalım. (2.3.7) eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]}$$

$$\leq L_n\left(\varepsilon + \tfrac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \tfrac{2M}{\delta^2}L_n((t-x)^2;x)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \tfrac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)]$$

$$= \varepsilon[L_n(1;x)-1] + \varepsilon + \tfrac{2M}{\delta^2}\{[L_n(t^2;x)-x^2] - 2x[L_n(t;x)-x] + x^2[L_n(1;x)-1]\}$$

$$= \varepsilon + \left(\varepsilon + \tfrac{2M}{\delta^2}x^2\right)[L_n(1;x)-1] + \tfrac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x)-x^2] - \tfrac{4M}{\delta^2}x[L_n(t;x)-x]$$

elde edilir. $x \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}b^2\,, \left(\frac{4M}{\delta^2}x \leq \frac{4M}{\delta^2}b\right)$$

dir. O halde

$$C_1 = \frac{2M}{\delta^2} b^2, C_2 = 2bC_1, C_3 = \varepsilon + C_1 b^2$$

eşitliklerini kabul edersek

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|$$

$$\leq \varepsilon + C_1 \|L_n(t^2;x) - x^2\| + C_2 \|L_n(t;x) - x\| + C_3 \|L_n(1;x) - 1\|$$

yazılabilir ve burada $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük seçilebilen bir sayıdır. (2.3.1), (2.3.2) ve (2.3.3) eşitsizliklerinden dolayı $n \to \infty$ için

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\| \to 0$$

olur. Bu sonuç ve (2.3.6) eşitsizliğinden yaralanarak

$$\|L_n(f;x) - f(x)\| \to 0$$

olduğu görülür.

Korovkin teoremindeki $1, x, x^2$ test fonksiyonları yerine $[a, b]$ aralığında lineer bağımsız herhangi üç fonksiyon alamayız.

Teorem 2.3.3: f_0, f_1, f_2 sürekli fonksiyonlarından oluşmuş $[a,b]$ aralığında ikiden fazla sıfır yeri olan bir $F(x)$ polinomu varsa, bu durumda öyle bir L lineer pozitif operatörü bulabiliriz ki, $x \in [a,b]$ ve $k = 0,1,2$ için

$$L(f_k; x) = f_k(x)$$

koşulları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in [a,b]$ fonksiyonu vardır ki

$$L(f^*; x) \neq f^*(x)$$

dir. Dolayısıyla Korovkin teoreminin koşullarındaki $1, x, x^2$ fonksiyonlarının yerine seçilecek fonksiyonlardan oluşmuş herhangi bir $F(x)$ polinomunun $[a,b]$ aralığında ikiden fazla sıfır yeri olmamalıdır.

2.4. Szasz Operatörleri ve Yaklaşım Özellikleri

Tanım 2.4.1. Kabul edelim ki $x \in [0,A]$ ve $f \in C[0,A]$ olsun.

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \tag{2.4.1}$$

biçiminde tanımlı olan lineer pozitif operatörlere Szasz operatörleri denir, (Szasz, 1950).

Teorem 2.4.1. (2.4.1) ile verilen Szasz operatörleri $A \in R^{+}$ olmak üzere $[0, A]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende sınırlı olan f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0, A]$ ise;

$$S_n(f;x) \rightrightarrows f(x),\ \ x[0, A]$$

dir.

İspat: İspatı Korovkin teoremini kullanarak yapacağız. Bunun için öncelikle $S_n(f;x)$ in lineer ve pozitif bir operatör dizisi olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak lineerliğini gösterelim. $\forall a, b \in R$ ve $f, g \in C[0, A]$ için,

$$S_n(af(t) + bg(t); x) = S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \left(af\left(\frac{k}{n}\right) + bg\left(\frac{k}{n}\right)\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} af\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} bg\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= ae^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} + be^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= aS_n(f(t); x) + bS_n(g(t); x)$$

olduğundan S_n lineer bir operatördür. Ayrıca $k = 0,1,2, \dots, n \in N$ ve $x \in [0, A]$ için

$$e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \geq 0$$

olduğundan $f \geq 0$ ise $S_n(f;x) \geq 0$ dır. Dolayısıyla $S_n(f;x)$ operatörü pozitiftir. Korovkin teoremi gereğince

(i) $S_n(1;x) \rightrightarrows 1$

(ii) $S_n(t;x) \rightrightarrows x$

(iii) $S_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

olduğunu gösterirsek $S_n(f;x) \rightrightarrows f$ olduğunu ispatlamış oluruz. Şimdi bunları gösterelim.

(i) $S_n(1;x) \rightrightarrows 1$ olduğunu gösterelim.

$$S_n(1;x) = e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}e^{nx}$$

$$= 1$$

(ii) $S_n(t;x) \rightrightarrows x$ olduğunu gösterelim.

$$S_n(t;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}, \qquad (k \to k+1)$$

$$= xe^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{(k)!}$$

$$= xe^{-nx}e^{nx}$$

$$= x$$

dir.

(iii) $S_n(t^2;$x$) \rightrightarrows x^2$ olduğunu gösterelim

$$S_n(t^2;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}\right)\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!} + e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!} + e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\left(\underset{k\to k+2}{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^{k-2}x^{k-2}x^2}{(k-2)!}} + \underset{k\to k+1}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}}\right)$$

$$= x^2 e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{k!} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= x^2 e^{-nx} e^{nx} + \frac{x}{n} e^{-nx} e^{nx}$$

$$= x^2 + \frac{x}{n}$$

bulunur ve $S_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$, $(n \to \infty)$ elde edilir. Dolayısıyla (i), (ii) ve (iii) şartları sağlandığından Korovkin teoremi gereğince $\forall f \in C[0, A]$ için $[0, A]$ aralığında:

$S_n(f; x) \rightrightarrows f(x), (n \to \infty)$

bulunur.

2.5. Lebeasgue İntegrallenebilen Fonksiyonlar

Tanım 2.5.1. X bir küme olsun. X'in bir U ailesi için

(i) X $\in U$
(ii) Her $E \in U$ için $X - E \in U$
(iii) $k = 1,2, \dots, n$ için $E_k \in U$ ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in U$

koşulları sağlanıyorsa U ailesine X üzerinde bir cebir denir. Eğer (iii) yerine

(iv) Her n$\in N$ için $E_n \in A$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in U$

koşulu sağlanırsa U cebirine bir σ −cebiri denir.

Tanım 2.5.2. X bir küme U da X üzerinde bir σ −cebiri olsun. (X, U) ikilisine bir ölçülebilir uzay, U daki her bir kümeye U −ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme denir.

Tanım 2.5.3. (X, U) ölçülebilir bir uzay olsun. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f^{-1}\big((\alpha, \infty)\big) = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \in U$$

olmasıdır.

Reel sayılara $-\infty$ ve $+\infty$ ‘u da katarak elde edilen yeni kümeye Genişletilmiş reel sayılar denir ve $\overline{\mathbb{R}}$ ile gösterilir. Yani $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ olur.
X üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X, U)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.4. (X, U) bir ölçülebilir uzay olsun. U üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu için

(i) $\mu(\phi) = 0$
(ii) Her $A \in U$ için $\mu(A) > 0$
(iii) Her ayrık $\{A_n\}$ dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü denir.

Tanım 2.5.5.: Bir X kümesi, X’in alt kümelerinin bir U cebri ve U üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan (X, U, μ) ölçüsüne bir ölçü uzayı adı verilir.

Tanım 2.5.6. $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ deki bütün (a, b) aralıklarının doğurduğu σ −cebrine Borel cebri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir. Bu tanıma göre $B(\mathbb{R})$ kümesi tüm açık aralıkları ihtiva eden bir σ −cebirdir.

Tanım 2.5.7. X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı,genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

(i) $\mu^*(\phi) = 0$
(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(iv) Her bir $n \in N$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

koşulları sağlanırsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 2.5.8. (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{ I_k : A \subset \bigcup I_k \right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : I_k \in \tau_A \right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebeasgue dış ölçüsü denir. Burada $l(I_k)$, I_k aralığının uç noktalarının farkıdır.

Bir μ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $A \subset X$ kümelerinin sınıfı $M(X, \mu^*)$ ile gösterilir. λ^*, Lebeasgue dış ölçüsü ile ölçülebilen, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı kısaca M ile gösterilir. Lebeasgue dış ölçüsü olan λ^* ın M sınıfında $B(\mathbb{R})$ sınıfında olan kısıtlanmasına Lebeasgue dış ölçüsü denir ve λ ile gösterilir.

Tanım 2.5.9. f, X den $\overline{\mathbb{R}}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$f^{+}(x) = maks\{f(x), 0\}$$

$$f^{-}(x) = maks\{-f(x), 0\}$$

olarak tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^{+} fonksiyonuna f fonksiyonunun pozitif parçası, f^{-} fonksiyonuna f fonksiyonunun negatif parçası denir.

Tanım 2.5.10. Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen bir φ fonksiyonuna bir basit fonksiyon denir. X üzerinde tanımlı reel değerli, U-ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, U)$, S deki negatif olmayan fonksiyonlarının kümesi de S^{+} ile gösterilir.

Tanım 2.5.11. (X, U, μ) bir ölçü uzayı olsun. a_k lar negatif olmayan reel sayılar, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler U ya ait ayrık kümeler olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \chi_{A_k}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \epsilon S^{+}$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

genişletilmiş reel sayısıdır. Burada χ, A_k kümesinin

$$\chi_{A_k}(x) = \begin{cases} 1, x \in A_k \\ 0, x \notin A_k \end{cases}$$

şeklinde tanımlı karakteristik fonksiyonudur.

