KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUATERNİYON MATRİSLERİ

Demet GÜNEŞ ÇELEN

HAZİRAN 2011

Matematik Anabilim Dalı Demet GÜNEŞ ÇELEN tarafından hazırlanan KUATERNİYON MATRİSLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN	________________
Üye (Danışman)	:Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN	________________
Üye	:Yrd. Doç Dr.Mehmet YILDIRIM	________________

22/06/2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KUATERNİYON MATRİSLERİ

GÜNEŞ ÇELEN , Demet
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Haziran 2011, 45 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde, bir sonraki bölüm için kullanılacak materyal ve yöntem ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde kuaterniyon matrisler, kuaterniyon matrislerin eki, rankı, benzerlikleri, özdeğerleri ve determinantı incelenmiştir.

Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır

Anahtar kelimeler: Kuaterniyonlar, Kuaterniyon Matrisleri

ABSTRACT

MATRİCES OF QUATERNİONS

GÜNEŞ ÇELEN , Demet
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

June 2011, 45 Pages

This thesis consist of four chapter. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, we give basic concepts that we use in the following chapter.

In the third chapter, quaternion matrices,their adjoint, rank, similarity, eigenvalues and determinant are investigated.

The fourth chapter is reserved for discussion and conclusion.

Key words: Quaternions, Matrices of Quaternions

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren Hocam Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN'a, çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen Sayın Arş .Görv. Dr.Osman KEÇİLİOĞLU'na ve son olarak tezimi hazırlamamda büyük fedakalıklarla bana destek olan annem Yasemin GÜNEŞ'e ve eşim Bayram ÇELEN'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Q}$ Reel Kuaterniyonlar cümlesi

$\mathbb{Q}$ Kuaterniyon Cebiri

χ_{A} A kuaterniyon matrisinin adjointi

$\sigma_{l}(A)$ A nın sol spektrumu

$\sigma_{r}(A)$ A nın sağ spektrumu

$F_{A}(\lambda)$ A nın karakteristik polinomu

$|A|_{d}$ A matrisinin double determinantı

1.GİRİŞ

Kuaterniyonlar 1843 yıllarında William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından tanımlanmıştır. Hamilton kuaterniyonları tanımlamakla iki vektör için, bölümün de mümkün olabileceği, yeni bir çarpım işlemini vektör cebirine dahil etmiş oldu. Böylece üç boyutlu uzayda hareketlerin tetkikini kolaylaştırmış oldu.

Kuaterniyonlar hareket geometrisinde ve fizikte önemli rolü olan konulardan birisidir. Hiperkompleks sayılarla kuaterniyonların ilişkisi dikkate alındığında kompleks bileşenli matrislerden faydalanılarak kuaterniyon bileşenli matrisler ele alınmış ve bazı özellikleri incelenmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için H.H.Hacısalihoğlu'nun "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi" kitabı ile J.P. WARD' ın "Quaternions and Cayley Numbers" kitabından faydalanılmıştır.

Fuzhen ZHANG tarafından yayımlanan "Quaternions and Matrices of Quaternions" isimli makale tez çalışmamızdaki "Kuaterniyon matrisleri" konusu için temel olmuştur.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışması ile kuaterniyon matrisleri ayrıntılı olarak incelenecektir.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde Kuaterniyon Matrislerinin çalışılabilmesi için gerekli olan kavramlar sunulacaktır.

2.1. Reel Kuaterniyonlar Cebiri

Tanım 2.1.1. (Reel Kuaterniyon)

Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının +1, i, j, k gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada, birinci birim +1 reel sayıdır, diğer üç birim ise

(i) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

(ii) $i \wedge j = k,\ j \wedge k = i,\ k \wedge i = j$

(iii) $j \wedge i = -k,\ k \wedge j = -i, i \wedge k = -j$

özelliklerine sahiptir. Böylece bir kuaterniyon

(iv) $q = d + ai + bj + ck$

biçiminde ifade edilebilir, burada d, a, b, c $\in \mathbb{R}$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. i, j, k birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilirler ve dolayısıyla q kuaterniyonu S_q ile gösterilen **skalar kısım** ve $\overrightarrow{V_q}$ ile gösterilen **vektörel kısım** olmak üzere iki kısma ayrılabilir:

(v) $S_q = d$, $\overrightarrow{V_q} = ai + bj + ck$

O halde

(vi) $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$

yazılabilir.

Reel kuaterniyonlar cümlesini $\mathbb{Q}$ ile gösterelim. Bir reel kuaterniyonun dört biriminin özelliklerini inceleyerek görebiliriz ki $\mathbb{Q}$ cümlesinden, birer özel hal olarak, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}^3$ üç boyutlu vektörler cümlesi elde edilebilir.

Tanım 2.1.2 (Kuaterniyon cebiri)

Toplama İşlemi:

$\oplus : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$(q_1, q_2) \to q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2}$$

işlemi

$S_{q_1+q_2} = S_{q_1} + S_{q_2}$ ve $\vec{V}_{q_1 \oplus q_2} = \overrightarrow{V_{q_1}} \oplus \overrightarrow{V_{q_2}}$

olarak tanımlanır. Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ ve + işlemi $\mathbb{R}$ deki toplama işlemidir; $\overrightarrow{V_{q_1}}, \overrightarrow{V_{q_2}}$ de birer reel vektör olup $\oplus$ işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde ($\mathbb{Q}$**,** +) ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman **sıfır kuaterniyon** adını alır ve (0, 0, 0, 0) sıralı dörtlüsünden başka bir şey değildir.

Skalar ile çarpma:

$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$(\lambda, q) \to \lambda \odot q = \lambda_q = \lambda S_q + \lambda\overrightarrow{V_q}$$

şeklinde tanımlanan dış işlem için

(i) $\lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2$, her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$;

(ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$, her $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve her $q \in \mathbb{Q}$;

(iii) $(\lambda_1 . \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$;

(iv)$1 \odot q = q$.

O halde $\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot\}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzayı $\mathbb{Q}$ ile göstereceğiz ve $\mathbb{Q}$ daki toplama $\oplus$ işlemini "+" ile ve $\odot$ işleminide "**.**" ile göstereceğiz.

Çarpma (Kuaterniyon çarpımı)

$\times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$(q_1, q_2) \to q_1 \times q_2$

işlemi aşağıdaki tablo ile tanımlanır:

$\times$	$+1$	i	j	k
$+1$	$+1$	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Buna göre

$$q_1 \times q_2 = (d_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k) \times (d_2 + a_2 i + b_2 j + c_2 k)$$

$$\begin{aligned} q_1 \times q_2 = {} & d_1 d_2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) \\ & + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) i \\ & + (d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 d_2 - a_1 c_2) j \\ & + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2) k \end{aligned}$$

dır. Böylece kuaterniyon çarpımının şu özelliklere sahip olduğu kolayca görülür:

i) İki kuaterniyonun çarpımı bir kuaterniyondur.

ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle

$$\{\mathbb{Q}, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot, \times\}$$

sistemi bir asosyatif (birleşimli) cebirdir. × işlemini de "." ile gösterilecektir. Bu cebire **kuaterniyon cebiri** denir ve kısaca $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{1, i, j, k\}$ ve boyutu 4 dür.

Bu özelliklerle birlikte $q = d + ai + bj + ck \in \mathbb{Q}$ için ;

(i) $\text{Re}q = d$, q nun **reel kısmı**

(ii) $\text{Co}q = d + ai$, q nun **kompleks kısmı**

(iii) $\text{Im}q = ai + bj + ck$, q nun **imajiner(sanal) kısmı**

(iv) $\bar{q} = q^* = d - ai - bj - ck$, q nun **eşleniği**

(v) $|q| = \sqrt{q^*q} = \sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}$, q nun **normu(modülü)**

dır.

Tanım 2.1.3 (Birim kuaterniyon ve Normlama)

Normu bir olan bir kuaterniyona **birim kuaterniyon** denir ve q_0 ile gösterilir. Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir $q = d + ai + bj + ck$ kuaterniyonun normlandırılmışı

$$q_0 = \frac{q}{|q|} = \frac{d + ai + bj + ck}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}}$$

olarak ifade edilir.

