KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-ANALİZİNDE TEMEL KAVRAMLAR VE UYGULAMALAR

MUSTAFA AYDIN

HAZİRAN 2011

ÖZET

q-ANALİZİNDE TEMEL KAVRAMLAR VE UYGULAMALAR

AYDIN, Mustafa

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA

Haziran ,2011, 65 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin amacı açıklanmış ve kaynaklar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde ise önce q-Analizinde bazı temel tanım ve kavramlar açıklanmış; daha sonra q-Binom Teoremi ve bazı uygulamaları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde q-üstel fonksiyonları ele alınmış; bundan yararlanılarak$q$-Gamma, q-Beta fonksiyonlarının yapısı ve özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde q-Gamma fonksiyonu ile ilgili teoremler verilmiştir.

Dördüncü ve son bölümde ise tezde yapılanlar hakkında kısa bir bilgi verilmiş daha sonra q-Analizindeki temel bilgilerden yararlanılarak ileri düzeyde neleryapılabileceği konusunda açıklamalarda bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: q-Binom Teoremi, q-Türev, q-İntegral, Gamma – Beta fonksiyonlarının q-Analogları.

ABSTRACT

BASIC CONCEPTS AND APPLICATIONS IN q-ANALYSIS

AYDIN, Mustafa

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA

June, 2011, 65 pages

This thesis consists of four chapters.

Information about the purpose of the thesis and resources are given in thefirst chapter.

In the second chapter,some information and concepts about q-Analysis are explained firstly. Then, q-Binom Theorem and its applications are examined.

In the third chapter, q-exponential functions are dealt with and by using these functions, the structures and the characteristics of q-Gamma and q-Betafunctions are examined. In that chapter the theorems concerning q-Gamma functions are given.

In the last chapter; a brief information about subjects mentioned in the thesisis given. And later, byusing basic informations in q-Analysis, explanations about what to do advanced are given.

Key Words: q-Binom Theorem, q-Difference, q-Integral, q-analogues of Gamma-Beta functions.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi q-Analizi son yıllarda araştırma konularının ilgi odağı olmuştur. Klasik anlamdaki birçok teori ve metodlar kalitatif olarak q-Analizine genişletilmiştir. q-Analizindeki türev ve integraller klasik anlamdakilere benzer şekilde bir q reel parametresine bağlı olarak tanımlanmaktadır. Ancak limit olarak $q \to 1^-$yaklaşımında klasik anlamdaki sonuçlar elde edilmektedir. q genişletmelerin fizik ve mühendislikte uygulamalarının çok olduğu bilinmektedir. Bu konunun fark denklemleri ile de ilişkisi vardır. Çünkü q-Analizinde bir $f(x)$fonksiyonunun türevi

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

farklar oranı şeklinde tanımlanmaktadır. Bu türev tanımı ile ilgili tüm işlemler tekrarlanabilmektedir. Örneğin yüksek basamaktan türevler, bir fonksiyonun Taylor Serisi Açılımı gibi. q-türevi de klasik anlamdaki türev özelliklerine benzer özellikler taşır. Örneğin $f(x)$ ve $g(x)$ parçalı sürekli iki fonksiyon ise iki fonksiyonun çarpımının q-türevi

$$D_q[f(x)g(x)] = f(x)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) + (q-1)x\left[D_q f(x)\right]\left[D_q g(x)\right]$$

olarak verilir. Ayrıca q-Analizinin metodları kullanılarak q-Fark Denklemleri teorisi geliştirilmiştir. Fark denklemleri kesikli olaylarda çok yoğun olarak kullanılmaktadır. Bunun yanında fark denklemleri, diferensiyel denklemleri diskretleştirerek yaklaşık çözümlerin bulunmasına imkan verirken bazı olayların modellenmesinde büyük kolaylıklar sağlar.

q-Analizindeki belirli integral kavramı, $f(x)$ parçalı sürekli fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x)d_q x = \sum_{n=0}^{\infty}(bq^n - bq^{n+1})f(bq^n) - \sum_{n=0}^{\infty}(aq^n - aq^{n+1})f(aq^n)$$

$[6]$ ve $A > 0$ için

$$\int_0^{\infty/A} f(x)d_q x = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{A}f(\frac{q^n}{A})$$

şeklinde tanımlanmaktadır [9]. Eğer $f(x)$ tanımlı olduğu yerde sürekli bir fonksiyon ise $f(x)$ in q-integrali $q \to 1^-$ yaklaşımında klasik anlamda bilinen

Riemann integralleri ile çakışmaktadır. Riemann anlamındaki integral özellikleri bazı durumlar hariç q-integralleri için de geçerlidir. Örneğin $f(x)$ ve $g(x)$ parçalı sürekli fonksiyonlar için q-kısmi integrasyon

$$\int_0^{\infty} f(x)D_q g(x)d_q x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[f(q^{-n})g(q^{-n}) - f(q^{n+1})g(q^{n+1})] - \int_0^{\infty} g(x)\, D_q f(x)d_q x$$

$$- (q-1)\int_0^{\infty} x(D_q f(x))(D_q g(x))d_q x$$

şeklindedir[6]. Buradan da görüldüğü gibi klasik anlamdaki kısmi integrasyonla kısmen benzerlik vardır.

q-İntegrali özellikleri kullanılarak [7] ve [6] kaynaklarında çeşitli polinom sınıflarının belli bir ağırlık fonksiyonuna göre ortogonallikleri incelenmiştir.

Bu tezde ise q-Analizinin bazı temel özellikleri ele alınmıştır. Daha sonra q-Gamma ve q-Beta fonksiyonları ve iki farklı q-üstel fonksiyonu verilmiştir.

1.1. Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı q-Analizinin bazı kavramlarını ortaya koymaktır. İleri bir aşamada bu kavramların Kompleks Analizin bazı konularında nasıl kullanılabileceği düşünülecektir. Bilindiği gibi kompleks integraller, reel integral kavramına indirgenerek verilmektedir. Reel integraller için q-integralleri verilebildiğinden kompleks integrallerin de q-Analoğu verilebilecektir. Örneğin bir Cauchy integral formülünün q-Analoğu ortaya konulabilir. Bilindiği gibi Cauchy integral formülü dolaylı yönden bir kompleks diferensiyel denklem için tanımlanan sınır değer probleminin klasik anlamda bir çözümüdür. Eğer Cauchy integral gösteriliminin q-Analoğu elde edilebilirse bu durumda bazı kompleks kısmi türevli denklemler için verilen sınır-değer problemlerinin q-Analogları da tanımlanmış olacaktır. Bu durum yeni bir araştırma konusu olabilir.

Yine bir araştırma konusu olarak q-üstel fonksiyonları yardımıyla q-hiperbolik fonksiyonların verilip verilemeyeceği ele alınabilir. Bu tezin amaçlarından birisi de bu tür araştırma konularına zemin hazırlamaktır.

1.2. Kaynak Özeti

Bu tezin hazırlanışında [1] kaynağı temel alınmıştır. Bu kaynaktan özellikle q-Binom teoremi ve bazı sonuçları incelenmiştir. [6] ve [7] kaynaklarından q-türevi ve özellikleri ile q-integrali öğrenilmiştir. Yine integral yardımıyla tanımlanan ortogonal polinomların q-analoğunun varlığı yine bu kaynaklardan incelenmiştir. q-Gamma ve q-Beta fonksiyonlarının kalitatif özellikleri [1] ve [5] kaynaklarından yararlanılarak ele alınmıştır. [2] ve[4] kaynaklarından ise q-Gamma fonksiyonu ile ilgili bazı lemma ve teoremler alınmıştır.

Bu kaynaklardan yararlanılırken çok açık olmayan bağıntılar veya ispatsız bırakılan bir çok iddia ispatlanarak konu daha kolay anlaşılır hale getirilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. q-Analizinde Temel Kavramlar

Bu kesimde önce q-Analizi ile ilgili temel kavramları vereceğiz. Daha sonra q-Binom Teoremi üzerinde duracağız.

q-Analizinde ilk temel gösterim

$x, y \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$xq = qx$$

$$yq = qy$$

$$y^k x = q^k x y^k$$

şeklindedir.

Tanım 2.1: $q > 0$, $q \neq 1$ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$[a]_q = \frac{1 - q^a}{1 - q}$$

İfadesine a sayısının q-Analoğu denir.

Tanım 2.2: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$[a]_{n,q} = [a]_q [a+1]_q \dots [a+n-1]_q = \prod_{m=0}^{n-1} [a+m]_q$$

ifadesine q-Pochammer gösterilimi denir.

Şimdi tanım (2.1) ve (2.2) den yararlanarak klasik anlamda bildiğimiz ve daha sonra kullanacağımız

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binom eşitliğinin ve Binom katsayılarının q-analoğunu elde edelim.

Bunun için önce klasik anlamda bildiğimiz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$$

Binom açılımını göz önüne alalım.

Burada Binom katsayılarının q-analoğunu $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ile gösterelim.

Teorem 2.1:[1] $k \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$ olmak üzere

a)

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.1.1}$$

b)

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.1.2}$$

dur.

İSPAT: a)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k$$

olmak üzere

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n . (x+y) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}\, y^k . (x+y) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}y^k\, x + \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}y^{k+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}y^k + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}q^k y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}y^{k+1}$$

$$+ \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q y^{k+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}y^k + y^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}y^{k+1} + y^{k+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}y^k \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}y^k = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q q^0 x^{n+1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{n+1-k}y^k$$

olup buradan katsayıların karşılaştırılması ile

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

elde edilir.

b) Bu şık $(x+y)^{n+1} = (x+y).(x+y)^n$ özdeşliğinden yararlanarak benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 2.1' de elde edilen (2.1.2) eşitliğinden (2.1.1) eşitliğinin taraf tarafa çıkarılmasıyla

$$(1-q^k).\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q .(q^{n+1-k}-1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q, k = 1,2, \ldots \qquad (2.1.3)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik q-binom katsayıları olarak bilinir.

Binom katsayılarının başka bir gösterilim şekli daha vardır. Bunu bir teoremle ifade edelim:

Teorem 2.2:[1] $(q;q)_n=(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)\dots(1-q^k).(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})}=\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}$$

dır.

İspat: (2.1.3) eşitliğinden;

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\frac{(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\frac{(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}\cdot\frac{(1-q^{n+2-k})}{1-q^{k-1}}\begin{bmatrix} n \\ k-2 \end{bmatrix}_q$$

$$=\frac{(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}\cdot\frac{(1-q^{n+2-k})}{1-q^{k-1}}\cdot\frac{(1-q^{n+3-k})}{1-q^{k-2}}\begin{bmatrix} n \\ k-3 \end{bmatrix}_q$$

…………………..

$$=\frac{(1-q^{n+1-k})(1-q^{n+2-k})\dots(1-q^n)}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\dots(1-q)}\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q$$

$$=\frac{(1-q^{n+1-k})(1-q^{n+2-k})\dots(1-q^n).(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})}{(1-q)\dots(1-q^k).(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})}$$

$$=\frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)\dots(1-q^k).(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})}$$

$$=\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \qquad (2.1.4)$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Tanım 2.3: $q>0$ ve $n\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$[n]_q!=\begin{cases}[1]_q[2]_q\dots[n]_q, & n\geq 1\\ 1, & n=0\end{cases}$$

ifadesine **n'nin q-faktöriyeli** denir.

$n \geq 1$ için

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q$$
$$= \frac{(1-q)}{(1-q)}\frac{(1-q^2)}{(1-q)}\cdots\frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$
$$= \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{(1-q)^n}$$
$$= (q;q)_n(1-q)^{-n}$$

şeklinde değişik yazım şeklini elde edebiliriz. Bu son eşitlikten $(q;q)_n$ çözülürse $(q;q)_n = [n]_q!\,(1-q)^n$ elde edilir.

Benzer şekilde $(q;q)_k = [k]_q!\,(1-q)^k$ ve $(q;q)_{n-k} = [n-k]_q!\,(1-q)^{n-k}$

olduğu görülür.

Bu son bağıntılar (2.1.4) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} = \frac{[n]_q!(1-q)^n}{[k]_q!(1-q)^k.[n-k]_q!(1-q)^{n-k}} = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\cdot[n-k]_q!}$$

bulunur. Burada $n \geq k \geq 0$ dır. Elde edilen son ifade klasik anlamdaki

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

ifadesine benzemektedir.