Tanım 2.5.12. (X, U, μ) bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X, U)$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X f\, d\mu = sup\left\{\int_X \varphi\, d\mu : \varphi \in S^+, \varphi \leq f\right\}$$

genişletilmiş reel sayısıdır. $E \in A$ olmak üzere, f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre E üzerindeki integrali

$$\int_E f\, d\mu = \int_X f \chi_E\, d\mu$$

sayısıdır.

Tanım 2.5.13.(X, U, μ) bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, U)$ olsun. f^+ ve f^- fonksiyonlarının her ikisi de sonlu integrale sahip ise f fonksiyonu X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilirdir denir ve bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. Eğer integrallenebilirlik kuralında ölçü uzayını $X = \mathbb{R}^n$, $U = B(\mathbb{R}^n)$ olarak seçilir ve $\mu = \lambda$ Lebeasgue ölçüsü olarak alınırsa

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$$

integraline Lebeasgue integrali adı verilir.

Lemma 2.5.1. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.

(i). Riemann anlamında integrallenebilir $\Leftrightarrow$ f, $[a, b]$ kapalı aralığının hemen hemen her noktasında süreklidir.

(i). f, Riemann anlamında integrallenebiliyorsa Lebeasgue anlamında da integrallenebilirdir ve her iki integral birbirine eşittir. Fakat bu durumun tersi her zaman doğru değildir.

2.6. Durrmeyer Tipli Szasz Operatörleri

$[0,\infty)$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için S. M. Mazhar ve V. Totik (Mazhar ve Totik, 1985) Szasz operatörlerinin integral modifikasyonunu $x \geq 0$ ve $p_{n,k}(x) = e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!}$ olmak üzere

$$L_n(f;x) = f(0)p_{n,0}(x) + n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)p_{n,k-1}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x) \tag{2.6.1}$$

biçiminde tanımlamıştır. $L_n(f;x)$ operatörlerine Durrmeyer tipli Szasz operatörleri denir.

Teorem 2.6.1. (2.6.1) ile verilen Durrmeyer tipli Szasz operatörleri $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0,A]$ kapalı aralığında sürekli ve pozitif yarı eksende Lebeasgue integrallenebilir f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0,A]$ ise;

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x),\ x \in [0,A]$$

dir.

İspat: Korovkin teoremi gereğince

(i) $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$

$(ii) L_n(t;x) \rightrightarrows x$

$(iii) L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

olduğunu gösterirsek $L_n(f;x) \rightrightarrows f$ olduğunu ispatlamış oluruz. Şimdi bunları gösterelim.

(i) $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$ olduğunu gösterelim.

$$L_n(1;x) = p_{n,0}(x) + n\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} p_{n,k-1}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x)$$

$$= e^{-nx} + n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_0^{\infty} e^{-nt}\frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

$$= e^{-nx} + n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty} e^{-nt}(nt)^{k-1}\,dt$$

olup Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

biçiminde tanımlı olduğundan,

$$\int_0^{\infty} e^{-nt}(nt)^{k-1}\,dt = \Gamma(k)$$

dır. Ayrıca $\Gamma(k) = (k-1)!$ olduğunu da kullanırsak

$$L_n(1;x) = e^{-nx} + n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{1}{(k-1)!}(k-1)!\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= 1$$

elde edilir. Yani, $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$ dir.

$(ii) L_n(t;x) \rightrightarrows x$ olduğunu gösterelim.

$$L_n(t;x) = n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_0^{\infty} te^{-nt}\frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

$$= n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty} te^{-nt}(nt)^{k-1}\,dt$$

$$= n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{n^2}\Gamma(k+1)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{(k-1)!}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^{k-1}nx}{(k-1)!}$$

$$= x\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= x$$

elde edilir. Yani, $L_n(t;x) \rightrightarrows x$ dir.

(iii) $L_n(t;x) \rightrightarrows x$ olduğunu gösterelim.

$$L_n(t^2;x) = n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_0^{\infty} t^2 e^{-nt}\frac{(nt)^{k-1}}{(k-1)!}dt$$

$$= n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\infty} t^2 e^{-nt}(nt)^{k-1}\,dt$$

$$= n\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{n^3}\Gamma(k+2)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{(k-1)!}(k+1)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{(k-1)!}(k-1) + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{(k-1)!}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^{k-2}(nx)^2}{(k-2)!} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^{k-1}nx}{(k-1)!}$$

$$= x^2\sum_{k=2}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= x^2\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{(k)!} + \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{(k)!}$$

$$= x^2 + \frac{2x}{n}$$

elde edilir. Yani, $L_n(t;x) \rightrightarrows x$ dir.

Dolayısıyla (i), (ii) ve (iii) şartları sağlandığından Korovkin teoremi gereğince $\forall f \in C[0,A]$ için $[0,A]$ aralığında:

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), (n \to \infty)$$

bulunur.

2.7. Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlar

f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon, $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması ve P de $[a,b]$ aralığının tüm p parçalanmalarının kümesi olsun. f nin $[a,b]$ üzerindeki toplam salınımı

$$\bigvee_a^b(f) = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

Tanım 2.7.1. Eğer, $\bigvee_a^b(f)$ sonlu ise f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır denir. $[a,b]$ üzerindeki sınırlı salınımlı fonksiyonların sınıfı $BV[a,b]$ ile gösterilir.

Lemma 2.7.1. Eğer, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde monoton ise f sınırlı salınımlıdır.

Lemma 2.7.2. Eğer f_1 ve f_2 $[a,b]$ üzerinde azalmayan iki fonksiyon ise $f_1 - f_2 \in BV[a,b]$ dir.

Lemma: 2.7.3. $f \in BV[a,b]$ ve $c \in (a,b)$ ise $f \in BV[a,c]$ ve $f \in BV[c,b]$ dir. Ayrıca $\mathrm{V}_a^b(f) = \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f)$ dir.

Lemma 2.7.4. $f \in BV[a,b]$ ise f, iki azalmayan fonksiyonun farkıdır.

Sonuç 2.7.1. Bir fonksiyonun sınırlı salınımlı olması için gerek ve yeter şart azalmayan iki fonksiyonunun farkı olarak yazılmasıdır.

2.8. Mutlak Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 2.8.1. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

şartını sağlayan her sonlu ve ikişerli ayrık $\{(a_k, b_k) \subset [a,b]: k = 1,2,\dots,n\}$ aralık ailesi için

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

olur. Bu tanıma göre mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir fakat bunun karşıtı doğru değildir.

Lemma 2.8.1. f fonksiyonu $[a,b]$ de mutlak sürekli ise $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır.

2.9.Riemann-Stieltjes İntegrali

Φ, $[a,b]$ aralığında soldan sürekli ve sınırlı salınımlı bir fonksiyon, f $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$[a,b]$, aralığının bir parçalanması olsun. Her bir $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından keyfi ξ_k noktası seçerek

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})] \tag{2.9.1}$$

toplamını oluşturalım. Eğer

$$maks\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

biçiminde tanımlı olan alt aralıkların maksimum uzunluğu sıfıra yaklaşırsa (2.9.1) toplamı da ξ_k ve x_k değerlerinden bağımsız olarak limit değerine yaklaşır. Bu limit değerine f nin Φ ye göre Riemann-Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)d\Phi(\mathrm{x})$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 2.9.1. Eğer f, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise $\bigvee_a^b(\Phi)$, Φ nin $[a, b]$ aralığındaki toplam salınımı olmak üzere

$$\int_a^b f(x)d\Phi(\mathrm{x}) \leq \bigvee_a^b(\mathrm{f}) \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

eşitsizliği geçerlidir.

3. $G_{n,r}(f,x)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ SZASZ OPERATÖRLERİNİN TÜREVİ SINIRLI SALINIMLI OLAN FONKSİYONLAR İLE YAKINSAKLIK HIZININ HESAPLANMASI

Bu kısımda Acar, Gupta ve Aral (Acar, Gupta, Aral, 2011) tarafından tanımlanan $G_{n,r}(f,x)$ genelleşitirilmiş Szasz operatörleri için yakınsaklık hızı elde edeceğiz.

Bu operatörler, $n \in N,\ r \in N^0, n > r$ ve $s_{n,k}(x) = \frac{e^{-nx}(nx)^k}{k!}$ Szasz taban fonksiyonu, $b_{n,k}(t) = \binom{n+k-1}{k}\frac{t^k}{(1+t)^{n+k}}$ Baskakov taban fonksiyonu olmak üzere, $[0,\infty)$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar için

$$G_{n,r}(f,x) = \frac{n^r(n-r-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)f(t)dt,\ r \geq 0$$

biçiminde verilmiştir. $G_{n,r}(f,x)$ operatörleri lineer ve pozitiftir.