Bu tanımlarla birlikte aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.1

q_1, q_2 ve q_3 kuaterniyonlar olmak üzere ;

1. $q_1^* q_1 = q_1 q_1^*$, $|q_1| = |q_1^*|$

2. $|.|$ $\mathbb{Q}$ üzerinde bir normdur. Yani;

   $|q_1| = 0 \Leftrightarrow q_1 = 0$;

   $|q_1 + q_2| \leq |q_1| + |q_2|$;

   $|q_1 q_2| = |q_2 q_1| = |q_1|.|q_2|$;

dır.

3. $|q_1|^2 + |q_2|^2 = \frac{1}{2}(|q_1 + q_2|^2 + |q_1 - q_2|^2)$

4. $q_1 = |q_1|.u$ dur. Burada u bir birim kuaterniyondur.

5. $jc = \bar{c}j$ veya $jcj^* = \bar{c}$ dir. Burada c herhangi bir kompleks sayıdır.

6. $q_1 = d_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k$ olmak üzere

$$q_1^* i q_1 = (d_1^2 + a_1^2 - b_1^2 - c_1^2) + 2(-d_1 c_1 + a_1 b_1)j + 2(d_1 b_1 + a_1 c_1)k$$

dır.

7. $q_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_1^*) + \frac{1}{2}(q_1 + i q_1^* i) + \frac{1}{2}(q_1 + j q_1^* j) + \frac{1}{2}(q_1 + k q_1^* k)$

ve

$$q_1^* = -\frac{1}{2}(q_1 + i q_1 i + j q_1 j + k q_1 k)$$

dır.

8. $q_1^2 = |Re q_1|^2 - |\mathrm{Im} q_1|^2 + 2\mathrm{Re} q_1 . \mathrm{Im} q_1$

9. $(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$

10. $(q_1 q_2)\, q_3 = q_1 (q_2 q_3)$

11. $(q_1 + q_2)^2 \neq q_1^2 + 2 q_1 q_2 + q_2^2$ (genellikle)

12. $q_1^* = q_1$ olması için gerek yeter şart q_1 in bir reel sayı olmasıdır.

13. Her $q_1 \in \mathbb{Q}$ için $\lambda q_1 = q_1 \lambda$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

14. $q_1 \neq 0$ için q_1 kuaterniyonunun inversi q_1^{-1} ile gösterilir ve $q_1^{-1} = q_1^{*}/\,|q_1|^2$ şeklinde tanımlanır ve $|q_1^{-1}|=\frac{1}{|q_1|}$ dir.

15. $q_1^{\,2} = -1$ denklemi sonsuz tane çözüme sahiptir.

16. q_1 ve q_1^*, $t^2 - 2(Req_1)t + |q_1|^2$ denkleminin çözümleridir.

17. Her q kuaterniyonu c_1 ve c_2 nin kompleks olduğu yerlerde

$$q = c_1 + c_2 j$$

gibi tek şekilde yazılabilir.

Tanım 2.1.4. (Benzer kuaterniyon)

q_1 ve q_2 kuaterniyonları için $u^{-1}q_1u = q_2$ olacak şekilde eğer sıfırdan farklı bir u kuaterniyonu varsa q_1 ve q_2 kuaterniyonlarına **benzer kuaterniyonlar** denir ve $q_1 \sim q_2$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.1.1

q_1 ve q_2 birer kuaterniyon olmak üzere

(i) $q_1 \sim q_2 \Leftrightarrow v^{-1}q_1v = q_2$ olacak şekilde $|v| = 1$ vardır.

(ii) $q_1 \sim q_2 \Rightarrow |q_1| = |q_2|$

dir.

İspat :

(i) $q_1 \sim q_2$ olsun. Bu durumda $q_2 = u^{-1}q_1u$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir u kuaterniyonu vardır.

v , u kuaterniyonunun normlandırılmışı, yani

$$v = \frac{u}{|u|}$$

olsun . Bu durumda

$$u = |u|.v$$

dır. Ayrıca

$$u^{-1} = \frac{u^*}{|u|^2}$$

$$= \frac{(|u|.v)^*}{||u|.v|^2}$$

$$= \frac{|u|.v^*}{|u|^2|v|^2}$$

$$= \frac{1}{|u|}.\frac{v^*}{|v|^2}$$

$$= \frac{1}{|u|}.v^{-1}$$

dır.

$$q_2 = u^{-1}q_1u$$

$$= \frac{1}{|u|}.v^{-1}.q_1.(|u|.v)$$

$$= \frac{1}{|u|}.|u|.v^{-1}.q_1.v$$

$$= v^{-1}q_1v$$

elde edilir ve $|v|$=1 dir. Bu ise göstermek istediğimizdir.

(ii) $q_1 \sim q_2$ ise $q_2 = u^{-1}q_1u$ dir.

Teorem 2.1.1 den yola çıkarsak ,

$$|q_2| = |u^{-1}q_1u|$$

$$= |u|.|u^{-1}.q_1|$$

$$= |u|.|u^{-1}|.|q_1|$$

$$= |q_1|$$

dir.

2.2 Kuaterniyonlarda Denklik Bağıntısı

Kuaterniyonlar üzerinde tanımlanan benzer olma bağıntısı ($\sim$) bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre $q_1 \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonunun denklik sınıfı $[q_1]$ ile gösterilir ve $[q_1] = \{q_2 \mid q_2 = u^{-1}q_1u \ni \exists u \neq 0\}$ dır.

Lemma 2.2.1

Bir için $q = d + ai + bj + ck$ için $q \sim d + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}i$ benzerdir. Yani

$$q \in \left[d + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}i\right]$$

dir.

İspat :

$p \sim q$ ise

$$p = u^{-1}qu \qquad (2.1.1)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir u kuaterniyonu vardır. (2.1.1) eşitliğinin her iki tarafı soldan u ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} up &= u(u^{-1}qu) \\ &= qu \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Buna göre $p \sim q$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$up = qu$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir u kuaterniyonunun var olmasıdır. Buna göre;

$$qx = x(d + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}i\ ) \qquad (2.1.2)$$

denklemini göz önüne alalım. $b^2 + c^2 \neq 0$ için $x = (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + a) - cj + bk$ kuaterniyonu sıfırdan farklıdır ve (2.1.2) denkleminin bir çözümüdür. Yani;

$$q \sim d + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}i$$

dir. Eğer $b^2 + c^2$=0 ise q komplekstir. Bu durum için Teorem 2.1.1 in 5. kısmı kullanıldığında $q\sim$ d + $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}i$ olduğu kolayca görülür. Bu da ispatı tamamlar.

$q \in \mathbb{R}$ için $[q]$=$\{q\}$ dir. Eğer $q \notin \mathbb{R}$ ise $[q]$ sonsuz çoklukta kuaterniyon içerir ve bu denklik sınıfında sadece 2 tane kompleks sayı vardır ki bunlarda birbirinin eşleniğidir. Ayrıca $q \in \mathbb{Q}$ için $q \sim q^*$ dır.

Teorem 2.2.1

$q_1 = d_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k$ ve $q_2 = d_2 + a_2 i + b_2 j + c_2 k$ birer kuaterniyon olsun.

Bu durumda q_1 ve q_2 nin benzer olması için gerek ve yeter koşul

$d_1 = d_2$ ve ${a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2 = {a_2}^2 + {b_2}^2 + {c_2}^2$

olmasıdır. Yani;

$\mathrm{Re}q_1 = \mathrm{Re}q_2$ ve $|\mathrm{Im}q_1| = |\mathrm{Im}q_2|$

dır.

2.3. Kuaterniyonların Matris Gösterimi

$$\mathbb{Q}_1 = \{d_1.1 + a_1.i \mid d_1, a_1 \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

cümlesini alalım.

$$\{\mathbb{Q}_1, \oplus, \mathbb{R}, +, ., \odot, \times\}$$

Sisteminin de bir cebir olduğu kolayca görülebilir. Böylece $\mathbb{Q}_1$ cebiri $\mathbb{Q}$ cebirinin bir altcebirine izomorf olur. $\forall\ (d_1.1 + a_1.i\ ) \in \mathbb{Q}_1$ kuaterniyonunu $(d_1 + a_1\sqrt{-1}) \in \mathbb{C}$ kompleks sayısına eşlersek bu eşlemeye göre $\mathbb{Q}_1$ in $\mathbb{C}$ ye izomorf olduğunu söyleyebiliriz.