Şimdi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}y^k$$

eşitliğinde y yerine xy yazarsak

$$(x+xy)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}(xy)^k$$

olur. Burada $(xy)^k$ ifadesinin değerini hesaplayalım:

$$(xy)^1 = qxy$$

$$(xy)^2 = xy.xy = qx^2y^2$$

…

$$(xy)^k = q.q^2.q^3 \dots q^{k-1}.x^k.y^k$$
$$= x^k.y^k.q^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}(x + xy)^n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}(xy)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}x^k y^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^n y^k \\ &= x^n \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^k \qquad (2.1.5)\end{aligned}$$

olup diğer taraftan

$$(x + xy)^n = (x + xy)(x + xy)(x + xy) \dots (x + xy)(x + xy)$$

$$(x + xy)^n = x(1 + y).x(1 + y).x(1 + y) \dots x(1 + y).x(1 + y)$$

$$(x + xy)^n = x(1 + y).x(1 + y).x(1 + y) \dots x(1 + y).x^2(1 + qy).(1 + y)$$

$$(x + xy)^n = x^n(1 + q^{n-1})(1 + q^{n-2}) \dots (1 + qy)(1 + y) \qquad (2.1.6)$$

yazılabilir. Buradan (2.1.5) ve (2.1.6) karşılaştırılırsa

$$(1 + y)(1 + qy)(1 + q^2y) \dots (1 + q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^k \qquad (2.1.7)$$

bulunur.

(2.1.7) eşitliğinde y yerine $\frac{y}{x}$ yazarsak

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+q\frac{y}{x}\right)\left(1+q^2\frac{y}{x}\right)\ldots\left(1+q^{n-1}\frac{y}{x}\right)=\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{-k}y^k \Rightarrow$$

$$x^{-n}(x+y)(x+qy)(x+q^2y)\ldots(x+q^{n-1}y)=\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{-k}y^k \Rightarrow$$

$$(x+y)(x+qy)(x+q^2y)\ldots(x+q^{n-1}y)=\sum_{k=0}^{n} x^n q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{y^k}{x^k} \qquad (2.1.8)$$

olur.

$$[a]_q=\frac{1-q^a}{1-q}$$

şeklinde tanımlanan bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının q-analoğunda $q \to 1$yaklaşımı

yapılırsa

$$\lim_{q\to 1}[a]_q=\lim_{q\to 1}\frac{1-q^a}{1-q}=\lim_{q\to 1}\frac{-aq^{a-1}}{-1}=\lim_{q\to 1}\frac{-a}{-1}=a$$

olur.

Benzer şekilde $q \to 1$ yaklaşımı için;

$$\lim_{q\to 1}[n]_q!=n!$$

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\binom{n}{k}$$

olduğu kolayca görülebilir.

2.2.q −İntegrali

Riemann anlamındaki belirli integral kavramı bilinmeden önce

$$\int_0^a x^\alpha\, dx$$

formundaki integralin hesabı için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Örneğin; Archimedes $\alpha = 2$ durumunu hesaplamıştır. Bunu iki yolla yapan Archimedes, 1. yolda M.Ö. 1700'lü yıllarda Babillilerin çözüm yoluna benzer bir yolla

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

toplamını kullanmıştır. Diğer yolda ise sınırlı geometrik serilerden yararlanmıştır. 17. yüzyılın ilk zamanlarında bu integral α nın küçük değerleri için hesaplanmıştır. Buradaki zorluk $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ genellemesini yapmak olmuştur. 1650'lerde Fermat, Pascal ve diğer matematikçiler bunun için bir metod bulmuştur. Ayrıca; Fermat geometrik serileri kullanarak integralin hesabında daha kolay bir yol vermiştir.

Şimdi

$$\int_0^a x^\alpha \, dx$$

İntegralinin hesabı için $x_n = aq^n$, $0 < q < 1$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^\alpha (x_n - x_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (aq^n)^\alpha \, (aq^n - aq^{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^\alpha q^{\alpha n} a q^n \, (1-q) = (1-q) a^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(\alpha+1)n}$$

$$= (1-q) a^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{1-q^{\alpha+1}} = \frac{a^{\alpha+1}(1-q)}{1-q^{\alpha+1}}$$

yazılabilir. Böylece;

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^\alpha (x_n - x_{n+1}) = \frac{a^{\alpha+1}(1-q)}{1-q^{\alpha+1}} \tag{2.2.1}$$

elde edilir.

Buradaki (2.2.1) Riemann toplamının sağ tarafı için $q \to 1^-$ yaklaşımı yapılırsa;

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{a^{\alpha+1}(1-q)}{1-q^{\alpha+1}} = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

olur ki bu değer klasik anlamdaki

$$\int_0^a x^\alpha \, dx$$

integralinin sonucu ile çakışır.

(2.2.1) Riemann toplamında alt aralıkların orta noktaları alındığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^\alpha (x_n - x_{n+1}) \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)^\alpha \cdot (x_n - x_{n+1})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{aq^n + aq^{n+1}}{2}\right)^\alpha \cdot (aq^n - aq^{n+1})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^\alpha q^{n\alpha}(1+q)^\alpha}{2^\alpha} \cdot aq^n(1-q)$$
$$= \frac{(1-q)(1+q)^\alpha a^{\alpha+1}}{2^\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(\alpha+1)}$$
$$= \frac{(1-q)(1+q)^\alpha a^{\alpha+1}}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{1-q^{\alpha+1}} \tag{2.2.2}$$

bulunur.

(2.2.2) Riemann toplamının sağ tarafı için $q \to 1^-$yaklaşımı yapılırsa;

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{(1-q)(1+q)^\alpha a^{\alpha+1}}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{1-q^{\alpha+1}} = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

olur. Buradan da görüldüğü gibi sonuç değişmemektedir.

Son olarak (2.2.1) Riemann toplamında $x_n$yerine x_{n+1}yazarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^{\alpha}(x_n - x_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1})^{\alpha}(x_n - x_{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (aq^{n+1})^{\alpha}(aq^n - aq^{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^{\alpha} q^{\alpha n} q^{\alpha} a q^n (1-q)$$

$$= (1-q)q^{\alpha} a^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(\alpha+1)n}$$

$$= \frac{(1-q)q^{\alpha} a^{\alpha+1}}{1-q^{\alpha+1}} \tag{2.2.3}$$

bulunur. (2.2.3) Riemann toplamında $q \to 1^-$

yaklaşımı yapılırsa;

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{(1-q)q^{\alpha} a^{\alpha+1}}{1-q^{\alpha+1}} = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak;

$$\int_0^a x^{\alpha}\, dx$$

İntegrali yaklaşık olarak

$$\frac{a^{\alpha+1}(1-q)}{1-q^{\alpha+1}}$$

değerine eşittir. Fakat bu sonuç Riemann anlamındaki integralden farklı olarak aralığın parçalanmasına bağlıdır. $q \to 1^-$ yaklaşımında tüm bu yaklaşık sonuçların değeri aynıdır. Fermat bu durumu$l, m \in \mathbb{Z}$ ve $\alpha = \frac{l}{m}$ olmak üzere $t = q^{\frac{1}{m}}$ şeklinde düşünmüş ve aşağıdaki şekilde yeniden hesaplamıştır:

$$\frac{a^{\alpha+1}(1-q)}{1-q^{\alpha+1}}=\frac{a\cdot a^{\frac{l}{m}}\cdot(1-q)}{1-q^{\frac{l}{m}}\cdot q}=\frac{a^{\frac{l+m}{m}}\cdot(1-t^m)}{1-t^{l+m}}$$

$$=a^{\frac{l+m}{m}}\cdot\frac{(1-t)(1+t+\cdots+t^{m-1})}{(1-t)(1+t+\cdots+t^{l+m-1})}=a^{\frac{l+m}{m}}\cdot\frac{(1+t+\cdots+t^{m-1})}{(1+t+\cdots+t^{l+m-1})}$$

Burada

$$1+t+t^2+\cdots+t^{m-1}=\frac{1-t^m}{1-t}$$

dir.

Son durumda $t\to 1$ yaklaşımı yapılırsa;

$$\lim_{t\to 1}a^{\frac{l+m}{m}}\cdot\frac{(1+t+\cdots+t^{m-1})}{(1+t+\cdots+t^{l+m-1})}=a^{\frac{l+m}{m}}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{\frac{1-t^m}{1-t}}{\frac{1-t^{l+m}}{1-t}}=a^{\frac{l+m}{m}}\cdot\frac{m}{l+m}$$

olur. Yani $\alpha=\frac{l}{m}$ için;

$$\int_0^a x^\alpha\,dx=\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\frac{a^{\frac{l+m}{m}}}{\frac{l}{m}+1}=a^{\frac{l+m}{m}}\cdot\frac{m}{l+m}$$

bulunur. Böylece Fermat $\alpha\in\mathbb{Q}$ olmak üzere $\int_0^a x^\alpha\,dx$ integralini hesaplamıştır.1869 yılında Thomae ve ardından 1910 yılında Jackson$q$-integralini aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$f,[0,a]$ aralığında sürekli olmak üzere $f(x)$ in $[0,a]$ aralığındaki q-integrali;

$$\int_0^a f(x)\,d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}f(aq^n)(aq^n-aq^{n+1})$$

dir. Burada d_qx‘e“*Fermat Ölçüsü*” denilmektedir.

Ayrıca Jackson (0, ∞) aralığında $f(x)$ in q-integralini

$$\int_0^\infty f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n).q^n$$

olarak tanımlamıştır[1]. Burada

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{q^{-N}} f(x)d_qx = \int_0^\infty f(x)d_qx$$

dir. Gerçekten

$$\int_0^a f(x)d_qx = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n).(aq^n - aq^{n+1})$$

integralinde a yerine q^{-N} yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^{q^{-N}} f(x)d_qx &= \sum_{n=0}^{\infty} f(q^{-N+n})\,(q^{-N+n} - q^{-N+q+1})\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(q^{-N+n})\,q^{-N+n}(1-q)\\ &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^{-N+n})\,q^{-N+n}\\ &= (1-q)[f(q^{-N})q^{-N} + f(q^{-N+1})q^{-N+1} + \cdots]\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{q^{-N}} f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n)q^n = \int_0^\infty f(x)d_q\,x$$

olup $0 < q < 1$ olduğundan $q^{-1}, q^{-2}, \ldots$ noktaları $(1, +\infty)$ aralığında bulunur.

Daha sonraki yıllarda Jackson'ın sınırsız aralıktaki q-integral tanımının eksik olduğu ispatlanmış ve sınırsız aralıktaki q-integral tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir [9] :

$$\int_0^{\infty/A} f(x)d_q x = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A} f(\frac{q^n}{A}) \ , \qquad A > 0$$

f, $(0, a)$ aralığında sürekli olmak üzere;

$$\lim_{q \to 1^-} \int_0^a f(x)d_q x = \int_0^a f(x)dx$$

olduğunu görmek kolaydır.

Örnek 2.2.1.

$$\int_0^a x^\alpha \, d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n).(aq^n - aq^{n+1})$$

eşitliğinde $\alpha = 1$ olması durumunda$f(x) = x$ fonksiyonunun q-integrali

$$\int_0^a x d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n(aq^n - aq^{n+1}) = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}(1-q) = \frac{a^2(1-q)}{1-q^2} = \frac{a^2}{1+q}$$

olur.

Burada $q \to 1^-$ yaklaşımı yapılırsa

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{a^2}{1+q} = \frac{a^2}{2}$$

olur. Klasik anlamda

$$\int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2}$$

olup $f(x) = x$ fonksiyonunun $q \to 1^-$ durumunda klasik anlamdaki integrali ile q-integrali çakışmaktadır.

Örnek 2.2.2.

$$\int_0^a x^\alpha d_q x = \frac{a^{\alpha+1}(1-q)}{1-q^{\alpha+1}}$$

eşitliğinde $\alpha = 2$ seçilip $f(x) = x^2$ fonksiyonu göz önüne alınırsa

$$\int_0^a x^2 d_q x = \frac{a^3(1-q)}{1-q^3}$$

olur. Yine burada $q \to 1^-$ yaklaşımı yapılırsa

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{a^3(1-q)}{1-q^3} = \frac{a^3}{3}$$

elde edilir. Klasik anlamda

$$\int_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$$

olup $f(x) = x^2$ fonksiyonun $q \to 1^-$ durumunda klasik anlamdaki integrali ile q-integrali çakışmaktadır.