Lemma 3.1. $n > r + m + 2$ için m –yinci merkezi moment

$$T_{n,r,m}(x) = (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^m dt$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda

$$(n-r-m-2)T_{n,r,m+1}(x)$$
$$= x\left[T'_{n,r,m}(x) + m(2+x)T_{n,r,m-1}(x)\right] + [(m+r+1) + x(2m+r+2)]T_{n,r,m}(x)$$

recurrence (yineleme) bağıntısı elde edilir. Ayrıca,

$$T_{n,r,0}(x) = 1$$
$$T_{n,r,1}(x) = \frac{1+r+x(r+2)}{n-r-2}$$
$$T_{n,r,1}(x) = \frac{x^2(n+5r+r^2+6) + x(2n+2r^2+8r+6) + r^2 + r + 2}{(n-r-3)(n-r-2)}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat: Öncelikle ispatta kullanacağımız iki eşitliği elde edelim.

$$s'_{n,k} = \frac{-ne^{-nx}(nx)^k + kn(nx)^{k-1}e^{-nx}}{k!}$$
$$= \frac{-ne^{-nx}(nx)^k}{k!} + \frac{kn(nx)^{k-1}e^{-nx}}{k!}$$
$$= (-n + \tfrac{k}{x})\, s_{n,k}(x)$$
$$= (\tfrac{k-nx}{x})\, s_{n,k}(x)$$

olduğundan

$$xs'_{n,k} = (k - nx)s_{n,k}(x) \tag{3.1}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan,

$$b_{n,k}(t) = \binom{n+k-1}{k} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k}}$$

olduğundan

$$b_{n-r,k+r}(t) = \binom{n+k-1}{k+r} \frac{t^{k+r}}{(1+t)^{n+k}}$$

olacaktır. $b_{n-r,k+r}(t)$ fonksiyonunun türevini alırsak

$$\begin{aligned} b'_{n-r,k+r}(t) &= \binom{n+k-1}{k+r} \frac{(k+r)t^{k+r-1}}{(1+t)^{n+k}} - \binom{n+k-1}{k+r} \frac{(n+k)t^{k+r}}{(1+t)^{n+k+1}} \\ &= \left(\frac{k+r}{t} - \frac{(n+k)}{(1+t)} \right) b_{n-r,k+r}(t) \end{aligned}$$

olduğundan

$$t(1+t)b'_{n-r,k+r}(t) = [k + r - (n-r)t]b_{n-r,k+r}(t) \tag{3.2}$$

eşitliği elde edilir. $T_{n,r,m}(x)$ fonksiyonunun türevi alınıp (3.1) eşitliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
xT'_{n,r,m}(x) \quad &= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} xs'_{n,k}\int_{0}^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^m dt \\
&- xm(n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^m dt \\
&= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty}(k-nx)s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^m dt \\
&-mxT_{n,r,m-1}(x)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir ve böylece

$$
x\left[T'_{n,r,m}(x)+mT_{n,r,m-1}(x)\right]
$$

$$
= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty}(k-nx)s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^m dt
$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte (3.2) eşitliği kullanılırsa;

$$
x\left[T'_{n,r,m}(x)+mT_{n,r,m-1}(x)\right]
$$

$$
= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)
$$

$$
\times\int_{0}^{\infty}\left[\big((k+r)-(n-r)t\big)(n-r)(t-x)-r(1+x)\right]b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^m dt
$$

$$= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} t(1+t)b'_{n-r,k+r}(t)(t-x)^m dt$$

$$+(n-r)(n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty}(k-nx)s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^{m+1}dt$$

$$-r(1+x)(n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty}(k-nx)s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^{m}dt$$

$$= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)$$

$$\times\int_{0}^{\infty} b'_{n-r,k+r}(t)[(t-x)^{m+2}+(1+2x)(t-x)^{m+1}+x(1+x)(t-x)^m]dt$$

$$+(n-r)T_{n,r,m+1}(x)-r(1+x)T_{n,r,m}(x)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen bu son integralde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$x\left[T'_{n,r,m}(x)+mT_{n,r,m-1}(x)\right]$$

$$= -(m+2)T_{n,r,m+1}(x)-(m+1)(1+2x)T_{n,r,m}(x)$$

$$-x(1+x)mT_{n,r,m-1}(x)+(n-r)T_{n,r,m+1}(x)-r(1+x)T_{n,r,m}(x)$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$(n-r-m-2)T_{n,r,m+1}(x)$$

$$= x\left[T'_{n,r,m}(x)+mT_{n,r,m-1}(x)\right]+[(m+r+1)+x(2m+r+2)]T_{n,r,m}(x)$$

recurrence bağıntısı elde edilir. Şimdi de momentleri hesaplayalım. Öncelikle sıfırıncı momenti bulalım.

$$T_{n,r,m}(x) = (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)(t-x)^m dt$$

ifadesinde $m = 0$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
T_{n,r,0}(x) &= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)dt \\
&= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\binom{n+k-1}{k+r}\int_{0}^{\infty} \frac{t^{k+r}}{(1+t)^{n+k}}dt \\
&= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\binom{n+k-1}{k+r}\int_{0}^{\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{k+r}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{n-r} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $\frac{t}{1+t} = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve Beta fonksiyonunun

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$T_{n,r,0}(x) = (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\binom{n+k-1}{k+r}\int_0^1 \left(\frac{t}{1+t}\right)^{k+r}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{n-r} dt$$

$$= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\binom{n+k-1}{k+r}\int_0^1 u^{k+r}(1-u)^{n-r-2}dt$$

$$= (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\binom{n+k-1}{k+r}\beta(k+r+1, n-r-1)$$

elde edilir. Ayrıca Beta fonksiyonu için

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

olduğunu kullanırsak,

$$T_{n,r,0}(x) = (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\frac{(k+n-1)!}{(n-r-2)!\,(k+r)!}\frac{(k+r)!\,(n-r-2)!}{(k+n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)$$

$$= 1$$

olarak bulunur. Diğer taraftan recurrence (yineleme) bağıntısında $m = 0$ olarak alınırsa,

$$(n-r-2)T_{n,r,1}(x) = x\left[T'_{n,r,0}(x) + mT_{n,r,-1}(x)\right] + [(r+1) + x(r+2)]T_{n,r,0}(x)$$

elde edilir. $T_{n,r,0}(x) = 1$ ve $T_{n,r,-1}(x) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$T_{n,r,1}(x) = \frac{(r+1) + x(r+2)}{(n-r-2)}$$

olarak bulunur. Recurrence (yineleme) bağıntısında $m = 1$ alınıp, $T_{n,r,0}(x) = 1$, $T_{n,r,-1}(x) = 0$ ve $T_{n,r,1}(x) = \frac{(r+1)+x(r+2)}{(n-r-2)}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$T_{n,r,2}(x) = \frac{x^2(n + 5r + r^2 + 6) + x(2n + 2r^2 + 8r + 6) + r^2 + r + 2}{(n-r-3)(n-r-2)}$$

ikinci merkezi momenti bulunur.

Not 3.1. $C > 1$ ve $x \in (0, \infty)$ olmak üzere yeterince büyük n ler için Lemma 3.1 in bir sonucu olarak

$$\frac{x(x+2)}{n-r-3} \leq T_{n,r,2}(x) \leq \frac{Cx(x+2)}{n-r-3} \qquad (3.3)$$

eşitsizliği vardır.

Not 3.2. $C > 1$ ve $x \in (0, \infty)$ olmak üzere yeterince büyük n ler için Not 3.1 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak;

$$(n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)|t-x|dt \leq \left[T_{n,r,2}(x)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{Cx(x+2)}{n-r-3}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.2. $C > 1$ ve $x \in (0, \infty)$ olmak üzere yeterince büyük n ler için

$$\lambda_{n,r}(x,y) = (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)$$

$$\times \int_0^{y} b_{n-r,k+r}(t)dt \leq \frac{Cx(x+2)}{(n-r-3)(x-y)^2}, 0 \leq y < x \tag{3.4}$$

$$1-\lambda_{n,r}(x,z) = (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)$$

$$\times \int_z^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)dt \leq \frac{Cx(x+2)}{(n-r-3)(z-x)^2}, x < z < \infty \tag{3.5}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat: İlk olarak (3.4) eşitsizliği için ispat yapalım. Not 3.1 kullanılırsa, yeterince büyük n ler için, $0 \leq y < x$ olmak üzere

$$\lambda_{n,r}(x,y) = (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^y b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$\leq (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^y b_{n-r,k+r}(t)\frac{(t-x)^2}{(y-x)^2}dt$$

$$= \frac{T_{n,r,2}(x)}{(y-x)^2} \leq \frac{Cx(x+2)}{(n-r-3)(x-y)^2}$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak (3.4) eşitsizliği de elde edilir.

Lemma 3.3. f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında s kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere $t \to \infty$ için $f^{s-1}(t) = O(t^{\alpha})$ olsun. Bu durumda herhangi $r,s \in N_0$ ve $n > max\{\alpha, r+s\}$ için

$$D^s G_{n,r}(f,x) = G_{n,r+s}(D^s f, x)$$

dir.