$\mathbb{Q}$ yı $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünebiliriz. Bunun için şu tanımı yapmak gerekir :

$$q \in \mathbb{Q} \text{ ve } x = (d_1 + a_1\sqrt{-1}) \in \mathbb{C} \Rightarrow qx$$

çarpımı $q(d_1.1 + a_1.i) \in \mathbb{Q}$ kuaterniyonuna karşılık gelsin.

O zaman

(i) $(q_1 + q_2)x = q_1x + q_2x$

(ii) $q(x_1 + x_2) = qx_1 + qx_2$

(iii) $q(x_1x_2) = (qx_1)x_2 = (qx_2)\, x_1$

(iv) $q(1 + 0i) = q$

olur. Böylece $\mathbb{Q}$ cümlesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olmuş olur (Burada q nun x ile soldan çarpımı esas alınmıştır, bize lazım olan da budur.) Kompleks sayılar cismi üzerinde herhangi bir q kuaterniyonunun ifadesi e_0 = +1 olmak üzere,

$$q = de_0 + ai + bj + ck$$

veya

$$q = (d + ai)\, e_0 + (b + ci)j \qquad (2.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca (2.1.3) eşitliğinden

$$\alpha_1 = d + ai \text{ ve } \alpha_2 = b + ci \qquad (2.1.4)$$

olacak şekilde

$$q = \alpha_1 + \alpha_2 j$$

şeklinde de yazılabilir. (2.1.4) eşitliklerinden görüldüğü gibi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ dir. Buradan $\mathbb{Q}$ nın $\mathbb{C}$ üzerinde 2-boyutlu olduğu sonucuna varılır. Bu durumda

$$\mathbb{Q} = \mathrm{Sp}\,\{ e_0, j\}$$

olur, yani $\mathbb{Q}$ nın bir bazı $\{ e_0, j\}$ olur.

$\mathbb{Q}$ nın matris gösterimini elde etmek için bir

$$T : \mathbb{Q} \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

$$q \rightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{q}}$$

dönüşümünü, $\forall$ q $\in \mathbb{Q}$ için,

$$\mathrm{T}_{\mathrm{q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$\mathrm{q}' \rightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{q}}(\mathrm{q}') = \mathrm{qq}'$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$\mathrm{T}_{\mathrm{q}}(\mathrm{q}_1{}' + \mathrm{q}_2{}') = \mathrm{T}_{\mathrm{q}}(\mathrm{q}_1{}') + \mathrm{T}_{\mathrm{q}}(\mathrm{q}_2{}')$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{q}}(\mathrm{q}_1{}'x) = x\mathrm{T}_{\mathrm{q}}(\mathrm{q}_1{}'), \ \forall x \in \mathbb{C}$$

olur (zira x $(\mathrm{qq}') = x$ $\mathrm{q}(\mathrm{q}')$ dır). Böylece

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \{\mathrm{T}_{\mathrm{q}} \mid \mathrm{q} \in \mathbb{Q}\}$$

cümlesi $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Böylece T_{q} dönüşümüne $\mathbb{C}$ üzerinde

$$\mathrm{T}_{\mathrm{q}}(\mathrm{e}_0) = x_{11}\mathrm{e}_0 + x_{21}j$$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{q}}(i) = x_{12}\mathrm{e}_0 + x_{22}j$$

formülleriyle tanımlanan bir 2×2 matris karşılık gelir. $q = e_0$ için

$$x_{11} = 1, x_{12} = x_{21} = 0 \text{ ve } x_{22} = 1$$

olacağından $\mathrm{T}_{\mathrm{e}_0}$ dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\mathrm{T}_{e_0} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Benzer şekilde

$$\mathrm{T}_{\mathrm{i}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathrm{T}_{\mathrm{j}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathrm{T}_{\mathrm{k}} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$q = d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

$q = d + ai + bj + ck$ kuaterniyonuna karşılık gelen matris

$$\mathrm{T_q} \leftrightarrow \begin{bmatrix} d + ai & b + ci \\ -b + ci & d - ai \end{bmatrix}$$

dir. (2.1.4) eşitliğinden

$$\mathrm{T_q} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\overline{\alpha_2} & \overline{\alpha_1} \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Böylece q $\leftrightarrow \mathrm{T_q}$ dönüşümü $\mathbb{Q}$ cebirinin, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanan bir 2×2 matris gösterimidir.

3. KUATERNİYON MATRİSLER, KUATERNİYON MATRİSLERİN EKİ, RANKI, BENZERLİKLERİ, ÖZDEĞERLERİ VE DETERMİNANTI

3.1. Kuaterniyon Matrisleri Ve Onların Ekleri

Bileşenleri kuaterniyonlar olan m×n tipinden bütün matrislerin cümlesini $\mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}(\mathbb{Q})$, m=n olduğu zaman da $\mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{Q})$ şeklinde gösterelim. Bunun yanı sıra adi toplama, çarpma, sağ(sol) skaler ile çarpma işlemleri de tanımlansın.

$A = (a_{st}) \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}(\mathbb{Q})$, $q \in \mathbb{Q}$ için

$$qA = (qa_{st}) \ \ [Aq = (a_{st}q)]$$

dir.

$A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}(\mathbb{Q})$, $\mathrm{B}_{n\times r}(\mathbb{Q})$ ve $p,q \in \mathbb{Q}$ için kolayca görülür ki,

$$(qA)B = q(AB)$$

$$(Aq)B = A(qB)$$

$$(pq)A = p(qA)$$

dır.

Ayrıca $\mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}(\mathbb{Q})$, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir **sağ (sol) vektör uzayı** dır.

Kompleks matrislerin tüm işlemleri değişme özelliğini gerçekleştirdiğinden

$$(qA)B = A(qB)$$

şeklinde yazılabilir.

Kompleks matrislerde olduğu gibi $A = (a_{st}) \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}(\mathbb{Q})$ kuatreniyonu için A nın eşleniği, transpozu ve eşlenik transpozu sırasıyla,

$\overline{\mathrm{A}} = (\overline{a_{st}}) = (a_{st}{}^{*})$,

$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ts}) \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}(\mathbb{Q})$,

$\mathrm{A}^{*} = (\overline{\mathrm{A}})^{T} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}(\mathbb{Q})$,

şeklinde tanımlanır.

$A \in M_n(\mathbb{Q})$ karesel matrisi için;

$AA^* = A^*A$ ise A ya **normal matris,**

$A^* = A$ ise A ya **Hermitian matris,**

$A^*A = I$ ise A ya **üniter matris**

denir.

Ayrıca $AB = BA = I$ olacak şekilde en az bir $B \in M_n(\mathbb{Q})$ matrisi varsa, A ya **tersinir matris** denir.

Kompleks matrislerde olduğu gibi, kuaterniyon matrisler için de elemanter satır (sütun) operatörleri ve bu operatörlere karşılık gelen elemanter kuaterniyon matrisler tanımlanabilir. Kolayca gösterilebilir ki, bir A matrisine elemanter satır (sütün) işlemi uygulamak demek bu elemanter operasyona karşılık gelen elemanter kuaterniyon matris ile A matrisini sağdan (soldan) çarpmak demektir.Ve herhangi bir karesel kuaterniyon matris elemanter kuaterniyon matrislerle bir diyoganal matris haline getirilebilir.

Teorem 3.1.1

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{Q})$ ve $B \in M_{n\times p}(\mathbb{Q})$ olsun. Bu durumda

1. $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$
2. $(AB)^* = B^*A^*$
3. $\overline{AB} \neq \overline{B}\,\overline{A}$ (genellikle)
4. $(AB)^T \neq B^T A^T$ (genellikle)
5. Eğer A ve B matrislerinin tersi varsa ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
6. Eğer A matrisinin tersi var ise $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
7. $(\bar{A})^{-1} \neq \overline{A^{-1}}$ (genellikle)
8. $(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$ (genellikle)

dir.