Örnek 2.2.3.

$$\int_0^a x^\alpha d_q x = \frac{a^{\alpha+1}(1-q)}{1-q^{\alpha+1}}$$

eşitliğinde $\alpha = \frac{1}{2}$ seçilip $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ fonksiyonu alınırsa

$$\int_0^a x^{\frac{1}{2}} d_q x = \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-q)}{1-q^{\frac{3}{2}}}$$

olur. Burada tekrar $q \to 1^-$ yaklaşımı yapıldığında;

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-q)}{1-q^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir ki bu sonuç $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun klasik anlamdaki integral sonucudur. Yani$q \to 1^-$ durumunda $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun klasik anlamdaki integrali ile q-integrali çakışmaktadır.

Şimdi $f(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ fonksiyonunun (0,1) aralığındaki q-integralini hesaplayalım.

$$\int_0^a x^\alpha \, d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n).(aq^n - aq^{n+1})$$

eşitliğinde $a = 1, x = q^n$ alınırsa

$$\int_0^1 f(x) d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(\alpha-1)n}(1-q^n)^{\beta-1}(q^n - q^{n-1})$$

olup burada $(1-q^n)^{\beta-1}$ teriminden dolayı sağdaki serinin toplamı bulunamaz. Fakat bu durum $\lim_{q \to 1^-} f_q(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ olması

$$\int_0^1 f_q(x) d_q x$$

integralinin hesaplanmasında kolaylık sağlar. Bunun için $(1-x)^{\beta-1}$ ifadesinin x'e göre Binom serisini yazalım.

Klasik anlamda Binom serisi;

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

olarak tanımlanmaktadır. Şimdi $|x| < 1$ için

$$(1-x)^{-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k$$

serisini göz önüne alalım. $k!$ ‘in q-analoğunu $k_q!$ şeklinde gösterelim ve $k!_q$’yu Tanım 2.3 ten;

$$\begin{aligned}k_q! &= \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)}{(1-q)^k}\\ &= (1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+q^2+\dots+q^k)\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 2.2 den $(\alpha)_k=\alpha.(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)$ Pochhammer gösteriminin

q-analoğu

$$\begin{aligned}[(\alpha)_k]_q &= [\alpha]_q[\alpha+1]_q\dots[\alpha+k-1]_q\\ &= \frac{1-q^\alpha}{1-q}\cdot\frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}\cdots\frac{1-q^{\alpha+k-1}}{1-q}\\ &= \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\cdots(1-q^{\alpha+k-1})}{(1-q)^k}\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$(a;q)_k=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{k-1})$$

dersek

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(\alpha)_k]_q}{k_q!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^\alpha;q)_k}{(q;q)_k}x^k$$

olur. Gerçekten;

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^\alpha;q)_k}{(q;q)_k}x^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\cdots(1-q^{k+\alpha-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^k.[(\alpha)_k]_q}{k_q!.(1-q)^k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(\alpha)_k]_q}{k_q!}x^k\end{aligned}$$

dır.

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^{\alpha};q)_k}{(q;q)_k}x^k$ serisi toplanabilirdir ve bu toplamın hesabı q-Binom Teoremi olarak bilinen sonraki teoremde verilecektir.

Şimdi

$$g_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k, |x|<1$$

fonksiyonunu ele alalım. Buradan türev alarak

$$g'_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k.(\alpha)_k}{k!}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k.(\alpha)_k}{k.(k-1)!}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(k-1)!}x^{k-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+1}}{k!}x^k$$

elde edilir.

Pochhammer gösteriminden hareketle

$$(\alpha)_{k+1}=\alpha.(\alpha+1).(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)=\alpha.(\alpha+1)_k$$

yazılabilir. Elde ettiğimiz bu $(\alpha)_{k+1}=\alpha.(\alpha+1)_k$ eşitliğini $g'_\alpha(x)$ türevinde yerine yazarsak;

$$g'_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+1}}{k!}x^k=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_k}{k!}x^k=\alpha.g_{\alpha+1}(x)$$

olur. Buradan $g_{\alpha+1}(x)=(1/\alpha).g'_\alpha(x)$ elde edilir. Böylece

$$g_\alpha(x)-g_{\alpha+1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{k!}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_k}{k!}x^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k-(\alpha+1)_k}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k-(\alpha+1)_k}{k!}x^k$$

bulunur. Çünkü $\alpha_0-(\alpha+1)_0=1-1=0$ olur.

Benzer şekilde

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1) = \alpha.(\alpha+1)_{k-1} \tag{2.2.4}$$
$$(\alpha+1)_k = (\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k) = (\alpha+k)(\alpha+1)_{k-1} \tag{2.2.5}$$

eşitlikleri de elde edilebilir.

$g_\alpha(x)$ fonksiyonunun 2. türevi alınırsa;

$$g''_\alpha(x) = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{k+1}}{k!}x^k$$

olur.

$$\begin{aligned}(\alpha+1)_{k+1} &= (\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+1+k-1)(\alpha+1+k)\\ &= (\alpha+1)(\alpha+2)_k\end{aligned}$$

olup bu değer $g''_\alpha(x)$ ‘de yerine yazılırsa

$$g''_\alpha(x) = \alpha.(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+2)_k}{k!}x^k = \alpha.(\alpha+1).g_{\alpha+2}(x)$$

elde edilir.

Bu işlemler n defa uygulanırsa

$$g_\alpha^{(n)}(x) = (\alpha)_n g_{\alpha+n}(x)$$

genellemesi yapılabilir.

Bu hesaplamalara ek olarak Pochhammer gösteriminin q-analoğundan hareketle;

$$\begin{aligned}[(\alpha)_{k+n}]_q &= \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+k+n-1})}{(1-q)^k.(1-q)^n}\\ &= \frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q)^n}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+n})\dots(1-q^{\alpha+k+n-1})}{(1-q)^k}\\ &= [(\alpha)_k]_q.[(\alpha+n)_k]_q \quad ,k,n\in Z^+\end{aligned}$$

eşitliği elde edilebilir. Bu durum

$$[(\alpha)_{k+1}]_q = [\alpha]_q.[(\alpha+1)_k]_q$$

eşitliğinin daha genel bir halidir. Buradan $k, n \in Z^{+}$için

$$[(\alpha)_n]_q . [(\alpha+n)_k]_q = [(\alpha)_k]_q . [(\alpha+k)_n]_q$$

yazılabilir. Gerçekten;

$[(\alpha)_k]_q . [(\alpha+k)_n]_q$

$$= \frac{(1-q^{\alpha}) \dots (1-q^{\alpha+k-1})}{(1-q)^k} \cdot \frac{(1-q^{\alpha+k})(1-q^{\alpha+k+1}) \dots (1-q^{\alpha+k+n-1})}{(1-q)^n}$$
$$= \frac{(1-q^{\alpha}) \dots (1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q)^n} \cdot \frac{(1-q^{\alpha+n})(1-q^{\alpha+n+1}) \dots (1-q^{\alpha+n+k-1})}{(1-q)^k}$$
$$= [(\alpha)_n]_q . [(\alpha+n)_k]_q$$

dur.Daha önce

$$g_\alpha(x) - g_{\alpha+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k - (\alpha+1)_k}{k!} x^k$$

olduğu bulunmuştu. Böylece (2.2.4) ve (2.2.5) eşitlikleri bu son eşitlikte yerine yazıldığında

$$g_\alpha(x) - g_{\alpha+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)_{k-1} - (\alpha+k)(\alpha+1)_{k-1}}{k!} x^k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_{k-1}[\alpha-(\alpha+k)]}{k!} x^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_{k-1}}{(k-1)!} x^k$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k}{k!} x^{k+1} = -x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k}{k!} x^k = -x g_{\alpha+1}(x)$$

bulunur. Bu eşitlikten;

$$g_\alpha(x) - g_{\alpha+1}(x) = -x . g_{\alpha+1}(x)$$

$$g_\alpha(x) - (1-x) g_{\alpha+1}(x) = 0$$

$$g_\alpha(x) - (1-x) \cdot \frac{1}{\alpha} g'_\alpha(x) = 0$$

$$g_\alpha(x) = (1-x)\cdot\frac{1}{\alpha}g'_\alpha(x)$$

$$\frac{g'_\alpha(x)}{g_\alpha(x)} = \frac{\alpha}{1-x}$$

elde edilir. Buradan

$$\ln[g_\alpha(x)] = -\alpha\,.\ln(1-x) = \ln[(1-x)^{-\alpha}]$$
$$g_\alpha(x) = (1-x)^{-\alpha}$$

bulunur.

Tanım 2.4 :

$0 < q < 1$için

$$D_q f(x) = \frac{f(x)-f(qx)}{x-qx} = \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}$$

ifadesine $f(x)$'in q-türevi denir.D_q ifadesine de q-türev operatörü denir.

q-türev operatörü lineerdir. Yani;

$$D_q[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha D_q f(x) + \beta D_q g(x)$$

dir.

Örnek 2.2.4.

$$D_q(x^a) = \frac{x^a-(qx)^a}{(1-q)x} = \frac{x^a-q^a x^a}{(1-q)x} = x^{a-1}\cdot\frac{1-q^a}{1-q} = [a]_q\cdot x^{a-1}$$

Örnek 2.2.5. Klasik anlamda

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n x^n}{n!}$$

dir ve bu seri $\mathbb{R}$'de düzgün yakınsaktır. Buradan

$$
\begin{aligned}
D_q(e^{ax}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} D_q(x^n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} [n]_q . x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \cdot x^{n-1} \\
&= a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ax)^{n-1}}{n!} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{(n+1)!} \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
&= a. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{(n+1)!} \cdot [n+1]_q
\end{aligned}
$$

elde edilir.Bu durum $q \to 1^-$ yaklaşımı için klasik anlamdaki sonucu verir.

Örnek 2.2.6.

$$
D_q(lnx) = \frac{lnx - \ln(qx)}{(1-q)x} = \frac{lnx - lnq - lnx}{(1-q)x} = -\frac{lnq}{(1-q)x}
$$

$q \to 1^-$ durumunda;

$$
\lim_{q \to 1^-} \left(-\frac{lnq}{(1-q)} \right) . \frac{1}{x} = \lim_{q \to 1^-} \left(-\frac{\frac{1}{q}}{-1} \right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}
$$

olur.

Şimdi q-Binom Teoremini verip ispatlayalım:

Teorem 2.3:[1] $|x| < 1, |q| < 1$ ve $(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - a\,q^k)$ olmak üzere

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(q;q)_\infty}
$$

dur.

Burada $(a;q)_k = (1-a).(1-aq) \ldots (1-aq^{k-1})$ dir.

İspat:

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

olsun. Bu fonksiyona q-türev operatörü uygulanırsa;

$$D_q f_a(x) = \frac{f_a(x) - f_a(qx)}{(1-q)x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)k} [k]_q x^{k-1} \Rightarrow$$

$$\frac{f_a(x) - f_a(qx)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} \cdot \frac{1-q^k}{(1-q)} \cdot (1-q) x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} \cdot (1-q^k) x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)(1-q^2)\ldots(1-aq^{k-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)} \cdot (1-q^k) x^{k-1}$$

$$= (1-a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{k-1})} \cdot x^{k-1}$$

$$= (1-a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}} \cdot x^k$$

$$= (1-a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

$$= (1-a) f_{aq}(x)$$

olup buradan

$$f_a(x) - f_a(qx) = (1-a) x f_{aq}(x)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$f_a(x) - f_a(qx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_k} \cdot [(a;q)_k - (aq;q)_k] x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_k} \cdot \left[(1-a)(1-aq) \dots \left(1-aq^{k-1}\right) - (1-aq)(1-aq^2) \dots (1-aq^k)\right] x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_k} \cdot \left[(1-aq)(1-aq^2) \dots (1-aq^{k-1})[1-a-(1-aq^k)]\right] x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \cdot [1-a-1+aq^k] x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \cdot [-a+aq^k] x^k$$

$$= -a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \cdot (1-q^k) x^k$$

$$= -a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k} \cdot (1-q^k) x^k \qquad (k = 0 \; için \; ilk \; terim \; 0 \; dır.)$$

$$= -a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_k}{(q;q)_{k+1}} (1-q^{k+1}) x . x^k$$

$$= -ax \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-aq)(1-aq^2) \dots (1-aq^k)}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^k)(1-q^{k+1})} \cdot (1-q^{k+1}) \, x^k$$

$$= -ax \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

$$= -ax f_{aq}(x)$$

olup buradan

$$f_a(x) - f_a(qx) = -ax f_{aq}(x)$$

$$f_a(x) = (1-ax) f_{aq}(x)$$

$$f_{aq}(x) = \frac{f_a(x)}{1-ax}$$

bulunur.