İspat: İspatımızı s üzerinden tümevarım yöntemi ile verelim.

$$Ds_{n,k}(x) = D\left[e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\right]$$

$$= -ne^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} + nke^{-nx}\frac{(nx)^{k-1}}{k!}$$

$$= ne^{-nx}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} - ne^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= n\left[s_{n,k-1}(x) - s_{n,k}(x)\right]$$

olduğundan

$$Ds_{n,k}(x) = n\left[s_{n,k-1}(x) - s_{n,k}(x)\right] \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $b_{n,k}(t)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
Db_{n,k}(x) &= D\left[\binom{n+k-1}{k}\frac{t^k}{(1+t)^{n+k}}\right] \\
&= \binom{n+k-1}{k}\frac{kt^{k-1}}{(1+t)^{n+k}} - \binom{n+k-1}{k}\frac{(n+k)t^k}{(1+t)^{n+k+1}} \\
&= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,(k-1)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k}} - \frac{(n+k)!}{(n-1)!\,(k)!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} \\
&= \frac{n(n+k-1)!}{(n)!\,(k-1)!}\frac{t^{k-1}}{(1+t)^{n+k}} - \frac{n(n+k)!}{(n)!\,(k)!}\frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} \\
&= n\left[b_{n+1,k-1}(t) - b_{n+1,k}(t)\right]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$Db_{n,k}(x) = n\left[b_{n+1,k-1}(t) - b_{n+1,k}(t)\right] \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir. $b_{n+1,negatif}(t) = 0$ ve $s_{n,negatif}(x) = 0$ oldukları göz önüne alınırsa (3.6) ve (3.7) eşitlikleri $k = 0$ için de doğrudur. $G_{n,r}(f,x)$ operatörünün türevi alınıp, (3.6) eşitsizliği uygulanırsa

$$DG_{n,r}(f,x) = \frac{n^r(n-r-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} Ds_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)f(t)dt$$

$$= \frac{n^{r+1}(n-r-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left[s_{n,k-1}(x) - s_{n,k}(x)\right]\int_0^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)f(t)dt$$

$$= \frac{n^{r+1}(n-r-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty}\left[b_{n-r,k+r+1}(t) - b_{n-r,k+r}(t)\right]f(t)dt$$

elde edilir. (3.7) eşitliğini kullanarak ve kısmi integrasyon uygulayarak

$$DG_{n,r}(f,x) = \frac{n^{r+1}(n-r-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} -\frac{D\left[b_{n-r-1,k+r+1}(t)\right]}{n-r-1}f(t)dt$$

$$= \frac{n^{r+1}(n-r-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r-1,k+r+1}(t)f'(t)dt$$

$$= G_{n,r+1}(Df,x)$$

elde edilir. Bu ise verilen eşitliğin $s = 1$ için doğru olduğunu gösterir. Eşitliğin s için doğru olduğunu kabul edelim. Yani;

$$D^sG_{n,r}(f,x) = G_{n,r+s}(D^sf,x)$$

$$= \frac{n^{r+s}(n-r-s-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r-s,k+r+s}(t)D^sf(t)dt \qquad (3.8)$$

doğru olsun. $s+1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. (3.8) eşitliğinin bir kez daha türevini alırsak

$$D^{s+1}G_{n,r}(f,x)=\frac{n^{r+s}(n-r-s-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty}Ds_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}b_{n-r-s,k+r+s}(t)D^{s}f(t)dt$$

$$=\frac{n^{r+s+1}(n-r-s-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left[s_{n,k-1}(x)-s_{n,k}(x)\right]\int_{0}^{\infty}b_{n-r-s,k+r+s}(t)D^{s}f(t)dt$$

$$=\frac{n^{r+s+1}(n-r-s-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)$$

$$\times\int_{0}^{\infty}\left[b_{n-r-s,k+r+s+1}(t)-b_{n-r-s,k+r+s}(t)\right]D^{s}f(t)dt$$

$$=\frac{n^{r+s+1}(n-r-s-1)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}-\frac{D\left[b_{n-r-s-1,k+r+s+1}(t)\right]}{n-r-s-1}D^{s}f(t)dt \qquad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) eşitliğinde ki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$D^{s+1}G_{n,r}(f,x)$$

$$=\frac{n^{r+s+1}(n-r-s-2)!}{(n-2)!}\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}b_{n-r-s-1,k+r+s+1}(t)D^{s+1}f(t)dt$$

$$=G_{n,r+s+1}(D^{s+1}f,x)$$

elde edilir. Bu ise eşitliğin $s+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla tümevarım yöntemine göre ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $G_{n,r}(f,x)$ lineer operatörler dizisinin, kendisini oluşturan fonksiyonun türevi sınırlı salınımlı olması durumunda yakınsaklık hızını hesaplayalım.

$q > 0$ olmak üzere $DB_q(0,\infty)$, $(0,\infty)$ aralığında tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan mutlak sürekli fonksiyonların kümesi olsun.

$(i)\ f(t) = O(t^q), t \to \infty$

$(ii)\ f$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığının her sonlu alt aralığında sınırlı salınımlı olan türeve sahiptir.

Teorem 3.1. $q > 0$ olmak üzere $f \in DB_q(0,\infty)$ ve $x \in (0,\infty)$ olsun. Bu durumda $C > 1$ ve yeterince büyük n ler için,

$$\left|\frac{(n-2)}{n^r(n-r-2)!}G_{n,r}(f,x) - f(x)\right|$$

$$\leq \frac{C(x+2)}{n-r-3}\left(\sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{k}}^{x+\frac{x}{k}}((f')_x) + \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}((f')_x)\right)$$

$$+\frac{C(x+2)}{(n-r-3)x}(|f(2x) - f(x) - xf'(x^+)| + |f(x)|)$$

$$+O(n^{-q}) + |f'(x^+)|\frac{C(x+2)}{n-r-3} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Cx(x+2)}{n-r-3}}|f'(x^+) - f'(x^-)|$$

$$+\frac{1}{2}|f'(x^+) - f'(x^-)|\frac{r+1+x(2+r)}{n-r-2}$$

dir.

İspat:

$$\left|\frac{(n-2)!}{n^r(n-r-2)!}G_{n,r}(f,x)-f(x)\right|$$

$$\leq (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r,k+r}(t)|f(t)-f(x)|dt$$

$$=\int_0^{\infty}\left|\int_x^t (n-r-1)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)f'(u)du\right|dt \qquad (3.10)$$

Ayrıca $f'(u)$ fonksiyonu için

$$f'(u)=\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}+(f')_x(u)+\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}sgn(u-x)$$

$$+\left[f'(x)-\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}\right]\chi_x(u) \qquad (3.11)$$

eşitliği vardır. Burada $\chi_x(u)$ fonksiyonu karakteristik fonksiyon olarak adlandırılır ve

$$\chi_x(u)=\begin{cases}1, & u=x\\ 0, & u\neq x\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. (3.11) eşitliği (3.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$I_1=\left|\int_0^{\infty}\left(\int_x^t\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)\left(\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}+(f')_x(u)\right)du\right)d\,t\right|$$

$$I_2 = \left| \int_0^\infty \left(\int_x^t \sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) \frac{f'(x^+) - f'(x^-)}{2} sgn(u-x)\, du \right) d\, t \right|$$

$$I_3 = \left| \int_0^\infty \left(\int_x^t \sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) \left[f'(x) - \frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2} \right] \chi_x(u)\, du \right) d\, t \right|$$

olmak üzere

$$\left| \frac{(n-2)!}{n^r (n-r-2)!} G_{n,r}(f,x) - f(x) \right| \leq (n-r-1)(I_1 + I_2 + I_3) \tag{3.12}$$

yazılabilir. Karakteristik fonksiyonun tanımından dolayı

$$I_3 = \left| \int_0^\infty \left(\int_x^t \sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) \left[f'(x) - \frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2} \right] \chi_x(u)\, du \right) d\, t \right| = 0$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \int_0^\infty \left(\int_x^t \sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) \frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2} du \right) d\, t \right| \\ &+ \left| \int_0^\infty \left(\int_x^t \sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) (f')_x(u)\, du \right) d\, t \right| \\ &= I_{11} + I_{12} \end{aligned} \tag{3.13}$$

denirse

$$(n-r-1)I_{11}=\frac{|f'(x^+)+f'(x^-)|}{2}T_{n,r,1}(x) \tag{3.14}$$

yazılır. $x<u<t$ olduğundan

$$I_2=\left|\int_0^\infty\left(\int_x^t\sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)\frac{f'(x^+)-f'(x^-)}{2}sgn(u-x)\,du\right)d\,t\right|$$

$$(n-r-1)I_2=\frac{|f'(x^+)-f'(x^-)|}{2}\left[T_{n,r,2}(x)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

yazılır. $I_3=0$ olduğu göz önüne alınarak (3.13), (3.14) ve (3.15) eşitlikleri (3.12) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left|\frac{(n-2)!}{n^r(n-r-2)!}G_{n,r}(f,x)-f(x)\right|$$

$$\leq\left|(n-r-1)\int_0^\infty\left(\int_x^t(f')_x(u)du\right)\sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt\right|$$

$$+\frac{|f'(x^+)-f'(x^-)|}{2}\left[T_{n,r,2}(x)\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{|f'(x^+)+f'(x^-)|}{2}T_{n,r,1}(x) \tag{3.16}$$

elde edilir.

$$A_{n,r}(f,x)=(n-r-1)\int_0^x\left(\int_x^t (f')_x(u)du\right)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$B_{n,r}(f,x)=(n-r-1)\int_x^{2x}\left(\int_x^t (f')_x(u)du\right)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$C_{n,r}(f,x)=(n-r-1)\int_{2x}^{\infty}\left(\int_x^t (f')_x(u)du\right)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

dersek ve (3.3) eşitsizliği ile Lemma 3.1. den (3.16) eşitsizliğini

$$\left|\frac{(n-2)!}{n^r(n-r-2)!}G_{n,r}(f,x)-f(x)\right|$$

$$\leq \left|A_{n,r}(f,x)+B_{n,r}(f,x)+C_{n,r}(f,x)\right|$$

$$+\frac{|f'(x^+)-f'(x^-)|}{2}\sqrt{\frac{Cx(x+2)}{n-r-3}}+\frac{|f'(x^+)+f'(x^-)|}{2}\frac{1+r+x(r+2)}{n-r-2} \qquad (3.17)$$

biçiminde yazabiliriz. İspatımızı tamamlamak için $A_{n,r}(f,x)$, $B_{n,r}(f,x)$, $C_{n,r}(f,x)$ terimleri için üst sınır bulmak yeterlidir. Öncelikle $A_{n,r}(f,x)$ için bir üst sınır bulalım. (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$\left|A_{n,r}(f,x)\right|=\left|-\int_0^x\int_x^t (f')_x(u)du\,d_t\left(\lambda_{n,r}(x,t)\right)\right|$$

şeklinde yazılabilir. Kısmi integrasyon uygulanıp, $y=x-\frac{x}{\sqrt{n}}$ olarak alınırsa

$$\left|\int_0^x \lambda_{n,r}(x,t)(f')_x(t)dt\right| \leq \left(\int_0^y + \int_y^x\right)|(f')_x(t)|\left|\lambda_{n,r}(x,t)\right|dt$$

elde edilir.

$$|(f')_x(t)| \leq \bigvee_t^x ((f')_x)$$

olduğundan (3.4) eşitsizliği de göz önüne alınırsa

$$\left|A_{n,r}(f,x)\right| \leq \frac{Cx(x+2)}{n-r-3}\int_0^y \bigvee_t^x ((f')_x)\frac{1}{(x-t)^2}dt + \int_x^y \bigvee_t^x ((f')_x)\,dt$$

yazılır. Bu integrallerin her birine sırasıyla E_{A1} ve E_{A2} diyelim.