7. ve 8. özellikler için birer örnek verelim;

$A=\begin{pmatrix} i & k \\ 0 & j \end{pmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1}=\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$ dır. Buradan $\overline{A^{-1}}$=$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ bulunur.

Şimdi $\bar{A}$ =$\begin{pmatrix} -i & -k \\ 0 & -j \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulalım. $(\bar{A})^{-1}$=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun.

$\bar{A}.\,(\bar{A})^{-1}$=$\begin{pmatrix} -i & -k \\ 0 & -j \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

=$\begin{pmatrix} -ia-kc & -ib-kd \\ -jc & -jd \end{pmatrix}$

olup $\bar{A}.\,(\bar{A})^{-1}$=I_2 olacağından

$-ia-kc$ =1

$-ib-kd=0$

$-jc$ =0

$-jd=1$

denklem sistemi elde edilebilir. Bu sistem çözüldüğünde

$(\bar{A})^{-1}$=$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$

bulunur. Sonuç olarak

$(\bar{A})^{-1}\neq\overline{A^{-1}}$

dır.

Ayrıca $A=\begin{pmatrix} i & k \\ 0 & j \end{pmatrix}$ matrisi için A matrisinin transpozu A^T=$\begin{pmatrix} i & 0 \\ k & j \end{pmatrix}$ dir. Şimdi A^T matrisinin tersini bulalım.$(A^T)^{-1}$=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun.

$A^T.\,(A^T)^{-1}$=$\begin{pmatrix} i & 0 \\ k & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

=$\begin{pmatrix} ia & ib \\ ka+jc & kb+jd \end{pmatrix}$

olup $A^T.\,(A^T)^{-1}$=I_2 olacağından

$ia = 1$

$ib = 0$

$ka + jc = 0$

$kb + jd = 1$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözüldüğünde

$(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

bulunur.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$ olduğundan $(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ -1 & -j \end{pmatrix}$ dir. Sonuç olarak

$(A^T)^{-1} \neq (A^{-1})^T$

dir.

Önerme 3.1.1

$A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{Q})$ alalım. Eğer

$$AB = \mathrm{I} \text{ ise } BA = \mathrm{I}$$

dır.

İspat :

$\mathrm{A_1}, \mathrm{A_2}, \mathrm{B_1}, \mathrm{B_2}$ n×n tipinden kompleks matrisler olmak üzere A ve B matrisleri

$$A = \mathrm{A_1} + \mathrm{A_2 j}$$

ve

$$B = \mathrm{B_1} + \mathrm{B_2 j}$$

şeklinde yazılabilir. AB = I olsun. Buradan

$$(\mathrm{A_1} + \mathrm{A_2 j})(\mathrm{B_1} + \mathrm{B_2 j}) = \mathrm{I}$$

$$\mathrm{A_1 B_1} + \mathrm{A_1 B_2 j} + \mathrm{A_2 j B_1} + \mathrm{A_2 j\, B_2 j} = \mathrm{I}$$

bulunur. Teorem 2.1.5 den

$$\mathrm{A_1 B_1} + \mathrm{A_1 B_2 j} + \mathrm{A_2 \overline{B_1} j} - \mathrm{A_2 \overline{B_2}} = \mathrm{I}$$

$$(A_1B_1 - A_2\overline{B_2}) + (A_1B_2 + A_2\overline{B_1})j = I$$

$$(A_1, A_2).\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix} = (I, 0)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

elde edilir. Kompleks matrislerin değişme özelliği olduğundan

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B_2} & \overline{B_1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$(B_1, B_2).\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} = (I, 0)$$

$$(B_1A_1 - B_2\overline{A_2}) + (B_1A_2 + B_2\overline{A_1})j = I$$

$$BA = I$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 3.1.1.

A = $A_1 + A_2 j \in M_n(\mathbb{Q})$ kuaterniyon matrisi verilsin

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan 2n×2n tipinden kompleks matrise, A kuaterniyon matrisinin **adjointi (eki)** veya **kompleks adjoint matrisi** denir ve χ_A ile gösterilir.

Dikkat edelim ki eğer A kompleks bir matris ise $A_2 = 0$ olacağından

$$\chi_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$$

dır.

q = $q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = (q_0 + q_1)i + (q_2 + q_3 i)\, j$ olmak üzere

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q_0 + q_1 i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q_2 + q_3 i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} j \qquad (3.1.1)$$

2×2 tipinden bir elemanter kuaterniyon matris olsun. Bu durumda P matrisinin adjointi

$$\chi_P = \begin{pmatrix} 1 & q_0+q_1 i & 0 & q_2+q_3 i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q_2+q_3 i & 1 & q_0-q_1 i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup,

det $(\chi_P) = |\chi_P|$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -q_2+q_3 & 1 & q_0-q_1 i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1$

dir. Ayrıca $A = \begin{pmatrix} 1 & \propto \\ 0 & B \end{pmatrix}$ olduğunda

$$|\chi_A| = |\chi_B|$$

dir. Burada $\propto$ herhangi bir matris, 0 ise sıfır matrisidir.

Teorem 3.1.2 (Lee, 1949)

A, B ∈ $M_n(\mathbb{Q})$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $\chi_{I_n} = I_{2n}$;
2. $\chi_{AB} = \chi_A . \chi_B$;
3. $\chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B$;
4. $\chi_{A^*} = (\chi_A)^*$;
5. A^{-1} mevcut ise $\chi_{A^{-1}} = (\chi_A)^{-1}$ dır.
6. χ_A nın üniter olması için gerek ve yeter koşul A nın üniter olmasıdır.
7. χ_A nın Hermitian olması için gerek ve yeter koşul A nın Hermitian olmasıdır.
8. $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\chi_{\lambda A} = \lambda . \chi_A$ dır.

Teoremin 8. Önermesini ispatlayacak olursak ;

A = $A_1 + A_2 j$ olsun. $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$\lambda A = \lambda A_1 + \lambda A_2 j$ olduğundan

$$\chi_{\lambda A} = \begin{bmatrix} \lambda A_1 & \lambda A_2 \\ -\lambda \overline{A_2} & \lambda \overline{A_1} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda . \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda . \chi_A$$

dır.

Önerme 3.1.2

A ve B herhangi n×n tipinden kompleks matrisler olmak üzere

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{vmatrix} \geq 0$$

dir

Özel olarak

1.) Herhangi $C \in M_n(\mathbb{Q})$ için $|\chi_C| \geq 0$;

2.) $|I + A\overline{A}| \geq 0$;

3.) $|A\overline{A} + B\overline{B}| \geq 0$;

dır.

İspat :

$|I + A\overline{A}| \geq 0$ olduğundan;

$$\begin{vmatrix} I & A \\ -\overline{A} & I \end{vmatrix} \geq 0$$

dır.

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (\overline{A})^{-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ -\overline{A^{-1}B} & I \end{pmatrix}$$

yazıldığında

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{vmatrix} \geq 0$$

dır.

A ve B değişmeli olduğu zaman

$$\begin{vmatrix} A & \overline{B} \\ -B & \overline{A} \end{vmatrix} = |A\overline{A} + B\overline{B}| \geq 0$$

dır.

Teorem 3.1.3.

$A \in M_n(\mathbb{Q})$ olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir.

1.) A tersinirdir.

2.) Ax =0 bir tek “0” çözümüne sahiptir.

3.) $|\chi_A| \neq 0$ dır, yani χ_Anın inversi vardır.

4.) A sıfırdan farklı özdeğere sahiptir. Yani Ax = λx veya Ax = $x\lambda$ olacak şekilde λ kuaterniyonu vardır. Burada $\lambda \neq 0$ ve $x \neq 0$ dır.

5.) A elemanter kuaterniyon matrislerin çarpımı şeklinde yazılabilir.

İspat:

1 ⇒ 2 aşikardır.