Daha önce

$$f_a(x) - f_a(qx) = (1-a)xf_{aq}(x)$$

olduğu elde edilmişti. Buradan $f_a(x)$ çözülürse;

$$\begin{aligned} f_a(x) &= (1-a)xf_{aq}(x) + f_a(qx) \\ &= (1-a)x\frac{f_a(x)}{1-ax} + f_a(qx) \\ &= \frac{x-ax}{1-ax}f_a(x) + f_a(qx) \end{aligned}$$

olup buradan

$$\left(1 - \frac{x-ax}{1-ax}\right)f_a(x) = f_a(qx)$$

veya

$$f_a(x) = \frac{1-ax}{1-x}f_a(qx)$$

elde edilir.

Bu bağıntı ardışık olarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \frac{(1-ax)}{(1-x)} \cdot \frac{(1-aqx)}{1-qx} f_a(q^2x) \\ &= \frac{(1-ax)}{1-x} \cdot \frac{(1-aqx)}{1-qx} \cdot \frac{(1-aq^2)}{1-q^2x} f_a(q^3x) \\ &= \cdots\cdots\cdots \\ &= \frac{(1-ax)(1-aqx)(1-aq^2x)\ldots(1-aq^{n-1}x)}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots(1-q^{n-1}x)} f_a(q^nx) \\ &= \frac{(ax;q)_n}{(x;n)_n} f_a(q^nx) \\ &= \cdots\cdots\cdots \\ &= \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} f_a(0) \end{aligned}$$

$$= \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

yani

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

bulunur ki bu da teoremi ispatlar.

Bu teoremi başka bir yoldan daha ispatlayabiliriz. Gerçekten

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

sonsuz çarpımı sabit a ve q lar ile $|x| \leq 1 - \varepsilon$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu durumda

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

İfadesi $|x| < 1$ için bir analitik fonksiyona yakınsar. Yani $|x| < 1$ için

$$F(x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

Taylor açılımı mevcuttur. Buradan;

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} &= \frac{(1-ax)(1-axq)(1-axq^2)\ldots(1-axq^k)\ldots}{(1-x)(1-xq)(1-xq^2)\ldots(1-xq^k)\ldots} \\ &= \frac{(1-ax)}{(1-x)} \cdot \frac{(1-axq)(1-axq^2)\ldots(1-axq^k)\ldots}{(1-xq)(1-xq^2)\ldots(1-xq^k)\ldots} \\ &= \frac{(1-ax)}{(1-x)} \cdot F(qx) \end{aligned}$$

olup böylece

$$(1-x).F(x) = (1-ax).F(qx)$$

veya

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_nq^nx^n$$

olur. Elde edilen son eşitlikte x^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}A_nq^nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}A_naq^nx^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-q^n)\,A_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)A_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(1-aq^{n-1})A_{n-1}x^n$$

$$(1-q^n)A_n=(1-aq^{n-1})A_{n-1}\Rightarrow$$

$$A_n=\frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}A_{n-1}$$

$$=\frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}\cdot\frac{(1-aq^{n-2})}{(1-q^{n-1})}A_{n-2}$$

$$=\frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}\cdot\frac{(1-aq^{n-2})}{(1-q^{n-1})}\cdot\frac{(1-aq^{n-3})}{(1-q^{n-2)}}A_{n-3}$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}\cdot\frac{(1-aq^{n-2})}{(1-q^{n-1})}\cdots\frac{(1-aq)}{(1-q^2)}\cdot\frac{(1-a)}{(1-q)}A_0$$

$$=\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}A_0\Rightarrow$$

$$A_n=\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}A_0$$

bulunur. Bu indirgeme bağıntısındaA_0 keyfi olup $A_0=1$ alınabilir.

Böylece;

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}x^n=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

q-Binom teoremindeki sonsuz çarpım $(1-x)^{-\alpha}$ ifadesinin q-analoğuna baktığımızda da karşımıza çıkar. α bir tamsayı olması halinde $(1-x)^{-\alpha}$ ifadesinin q-analoğunu bulalım.

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\alpha} x^{n}, \qquad |x| < 1$$

olduğunu klasik anlamda biliyoruz.

$(1-x)^{-n}$ ifadesinin q-analoğu;

$$\frac{1}{(1-x).(1-qx)\dots(1-xq^{n-1})}$$

$$= \frac{(1-xq^{n})(1-xq^{n+1})\dots}{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{n-1})(1-xq^{n})(1-xq^{n+1})\dots}$$

$$= \frac{[1-(xq^{n})][1-(xq^{n})q]\dots[1-(xq^{n})q^{2}]\dots}{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{n-1})(1-xq^{n})(1-xq^{n+1})\dots}$$

$$= \frac{(xq^{n};q)_{\infty}}{(x;q)_{\infty}}$$

şeklinde yazılabilir. n tamsayı olmadığı durumda da son ifade anlamlıdır.

q-Binom teoreminin bazı özel hallerinin ilginç özellikleri vardır.

1- q -Binom teoreminde $a=0$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k}}{(q;q)_{k}} = \frac{1}{(x;q)_{\infty}}, \quad |x|<1, |q|<1 \tag{2.3.1}$$

olur.

2- q -Binom teoreminde a yerine $\frac{1}{a}$; x yerine ax yazıp düzenlersek

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k} q^{\binom{k}{2}} x^{k}}{(q;q)_{k}} = (x;q)_{\infty}, \quad |q|<1 \tag{2.3.2}$$

olur. Gerçekten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax;q)_{k}}{(q;q)_{k}} x^{k} = \frac{(ax;q)_{\infty}}{(x;q)_{\infty}}$$

dur. Binom eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{a};q)_k}{(q;q)_k}(ax)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{q}{a}\right)\left(1-\frac{q^2}{a}\right)\dots(1-\frac{q^{k-1}}{a})}{(q;q)_k}a^kx^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{a-q}{a}\right)\left(\frac{a-q^2}{a}\right)\dots\left(\frac{a-q^{k-1}}{a}\right)}{(q;q)_k}a^kx^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{a^k}\cdot a^k(a-1)(a-q)(a-q^2)\dots(a-q^{k-1})}{(q;q)_k}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-a)(q-a)(q^2-a)\dots(q^{k-1}-a)}{(q;q)_k}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1.q.q^2\dots q^{k-1})}{(q;q)_k}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kq^{\frac{k-1}{2}}}{(q;q)_k}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kq^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_k}x^k$$

elde edilir. Burada

$$1+2+\cdots+k-1=\frac{k.(k-1)}{2}$$

ve

$$\binom{k}{2}=\frac{k!}{(k-2).2!}=\frac{k.(k-1).(k-2)!}{(k-2)!.2}=\frac{k.(k-1)}{2}$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Aynı yerine yazmaları q-Binom teoremindeki eşitliğin sağ tarafı için de yaparsak

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}=\frac{(1-ax)(1-axq)(1-axq^2)\dots(1-axq^k)\dots}{(1-x)(1-xq)(1-xq^2)\dots(1-xq^k)\dots}$$

$$\left(a\to\frac{1}{a}\right)\ ,\quad \frac{(\frac{x}{a};q)_\infty}{(x;q)_\infty}=\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}q\right)\left(1-\frac{x}{a}q^2\right)\dots\left(1-\frac{x}{a}q^k\right)\dots}{(1-x)(1-xq)(1-xq^2)\dots(1-xq^k)\dots}$$

$$(x \to ax)\ ,\quad \frac{(x;q)_\infty}{(ax;q)_\infty} = \frac{(1-x)(1-xq)(1-xq^2)\dots(1-xq^k)\dots}{(1-ax)(1-axq)(1-axq^2)\dots(1-axq^k)\dots}$$

$$(a \to 0)\ ,\quad \frac{(x;q)_\infty}{(0;q)_\infty} = (x;q)_\infty$$

bulunur.

3- q -Binom teoreminde a yerine q^{-N} yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q (-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n = (x;q)_N = (1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{N-1}) \qquad (2.3.3)$$

olur. Şimdi bunu gösterelim:

$$(a;q)_n = (1-a).(1-aq)\dots(1-aq^{n-1})$$

olduğunu biliyoruz. Burada a yerine q^{-N} yazarsak;

$$\begin{aligned}
(q^{-N};q)_n &= (1-q^{-N}).(1-q^{-N+1})\dots(1-q^{-N+n-1}) \\
&= \left(\frac{q^N-1}{q^N}\right).\left(\frac{q^{N-1}-1}{q^{N-1}}\right)\dots\left(\frac{q^{N-n+1}-1}{q^{N-n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{q^N q^N \dots q^N . q^{-1}. q^{-2} \dots q^{-n+1}} \cdot (q^N-1).(q^{N-1}-1)\dots(q^{N-n+1}-1) \\
&= \frac{1}{q^{N.n}} \cdot q^{1+2+\dots n-1} \cdot (q^N-1).(q^{N-1}-1)\dots(q^{N-n+1}-1) \\
&= (-1)^n . q^{-N.n} . q^{\binom{n}{2}} . (1-q^N).(1-q^{N-1})\dots(1-q^{N-n+1}) \\
&= (-1)^n . q^{-N.n+\binom{n}{2}} . (1-q^N).(1-q^{N-1})\dots(1-q^{N-n+1}) \\
&= (q;q)_N . (-1)^n . q^{-N.n+\binom{n}{2}}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi q-Binom teoreminde yerine yazarsak;

$$\frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n} = \frac{(q;q)_N}{(q;q)_n . (q;q)_{N-n}} (-1)^n \cdot q^{-N.n+\binom{n}{2}} = \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q (-1)^n \cdot q^{-N.n+\binom{n}{2}}$$

olur.

Burada

$$\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_N}{(q;q)_n . (q;q)_{N-n}}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece $N = 0,1,2, \dots$ için

$$\sum_{n=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q (-1)^n \cdot q^{-N.n+\binom{n}{2}} . x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n} x^n = \frac{(xq^{-N};q)_\infty}{(x;q)_\infty} = (xq^{-N};q)_N$$

bulunur. Her iki tarafta x yerine xq^n yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q (-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n = (x;q)_N \quad ; N = 0,1,2 \dots$$

elde edilmiş olur.

Tanımdan;

$$\begin{aligned} &\frac{(xq^{-N};q)_\infty}{(x;q)_\infty} \\ &= \frac{(1-xq^{-N}).(1-xq^{-N+1}) \dots (1-xq^{-1}).(1-x).(1-xq) \dots (1-xq^N) \dots}{(1-x).(1-xq) \dots (1-xq^N) \dots} \\ &= (xq^{-N};q)_N \end{aligned}$$

yazılabilir.

4-

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \frac{1}{(x;q)_N} = \frac{1}{(1-x) \dots (1-xq^{N-1})} \quad ; \quad |x| < 1 \qquad (2.3.4)$$

dir. Bunu göstermek için q-Binom teoreminde $a = q^N$ yazarsak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^N;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q^N).(1-q^{N+1}) \dots (1-q^{N+k-1})}{(1-q).(1-q^2) \dots (1-q^k)} x^k$$

olur. Toplam içindeki ifadeyi $(q;q)_{N-1}$ ile çarpıp bölelim. Bu durumda

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q^N).(1-q^{N+1}) \dots (1-q^{N+k-1}).(1-q).(1-q^2) \dots (1-q^{N-1})}{(1-q).(1-q^2) \dots (1-q^k).(1-q).(1-q^2) \dots (1-q^{N-1})} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q).(1-q^2)\ldots(1-q^{N-1}).(1-q^N).(1-q^{N+1})\ldots(1-q^{N+k-1})}{(q;q)_k.(q;q)_{N-1}} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q;q)_{N+k-1}}{(q;q)_k.(q;q)_{N-1}} x^k$$

bulunur. Son eşitlikte toplam içindeki ifade;

$$\frac{(q;q)_{N+k-1}}{(q;q)_k.(q;q)_{N-1}} = \frac{(q;q)_{N+k-1}}{(q;q)_k.(q;q)_{N+k-1-k}} = \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

şeklinde yazılabilir. Böylece son eşitlik;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^N;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q .x^k$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi de q-Binom teoremindeki eşitliğin sağ tarafında $a = q^N$ yazarsak

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \frac{(q^N x;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \frac{(1-xq^N).(1-xq^{N+1})\ldots(1-xq^{N+k})\ldots}{(1-x).(1-xq)\ldots(1-xq^k)\ldots}$$

$$= \frac{1}{(1-x).(1-xq)\ldots(1-xq^{N-1})} = \frac{1}{(x;q)_N}$$

olur. Böylece q-Binom teoreminde $a = q^N$ yazılmasıyla

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q .x^k = \frac{1}{(x;q)_N} \quad ; \quad |x| < 1$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.4:[1] λ, μ reel sabitler olmak üzere;

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{\left(q^\lambda x;q\right)_\infty}{(q^\mu x;q)_\infty} = (1-x)^{\mu-\lambda}$$

yakınsaması $\mu \geq \lambda,\ \mu + \lambda \geq 1$ için $\{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\}$ kümesinde düzgün, diğer λ, μ sabitleri için $\{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\,, x \neq 1\}$ kümesinin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır.