E_{A1} integrali için $u = \frac{x}{x-t}$ olarak alınırsa

$$E_{A1} = \frac{Cx(x+2)}{n-r-3}\int_0^y \bigvee_t^x ((f')_x)\frac{1}{(x-t)^2}dt = \frac{Cx(x+2)}{n-r-3}\int_1^{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{u}}^x ((f')_x)\,du$$

$$\leq \frac{C(x+2)}{n-r-3}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{x-\frac{x}{k}}^x ((f')_x) \tag{3.18}$$

elde edilir.

E_{A2} için ise intagral alınıp, seçilen y değeri yerine yazılırsa

$$E_{A2} = \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x} ((f')_x) \tag{3.19}$$

(3.18) eşitsizliği ve (3.19) eşitliği birleştirilirse

$$\left|A_{n,r}(f,x)\right| \leq \frac{C(x+2)}{n-r-3} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{x-\frac{x}{k}}^{x} ((f')_x) + \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x} ((f')_x) \tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $A_{n,r}(f,x)$ için bir üst sınırdır. Şimdi de $B_{n,r}(f,x)$ için bir üst sınır bulalım. (3.5) eşitliği kullanılırsa

$$\left|B_{n,r}(f,x)\right| = \left| -\int_{x}^{2x} \left(\int_{x}^{t} (f')_x(u)du \right) d_t \left(1-\lambda_{n,r}(x,t)\right) \right|$$

yazılır. Kısmi integrasyon uygulanıp $y = x + \frac{x}{\sqrt{n}}$ olarak alınırsa

$$\left|B_{n,r}(f,x)\right| = \left| \int_{x}^{2x} (f')_x(u)du \right| \left|1-\lambda_{n,r}(x,2x)\right| + \int_{x}^{2x} \left|(f')_x(t)\right| \left|1-\lambda_{n,r}(x,t)\right| dt$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (3.5) eşitsizliği kullanlırsa

$$\left|B_{n,r}(f,x)\right| = \frac{C(x+2)}{(n-r-3)x}\left|f(2x)-f(x)-xf'(x^{+})\right| + \int_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}} \bigvee_{x}^{t}(f')_x dt$$

$$+\frac{Cx(x+2)}{n-r-3}\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}(t-x)^{-2}\bigvee_{x}^{t}(f')_x dt$$

eşitliği elde edilir.

$$\frac{Cx(x+2)}{n-r-3}\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}(t-x)^{-2}\bigvee_{x}^{t}(f')_x dt$$

integrali için $u=\frac{x}{t-x}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}(t-x)^{-2}\bigvee_{x}^{t}(f')_x dt$$

$$= x^{-1}\int_{1}^{\sqrt{n}}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{u}}((f')_x)\, du$$

$$\leq x^{-1}\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\int_{k}^{k+1}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{u}}((f')_x)\, du$$

$$\leq x^{-1}\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{k}}((f')_x)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|B_{n,r}(f,x)| = \frac{C(x+2)}{(n-r-3)x}|f(2x)-f(x)-xf'(x^+)|$$

$$\frac{Cx(x+2)}{n-r-3}\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{k}}((f')_x)+\frac{x}{\sqrt{n}}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}((f')_x) \tag{3.21}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak $C_{n,r}(f,x)$ için bir üst sınır bulalım.

$$|C_{n,r}(f,x)| = \left|(n-r-1)\int_{2x}^{\infty}\left(\int_{x}^{t}(f')_x(u)du\right)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt\right|$$

terimini

$$|C_{n,r}(f,x)|$$

$$= \left|(n-r-1)\int_{2x}^{\infty}(f(t)-f(x)-(t-x)f'(x^+))\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt\right|$$

$$\leq (n-r-1)\int_{2x}^{\infty}|f(t)|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$+(n-r-1)\int_{2x}^{\infty}|f(x)|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$+(n-r-1)f'(x^+)\int_{2x}^{\infty}|t-x|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

şeklinde yazabiliriz. $t\to\infty$ için $f(t)=O(t^q)$ olduğundan $\frac{|f(t)|}{t^q}\leq C$ olacak şekilde $c>0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $|f(t)|\leq Ct^q$ ve $|f(t)|\leq Ct^{2q}$ yazılabilir. Ayrıca $2x\leq t\leq\infty$ için $x\leq t-x$ ve buradan $\frac{t-x}{x}\geq 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\left|C_{n,r}(f,x)\right|=(n-r-1)\int_{2x}^{\infty}C_1t^{2q}\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$+(n-r-1)\frac{|f(x)|}{x^2}\int_{2x}^{\infty}(t-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$+(n-r-1)|f'(x^+)|\int_{2x}^{\infty}|t-x|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$=I_1+I_2+I_3$$

olarak yazılabilir. $t\geq 2x$ ve dolayısıyla $t\leq 2(t-x)$ olduğu göz önüne alınırsa ve Lemma 3.1. den

$$I_1=(n-r-1)\int_{2x}^{\infty}C_1t^{2q}\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r,k+r}(t)dt$$

$$\leq (n-r-1)C_1 2^{2q} \int_{2x}^{\infty} (t-x)^{2q} \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) dt$$

$$= C_1 2^{2q} T_{n,r,2q}(x) = O(n^{-q}) \tag{3.22}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.3) eşitsizliği kullanılırsa

$$I_2 = (n-r-1) \frac{|f(x)|}{x^2} \int_{2x}^{\infty} (t-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) dt$$

$$\leq \frac{C(x+2)}{(n-r-3)x} |f(x)| \tag{3.23}$$

$$I_3 = (n-r-1)|f'(x^+)| \int_{2x}^{\infty} |t-x| \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) dt$$

$$\leq (n-r-1)|f'(x^+)| \int_{0}^{\infty} |t-x| \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) dt \tag{3.24}$$

(3.24) e Schwarz eşitsizliği uygulayıp Not.3.2 yi göz önüne alırsak

$$I_3 \leq (n-r-1)|f'(x^+)| \left(\int_{0}^{\infty} (t-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_{0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r,k+r}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |f'(x^+)| \sqrt{\frac{Cx(x+2)}{n-r-3}} \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.22), (3.23) ve (3.25) eşitsizlik ve eşitlikleri birleştirilirse

$$\left|C_{n,r}(f,x)\right| \leq O(n^{-q}) + \frac{C(x+2)}{(n-r-3)x}|f(x)| + |f'(x^{+})|\sqrt{\frac{Cx(x+2)}{n-r-3}} \qquad (3.26)$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.20), (3.21) ve (3.26) eşitsizlikleri birleştirilirse istenen sonuç elde edilmiş olur.

4. $S_{n,r,\alpha}(f,x)$ GENELLEŞTİRİLMİŞ SZASZ OPERATÖRLERİNİN TÜREVİ SINIRLI SALINIMLI OLAN FONKSİYONLAR İLE YAKINSAKLIK HIZININ HESAPLANMASI

Bu bölümde Szasz operatörlerinin bir başka genelleştirilmesi olan $S_{n,r,\alpha}(f,x)$ lineer pozitif operatörler dizisinin türevi sınırlı salınımlı olan fonksiyonlar ile yakınsaklık hızı hesaplanmaktadır.

Bu operatörler, $n,r \in N^0, n > \alpha$ ve $s_{n,k}(x) = \frac{e^{-nx}(nx)^k}{k!}$ Szasz taban fonksiyonu, Γ gamma fonksiyonu, $b_{n,k,\alpha}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{(\alpha t)^k}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k}}$ genelleştirilmiş Baskakov taban fonksiyonu olmak üzere, $[0,\infty)$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar için

$$S_{n,r,\alpha}(f,x) = \begin{cases} (n-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n,k-1,\alpha}(t)f(t)dt + e^{-nx}f(0)\,, r = 0 \\ \dfrac{n^r}{(n-2\alpha)\ldots(n-r\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)f(t)dt\,, r > 0 \end{cases}$$

biçiminde verilmiştir. $S_{n,r,\alpha}(f,x)$ operatörleri lineer ve pozitiftir.