2 ⇒ 3 :

A_1 ve A_2 kompleks matrisler ve x_1 ve x_2 kompleks sütun vektörleri olmak üzere

A= A_1+ A_2j , $x = x_1 + x_2 j$ olarak alalım. Buradan,

$$Ax = (A_1 + A_2 j).(x_1 + x_2 j)$$

$$= A_1 x_1 + A_1 x_2 j + A_2 j x_1 + A_2 j x_2 j$$

$= A_1x_1 + A_1x_2j + A_2\overline{x_1}j - A_2\overline{x_2}$

$= (A_1x_1 - A_2\overline{x_2}) + (A_1x_2 + A_2\overline{x_1})j$

olup, $Ax = 0$ olduğundan

$$A_1x_1 - A_2\overline{x_2} = 0$$

ve

$$A_1x_2 + A_2\overline{x_1} = 0$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler yeniden düzenlenirse,

$$A_1x_1 + A_2(-\overline{x_2}) = 0$$

$$(-\overline{A_2})\, x_1 + \overline{A_1}(-\overline{x_2}) = 0$$

elde edilir.

Buradan A$x = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ -\overline{x_2} \end{pmatrix} = 0$$

olmasıdır. Bu ise

$$\chi_A\, (x_1, -\overline{x_2})^T = 0$$

olmasını gerektirir. Böylece A$x = 0$ denkleminin sadece sıfır çözümüne sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $\chi_A\ (x_1, -\overline{x_2})^T = 0$ denkleminin sadece sıfır çözümüne sahip olmasıdır. Bu ise $|\chi_A| \neq 0$ olmasıyla mümkündür.

3 ⇔ 4 :

2 ⇒ 3 den görülür.

3 ⇒ 1 :

Kabul edelimki χ_Anın tersi olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad (3.1.2)$$

olacak şekilde $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ kompleks matrisi vardır. (3.1.2) ifadesinden ,

$$B_1A_1 - B_2\bar{A}_2 = I$$

$$B_1A_2 + B_2\bar{A}_1 = 0 \qquad (3.1.3)$$

eşitlikleri elde edilir. $B = B_1 + B_2 j$ olsun,

$$BA = (B_1 + B_2 j).(A_1 + A_2 j)$$

$$=(B_1A_1 - B_2\bar{A}_2) + (B_1A_2 + B_2\bar{A}_1)j$$

olup, (3.1.3) eşitliği kullanıldığında

$$BA = I + 0.J$$

$$= I$$

elde edilir. Bu ise A nın tersinir olduğunu ifade eder.

1⇔ 5: A tersinir olduğundan, birim matrise elemanter satır ve sütun operasyonları uygulanmasıyla elde edilebilir.

3.2. Özdeğerler

Bu kısımda kuaterniyon matrislerin özdeğerinden bahsedeceğiz. Kuaterniyonlarda sağ ve sol skaler çarpım farklı olduğundan (Zhang, 1997) $Ax = \lambda x$ ve $Ax = x\lambda$ durumlarını ayrı ayrı ele alacağız.

Tanım 3.2.1

A bir karesel kuaterniyon matris olmak üzere

$$Ax = \lambda x \; (Ax = x\lambda)$$

eşitliğini sağlayan λ kuaterniyonuna, A nın **sol (sağ) özdeğeri** ve

$$\boldsymbol{\sigma}_l(A) = \{\lambda \in \mathbb{Q} | Ax = \lambda x, \; x \neq 0\}, \; \boldsymbol{\sigma}_r(A) = \{\lambda \in Q \mid Ax = x\lambda, \; x \neq 0\}$$

kümelerine de sırasıyla A nın **sol ve sağ spektrumu** denir.

Örnek 3.2.1

$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$ için, k A nın bir sol özdeğeridir. Gerçekten,

$Ax = \lambda x$ denkleminin çözüm kümesi ile $(A - \lambda I)x = 0$ denkleminin çözüm kümesi aynıdır. λ nın da A nın bir özdeğeri olması için $(A - \lambda I)x = 0$ denkleminin sıfırdan farklı çözümlerinin bulunması gerekir. Bunun için ise Teorem 3.1.3 gereğince $|\chi_{(A-\lambda I)}|$=0 olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} - ij\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} j$$

olduğundan

$$\chi_{(A-kI)} = \begin{pmatrix} 0 & i & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada da

$$|\chi_{(A-kI)}| = 0$$

olduğundan, k A matrisinin bir sol özdeğeridir.

Teorem 3.2.1

$A \in \mathrm{M_n}(\mathbb{C})$bir üst üçgensel matris olsun. Bu durumda λ nın A nın bir sol özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul λ nın A matrisinin köşegenleri üzerindeki elemanlardan biri olmasıdır.

Teorem 3.2.2.

A, n×n tipinden reel matris ise A nın sağ ve sol özdeğeri çakışıktır. Yani,

$$\sigma_l(A) = \sigma_r(A)$$

dır.

İspat :

λ, A nın bir sol özdeğeri olsun. O halde $Ax = \lambda x$ olacak şekilde $x \neq 0$ kuaterniyonu vardır. Herhangi q ≠ 0 kuaterniyonu için ;

$$(qAq^{-1})qx = (q\lambda q^{-1})qx$$

ve ayrıca A reel matris olduğundan

$$Aqx = (q\lambda q^{-1})qx$$

elde edilir. $(q\lambda q^{-1})$, $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ iken bir kompleks sayıdır ve $qx = y = y_1 + y_2 j$ şeklinde yazılır.

$$Ay_1 = y_1 q\lambda q^{-1} \text{ ve } Ay_2 = y_2 q\lambda q^{-1}$$

Bu şekilde A nın bir sağ özdeğeri λ bulunur. Sol özdeğer de benzer şekilde bulunabilir.

Teorem 3.2.3 (Wood, 1985)

n×n tipinden her kuaterniyon matris $\mathbb{Q}$ da en az bir sol özdeğere sahiptir.

Bu bölümden itibaren sağ özdeğer yerine kısaca özdeğer denilecektir.

Lemma 3.2.1.

Eğer $A \in M_{m\times n}(\mathbb{Q})$, m<n ise $Ax = 0$, sıfırdan farklı bir çözüme sahiptir.

İspat :

$A = A_1 + A_2 j$ ve $x = x_1 + x_2 j$ olsun

$Ax = 0$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ -\bar{x}_2 \end{pmatrix} = 0$$

yazılabilir. Bu ise 2n bilinmeyenli 2m tane denklemden oluşan bir kompleks homojen denklem sistemini ifade eder. 2m<2n olduğundan sistemin her zaman için aşikar olmayan çözümleri vardır. Yani $Ax = 0$ denkleminin sıfırdan farklı çözümleri vardır.

Lemma 3.2.2

u_1 n kuaterniyon bileşenli birim sütun vektör $(u_1^* u_1 = 1)$ olsun. Bu durumda $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ bir ortagonal cümle olacak şekilde n kuaterniyon bileşenli n-1 tane $u_2, \dots, u_n$ birim sütun vektörleri vardır. Yani $u_s{}^* u_t = 0$, s ≠t .

Bu lemmayı şu şekilde yorumlayabiliriz ;

Eğer u_1 bir birim vektör ise n×n tipinden birinci kolonu u_1 olan bir u üniter matris oluşturabilir.

Teorem 3.2.4 (Brenneer, 1951 ; Lee, 1949)

n×n tipinden her kuaterniyon matris sanal kısmı negatif olmayan n tane kompleks (sağ) özdeğere sahiptir.

Bu özdeğere A nın "**standart özdeğeri**" denir.

λ, A nın bir özdeğeri olsun. Bu durumda

$$Ax = x\lambda \tag{3.1.4}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı x vektörleri vardır. (3.1.4) eşitliği sağdan $q(q \neq 0)$ kuaterniyonu ile çarpıldığında

$$(Ax)q = (x\lambda)\, q \Rightarrow A(xq) = x(\lambda q)$$

$$\Rightarrow A(xq) = xqq^{-1}(\lambda q)$$

$$\Rightarrow A(xq) = (xq)(q^{-1}\lambda q)$$

elde edilir ki bu ise $q^{-1}\lambda q$ kuaterniyonunun da A nın bir özdeğeri olduğunu gösterir. Böylece eğer λ, A nın reel olmayan sıfırdan farklı bir özdeğeri ise $[\lambda]$ nın denklik sınıfındaki her bir eleman da özdeğerdir. Bu yüzden A nın sonlu özdeğerlere sahip olması için gerek ve yeter koşul A nın bütün özdeğerlerinin reel olmasıdır.