İspat:

$$\frac{(q^{\lambda}x;q)_{\infty}}{(q^{\mu}x;q)_{\infty}}=\frac{(1-q^{\lambda}x)(1-q^{\lambda+1}x)\dots(1-q^{\lambda+k-1})\dots}{(1-q^{\mu}x)(1-q^{\mu+1}x)\dots(1-q^{\mu+k-1}x)\dots}$$
$$=\frac{(1-q^{\lambda}x)(1-q^{\lambda+1}x)\dots(1-q^{\lambda+l-1}x)(1-q^{\lambda+l}x)(1-q^{\lambda+l+1}x)\dots}{(1-q^{\mu}x)(1-q^{\mu+1}x)\dots(1-q^{\mu+m-1}x)(1-q^{\mu+m}x)(1-q^{\mu+m+1}x)\dots}$$
$$=\frac{(q^{\lambda}x;q)_{l}(q^{\lambda+1}x;q)_{\infty}}{(q^{\mu}x;q)_{m}(q^{\mu+1}x;q)_{\infty}}$$

yazılabilir.l,m sayılarını $\mu+m\geq\ \lambda+l$ ve $\mu+\ \lambda+l+m\geq 1$ olacak şekilde seçersek

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{(q^{\lambda}x;q)_{l}}{(q^{\mu}x;q)_{m}}=\frac{(1-x)^{l}}{(1-x)^{m}}=(1-x)^{l-m}$$

ve

$$\frac{(ax;q)_{\infty}}{(x;q)_{\infty}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k\ \ ,|x|<1\,,|q|<1$$

q-Binom teoreminden

$$\frac{(q^{\lambda}x;q)_{\infty}}{(q^{\mu}x;q)_{\infty}}=\frac{(q^{\lambda-\mu}.q^{\mu}x;q)_{\infty}}{(q^{\mu}x;q)_{\infty}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{\lambda-\mu};q)_n}{(q;q)_n}(q^{\mu}x)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\lambda-\mu})(1-q^{\lambda-\mu+1})\dots(1-q^{\lambda-\mu+n-1})}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^n)}q^{\mu n}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q^{\mu}-q^{\lambda})(q^{\mu}-q^{\lambda+1})\dots(q^{\mu}-q^{\lambda+n-1})}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^{n-1})}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q^{\mu}-q^{\lambda})}{(1-q)}\cdot\frac{(q^{\mu}-q^{\lambda+1})}{(1-q^2)}\cdots\frac{(q^{\mu}-q^{\lambda+n-1})}{(1-q^n)}x^n \qquad (2.4.1)$$

Diğer taraftan $\lambda+k\geq\mu$ için

$$f(q)=\frac{(q^{\mu}-q^{\lambda+k})}{1-q^{k+1}}$$

fonksiyonu için $f'(q) \geq 0$ olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan

$$\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+k}\right)}{1-q^{k+1}} \leq \lim_{q\to 1^-}\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+k}\right)}{1-q^{k+1}} = \lim_{q\to 1^-}\frac{\mu q^{\mu-1}-(\lambda+k).q^{\lambda+k-1}}{-(k+1)q^{k}} = \frac{\mu-(\lambda+k)}{-(k+1)}$$

$$=\frac{\lambda+k-\mu}{k+1}$$

olup $\lambda+m-1<\mu$ eşitsizliğinin sağlandığı en büyük m tamsayısı için $|x|\leq 1$ olmak üzere

$$\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda}\right)}{1-q}\cdot\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+1}\right)}{(1-q^{2})}\cdots\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+m-1}\right)}{(1-q^{m})}\cdots\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+n-1}\right)}{(1-q^{n})}\cdot x^{n}$$
$$\leq\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda}\right)}{1-q}\cdot\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+1}\right)}{(1-q^{2})}\cdots\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+m-1}\right)}{(1-q^{m})}\cdots\frac{\lambda+m-\mu}{m+1}\cdot\frac{\lambda+m+1-\mu}{m+2}$$
$$\cdot\frac{\lambda+n-1-\mu}{n}$$

yazılabilir. Böylece (2.4.1) serisinin m. teriminden sonrası yakınsak olan

$$\sup_{0<q<1}\left|\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda}\right)}{1-q}\cdot\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+1}\right)}{(1-q^{2})}\cdots\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+m-1}\right)}{(1-q^{m})}\right|.\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(\lambda-\mu+m)_{n-m}}{(m+1)_{n-m}}x^{n}$$

serisinden daha küçüktür.

Burada

$$(a)_0=1,\quad (a)_n=a.(a+1)\ldots(a+n-1),$$

$$(\lambda-\mu+m)_{n-m}=(\lambda-\mu+m).(\lambda-\mu+m+1)\ldots(\lambda-\mu+m+n-m-1)$$
$$=(\lambda-\mu+m).(\lambda-\mu+m+1)\ldots(\lambda-\mu+n-1),$$

$$(m+1)_{n-m}=(m+1).(m+2)\ldots(m+1+n-m-1)$$
$$=(m+1).(m+2)\ldots n$$

eşitlikleri geçerlidir.

$$\frac{(q^{\lambda}x;q)_{\infty}}{(q^{\mu}x;q)_{\infty}}=\frac{(q^{\lambda-\mu}.\,q^{\mu}x;q)_{\infty}}{(q^{\mu}x;q)_{\infty}}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda}\right)}{(1-q)}\cdot\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+1}\right)}{(1-q^{2})}\cdots\frac{\left(q^{\mu}-q^{\lambda+n-1}\right)}{(1-q^{n})}x^{n}$$

İfadesinin her iki tarafının $q\to 1^{-}$ için limiti alınırsa;

$$\lim_{q\to 1^{-}}\frac{(q^{\lambda}x;q)_{\infty}}{(q^{\mu}x;q)_{\infty}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda-\mu}{1}\cdot\frac{\lambda-\mu+1}{2}\cdots\frac{\lambda-\mu+n-1}{n}x^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda-\mu)_{n}}{n!}x^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\mu+1)\ldots(\lambda-\mu+n-1)}{n!}x^{n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda-1)\ldots(\mu-\lambda-n+1)}{n!}x^{n}$$

$$=(1-x)^{\mu-\lambda}$$

elde edilir.

Burada aşağıda verilen klasik anlamdaki

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}$$

$$(1-x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}$$

Binom özdeşliklerinden yararlanılmıştır. Böylece

$$\lim_{q\to 1^{-}}\frac{(q^{\lambda}x;q)_{\infty}}{(q^{\mu}x;q)_{\infty}}=(1-x)^{\mu-\lambda}$$

bulunmuş olur.

q-Binom teoreminin sonuçlarından biri olan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(q;q)_k}=\frac{1}{(x;q)_\infty} \quad ,|x|<1,|q|<1$$

(2.3.1) eşitliğinde x yerine $(1-q)x$yazarsak

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^k x^k}{(q;q)_k}=\frac{1}{[(1-q)x;q]_\infty}$$

olur. Bu eşitliğin sol tarafını açıp ve $q\to 1^-$ yaklaşımı yapılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^k x^k}{(q;q)_k}\\
&=\frac{1}{(q;q)_0}+\frac{(1-q)}{(q;q)_1}x+\frac{(1-q)^2}{(q;q)_2}x^2+\cdots+\frac{(1-q)^k}{(q;q)_k}x^k+\cdots\\
&=1+\frac{(1-q)}{(1-q)}x+\frac{(1-q)^2}{(1-q)(1-q^2)}x^2+\cdots+\frac{(1-q)^k}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)}x^k+\cdots\\
&=1+x+\frac{1}{(1+q)}x^2+\cdots+\frac{1}{(1+q)(1+q+q^2)\ldots(1+q+\cdots+q^{k-1})}x^k+\cdots
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^k x^k}{(q;q)_k}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.3}x^3+\cdots+\frac{1}{1.2\ldots k}x^k+\cdots\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x
\end{aligned}$$

olur ki bu da

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{1}{[(1-q)x;q]_\infty}=e^x$$

demektir.

Tanım 2.5: $0<q<1$ ve $x\in\mathbb{R}$ için

$$e_q(x)=\frac{1}{((1-q)x;q)_\infty} \tag{2.5.1}$$

ifadesine $f(x)=e^x$ in 1. tip q-analoğu denir.

q-Binom teoreminin sonuçlarından biri olan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k}{(q;q)_k} = (x;q)_\infty, \quad |q| < 1$$

eşitliğinde x yerine $-(1-q)x$yazarsak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k . q^{k(k-1)/2} . (-1)^k . (1-q)^k}{(q;q)_k} x^k = (-(1-q)x;q)_\infty \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \cdot \frac{x^n}{\frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}} = (-(1-q)x;q)_\infty \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \cdot \frac{x^n}{k_q!} = (-(1-q)x;q)_\infty = E_q(x) \tag{2.5.2}$$

elde edilir. (2.5.2) ifadesindeki $E_q(x)$ fonksiyonuna$f(x) = e^x$ in 2. tip q-analoğu adı verilir. O halde $f(x) = e^x$ üstel fonksiyonunun iki farklı q-analoğu vardır. Kolayca görülebileceği gibi $f(x) = e^x$ in q-analogları arasında

$$e_q(x) E_q(x) = 1$$

özelliği vardır.

3. q-GAMMA ve q-BETA FONKSİYONLARI

Klasik anlamda gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

şeklindedir. Daha önce Teorem 2.3'te

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{\left(q^\lambda x; q\right)_\infty}{(q^\mu x; q)_\infty} = (1-x)^{\mu-\lambda} = (1-x)^{-(\lambda-\mu)}$$

olduğunu görmüştük. Şimdi $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ ile $x^{\alpha-1}(qx;q)_\infty/(q^\beta x;q)_\infty$

ifadelerini karşılaştıralım. Teorem 2.4'te $\lambda = 1, \mu = \beta$ alınırsa

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{(qx; q)_\infty}{(q^\beta; q)_\infty} = (1-x)^{\beta-1}$$

olur. Böylece;

$$\lim_{q \to 1^-} x^{\alpha-1} \frac{(qx; q)_\infty}{(q^\beta; q)_\infty} = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

elde edilir.

$|x| < 1\,, |q| < 1$ için q-Binom teoremi

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

ve

$$(a;q)_\infty = (1-q)(1-aq)\dots(1-aq^k)\dots$$

olarak verilmişti.

Teorem 3.1:[1] $|x| < 1$, $|q| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} x^n = \frac{(ax;q)_\infty (q;q)_\infty}{(x;q)_\infty (a;q)_\infty}$$

dur.