Lemma 4.1. $n > r\alpha + \alpha$ için m. dereceden moment

$$U_{n,r,\alpha,m}(x) = \begin{cases} (n-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n,k-1,\alpha}(t)(t-x)^m dt + e^{-nx}(-x)^m, r = 0 \\ (n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^m dt \ , r > 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır ve $n > \alpha(r+m+2)$, $x \in [0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} &\big(n-\alpha(r+m+2)\big)U_{n,r,\alpha,m+1}(x) \\ &\qquad = x\big[U'_{n,r,\alpha,m}(x) + m(2+\alpha x)U_{n,r,\alpha,m-1}(x)\big] \\ &\qquad\quad + [(m+r) + \alpha x(2m+r+2)]U_{n,r,\alpha,m}(x) \end{aligned}$$

recurrence (yineleme) bağıntısı elde edilir. Ayrıca,

$$U_{n,r,\alpha,0}(x) = 1$$

$$U_{n,r,\alpha,1}(x) = \frac{r+\alpha x(r+2)}{n-\alpha(r+2)}$$

$$U_{n,r,\alpha,2}(x) = \frac{x^2(n\alpha + 5\alpha^2 r + \alpha^2 r^2 + 6\alpha^2) + x(2n + 2r^2\alpha + 6\alpha r) + r^2 + r}{\big(n-\alpha(r+3)\big)(n-\alpha(r+2))}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat: İspatı öncelikle $U_{n,r,\alpha,m}(x)$' in $r > 0$ olması durumu için vereceğiz. İspata geçmeden önce ispatta kullanacağımız aşağıdaki iki eşitliğin ispatını verelim.

(3.1) eşitliğinde

$$xs'_{n,k} = (k - nx)s_{n,k}(x)$$

olduğunu göstermiştik.

Diğer taraftan,

$$b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha} + k - 1\right)}{\Gamma(k+r)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha} - r\right)} \frac{(\alpha t)^{k+r-1}}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k-1}}$$

fonksiyonunun türevini alırsak

$$b'_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha} + k - 1\right)}{\Gamma(k+r)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha} - r\right)} \left[\frac{(k+r-1)\alpha(\alpha t)^{k+r-2}(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k-1}}{(1+\alpha t)^{2\left(\frac{n}{\alpha}+k-1\right)}}\right.$$

$$\left. - \frac{\left(\frac{n}{\alpha} + k - 1\right)\alpha(1+\alpha t)^{k+r-2}(\alpha t)^{k+r-1}}{(1+\alpha t)^{2\left(\frac{n}{\alpha}+k-1\right)}}\right]$$

$$= \left[\frac{k+r-1}{t} - \frac{(n+k\alpha-\alpha)}{1+\alpha t}\right] b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)$$

eşitliği elde edilir. Bu elde edilen eşitlikten de

$$t(1+\alpha t)b'_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)=[k+r-1-(n-r\alpha)t]b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) \tag{4.1}$$

eşitliği elde edilir. $U_{n,r,\alpha,m}(x)$ fonksiyonunun türevi alınıp (3.1) eşitliği kullanılırsa,

$$xU'_{n,r,\alpha,m}(x)=(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}xs'_{n,k}\int_{0}^{\infty}b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^m dt$$

$$-xm(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^{m-1}dt$$

$$=(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}(k-nx)s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^m dt$$

$$-mxU_{n,r,\alpha,m-1}(x)$$

eşitliği elde edilir ve bu eşiliğide düzenlersek

$$x\left[U'_{n,r,\alpha,m}(x)+mU_{n,r,\alpha,m-1}(x)\right]$$

$$=(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}(k-nx)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^m dt$$

$$=(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)$$

$$\times\int_{0}^{\infty}\left[\left((k+r-1)-(n-r\alpha)t\right)-nx-r+1+(n-r\alpha)t\right]b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^m dt$$

$$=(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}t(1+\alpha t)b'_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^m dt$$

$$+(n-r\alpha)(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^{m+1}dt$$

$$-(r(1+\alpha x)-1)(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty}b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(t-x)^{m}dt$$

$$=(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)$$

$$\times\int_{0}^{\infty}b'_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)[\alpha(t-x)^{m+2}+(1+2\alpha x)(t-x)^{m+1}+x(1+\alpha x)(t-x)^{m}]dt$$

$$+(n-r\alpha)U_{n,r,\alpha,m+1}(x)-(r(1+\alpha x)-1)U_{n,r,\alpha,m}(x)$$

elde edilir. Bulunan bu son eşitlikte kısmi integrasyon uygulanırsa

$$x\left[U'_{n,r,\alpha,m}(x)+mU_{n,r,\alpha,m-1}(x)\right]$$

$$=-\alpha(m+2)U_{n,r,\alpha,m+1}(x)-(m+1)(1+2\alpha x)U_{n,r,\alpha,m}(x)-x(1+\alpha x)mU_{n,r,\alpha,m-1}(x)$$

$$+(n-r\alpha)U_{n,r,\alpha,m+1}(x)-(r(1+\alpha x)-1)U_{n,r,\alpha,m}(x)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\big(n-\alpha(r+m+2)\big)U_{n,r,\alpha,m+1}(x)=x\left[U'_{n,r,\alpha,m}(x)+m(2+\alpha x)U_{n,r,\alpha,m-1}(x)\right]$$

$$+[(m+r)+\alpha x(2m+r+2)]U_{n,r,\alpha,m}(x)$$

eşitliği elde edilir.

Sıfırıncı, birinci ve ikinci momentler, recurrence bağıntısında sırasıyla $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ alınrak ve $U_{n,r,\alpha,-1}(x) = 0$ olduğu göz önüne alınarak elde edilir.

Not 4.1. $C > 1$ ve $x \in (0, \infty)$ olmak üzere yeterince büyük n ler için Lemma 4.1 in bir sonucu olarak

$$\frac{x(\alpha x + 2)}{n - \alpha(r + 3)} \leq U_{n,r,\alpha,2}(x) \leq \frac{Cx(\alpha x + 2)}{n - \alpha(r + 3)} \tag{4.2}$$

eşitsizliği vardır.

Not 4.2. $C > 1$ ve $x \in (0, \infty)$ olmak üzere yeterince büyük n ler için Not 4.1 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak;

$$(n - r\alpha - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \int_0^{\infty} b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)|t - x|dt \leq \left[U_{n,r,\alpha,2}(x)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{Cx(\alpha x + 2)}{n - \alpha(r + 3)}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.2.$C > 1$ ve $x \in (0, \infty)$ olmak üzere yeterince büyük n ler için

$$\lambda_{n,r}(x, y) = (n - r\alpha - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \int_0^{y} b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

$$\leq \frac{C\alpha x(x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)(x-y)^2}, 0 \leq y < x \tag{4.3}$$

$$1-\lambda_{n,r}(x,z) = (n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_z^{\infty} b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$
$$\leq \frac{C\alpha x(x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)(z-x)^2}, x < z < \infty \tag{4.4}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat: İlk olarak (4.3) eşitsizliği için ispat yapalım. Not 4.1 kullanılırsa, yeterince büyük n ler için, $0 \leq y < x$ olmak üzere

$$\lambda_{n,r}(x,y) = (n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{y} b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

$$\leq (n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{y} b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)\frac{(t-x)^2}{(y-x)^2}dt$$

$$= \frac{U_{n,r,\alpha,2}(x)}{(y-x)^2}$$

$$\leq \frac{Cx(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)(x-y)^2}$$

elde edilir. Benzer işlemler yapılarak (4.4) eşitsizliği de elde edilir.

Lemma 4.3. f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında s kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere $t \to \infty$ için $f^{s-1}(t) = O(t^{\alpha})$ olsun. Bu durumda herhangi $r, s \in N_0$ ve $n > max\{\alpha, r+s\}$ için

$$D^s G_{n,r}(f,x) = G_{n,r+s}(D^s f,x)$$

dir.

İspat: İspatımızı s üzerinden tümevarım yöntemi ile verelim.

$$\begin{aligned} Ds_{n,k}(x) &= n\left[s_{n,k-1}(x) - s_{n,k}(x)\right] \\ &= -ne^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} + nke^{-nx}\frac{(nx)^{k-1}}{k!} \\ &= ne^{-nx}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} - ne^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} \\ &= n\left[s_{n,k-1}(x) - s_{n,k}(x)\right] \end{aligned}$$

olduğundan

$$Ds_{n,k}(x) = n\left[s_{n,k-1}(x) - s_{n,k}(x)\right] \tag{4.5}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $b_{n,k,\alpha}(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} Db_{n,k,\alpha}(x) &= D\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{(\alpha t)^k}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k}}\right] \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{k\alpha(\alpha t)^{k-1}}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k}} - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{n}{\alpha}\right)}\frac{\alpha\left(\frac{n}{\alpha}+k\right)(\alpha t)^k}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k+1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{\alpha} \frac{\left(\frac{n}{\alpha} + k - 1\right)!}{(k-1)!\left(\frac{n}{\alpha} - 1\right)!\frac{n}{\alpha}} \frac{\alpha(\alpha t)^{k-1}}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k}} - \frac{n}{\alpha} \frac{\left(\frac{n}{\alpha} + k\right)!}{(k)!\left(\frac{n}{\alpha} - 1\right)!\frac{n}{\alpha}} \frac{\alpha(\alpha t)^{k}}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k+1}}$$

$$= n\left[b_{n+\alpha,k-1,\alpha}(x) - b_{n+\alpha,k,\alpha}(x)\right]$$

olduğundan

$$Db_{n,k,\alpha}(x) = n\left[b_{n+\alpha,k-1,\alpha}(x) - b_{n+\alpha,k,\alpha}(x)\right] \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir. $b_{n+\alpha,negatif,\alpha}(t) = 0$ ve $s_{n,negatif}(x) = 0$ oldukları göz önüne alınırsa (4.5) ve (4.6) eşitlikleri $k = 0$ için de doğrudur. $S_{n,r,\alpha}(f,x)$ operatörünün türevi alınıp, (4.5) eşitsizliği uygulanırsa