Buna göre λ n×n tipinden bir A kuaterniyon matrisinin bir kompleks (sağ) özdeğeri ise aşağıdaki ifadeler $Ax = x\lambda$ denklemine denktir.

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ -\bar{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda . \begin{pmatrix} x_1 \\ -\bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix} = \bar{\lambda} . \begin{pmatrix} x_2 \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix}$$

Burada A_1, A_2 n× n tipinden kompleks matrisler ve x_1, x_2 kompleks sütun vektörleri olmak üzere

$$A = A_1 + A_2 j, \quad x = x_1 + x_2 j$$

dir.

Buna göre A kuaterniyon matrisinin kompleks özdeğerleri ile χ_A matrisinin özdeğerleri aynıdır. λ A nın bir kompleks özdeğeri olmak üzere A nın λ dan elde edilen kuaterniyon özdeğerleri $\forall q \in \mathbb{Q} - \{0\}$ için $q^{-1}\lambda q$ kuaterniyonlarıdır. Bunun için Örnek 3.2.2 verilebilir.

Örnek 3.2.2

$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım A matrisinin sağ özdeğerlerini bulacağız.

$A = A_1 + A_2 j$ olacak şekilde ;

$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .j$ olmak üzere

$$\chi_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

A nın kompleks sağ özdeğerlerini bulacağız. A nın kompleks özdeğeri ile χ_A nın özdeğerleri aynıdır.

$$|\lambda I_4 - \chi_A| = 0$$

Denkleminden λ özdeğerlerini bulacağız.

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + i & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$= (\lambda\text{-}i)[\lambda^2(\lambda + i) + (\lambda + i)]$

$=(\lambda\text{-}i).(\lambda\text{+}i).(\lambda^2 + 1)$

$=(\lambda^2 + 1)^2$

$= \lambda^4\text{+}2\lambda^2\text{+}1$

$|\lambda I_4 - \chi_A| = 0$ ise $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ dır.

Buradan ;

$\lambda^2 = -1$

$\lambda = \pm i$

dır.

$-i$ ve i A nın kompleks özdeğerleridir.

$\lambda = i$ kompleks özdeğerinden elde edilen bir kuaterniyon özdeğerini bulalım.

q ≠0, q = $1 - k \in \mathbb{Q}$ alalım.

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} = \frac{1+k}{2}$$

$q^{-1}i\text{q} = \frac{1+k}{2}\left(i\text{(1-k)}\right)$

$= \frac{1}{2}(1+k).(i+j)$

$= \frac{1}{2}(i+j+j-i)$

$= j \in \mathbb{Q}$

j, A matrisinin bir kuaterniyon özdeğeridir.

3.3. Rank, Benzerlik ve Determinantlar

Kuaterniyonlarda çarpma işlemi değişmeli olmadığından kuaterniyon vektörlerden oluşan bir cümle için $\mathbb{Q}$ üzerinde sağ ve sol lineer bağımsızlık kavramları tanımlanır. Ayrıca kuaterniyon vektörlerden oluşan bir cümle $\mathbb{Q}$ üzerinde lineer bağımlı iken $\mathbb{C}$ üzerinde lineer bağımsız olabilir. Bununla birlikte bir cümle sol lineer bağımlı iken sağ lineer bağımsız olabilir.

Tanım 3.3.1 (Rank)

Bir A kuaterniyon matrisinin maksimum sağ lineer bağımsız sütun vektörlerinin sayısına A matrisinin **rankı** denir.

P ve Q uygun tipten herhangi iki tersinir matris olsun. Bu durumda A ve PAQ matrislerinin rankı birbirine eşittir.

Eğer A, rankı r olan bir matris ise o zaman A nın maksimum sol lineer bağımsız satır vektörlerinin sayısı da r dir.

A n×n tipinden bir kuaterniyon matris olsun. Bu durumda A nın tersinir (nonsigüler) olması için gerek ve yeter koşul rank A = n olmasıdır.

$\mathbb{Q}_c^n$, n kuaterniyon bileşenli sütun vektörlerinin cümlesi olsun. $\mathbb{Q}_c^n$ de $\mathbb{Q}$ üzerinde toplama ve sağ skalerle çarpma işlemlerine göre bir sağ vektör uzayıdır. Eğer A m×n tipinden bir kuaterniyon matris ise $Ax = 0$ denkleminin çözümlerinin cümlesi $\mathbb{Q}_c^n$ nin bir altuzayıdır. Bu altuzayın boyutunun r olması için gerek ve yeter koşul A nın rankının n-r olmasıdır.

A, A^* ve A^*A matrislerinin rankları birbirine eşittir.

Tanım 3.3.2

Eğer $S^{-1}AS = B$ olacak şekilde aynı tipten bir tersinir S kuaterniyon matrisi varsa A ve B matrislerine **benzerdir** denir.

Benzer kuaterniyon matrisler aynı (sağ) özdeğere sahiptir. Bu sol özdeğerler için doğru değildir.

A ile B nin sağ özdeğerleri aynıdır. Gerçekten ;

$$S^{-1}AS = B$$

$$Ax = x\lambda$$

$$S^{-1}Ax = S^{-1}x\lambda$$

$$S^{-1}AIx = S^{-1}x\lambda$$

$$S^{-1}ASS^{-1}x = S^{-1}x\lambda$$

$S^{-1}AS = B$ ve $S^{-1}x = y$ denilirse ;

$$By = y\lambda$$

dır.

Sol özdeğerin eşit olmadığını görmek istersek ;

$Ax = \lambda x$ olsun. ($By \neq \lambda y$ olmalı)

$$S^{-1}ASS^{-1}x = S^{-1}\lambda x$$

$BS^{-1}x = S^{-1}\lambda x$ ($=\lambda S^{-1}x$ olmalıydı)

$\forall\lambda \in \mathbb{Q}$ için $S^{-1}\lambda \neq \lambda S^{-1}$ olduğundan λ B nin bir sol özdeğeri olamaz.

Tanım 3.3.3

Bir karesel kuaterniyon matrisin esas köşegenindeki bileşenlerin toplamına bu matrisin **izi** denir.

Özel olarak eğer A matrisi bir kompleks karesel matris ise izi, matrisin özdeğerlerinin toplamına eşittir.

Kompleks halde benzer matrislerin izleri eşittir. Fakat kuaterniyon matrislerde durum farklıdır. Bu Örnek 3.3.1 görülebilir.

Örnek 3.3.1

$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ matrislerini ele alalım. Benzer matrislerin izlerinin farklı olabileceğini gösterelim.

$S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olacak biçimde seçilsin

$S^{-1}AS = B \Rightarrow AS = SB$

dir. Matrisleri yerlerine yazarsak;

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ia & ib \\ ic & id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aj & bj \\ cj & dj \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir.

$ia = aj$

i$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)j$

-$a_1 + a_0 i - a_3 j + a_2 k$ = -$a_2 - a_3 i + a_0 j + ak$

$a_1 = a_2$

$a_0 = -a_3$

$a_2 = a_1$

dir. Eşitlikler tek tek çözüldüğünde $a_1 = a_2 = 0$, $a_0 = 1$, $a_3 = -1$ olduğundan $a = 1 - k$ dır.

Benzer şekilde b= 0, c = 0 ve d = 1 + j olarak hesaplanır. S matrisinin regüler olması gerekir.

$$S = \begin{pmatrix} 1-k & 0 \\ 0 & i+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} j$$

$$\chi_S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{vmatrix} S_3 \to S_3 + iS_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{vmatrix}$$

Buradan det $\chi_S = 4 \neq 0$ olduğundan S regüler dir. S^{-1}AS = B olduğundan A ile B benzerdir.