İspat:$|x| < 1$, $|q| < 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} x^n = \frac{(q;q)_\infty}{(a;q)_\infty} + \frac{(q^2;q)_\infty}{(aq;q)_\infty} x + \cdots + \frac{(q^n;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} x^n + \cdots$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots}{(1-a)(1-aq)\ldots} + \frac{(1-q^2)(1-q^3)\ldots}{(1-aq)(1-aq^2)\ldots} x + \cdots$$

$$+ \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})\ldots}{(1-aq^n)(1-aq^{n+1})\ldots} x^n + \cdots$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots}{(1-a)(1-aq)\ldots}\left[1 + \frac{(1-a)(1-aq)\ldots}{(1-q)(1-q^2)\ldots} \cdot \frac{(1-q^2)(1-q^3)\ldots}{(1-aq)(1-aq^2)\ldots} x + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{(1-a)(1-aq)\ldots}{(1-q)(1-q^2)\ldots} \cdot \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})\ldots}{(1-aq^n)(1-aq^{n+1})\ldots} x^n + \cdots \right]$$

$$= \frac{(q;q)_\infty}{(a;q)_\infty}\left[1 + \frac{(1-a)}{(1-q)} x + \cdots + \frac{(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)} x^n + \cdots \right]$$

$$= \frac{(q;q)_\infty}{(a;q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n$$

olur ki son toplam altındaki ifade q-Binom teoreminden

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

dur. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} x^n = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \cdot \frac{(q;q)_\infty}{(a;q)_\infty}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Bu eşitlikte x yerine q^α ; a yerine q^β yazılırsa sağ taraf;

$$\frac{(aq^{\alpha};q)_\infty}{(q^{\alpha};q)_\infty}\cdot\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\beta};q)_\infty}=\frac{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}{(q^{\alpha};q)_\infty}\cdot\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\beta};q)_\infty}$$

olur. Sol taraf ise

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{n+\beta};q)_\infty}q^{n\alpha}$$

şekline gelir. Böylece;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{n+\beta};q)_\infty}q^{n\alpha}=\frac{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}{(q^{\alpha};q)_\infty}\cdot\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\beta};q)_\infty}$$

veya buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{n+\beta};q)_\infty}(1-q)q^{n\alpha}=\frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}{(q^{\alpha};q)_\infty}\cdot\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\beta};q)_\infty}$$

yazılabilir. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{n+\beta};q)_\infty}(q^{n\alpha}-q^{n\alpha+1})=\frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}{(q^{\alpha};q)_\infty}\cdot\frac{(q;q)_\infty}{(q^{\beta};q)_\infty}$$

elde edilir. Diğer taraftan $f(x)$'in q-integralinin

$$\int_0^a f(x)d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}f(aq^n).(aq^n-aq^{n+1})$$

olduğunu biliyoruz. Burada $a=1$ alınırsa;

$$\int_0^1 f(x)d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}f(q^n).(q^n-q^{n+1})$$

elde edilir.

$$f(x)=x^{\alpha-1}\frac{(xq;q)_\infty}{(xq^{\beta};q)_\infty}$$

dersek;

$$f(q^n) = (q^n)^{\alpha-1} \frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{\beta+n};q)_\infty}$$

ve

$$\begin{aligned} f(q^n).(q^n - q^{n+1}) &= q^{n\alpha-n} \frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{\beta+n};q)_\infty}(q^n - q^{n+1}) \\ &= \frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{\beta+n};q)_\infty}(q^{n\alpha} - q^{n\alpha+1}) \end{aligned}$$

olup böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n).(aq^n - aq^{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{\beta+n};q)_\infty}(q^{n\alpha} - q^{n\alpha+1}) = \int_0^1 f(x) d_q x$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{\beta+n};q)_\infty}(q^{n\alpha} - q^{n\alpha+1}) = \int_0^1 x^{\alpha-1} \frac{(xq;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty} d_q x \\ &= \frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty} \cdot \frac{(q;q)_\infty}{(q^\beta;q)_\infty} \end{aligned}$$

bulunur.Buradaki

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} \frac{(xq;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty} d_q x = \frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta};q)_\infty (q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty (q^\beta;q)_\infty} \tag{3.1.1}$$

integraline

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} d_q x = B(\alpha;\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{3.1.2}$$

integralinin q-genişletmesi denir.

(3.1.1) integralini (3.1.2) formunda yazabilmek için başta verdiğimiz

klasik anlamdaki

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

gamma integralinin bir q-analoğuna ihtiyacımız vardır.

$n!_q$ nun varlığı gamma integralinin q-analoğunun uygun bir şekilde

verilmesine yardımcı olur. Ayrıca Euler çarpımı ve sonsuz çarpım yardımıyla

verilen bir interpolasyon formülüne ihtiyaç vardır.

Şimdi

$$\Gamma_q(x) := \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}, |q| < 1$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.Burada q^x ve $(1-q)^{1-x}$ in temel değerleri göz önüne alınmaktadır. Çünkü $\Gamma_q(x)$ meroforfik bir fonksiyon olup

$$x_n = -n \pm \frac{2k\pi i}{\log q}, n, k \in \mathbb{N}$$

noktalarında basit kutup yerlerine sahiptir. Gerçekten

$$(q^x;q)_\infty = (1-q^x).(1-q^{x+1}) \dots (1-q^{x+n}) \dots$$

olup $1 - q^{x+n} = 0$ için $q^{x+n} = 1$ olur.

Buradan;

$(n+x)\log q = \log 1 = \ln 1 + i\arg 1 = 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$dir.

$x_n = -n$ noktasındaki rezidü

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}$$

olmak üzere

$$Rez\left(\Gamma_q(x)\,;\, x=-n\right) = \lim_{x\to -n}(x+n)\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots}{(1-q^x)(1-q^{x+1})\ldots(1-q^{x+n})\ldots}(1-q)^{1-x}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots}{(1-q^{-n})(1-q^{-n+1})\ldots(1-q^{-1})(1-q)(1-q^2)\ldots}(1-q)^{n+1}\lim_{x\to -n}\frac{x+n}{(1-q^{x+n})}$$

$$= \frac{(1-q)^{n+1}}{(q^{-n};q)_n}\lim_{x\to -n}\frac{1}{-q^{x+n}\log q} = \frac{(1-q)^{n+1}}{(q^{-n};q)_n(-\log q)} = \frac{(1-q)^{n+1}}{(q^{-n};q)_n(\log q^{-1})}$$

olur.

$\Gamma_q(x)$ sıfır yerine sahip değildir ve basit kutup yerleri hariç tam fonksiyondur. Bu özellikler nedeniyle $\Gamma_q(x)$ ve $\Gamma(x)$ benzerlik göstermektedir.

$x = 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ noktaları her iki fonksiyon için basit kutup yerleridir. Böylece;

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(xq;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_qx = \frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta};q)_\infty(q;q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty(q^\beta;q)_\infty} \tag{3.1.1}$$

ifadesi q-Binom teoreminin bir başka formu olarak;

$$B_q(\alpha;\beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(xq;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_qx = \frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki

$$B_q(\alpha;\beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(xq;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_qx$$

fonksiyonu klasik anlamdaki Beta fonksiyonunun q-analoğudur.

Bu tanımdan hareketle

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty}$$

olmak üzere

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-\alpha}}{(q^\alpha;q)_\infty},$$

$$\Gamma_q(\beta) = \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-\beta}}{(q^\beta;q)_\infty},$$

$$\Gamma_q(\alpha+\beta) = \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-(\alpha+\beta)}}{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty},$$

yazılışlarından

$$\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-\alpha}}{(q^\alpha;q)_\infty} \cdot \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-\beta}}{(q^\beta;q)_\infty}}{\frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-(\alpha+\beta)}}{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}}$$

$$= \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-\alpha}.(q;q)_\infty(1-q)^{1-\beta}.(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}{(q;q)_\infty(1-q)^{1-(\alpha+\beta)}.(q^\alpha;q)_\infty(q^\beta;q)_\infty}$$

$$= \frac{(1-q)(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}{(q^\alpha;q)_\infty(q^\beta;q)_\infty} = \int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(xq;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty} d_q x := B_q(\alpha;\beta)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$B_q(\alpha;\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(xq;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty} d_q x = \frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

bağıntısı $\Gamma(x)$fonksiyonunun q −analoğunun, $\Gamma_q(x)$ olarak alınmasında uygun bir bağıntıdır. Ayrıca Bohr-Mollerup teoreminden

$$f(x+1) = x.f(x) \ ; \ f(1) = 1$$

fonksiyonel denklemlerini sağlayan tek fonksiyon $\Gamma(x)$ fonksiyonudur.

Ayrıca $\Gamma(x)$ fonksiyonu logaritmik konveks bir fonksiyon olup benzer şekilde $\Gamma_q(x)$ fonksiyonunun da

$$\Gamma_q(x+1) = \frac{(1-q^x)}{(1-q)}\Gamma_q(x) \ ; \ \Gamma_q(1) = 1$$

fonksiyonel denklemlerini sağladığı ve logaritmik konveks olduğu gösterilebilir.

$\Gamma_q(x)$ fonksiyonunun

$$\Gamma_q(x+1) = \frac{(1-q^x)}{(1-q)}\Gamma_q(x) = [x]_q \Gamma_q(x) \;\; ; \;\; \Gamma_q(1) = 1$$

fonksiyonel denklemlerini sağladığını göstermek kolaydır. Gerçekten

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty}$$

olup buradan

$$\Gamma_q(x+1) = \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{-x}}{(q^{x+1};q)_\infty}$$

yazılabilir. Pay ve paydayı $(1-q)(1-q^x)$ ile çarparsak;

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(x+1) &= \frac{(q;q)_\infty}{(1-q)} \cdot \frac{(1-q)^{1-x}(1-q^x)}{(1-q^x)(1-q^{x+1})\dots(1-q^{x+n})} \\
&= \frac{(1-q^x)}{(1-q)} \cdot \frac{(q;q)_\infty . (1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty} \\
&= \frac{(1-q^x)}{(1-q)} \cdot \Gamma_q(x) = [x]_q . \Gamma_q(x)
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\Gamma_q(1) = \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-1}}{(q;q)_\infty} = 1$$

olduğu açıktır.

Şimdi de $\Gamma_q(x)$ fonksiyonunun logaritmik konveks olduğunu görmek için

$$\frac{d^2}{dx^2}\log \Gamma_q(x) \geq 0$$

olduğunu gösterelim. Bunun için önce

$$\Gamma_q(x)=\frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty}$$

ifadesini

$$\Gamma_q(x)=\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1-q^x)(1-q^{x+1})(1-q^{x+2})\dots}(1-q)^{1-x}$$

$$\log\Gamma_q(x)=\log\frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)\dots}{(1-q^x)(1-q^{x+1})\dots(1-q^{x+n})\dots}(1-q)^{1-x}$$

$$=\log[(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)\dots(1-q)^{1-x}] \\ -\log[(1-q^x)(1-q^{x+1})\dots(1-q^{x+n})\dots]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q^n)+\log(1-q)^{1-x}-\sum_{n=0}^{\infty}\log(1-q^{x+n})$$

şeklinde yazalım. Buradan türev alınırsa;

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma_q(x)=0-\log(1-q)-\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\log(1-q^{x+n})$$

$$=-\log(1-q)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-q^{x+n}}\cdot\frac{d}{dx}(1-q^{x+n})$$

$$=-\log(1-q)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-q^{x+n}}(-q^{x+n}.\log q)$$

$$=-\log(1-q)+\log q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{x+n}}{1-q^{x+n}}$$

olur. İkinci türevin hesaplanmasıyla

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma_q(x)=0+\log q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{x+n}.\log q(1-q^{x+n})+q^{x+n}\log q.\,q^{x+n}}{(1-q^{x+n})^2}$$

$$=(\log q)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{x+n}}{(1-q^{x+n})^2}\geq 0$$

olup bu da $\Gamma_q(x)$ in logaritmik konveks olduğunu gösterir.

Klasik anlamda $\Gamma(x)$ fonksiyonu için bilinen

$$\Gamma(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)\Gamma(x)$$

genellemesine benzer bir genellemenin $\Gamma_q(x)$ fonksiyonu için de varlığını araştıralım.

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty.(1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty}$$

için

$$\Gamma_q(x+1) = [x]_q.\Gamma_q(x)$$

olduğu daha önce gösterilmişti.

$\Gamma_q(x)$ fonksiyonunda x yerine $x+1$ yazalım.