$$DS_{n,0,\alpha}(f,x) = (n-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} Ds_{n,k}(x)\int_0^{\infty} b_{n,k-1,\alpha}(t)f(t)dt - ne^{-nx}f(0)$$

$$= (n-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty} n\left[s_{n,k-1}(x) - s_{n,k}(x)\right]\int_0^{\infty} b_{n,k-1,\alpha}(t)f(t)dt - ne^{-nx}f(0)$$

elde edilir. (4.6) eşitliğini kullanarak ve kısmi integrasyon uygulayarak

$$DS_{n,0,\alpha}(f,x) = (n-\alpha)ns_{n,0}(x)\int_0^{\infty} b_{n,0,\alpha}(t)f(t)dt - ne^{-nx}f(0)$$

$$+(n-\alpha)n\sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^{\infty}\left[b_{n,k,\alpha}(t) - b_{n,k-1,\alpha}(t)\right]f(t)dt$$

$$= (n-\alpha)ne^{-nx}\int_0^\infty \frac{1}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}}}f(t)dt - ne^{-nx}f(0)$$

$$+(n-\alpha)n\sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^\infty -\frac{Db_{n-\alpha,k,\alpha}(t)}{n-\alpha}f(t)dt$$

$$= n\sum_{k=1}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^\infty b_{n-\alpha,k,\alpha}(t)f'(t)dt$$

$$= S_{n,1,\alpha}(Df,x)$$

elde edilir. Bu ise verilen eşitliğin $s=1$ için doğru olduğunu gösterir. Eşitliğin s için doğru olduğunu kabul edelim. Yani;

$$D^s S_{n,0,\alpha}(f,x) = S_{n,s,\alpha}(D^s f,x)$$

$$= \frac{n^s}{(n-2\alpha)\dots(n-s\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_0^\infty b_{n-s\alpha,k+s-1,\alpha}(t)D^s f(t)dt$$

eşitliği doğru olsun. Bu eşitliğin bir kez daha türevini alırsak,

$$D^{s+1}S_{n,0,\alpha}(f,x)$$

$$= \frac{n^s}{(n-2\alpha)\dots(n-s\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} n\left[s_{n,k-1}(x) - s_{n,k}(x)\right]\int_0^\infty b_{n-s\alpha,k+s-1,\alpha}(t)D^s f(t)dt$$

$$= \frac{n^s}{(n-2\alpha)\dots(n-s\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty} ns_{n,k}(x)\int_0^\infty \left[b_{n-s\alpha,k+s,\alpha}(t) - b_{n-s\alpha,k+s-1,\alpha}(t)\right]D^s f(t)dt$$

$$= \frac{n^{s+1}}{(n-2\alpha)\dots(n-s\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \int_0^{\infty} -\frac{D\left[b_{n-(s+1)\alpha,k+s,\alpha}(t)\right]}{n-s\alpha-\alpha} D^s f(t)dt$$

elde edilir. Bu bulduğumuz eşitlikteki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$D^{s+1}S_{n,0,\alpha}(f,x)$$

$$= \frac{n^{s+1}}{(n-2\alpha)\dots(n-(s+1)\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) \int_0^{\infty} b_{n-(s+1)\alpha,k+s,\alpha}(t) D^{s+1} f(t)dt$$

$$= S_{n,s+1,\alpha}(D^{s+1}f,x)$$

elde edilir. Bu ise eşitliğin $s+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Dolayısıyla tümevarım yöntemine göre ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca, $g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $D^r g = f$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} D^s S_{n,r,\alpha}(f,x) &= D^s S_{n,r,\alpha}(D^r g,x) \\ &= D^{r+s} S_{n,0,\alpha}(g,x) \\ &= S_{n,r+s,\alpha}(D^{r+s}g,x) \\ &= S_{n,r+s,\alpha}(D^s f,x) \end{aligned}$$

olup buda ispatı tamamlar.

$q > 0$ olmak üzere $DB_q(0,\infty)$, $(0,\infty)$ aralığında tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan mutlak sürekli fonksiyonların kümesi olsun.

$1-)$ $f(t) = O(t^q), t \to \infty$

$2-)$ f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığının her sonlu alt aralığında sınırlı salınımlı olan türeve sahiptir.

Teorem 4.1. $q > 0$ olmak üzere $f \in DB_q(0,\infty)$ ve $x \in (0,\infty)$ olsun. Bu durumda $C > 1$ ve yeterince büyük n ler için,

$$\left|\frac{(n-\alpha)\dots(n-r\alpha)}{n^r} S_{n,r,\alpha}(f,x) - f(x)\right|$$

$$\leq \frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}\left(\sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{k}}^{x+\frac{x}{k}}((f')_x) + \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}((f')_x)\right)$$

$$+\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}\left(|f(2x)-f(x)-xf'(x^+)| + |f(x)|\right)$$

$$+O(n^{-q}) + |f'(x^+)|\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}}|f'(x^+)-f'(x^-)|$$

$$+\frac{1}{2}|f'(x^+)-f'(x^-)|\frac{r+\alpha x(r+2)}{n-\alpha(r+2)}$$

dir.

İspat:

$$\left|\frac{(n-2\alpha)\dots(n-(r+1)\alpha)}{n^r} S_{n,r,\alpha}(f,x) - f(x)\right|$$

$$\leq (n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)\int_{0}^{\infty} b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)|f(t)-f(x)|dt$$

$$= \int_{0}^{\infty}\left|\int_{x}^{t}(n-r\alpha-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)f'(u)du\right|dt \tag{4.7}$$

Ayrıca $f'(u)$ fonksiyonu için

$$f'(u) = \frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2} + (f')_x(u) + \frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}sgn(u-x)$$
$$+\left[f'(x) - \frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}\right]\chi_x(u) \tag{4.8}$$

eşitliği vardır. Burada $\chi_x(u)$ fonksiyonu karakteristik fonksiyon olarak adlandırılır ve

$$\chi_x(u) = \begin{cases} 1, & u = x \\ 0, & u \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. (4.8) eşitliği (4.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$I_1 = \left|\int_{0}^{\infty}\left(\int_{x}^{t}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)\left(\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2} + (f')_x(u)\right)du\right)d\,t\right|$$

$$I_2 = \left|\int_{0}^{\infty}\left(\int_{x}^{t}\sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)\frac{f'(x^+)-f'(x^-)}{2}sgn(u-x)\,du\right)d\,t\right|$$

$$I_3=\left|\int_0^\infty\left(\int_x^t\sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)\left[f'(x)-\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}\right]\chi_x(u)\,du\right)d\,t\right|$$

olmak üzere

$$\left|\frac{(n-2\alpha)\dots(n-(r+1)\alpha)}{n^r}S_{n,r,\alpha}(f,x)-f(x)\right|\leq(n-r\alpha-\alpha)(I_1+I_2+I_3) \qquad (4.9)$$

yazılabilir. Karakteristik fonksiyonun tanımından dolayı

$$I_3=\left|\int_0^\infty\left(\int_x^t\sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)\left[f'(x)-\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}\right]\chi_x(u)\,du\right)d\,t\right|=0$$

olacaktır.

$$\begin{aligned}I_1&=\left|\int_0^\infty\left(\int_x^t\sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)\frac{f'(x^+)+f'(x^-)}{2}\,du\right)d\,t\right|\\&\quad+\left|\int_0^\infty\left(\int_x^t\sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)(f')_x(u)\,du\right)d\,t\right|\\&=I_{11}+I_{12}\end{aligned} \qquad (4.10)$$

denirse

$$(n - r\alpha - \alpha) I_{11} = \frac{|f'(x^+) + f'(x^-)|}{2} U_{n,r,\alpha,1}(x) \tag{4.11}$$

yazılır. $x < u < t$ olduğundan

$$I_2 = \left| \int_0^\infty \left(\int_x^t \sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x) b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) \frac{f'(x^+) - f'(x^-)}{2} sgn(u - x)\, du \right) d\, t \right|$$

$$(n - r\alpha - \alpha) I_2 = \frac{|f'(x^+) - f'(x^-)|}{2} \left[U_{n,r,\alpha,2}(x) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

yazılır. $I_3 = 0$ olduğu göz önüne alınarak (4.10), (4.11) ve (4.12) eşitlikleri (4.9) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\left| \frac{(n - 2\alpha) \ldots (n - r\alpha - \alpha)}{n^r} S_{n,r,\alpha}(f, x) - f(x) \right|$$

$$\leq \left| (n - r\alpha - \alpha) \int_0^\infty \left(\int_x^t (f')_x(u) du \right) \sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x) b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) dt \right|$$

$$+ \frac{|f'(x^+) - f'(x^-)|}{2} \left[U_{n,r,\alpha,2}(x) \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{|f'(x^+) + f'(x^-)|}{2} U_{n,r,\alpha,1}(x) \tag{4.13}$$

elde edilir.