İzA = 2i, İzB = 2j yani matrislerin izleri farklı fakat matrisler benzer matrislerdir. Halbuki kompleks matrislerde benzer matrislerin izleri aynıydı.

Ayrıca benzer matrislerin sol özdeğerleri de aynı olmak zorunda değildir. Bunu da Örnek 3.3.2 de görebiliriz.

Örnek 3.3.2

A matrisinin özdeğeri λ = k ($Ax = k.x$) olsun. A ve B benzer olacak şekilde bu özdeğerin B nin de sol özdeğeri olup olmadığına bakalım. Yani $By = ky$ olacak şekilde y ≠ 0 var mı ?

(B-kI)y = 0

$|\chi_{B-kI}| \neq 0$ olduğunu göstermek yeterli olacak,

$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. A için Örnek 3.2.1'den biliyoruz ki $\lambda = k$,A nın özdeğeridir.

$A_{11} = 2i,\ A_{12} = 0,\ A_{21} = 0,\ A_{22} = i$

$\tilde{A} = S^{-1}.S = \begin{bmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$

$B = S^{-1}.A.S$ olacak şekilde

$B = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 4i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

bulunur.

$B - kI = \begin{pmatrix} -k & 4i \\ -i & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} .j$

$\chi_{\mathrm{B-kI}} = \begin{pmatrix} 0 & 4i & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & -4i \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix}$

$S_2 \longrightarrow S_2\text{-}S_3$

$\begin{vmatrix} 4i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \\ -i & i & 0 \end{vmatrix} = -9i \neq 0$

$B - kI$ regülerdir. Sadece y = 0 çözümü vardır. Bu yüzden k, B nin bir sol özdeğeri değildir.

Bir kuaterniyon matrisin sağ lineer bağımsız olmasının sol lineer bağımsız olmasını gerektirmediğini Örnek 3.3.3 de görelim.

Örnek 3.3.3

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & k \end{pmatrix}$ matrisini alalım.

$\alpha_1 = (1, j)$, $\alpha_2 = (i, k)$

$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$

$\alpha_1 . c_1 + \alpha_2 . c_2 = 0$ ise $c_1 = c_2 = 0$ mı? ($c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$)

$\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} . c_1 + \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} . c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + ic_2 \\ jc_1 + kc_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow c_1 + ic_2 \quad = 0$

$\Rightarrow jc_1 + kc_2 \ = 0$

$jc_1 - kc_2 \ = 0$

$jc_1 + kc_2 \ = 0$

$2jc_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 \ = 0$

Olduğundan sağ lineer bağımsızdır.

$c_1 . \alpha_1 + c_2 . \alpha_2 = 0$

$c_1 + c_2 \, i = \ 0$

$c_1 j + c_2 k = 0$

Buradan

$c_1 j + c_2 k = 0$ parametreye bağlı çıkacağından sol lineer bağımlıdır.

Mesela $c_1 = i$, $c_2 = -1$ seçilirse de sağlar.

$\exists c_l \neq 0$ ($l = 1,2$ için) $c_1 . \alpha_1 + c_2 . \alpha_2 = 0$ dır.

$\Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2\}$ cümlesi sol lineer bağımlıdır.

Ayrıca bu matrisin rankı 2 dir.

Teorem 3.3.1

A ve B n×n tipinden kuaterniyon matrisler olsun. A ve B benzer olması için gerek ve yeter koşul χ_A ve χ_B nin benzer olmasıdır.

3.4. Determinantlar Ve Cayley - Hamilton Teoremi

Bu kesimde kuaterniyon matrislerin determinantları ele alacağız. Öncelikle kompleks eki χ_A olan bir A kuaterniyon matrisinin determinantı tanımlanacaktır ve Cayley-Hamilton Teoremi ele alınacaktır.

Tanım 3.4.1

A n×n tipinden bir kuaterniyon matris ve A nın kompleks eki χ_A olsun. $|\chi_A|$ sayısına A nın **"q-determinantı"** denir. Kısaca A nın "**determinantı"** olarak adlandırılır ve $|A|_q$ ile gösterilir. Buna göre ;

$$|A|_q = |\chi_A|$$

dır.

A bir kompleks matris ise

$$|A|_q = |A|.|\bar{A}| = |detA|^2$$

dır.

Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.1

A ve B n×n tipinden iki kuaterniyon matris olsun. Bu durumda ;

1. A regülerdir ⇔ $|A|_q \neq 0$
2. $|AB|_q = |A|_q . |B|_q$

3. Eğer A^{-1} var ise $|A^{-1}|_q = |A|_q^{-1}$

dır.

İspat :

1. Teorem 3.1.3 (1⇔3) den açıktır.
2. $|AB|_q = |\chi_{AB}| = |\chi_A \, \chi_B|$ Teorem 3.1.2 (2) den

$$= |\chi_A| . |\chi_B|$$

$$= |A|_q . |B|_q$$

3. $|I|_q = |AA^{-1}|_q = |A|_q . |A^{-1}|_q = 1$

A^{-1} mevcut olduğundan bölme yapılır.

$$|A^{-1}|_q = \frac{1}{|A|_q}$$

$$= |A|_q^{-1}$$

Tanım 3.4.2

A karesel bir kuaterniyon matris ve λ bir kompleks parametre olmak üzere $|\lambda I_{2n} - \chi_A|$ değerine A nın **"karakteristik polinomu"** denir ve F_A (λ) ile gösterilir.

Teorem 3.4.2 (Cayley – Hamilton)

A karesel bir kuaterniyon matris olsun. Bu durumda;

1. A kendi karakteristik polinomunun bir köküdür, yani F_A (A) = 0 dır.

2. λ_0 ın A nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul F_A $(\lambda_0) = 0$

olmasıdır.

İspat :

1. $F_A(\lambda)$ bir reel katsayılı polinomdur.

Öncelikle $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ olacak şekilde reel katsayılı f polinomu için $f(\chi_A) = \chi_{f(A)}$ olduğunu gösterelim. Teorem 3.1.2 den, $\chi_{AB} = \chi_A . \chi_B$, $\chi_{A+B} = \chi_A + \chi_B$, $\chi_{I_n} = I_{2n}$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $\chi_{cA} = c.\chi_A$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
\chi_F(A) &= \chi_{a_n.A^n + a_{n-1}.A^{n-1} + \ldots + a_1.A + a_0.I_n} \\
&= a_n.\chi_{A^n} + a_{n-1}.\chi_{A^{n-1}} + \ldots + a_1.\chi_A + a_0.\chi_{I_n} \\
&= a_n.(\chi_A)^n + a_{n-1}.(\chi_A)^{n-1} + \ldots + a_1.\chi_A + a_0.I_{2n} \\
&= f(\chi_A)
\end{aligned}$$

dır. χ_A kompleks bir matris olduğundan, kompleks matrisler için Cayley – Hamilton teoremi gereğince

$F_{\chi_A}(\chi_A) = 0$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= F_{\chi_A}(\chi_A) \\
&= F_A(\chi_A) \\
&= \chi_{F_A(A)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bir matrisin eki sıfır ise kendisi sıfır olacağından,

$$F_A(A) = 0$$

dır.

2. $A = A_1 + A_2 j$ ve $x = x_1 + x_2 j$ olmak üzere;

$F_A(\lambda_0) = |\lambda I_{2n} - \chi_A|$

$F_A(\lambda_0) = F_{\chi_A}(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0$, χ_A nın bir özdeğeridir

$$\Leftrightarrow \chi_A \begin{pmatrix} x_1 \\ -\bar{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda_0 . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \lambda_0$, A nın bir özdeğeridir.

$\Leftrightarrow Ax = \lambda_0 x$

$\Leftrightarrow \lambda_0$, A nın bir özdeğeridir.

Bu teoremi Örnek3.4.1 ile örnekleyelim.

Örnek 3.4.1

Örnek 3.2.2 de verilen $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım.

$F_A(\lambda) = F_{\chi_A}(\lambda) = |\lambda I_{4n} - \chi_A| = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$ dir.

$\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ A nın bir özdeğeridir. $j \in [i]$ dir.