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(x+2) &= \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-x-2}}{(q^{x+2};q)_\infty} = \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{-x-1}}{(q^{x+2};q)_\infty} \\
&= \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{-x-1}(1-q)^2}{(1-q)^{2\cdot}(q^{x+2};q)_\infty}\cdot\frac{(1-q^x)(1-q^{x+1})}{(1-q^x)(1-q^{x+1})} \\
&= \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{-x-1}(1-q^x)(1-q^{x+1})}{(1-q)^{2\cdot}(1-q^x)(1-q^{x+1})(1-q^{x+2})\dots(1-q^{x+n})\dots} \\
&= \frac{(1-q^x)}{(1-q)}\cdot\frac{(1-q^{x+1})}{(1-q)}\cdot\frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty} \\
&= [x]_q[x+1]_q\Gamma_q(x)
\end{aligned}$$

ve böylece devam edilirse

$$\Gamma_q(x+n) = \frac{(q;q)_\infty.(1-q)^{1-(x+n)}}{(q^{x+n};q)_\infty}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{x-n+1}(1-q)^n}{(1-q)^n(q^{x+n};q)_\infty}\cdot\frac{(1-q^x)(1-q^{x+1})\dots(1-q^{x+n-1})}{(1-q^x)(1-q^{x+1})\dots(1-q^{x+n-1})} \\
&= \frac{(q;q)_\infty(1-q)^{1-x}(1-q^x)(1-q^{x+1})\dots(1-q^{x+n-1})}{(1-q)^n(1-q^x)(1-q^{x+1})\dots(1-q^{x+n-1})(1-q^{x+n})\dots}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(1-q^x)}{(1-q)} \cdot \frac{(1-q^{x+1})}{(1-q)} \cdots \frac{(1-q^{x+n-1})}{(1-q)} \cdot \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty}$$

$$= [x]_q [x+1]_q \dots [x+n-1]_q \Gamma_q(x)$$

bulunur. Görüldüğü gibi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Gamma_q(x+n) = [x]_q [x+1]_q \dots [x+n-1]_q \Gamma_q(x)$$

bağıntısı geçerlidir.

Klasik anlamda $\Gamma(n+1) = n!$ olduğunu biliyoruz. Acaba q-Analizinde bu sonuç nasıldır? Gerçekten

$$\Gamma_q(x+n) = [x]_q . [x+1]_q \dots [x+n-1]_q . \Gamma_q(x)$$

eşitliğinde $x = 1$ yazarsak

$$\Gamma_q(n+1) = [1]_q . [2]_q \dots [n]_q . \Gamma_q(1) = n!_q$$

olur.

Lemma 3.1: $x > 0$ için $0 \leq f''(x) \leq g''(x)$ ve $f(1) = f(2) = g(1) = g(2) = 0$ olacak şekilde f, g fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda $[0,1] \cup [2, \infty]$için $f(x) < g(x)$ ve $[1,2]$ için $f(x) \geq g(x)$ dir.

İspat: $x \in [1,2]$için

$$h(x,t) = \begin{cases} (x-2).(t-1), & 1 \leq t < x \leq 2 \\ (t-2).(x-1), & 1 \leq x < t \leq 2 \end{cases}$$

olmak üzere

$$f(x) = \int_{t=1}^{2} h(x,t) f''(t) dt$$

alınabilir.

$[1,2]$ aralığındaki x ve t ler için $h(x,t)$ negatiftir. Böylece $[1,2]$aralığında $f(x) \geq g(x)$ tir. Çünkü $[1,2]$ aralığında $f(x)$' inde negatif olduğu açıktır.

Genelliği bozmaksızın $f(x) \equiv 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in [1,2]$ için $g(x) \leq 0$ ve $g(1) = g(2) = 0$ olur.

Ortalama Değer Teoreminden $g'(x_0) = 0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in [0,1]$ noktası vardır. Ayrıca $x \geq 2$ için$g'(x) \geq 0$ ve $f'(x) = 0$ dır. O halde $[0,1]$ aralığında $g'(x) < 0$ olup g azalan ve $[2, \infty]$ aralığında $g'(x) > 0$ olup g artandır. Böylece sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.2:[5] $0 < r < q < 1$ olmak üzere$0 < x \leq 1$ veya $x \geq 2$ için

$\Gamma_r(x) \leq \Gamma_q(x) \leq \Gamma(x)$,

ve $1 \leq x \leq 2$ için

$$\Gamma(x) \leq \Gamma_q(x) \leq \Gamma_r(x)$$

dir.

İspat:

Daha önce

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \Gamma_q(x) = (\log q)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{x+n}}{(1-q^{x+n})^2} > 0$$

olduğu gösterilmişti. Şimdi

$$h(r) = \frac{(\log r)^2 . r^a}{(1-r^a)^2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$h'(r) = \frac{\left[\frac{2\log r}{r} r^a + ar^{a-1}(\log r)^2\right](1-r^a)^2 + (\log r)^2 r^a 2(1-r^a)ar^{a-1}}{(1-r^a)^4}$$

$$= \frac{[(2\log r)r^{a-1} + ar^{a-1}(\log r)^2](1-r^a)^2 + (\log r)^2 r^a 2(1-r^a).ar^{a-1}}{(1-r^a)^4}$$

$$= \frac{(\log r)r^{a-1}(2 + a\log r)(1-r^a)^2 + (\log r)^2 r^a 2(1-r^a)ar^{a-1}}{(1-r^a)^4}$$

$$= \frac{(\log r) r^{a-1}(1-r^a)\,[(2+a\log r)(1-r^a)+(\log r)\, r^a 2a]}{(1-r^a)^4}$$

$$= \frac{(\log r) r^{a-1} a \left[(\frac{2}{a}+\log r)(1-r^a)+2\,(\log r) r^a\right]}{(1-r^a)^3}$$

$$= \frac{a r^{a-1}(\log r)(1+r^a)\left[(\frac{2}{a}+\log r)(1-r^a)+2\,(\log r) r^a\right]}{(1-r^a)^3(1+r^a)}$$

$$= \frac{a r^{a-1}\,(\log r)(1+r^a)}{(1-r^a)^3}\left[\frac{(\frac{2}{a}+\log r)(1-r^a)+2\,(\log r) r^a}{(1+r^a)}\right]$$

$$= \frac{a r^{a-1}\,(\log r)(1+r^a)}{(1-r^a)^3}\left[\frac{\frac{2}{a}\cdot(1-r^a)+\log r.\,(1-r^a)+2\,(\log r) r^a}{(1+r^a)}\right]$$

$$= \frac{a r^{a-1}\,(\log r)(1+r^a)}{(1-r^a)^3}\left[\frac{2(1-r^a)+a\log r(1-r^a)+2ar^a(\log r)}{a(1+r^a)}\right]$$

$$= \frac{a r^{a-1}(\log r)(1+r^a)}{(1-r^a)^3}\left[\frac{2(1-r^a)+a\log r-ar^a\log r+2ar^a(\log r)}{a(1+r^a)}\right]$$

$$= \frac{a r^{a-1}(\log r)(1+r^a)}{(1-r^a)^3}\left[\frac{2(1-r^a)+a\log r+ar^a\,(\log r)}{a(1+r^a)}\right]$$

$$= \frac{a r^{a-1}(\log r)(1+r^a)}{(1-r^a)^3}\left[\frac{2(1-r^a)+a\log r\,(1+r^a)}{a(1+r^a)}\right]$$

$$= \frac{a r^{a-1}\,(\log r)(1+r^a)}{(1-r^a)^3}\left[\frac{2(1-r^a)}{a(1+r^a)}+\log r\right]$$

olur.

Burada

$$\frac{a r^{a-1}\,(\log r)(1+r^a)}{(1-r^a)^3}$$

ifadesi $0 < r < 1$ için her zaman pozitiftir. Bu nedenle köşeli parantezin içindeki ifadeyi bir $g(r)$ fonksiyonu olarak düşünüp türevine bakalım. Bu durumda

$$g(r) = \frac{2(1-r^a)}{a(1+r^a)} + \log r$$

olmak üzere

$$g(r) = \frac{2 - 2r^a}{a + ar^a} + \log r$$

ve

$$\begin{aligned}
g'(r) &= \frac{(-2ar^{a-1})(a + ar^a) - (2 - 2r^a)(a^2 r^{a-1})}{(a + ar^a)^2} + \frac{1}{r} \\
&= \frac{-2a^2 r^{a-1}[(1 + r^a) + (1 - r^a)]}{(a + ar^a)^2} + \frac{1}{r} \\
&= \frac{-2a^2 r^{a-1}.2}{a^2(1 + r^a)^2} + \frac{1}{r} \\
&= \frac{-4a^2 r^{a-1}}{a^2(1 + r^a)^2} + \frac{1}{r} \\
&= \frac{-4r^{a-1}}{(1 + r^a)^2} + \frac{1}{r} \\
&= \frac{-4r^a + (1 + r^a)^2}{r(1 + r^a)^2} \\
&= \frac{1 - 2r^a + r^{2a}}{r(1 + r^a)^2} \\
&= \frac{(1 - r^a)^2}{r(1 + r^a)^2} \geq 0 \qquad (0 < r < 1)
\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece $g(r)$ artan fonksiyon olduğundan en büyük değeri $g(1) = 0$ dır. O halde $0 < r \leq 1$ için $g(r) \leq 0$ dır ve $0 < q < 1$ için $\frac{d^2}{dx^2} \log \Gamma_q(x)$ artandır.Bu ise

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \Gamma_r(x) \leq \frac{d^2}{dx^2} \log \Gamma_q(x) \;, \quad 0 < r < q < 1 \,, x > 0$$

demektir. Ayrıca

$$\log \Gamma_q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - q^n) + \log(1 - q)^{1-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \log(1 - q^{x+n})$$

için $\Gamma_q(1) = 1$, $\log \Gamma_q(1) = 0 \,, \log \Gamma_r(1) = 0$ dır.

$$\Gamma_q(2) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^2;q)_\infty}(1-q)^{-1} = \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)\ldots}{(1-q)(1-q^2)\ldots} = 1$$

olup $\log \Gamma_q(2) = \log \Gamma_r(2) = 0$ yazılabilir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3: [2]

$$\lim_{q\to 1^-} \Gamma_q(x) = \Gamma(x)$$

dir.

İspat:

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty.(1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty}\ , |q| < 1$$

şeklinde verilen $\Gamma_q(x)$ fonksiyonunu

$$\Gamma_q(x) = \left(\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{n+1}}{(1-q^{n+x}}\right).(1-q)^{1-x}$$

şeklinde de gösterebiliriz. Buradan hareketle;

$$\Gamma_q(x+1) = \left(\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{n+1}}{(1-q^{n+x+1}}\right)(1-q)^{-x}$$

yazılabilir. Buradan

$$\Gamma_q(x+1) = \left(\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{n+1}}{(1-q^{n+x+1}}\right)(1-q)^{-x}$$

$$= \left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)}{(1-q^{n+x})})(1-q)^{-x}\right)$$

$$= (1-q)^{-x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)}{(1-q^{n+x})}$$

$$= (1-q)^{-x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n).(1-q^{n+1})^x}{(1-q^{n+x}).(1-q^{n+1})^x}$$

$$= (1-q)^{-x}\frac{(1-q)(1-q^2)^x}{(1-q^{x+1})(1-q^2)^x}\cdot\frac{(1-q^2)(1-q^3)^x}{(1-q^{x+2})(1-q^3)^x}\cdots$$

$$= (1-q)^{-x}\frac{(1-q)(1-q^2)^x(1-q^2)^{-x}}{(1-q^{x+1})}\cdot\frac{(1-q^2)(1-q^3)^x.(1-q^3)^{-x}}{(1-q^{x+2})}\cdots$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n).(1-q^{n+1})^x}{(1-q^{x+n})(1-q^n)^x}$$

elde edilir.Burada $q \to 1^-$ yaklaşımı yapılırsa;

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{(1-q^n)}{(1-q^{x+n})} = \frac{n}{n+x}$$

$$\lim_{q\to 1^-}\frac{(1-q^{n+1})^x}{(1-q^n)^x} = \lim_{q\to 1^-}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x$$

limitleri mevcut olduğundan limit çarpım üzerine dağılabilir. Böylece;

$$\lim_{q\to 1^-}\Gamma_q(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = \Gamma(x+1)$$

bulunur. Gerçekten klasik anlamda bildiğimiz;

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)}{(1+\frac{1}{n})^x}$$

eşitliğinden yararlanarak [3];

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^x}{\left(\frac{n+x}{n}\right)} = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x.\frac{n}{n+x}$$

$$x\Gamma(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x.\frac{n}{n+x}$$

$$\Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^x.\frac{n}{n+x}$$

elde edilebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.4:[4] $0 < q < 1\,, a \geq 1$ ve $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$\frac{1}{\Gamma_q(1+a)} \leq \frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)} \leq 1$$

dir.