$$A_{n,r,\alpha}(f, x) = (n - r\alpha - \alpha) \int_0^x \left(\int_x^t (f')_x(u) du \right) \sum_{k=0}^\infty s_{n,k}(x) b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) dt$$

$$B_{n,r,\alpha}(f,x) = (n-r-1)\int_{x}^{2x}\left(\int_{x}^{t}(f')_x(u)du\right)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

$$C_{n,r,\alpha}(f,x) = (n-r-1)\int_{2x}^{\infty}\left(\int_{x}^{t}(f')_x(u)du\right)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

dersek ve (4.9) eşitsizliği ile Lemma 4.1. den (4.13) eşitsizliğini

$$\left|\frac{(n-2\alpha)\dots(n-r\alpha-\alpha)}{n^r}S_{n,r,\alpha}(f,x)-f(x)\right|$$

$$\leq \left|A_{n,r,\alpha}(f,x)+B_{n,r,\alpha}(f,x)+C_{n,r,\alpha}(f,x)\right|$$

$$+\frac{|f'(x^+)-f'(x^-)|}{2}\sqrt{\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}}+\frac{|f'(x^+)+f'(x^-)|}{2}\frac{r+\alpha x(r+2)}{n-\alpha(r+2)} \quad (4.14)$$

biçiminde yazabiliriz. İspatımızı tamamlamak için $A_{n,r,\alpha}(f,x)$, $B_{n,r,\alpha}(f,x)$, $C_{n,r,\alpha}(f,x)$ terimleri için üst sınır bulmak yeterlidir. Öncelikle $A_{n,r}(f,x)$ için bir üst sınır bulalım. (4.3) eşitliği kullanılırsa

$$\left|A_{n,r,\alpha}(f,x)\right| = \left|-\int_{0}^{x}\int_{x}^{t}(f')_x(u)du d_t\left(\lambda_{n,r}(x,t)\right)\right|$$

şeklinde yazılabilir. Kısmi integrasyon uygulanıp, $y = x - \frac{x}{\sqrt{n}}$ olarak alınırsa

$$\left|\int_0^x \lambda_{n,r}(x,t)(f')_x(t)dt\right| \leq \left(\int_0^y + \int_y^x\right)|(f')_x(t)|\left|\lambda_{n,r}(x,t)\right|dt$$

elde edilir.

$$|(f')_x(t)| \leq \bigvee_t^x ((f')_x)$$

olduğundan (4.3) eşitsizliği de göz önüne alınırsa

$$\left|A_{n,r,\alpha}(f,x)\right| \leq \frac{C(\alpha x+2)}{\left(n-\alpha(r+3)\right)}\int_0^y \bigvee_t^x ((f')_x)\frac{1}{(x-t)^2}dt + \int_x^y \bigvee_t^x ((f')_x)\,dt$$

yazılır. Bu integrallerin her birine sırasıyla E_{A1} ve E_{A2} diyelim.

E_{A1} integrali için $u = \frac{x}{x-t}$ olarak alınırsa

$$E_{A1} = \frac{C(\alpha x+2)}{\left(n-\alpha(r+3)\right)}\int_0^y \bigvee_t^x ((f')_x)\frac{1}{(x-t)^2}dt = \frac{C(\alpha x+2)}{\left(n-\alpha(r+3)\right)}\int_1^{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{u}}^x ((f')_x)\,du$$

$$\leq \frac{C(\alpha x+2)}{\left(n-\alpha(r+3)\right)}\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{x-\frac{x}{k}}^x ((f')_x) \tag{4.15}$$

elde edilir.

E_{A2} için ise intagral alınıp, seçilen y değeri yerine yazılırsa

$$E_{A2} = \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x} ((f')_x) \tag{4.16}$$

(4.15) eşitsizliği ve (4.16 eşitliği birleştirilirse

$$\left|A_{n,r,\alpha}(f,x)\right| \leq \frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)} \sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} \bigvee_{x-\frac{x}{k}}^{x} ((f')_x) + \frac{x}{\sqrt{n}} \bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x} ((f')_x) \tag{4.17}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $A_{n,r,\alpha}(f,x)$ için bir üst sınırdır. Şimdi de $B_{n,r,\alpha}(f,x)$ için bir üst sınır bulalım. (4.4) eşitliği kullanılırsa

$$\left|B_{n,r,\alpha}(f,x)\right| = \left| -\int_{x}^{2x} \left(\int_{x}^{t} (f')_x(u)du \right) d_t \left(1-\lambda_{n,r}(x,t)\right) \right|$$

yazılır. Kısmi integrasyon uygulanıp $y = x + \frac{x}{\sqrt{n}}$ olarak alınırsa

$$\left|B_{n,r,\alpha}(f,x)\right| = \left| \int_{x}^{2x} (f')_x(u)du \right| \left|1-\lambda_{n,r}(x,2x)\right| + \int_{x}^{2x} |(f')_x(t)| \left|1-\lambda_{n,r}(x,t)\right| dt$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (4.4) eşitsizliği kullanlırsa

$$\left|B_{n,r,\alpha}(f,x)\right| = \frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)x}\left|f(2x)-f(x)-xf'(x^{+})\right| + \int_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}} \bigvee_{x}^{t}(f')_x dt$$

$$+\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}(t-x)^{-2}\bigvee_{x}^{t}(f')_x dt$$

eşitliği elde edilir.

$$\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}(t-x)^{-2}\bigvee_{x}^{t}(f')_x dt$$

integrali için $u=\frac{x}{t-x}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}(t-x)^{-2}\bigvee_{x}^{t}(f')_x dt = x^{-1}\int_{1}^{\sqrt{n}}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{u}}((f')_x)\,du$$

$$\leq x^{-1}\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\int_{k}^{k+1}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{u}}((f')_x)\,du$$

$$\leq x^{-1}\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{k}}((f')_x)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left|B_{n,r,\alpha}(f,x)\right| = \frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)x}\left|f(2x)-f(x)-xf'(x^+)\right|$$

$$\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}\sum_{k=1}^{\sqrt{n}}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{k}}((f')_x)+\frac{x}{\sqrt{n}}\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}((f')_x) \tag{4.18}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak $C_{n,r,\alpha}(f,x)$ için bir üst sınır bulalım.

$$\left|C_{n,r,\alpha}(f,x)\right| = \left|(n-r\alpha-\alpha)\int_{2x}^{\infty}\left(\int_{x}^{t}(f')_x(u)du\right)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt\right|$$

terimini

$$\left|C_{n,r,\alpha}(f,x)\right|$$

$$=\left|(n-r\alpha-\alpha)\int_{2x}^{\infty}\big(f(t)-f(x)-(t-x)f'(x^+)\big)\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt\right|$$

$$\leq (n-r\alpha-\alpha)\int_{2x}^{\infty}|f(t)|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

$$+(n-r\alpha-\alpha)\int_{2x}^{\infty}|f(x)|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

$$+(n-r\alpha-\alpha)f'(x^+)\int_{2x}^{\infty}|t-x|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

şeklinde yazabiliriz. $t \to \infty$ için $f(t) = O(t^q)$ olduğundan $\frac{|f(t)|}{t^q} \leq C$ olacak şekilde $c > 0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla $|f(t)| \leq Ct^q$ ve $|f(t)| \leq Ct^{2q}$ yazılabilir. Ayrıca $2x \leq t \leq \infty$ için $x \leq t - x$ ve buradan $\frac{t-x}{x} \geq 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\left|C_{n,r,\alpha}(f,x)\right|$$

$$= (n - r\alpha - \alpha) \int_{2x}^{\infty} C_1 t^{2q} \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) dt$$

$$+(n - r\alpha - \alpha) \frac{|f(x)|}{x^2} \int_{2x}^{\infty} (t-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) dt$$

$$+(n - r\alpha - \alpha)|f'(x^+)| \int_{2x}^{\infty} |t-x| \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) dt$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

olarak yazılabilir. $t \geq 2x$ ve dolayısıyla $t \leq 2(t-x)$ olduğu göz önüne alınırsa ve Lemma 4.1. den

$$I_1 = (n - r\alpha - \alpha) \int_{2x}^{\infty} C_1 t^{2q} \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) dt$$

$$\leq (n - r\alpha - \alpha) C_1 2^{2q} \int_{2x}^{\infty} (t-x)^{2q} \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t) dt$$

$$= C_1 2^{2q} U_{n,r,\alpha,2q}(x) = O(n^{-q}) \tag{4.19}$$

(4.2) eşitsizliği kullanılırsa

$$I_2 = (n - r\alpha - \alpha)\frac{|f(x)|}{x^2}\int_{2x}^{\infty}(t-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

$$\leq \frac{C(\alpha x + 2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)x}|f(x)| \tag{4.20}$$

$$I_3 = (n - r\alpha - \alpha)|f'(x^+)|\int_{2x}^{\infty}|t-x|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt$$

$$\leq (n - r\alpha - \alpha)|f'(x^+)|\int_{0}^{\infty}|t-x|\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt \tag{4.21}$$

(4.21) e Schwarz eşitsizliği uygulayıp Not.4.2. yi göz önüne alırsak

$$I_3 \leq (n - r\alpha - \alpha)|f'(x^+)|\left(\int_{0}^{\infty}(t-x)^2\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int_{0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}s_{n,k}(x)b_{n-r\alpha,k+r-1,\alpha}(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |f'(x^+)|\sqrt{\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.19), (4.20) ve (4.22) eşitsizlik ve eşitlikleri birleştirilirse

$$\left|C_{n,r}(f,x)\right| \leq O(n^{-q}) + \frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)x}|f(x)| + |f'(x^+)|\sqrt{\frac{C(\alpha x+2)}{\big(n-\alpha(r+3)\big)}} \quad (4.23)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.17), (4.18) ve (4.23) eşitsizlikleri birleştirilirse istenen sonuç elde edilmiş olur.