$F_A(i) = 0$, $F_A(-i) = 0$, $F_A(j) = 0$ dır.

$F_A(A) = A^4 + 2A^2 + I_2 = 0$ dır. Bunu gösterelim,

$A^4 + 2A^2 + I_2 = (A^2 + I_2)^2$

$$A^2 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & i+j \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + I_2 = \begin{bmatrix} -1 & i+j \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i+j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_A(A) = (A^2 + I_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & i+j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & i+j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

dır.

Buradan ayrıca A^{-1} de bulunabilir.

$$\mathrm{I} = A . A^{-1}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & j \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan hesaplandığında

$a = -i, b = -k, c = 0, d = -j$ bulunur.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -i & -k \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

dir.

Sonuç 3.4.1 (Lee, 1949)

A ve B n×n tipinden kompleks matris olsunlar. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri reel ise çift katlıdır, kompleks ise de eşlenik çiftlerdir.

Örneğin ;

$A = i$, $B = -\ i$ olsun

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik polinomunu bulalım.

$$\begin{bmatrix} \lambda - i & i \\ i & \lambda + i \end{bmatrix} = \text{c olsun}$$

$$F_C(\lambda) = |\lambda I_2 - c| = \begin{bmatrix} \lambda - i & i \\ i & \lambda + i \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 2$$

$$= \lambda = \pm\sqrt{2}$$

Teorem 3.4.3

A ve B n×n tipinden kuaterniyon matris olsun. Eğer A ve B matrisleri benzer ise $|A|_q = |B|_q$ dir ve $F_A(\lambda) = F_B(\lambda)$ dır.

İspat :

A ve B benzer olduğundan Teorem 3.3.1 den χ_A ve χ_B de benzerdir. Öyle ise $\chi_A = P^{-1}\chi_B P$ olacak şekilde 2n × 2n tipinden P kompleks regüler matrisi vardır.

$|A|_q = |\chi_A| = |P^{-1}\chi_B P\ |$

$= |P^{-1}|.|\chi_B|.|P|$

$= |\chi_B|$

$= |B|_q$

Dolayısıyla ;

$F_A(\lambda) = F_{\chi_A}(\lambda) = |\lambda I_{2n} - \chi_A|$

$= |\lambda P^{-1}P - P^{-1}\chi_B P|$

$= |P^{-1}|.\ |\lambda I_2 - \chi_B|.|P|$

$= |\lambda I_2 - \chi_B|$

$= F_{\chi_B}(\lambda)$

$= F_B(\lambda)$

dır.

A n×n tipinden bir kuaterniyon matris olsun. S_n, $\{1, 2, \dots, n\}$ cümlesinin permütasyonlarının cümlesi olmak üzere $\forall\ \sigma \in S_n$ için σ permütasyonunu ,

$\sigma = (n_1, i_{1_2}, i_{1_3}, \dots, i_{1_s}).(n_2, i_{2_2}, i_{2_3}, \dots, i_{2_t}) \dots (n_r, i_{r_2}, i_{r_3}, \dots, i_{r_l})$

biçiminde ayrık dairesel permütasyonların çarpımı şeklinde yazılabilir. Burada, 1≤j≤r için n_j bulunduğu dairesel permütasyondaki en büyük sayıdır ve

$n = n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geq 1$

dir. Örneğin σ özdeşlik permütasyonu için

σ = (n)(n-1)...(2)(1)

dir.

Buna göre $A = [a_{pq}] \in \mathbb{Q}_n^n$ ve

$\sigma = (n_1, i_{1_2}, i_{1_3}, \dots, i_{1_s})(n_2, i_{2_2}, i_{2_3}, \dots, i_{2_t}) \dots (n_r, i_{r_2}, i_{r_3}, \dots, i_{r_l})$

için

$$a_\sigma = a_{n_1} i_{1_2} i_{1_3} \dots a_{i_{1_{s-1}}} i_{1_s} a_{n_2} i_{2_2} a_{i_{2_2}} a_{i_{2_3}} \dots a_{i_{2_{t-1}}} i_{2_t} \dots a_{n_r} i_{r_2} a_{i_{r_2}} i_{r_3} \dots a_{i_{r_{l-1}}} i_{r_l}$$

olmak üzere

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} S(\sigma) a_\sigma \qquad (3.1.5)$$

dır.

Burada $S(\sigma)$**,** σ permütasyonunun işaretidir.

Dikkat edilirse buradaki det A değeri, bilinen det A değerindeki a_{pq} bileşenlerinin yer değiştirmiş halidir.

A birim matris ise (3.1.5) denklemine göre det A = 1 dir.

Örnek 3.4.2

$A \in \mathbb{Q}_3^3$ için det A yı hesaplayalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$S_3 =$

$$\left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

S(σ_1) = S(σ_4) = S(σ_5) = +1

S(σ_2) = S(σ_3) = S(σ_6) = -1

dir.

Öyleyse

$$\det A = (a_{33} a_{22} a_{11} + a_{31} a_{12} a_{23} + a_{32} a_{21} a_{13}) - (a_{32} a_{23} a_{11} + a_{33} a_{21} a_{12+} a_{31} a_{13} a_{22})$$

dır.

Bir kompleks karesel matrisin determinantı sıfır iken sütun vektörlerinin cümlesi lineer bağımlıdır. Kuaterniyon marisler için bu durum farklıdır. Bu aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 3.4.3

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}_2^2$ için det $A = a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}$

dir.

$A = \begin{pmatrix} i & k \\ j & 1 \end{pmatrix}$ için det $A = 1.i - jk = i - i = 0$ dır fakat A nın $\{(i,j),(k,1)\}$ sütun vektörlerinin cümlesi sağ lineer bağımsızdır. Gerçekten ;

$(i,j)c_1 + (k,1)c_2 = (0{,}0)$

$(ic_1 + kc_2, jc_1 + c_2) = (0{,}0)$

Buradan ;

$c_1 = 0$, $c_2 = 0$

dır.

$j(i,j) + 1.(k,1) = (0{,}0)$

olduğundan $\{(i,j),(k,1)\}$ cümlesi sol lineer bağımlıdır.

.

Tanım 3.4.3

$A \in Q_n^n$ olsun. det$(A^*.A)$ değerine A matrisinin **double determinantı** denir ve $|A|_d$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.4

$A \in \mathbb{Q}_n^n$ için $|A|_q = |A|_d$ dir.

Örnek 3.4.4

$A = \begin{bmatrix} i & k \\ j & 1 \end{bmatrix}$ matrisini ele alalım.

$|A|_q = |\chi_A|$

$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.j$

$\chi_A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$|A|_q = |\chi_A| = i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 4$

. $\neq 0$

$A^* = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} -i & -k \\ -j & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -i & -j \\ -k & 1 \end{bmatrix}$

$A^*.A = \begin{bmatrix} -i & -j \\ -k & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} i & k \\ j & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & j-j \\ -j+j & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$|A|_d = \det(A^*.A) = 4$

Buradan $|A|_q = |A|_d$ dir.

Örnek 3.4.4 de dikkat edilirse $\det(A^*.A) = 4$ dir.

$\det A = 0$ dır. Buradan $\det A.\det A^* = 0$ dır.

Yani $\det(A^*.A) \neq \det A.\det A^*$

dır.

Buna göre şu sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4.2

Her $A, B \in Q_n^n$ için det(A.B) $\neq$ detA.detB dir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, kuaterniyonlar ele alınarak kuaterniyon matrisleri tanıtılmış ve belli başlı özellikleri incelenmiştir. Kompleks matrislerde bilinen bazı özelliklerin kuaterniyon matrislerinde farklılıklar gösterdiği görülmüş ve bunlar örneklendirilmiştir.

Çalışmanın devamı olarak kuaterniyon matrisleriyle ilgili diğer özellikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Zhang F., Quaternions and Matrices of Quaternions. Linear Algebra and its Applications, 251, 21-57, 1997

[2] Ward, J, P., Quaternions and Cayley Numbers. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1977

[3] Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir Cilt I ve Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 2000.

[4] Hacısalihoğlu, H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi yayınları, 1983