İspat:

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty.(1-q)^{1-x}}{(q^x;q)_\infty},$$

$$\Gamma_q(1+x) = \frac{(q;q)_\infty.(1-q)^{-x}}{(q^{1+x};q)_\infty},$$

$$\Gamma_q(1+ax) = \frac{(q;q)_\infty.(1-q)^{-ax}}{(q^{1+ax};q)_\infty},$$

olup buradan

$$\log \Gamma_q(1+x) = \log \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)\dots}{(1-q^{x+1})(1-q^{x+2})\dots(1-q^{x+n+1})\dots}(1-q)^{-x}$$

$$= \log[(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)\dots(1-q)^{-x}]$$
$$- \log[(1-q^{x+1})(1-q^{x+2})\dots(1-q^{x+n+1})\dots]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \log(1-q^n) + \log(1-q)^{-x} - \sum_{n=0}^{\infty} \log(1-q^{x+n+1})$$

yazılabilir. Buradan türev alınırsa

$$\frac{d}{dx}\log \Gamma_q(1+x) = 0 - \log(1-q) - \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \log(1-q^{x+n+1})$$

$$= -\log(1-q) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{x+n+1}} \cdot \frac{d}{dx}(1-q^{x+n+1})$$

$$= -\log(1-q) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-q^{x+n+1}} \cdot (-q^{x+n+1}\log q)$$

$$= -\log(1-q) + \log q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{x+n+1}}{1-q^{x+n+1}}$$

olur.

Benzer şekilde;

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma_q(1+ax) = -\log(1-q) + \log q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{1+ax+n}}{1-q^{1+ax+n}}$$

olur. $x \leq 0, a \geq 1, \log q < 0$ ve

$$\frac{q^{1+ax+n}}{1-q^{1+ax+n}} - \frac{q^{1+x+n}}{1-q^{1+x+n}} = \frac{q^{1+ax+n}-q^{1+x+n}}{(1-q^{1+ax+n})(1-q^{1+x+n})} \leq 0$$

olup buradan

$$\frac{d}{dx}\log\Gamma_q(1+ax) \geq a\frac{d}{dx}\log\Gamma_q(1+x) \tag{3.4.1}$$

yazılabilir.

$a \geq 1, x \geq 0$ olmak üzere

$$g(x) = \log\frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)}$$

fonksiyonu için

$$g(x) = a\log\Gamma_q(1+x) - \log\Gamma_q(1+ax)$$

ve

$$g'(x) = a\frac{d}{dx}\log\Gamma_q(1+x) - \frac{d}{dx}\log\Gamma_q(1+ax)$$

olur.

(3.4.1) eşitliğinden $g'(x) \leq 0$ bulunur ve bu da $g(x)$ in azalan olduğunu gösterir.

$$f(x) = \log\frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)}\ , a \geq 1$$

fonksiyonu da $x \geq 0$ için azalandır.

Sonuç olarak $x \in [0;1]$ ve $a \geq 1$ için

$$\frac{\Gamma_q(2)^a}{\Gamma_q(1+a)} \leq \frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)} \leq \frac{\Gamma_q(1)^a}{\Gamma_q(1)}$$

olup

$$\frac{1}{\Gamma_q(1+a)} \leq \frac{\Gamma_q(1+x)^a}{\Gamma_q(1+ax)} \leq 1$$

elde edilir. Bu da teoremi ispatlar.

Bu teoremde $q \to 1^-$ yaklaşımı yapılırsa

$$\frac{1}{\Gamma(1+a)} \leq \frac{\Gamma(1+x)^a}{\Gamma(1+ax)} \leq 1$$

elde edilir. a yerine n yazılırsa

$$\frac{1}{\Gamma(1+n)} \leq \frac{\Gamma(1+x)^n}{\Gamma(1+nx)} \leq 1$$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{\Gamma(1+x)^n}{\Gamma(1+nx)} \leq 1$$

elde edilir.

Şimdi bir f fonksiyonunun q-integralinin hangi koşullar altında mevcut olduğunu araştıralım.

f fonksiyonunun sınırlı aralıktaki q-integralinin

$$\int_0^a f(x)d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n - q^{n+1}) = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n)$$

olduğunu biliyoruz. Buradaki serinin yakınsak olması için $x = 0$ ın sağ komşuluğunda $c > 0, \alpha > -1$ için,

$$|f(x)| < cx^\alpha$$

olmalıdır. Gerçekten

$$|f(x)| < cx^\alpha$$

$$|f(x)| < (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} c(aq^n)^\alpha(\,aq^n)$$

İfadesinde $a_n = (1-q)c(aq^n)^\alpha (aq^n)$ deyip ve bu seriye D'alembert oran testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1-q)c(aq^{n+1})^\alpha (aq^{n+1})}{(1-q)c(aq^n)^\alpha (aq^n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} q^{\alpha+1} = 0 < 1$$

bulunur. $\alpha > -1$ verildiğinden $\alpha + 1 > 0$, $0 < q < 1$ için $q^{\alpha+1} < 1$ olup

$\sum a_n$serisi yakınsaktır.

f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q-integralinin $A > 0$ için

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

olduğunu biliyoruz.

Bu serinin yakınsak olması için

$$\forall x \in [0,\varepsilon), c > 0, \alpha > -1, \varepsilon > 0$$

iken

$$|f(x)| < cx^\alpha$$

ve

$$D > 0, \beta < -1, N > 0, \forall x \in [N,\infty)$$

iken

$$|f(x)| < Dx^\beta$$

olması yeterlidir. Gerçekten f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q-integralinin tanımı $A > 0$ için

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

$$= (1-q)\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right)\right]$$

$$\leq (1-q)\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{q^n}{A}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\beta}\left(\frac{q^n}{A}\right)\right]$$

şeklinde yazılırsa $\forall x \in [0,\varepsilon)$ için $|f(x)| < cx^{\alpha}$ ve $\forall x \in [0,\infty)$ için

$|f(x)| < Dx^{\beta}$yı uygulayalım. Buna göre

$$a_n = (1-q)c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

deyip D'alembert oran testini uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1-q)c\left(\frac{q^{n+1}}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{q^{n+1}}{A}\right)}{(1-q)c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{q^n}{A}\right)} = \frac{q^{n(\alpha-1)}q^{\alpha+1}}{A^{\alpha-1}} = 0 < 1$$

$\alpha > -1, 0 < q < 1$ için $\alpha + 1 > 0$ ve $q^{\alpha+1} < 1$ olacağından $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

Aynı şekilde $D > 0, \beta < -1, N > 0, \forall x \in [N,\infty)$ şartları için

$$b_n = (1-q)c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\beta}\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

Yazılıp oran testi uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-q)c\left(\frac{q^{n+1}}{A}\right)^{\beta}\left(\frac{q^{n+1}}{A}\right)}{(1-q)c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\beta}\left(\frac{q^n}{A}\right)} = \frac{q^{n(\beta-1)}q^{\beta+1}}{A^{\beta-1}} = 0 < 1$$

bulunur. $\beta < -1$ için $\beta - 1 < 0$ ve $q^{\beta-1} < 1$ olduğundan $\sum b_n$serisi yakınsaktır. Buna göre $\sum a_n + \sum b_n$toplamı da yakınsaktır.

$\Gamma_q(t)$ fonksiyonunun bir başka gösterim şekli de

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\infty/1-q} x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx$$

dir [9]. Bu gösterimde $\infty/1-q$ yerine ∞ alınırsa ıraksak bir seri elde edilir. Yani f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q-integralini

$$\int_0^\infty f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n)q^n$$

biçiminde alınırsa yukarıdaki seri ıraksak çıkar. Gerçekten;

$f(x)=x^{t-1}E_q^{-qx}$ fonksiyonunu alırsak

$$\int_0^\infty f(x)d_qx=\int_0^\infty x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(t-1)}E_q^{-q^{n+1}}q^n$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt}\,E_q^{-q^{n+1}}$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt}\,(1-(1-q)q^{n+1})_q^\infty$$

olur. Burada toplamın içindeki ifade için

$$a_{n=}q^{nt}(1-(1-q)q^{n+1})_q^\infty$$

dersek ve D'alembert oran testi uygulanırsa serinin yakınsaklığına karar verilemez. Bu nedenle Raabe testinden pozitif terimli bir $\sum a_k$ serisi için

$$\lim_{k\to\infty} k.\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)=s$$

olmak üzere

i. $s<-1$ iken $\sum a_k<\infty$
ii. $s>-1$ iken $\sum a_k$ serisi ıraksaktır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}\,(1-(1-q)q^{n+1})_q^\infty$$

pozitif terimli serisine Raabe testini uygularsak,

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{(q^{(n+1)t}(1-(1-q)q^{n+2})_q^\infty}{q^{nt}(1-(1-q)q^{n+1})_q^\infty}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{q^t}{(1-(1-q)q^{n+1})_q^\infty} - 1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n.(q^t - 1)$$
$$= \infty$$

bulunur. Bu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}\,(1-(1-q)q^{n+1})_q^\infty$$

serisinin ıraksak olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt}\,(1-(1-q)q^{n+1})_q^\infty$$

serisi de ıraksaktır.

Yani sınırsız aralıkta q-integralinin

$$\int_0^\infty f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n)q^n$$

şeklinde tanımlanması uygun olmaz [9].

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fizik, İstatistik ve Mühendislikte q-Analizinin birçok kullanım alanı vardır. "q" ifadesi zaten "Quantum" kavramından gelmektedir. Kesikli olaylar genellikle fark denklemleri veya q-Analizi metodları yardımıyla incelenebilmektedir.

Bu tezde q-Analizinin temel kavramları, bazı özellikleri ve bunlarla ilgili teoremler incelenmiştir. Daha sonra q-Türev, q-İntegral ve Gamma-Beta fonksiyonlarının q-Analogları verilmiştir. Bu tez, ileri aşamada bazı problemlerin q-Analoglarını elde edebilmek için bir hazırlık niteliğindedir.

Kompleks kısmi türevli denklemlerde en basit sınır-değer problemi

$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde

$$w_{\bar{z}} = 0\,, z \in D$$
$$w\Big|_{\partial D} = \gamma(z), \gamma \in C(D, \mathbb{C}) \tag{4.1}$$

olarak verilmektedir. Bu Dirichlet probleminin çözümü $|z| < 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{z d\bar{\zeta}}{1 - \bar{z}\zeta} = 0 \tag{4.2}$$

koşulu altında

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{4.3}$$

şeklindedir. Benzer şekilde diğer bir sınır-değer problemi

$$w_{\bar{z}} = 0\,.\, z \in D$$
$$Rew\Big|_{\partial D}\ \gamma(z),\ Imw(0) = c\ ; \gamma \in C(D, \mathbb{R}) \tag{4.4}$$

Schwarz sınır-değer problemidir. Bu problemin çözümü ise koşulsuz olarak

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{(\zeta + z)}{(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic \tag{4.5}$$

olarak verilir. Bunlar için [8] kaynağına bakılabilir. Buradan da görüldüğü gibi problemlerin çözümleri Cauchy tipi kompleks integraller yardımıyla verilmektedir. Kompleks integraller reel eğrisel integrallere dönüştürülerek hesaplanır. Ayrıca reel eğrisel integraller de bir $[a, b]$ aralığında Riemann integraline dönüştürülüp çözülür. Riemann integrallerinin de q-Analoğu mevcut olduğuna göre kompleks eğrisel integrallerin de q-Analoğunun tanımlanabileceği mantıklı görülmektedir. Eğer kompleks eğrisel integrallerin q-Analoğu elde edilebilirse (4.2), (4.3), (4.5) eğrisel integrallerin q-Analogları yazılabilir. Böylece (4.1) ve (4.4) problemleri q-Analizinde incelenmiş olur. Bu durum ileri bir araştırma konusu olarak düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Andrews, G. E., Askey,R., Roy, R.,Special Functions, volume 71 of Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] Andrews, G. E., q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics Pyhsics, and Computer Algebra, p. 109, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[3] Andrews, L.C., Special Functions of Mathematics for Engineers, Oxford University Press, Oxford Tokyo, Melbourne,1998.

[4] Kim, T., Adiga, C., "*On the q-Analogue of Gamma Functions and Related Inequalities", Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* vol. 6, issue 4, 2005.

[5] Askey, R., "*The q-Gamma and q-Beta Functions", Applicable Analysis,* vol. 8, p. 125-141, Gordon and Breach Science Publishers Ltd., Great Britain, 1978.

[6] Şekeroğlu,B., Biortogonal Polinomların Bazı Özellikleri,Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi,Ankara, 2006.

[7] Özarslan, M.,A., Katlı Ortogonal Fonksiyonların Bazı Özellikleri,Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi,Ankara, 2005.

[8] H.Begehr, "Boundry Value Problems in Complex Analysis, I,II,.., Asoc. Math. Venezolana,12, 65-85, 217-250, (2005).

[9] De Sole, A., Kac, V., G. Department of Mathematics, MIT 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139, USA,2003.