T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Seda ÜÇÜNCÜOĞLU

EKİM 2011

Matematik Anabilim Dalında Seda ÜÇÜNCÜOĞLU tarafından hazırlanan KOMPLEKS BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Ali ARAL

Danışman

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Ali ARAL	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	____________________

…/…/2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Matematik Anabilim Dalında Seda ÜÇÜNCÜOĞLU tarafından hazırlanan KOMPLEKS BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Ali ARAL

Danışman

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Ali ARAL	____________________
Üye	: Yrd. Dr. Hakan ŞİMŞEK	____________________

…/…/2011

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KOMPLEKS BERNSTEIN POLİNOMLARININ YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

ÜÇÜNCÜOĞLU, Seda

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ali Aral

EKİM 2011,66 Sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmı yer almıştır. İkinci bölümde bazı temel tanımlar ve kavramlar açıklanmış teoremleri destekleme amaçlı lemmalar verilmiştir. Üçüncü bölümde Kompleks Bernstein operatörlerinin temel özellikleri incelenmiş ve Voronoskaja tipli teorem ispatlanmıştır. q-Bernstein operatörlerinin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonsiyon, Kompleks Bernstein operatörü, Kompleks q-Bernstein operatörü, Bernstein eşitsizliği, Voronovskaja tipli teorem.

ABSTRACT

COMPLEX BERNSTEIN POLYNOMIALS AND APPROXIMATION PROPERTIES

ÜÇÜNCÜOĞLU, Seda

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali ARAL

OCTOBER 2011, 66 Pages

This thesis contains three chapters. First chapter is the introduction. In the second chapter, some fundamental definitions and concepts are studied and lemmas are given to support theorems . In the third chapter, basic properties of Complex Bernstein are studied and Voronovkaya type theorem is proved. The approximation properties of q-Bernstein are studied.

Key words: Analytic function, Complex Bernstein polynomial, Complex q-Bernstein polynomial, Bernstein inequality, Voronovkaja theorem

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım süresince ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ali ARAL'a, beni bugünlere kadar getiren canım aileme, desteğini esirgemeyen kardeşim Cevat ve arkadaşım Gonca'ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$B_n(f)(z)$	Bernstein polinomlarının f fonksiyonuna uygulanması
$\pi_{k,n}(z)$	$e_k(z)$ fonksiyonunun Bernstein polinomlarına uygulanması
$E_{k,n}(z)$	k. dereceden bir polinom
$\|\cdot\|$	$C(\overline{D})$ uzayında düzgün bir
$B_{n,q}(f)(z)$	q- Bernstein polinomlarının f fonksiyonuna uygulanması
$\pi_{k,n,q}(z)$	$e_k(z)$ fonksiyonunun q- Bernstein polinomlarına uygulanması
$E_{k,n,q}(z)$	k. dereceden bir polinom
$\|\cdot\|_1$	$\mathbb{C}(\overline{D_1})$ uzayında düzgün bir norm
$\|\cdot\|_r$	$\mathbb{C}(\overline{D_r})$ uzayında bir norm
$D_q(f)(z)$	f fonksiyonunun q-türeve uygulanması

1.GİRİŞ

$D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, $G \subset \mathbb{C}$ ve $\overline{D}$ da olmak üzere $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ analitik olsun. D üzerinde Kompleks Bernstein operatörleri

$$B_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} f\left({}^{k}/_{n}\right)$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu operatörlerin yakınsaklık özelliklerinin incelenmesi son yıllarda giderek artan bir çalışma alanı olmuştur. Sorin S. Gal [1] nolu kitabında Kompleks Bernstein operatörlerinin çeşitli yakınsaklık özellikleri vermiştir.

Yaklaşımlar teoresinde iki çeşit problem incelenir. Birincisi quantitative ikincisi ise qualitative tipli yaklaşım sonuçlarıdır. Quantitative tipli sonuçlar operatörün kendini oluşturan fonksiyonlara hangi hızda yaklaştığını içeren sonuçlardır. Bu sonuçlar genellikle süreklilik modülü yardımı ile verilir, qualitative tipli sonuçlar ise operatörün fonksiyona yaklaşımını veren direkt sonuçlardır. Korovkin tipli ve Voronoskaja sonuçlar bu tipli sonuçlardır. Biz bu tezde hem quantitative hem de qualitative sonuçlar vereceğiz.

1.1 Kaynak Özetleri

Bu tez hazırlanırken birinci bölümde materyal ve yöntem kısmında Prof. Dr. Turgut Başkan'ın 'Kompleks Fonksiyonlar Teorisi' kitabından analitik fonksiyonlar ile ilgili bazı tanımlar ve temel özellileri , G. M. Phillips'in kitabından q-tamsayıların temel özellikleri, S. Gal ın 'Approximation By Complex Bernstein and Convulation Type Operatör' kitabından Komleks Bernstein operatörleri için bazı tanımlar ve temel özellikleri incelenmiştir. Bu bilgiler çerçevesinde S. Gal' ın 'Voronoskaja's Theorem and İterations for Complex Bernstein Polinomials in Compact Disks' makalesindeki Voronoskaja tipli teorem incelenmiştir.

1.2 Çalışmanın Amacı

Kompleks Bernstein polinomları , q-Bernstein polinomları özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu tezde hem quantitative hem de qualitative sonuçlar verilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 Analitik Fonksiyonlar İle İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1:

a) Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir.

b) Eğer bir f kompleks fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f fonksiyonu S üzerinde analitiktir denir.

c) Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$ uzayının tüm noktalarında analitikse, f fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

Tanım 2.1.2:

Bir f fonksiyonunun analitik olduğu noktaların kümesi açık bir kümedir, yani

$$A = \{z \in \mathbb{C} | \, f, z \; de \; analitik\}$$

kümesi açıktır. Çünkü herhangi bir $z_0 \in A$ noktası alınırsa Tanım 2.1.1 a) gereği $D(z_0, \delta) \subset A$ olacak biçimde bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğu vardır. Bu nedenle çoğu kez bir f fonksiyonunun analitikliği Tanım 2.1.1 a) gibi bir z_0 noktasında değil de bir açık $A \subset \mathbb{C}$ kümesinde tanımlanır. Bu tanım " $A \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ olsun. Eğer f, A nın her noktasında diferansiyellenebiliyorsa f, A kümesinde analitiktir denir" biçimindedir.

Tanım 2.1.3:

" f, herhangi bir S kümesinde analitiktir." denir ise, gerçekte f bu S kümesini kapsayan açık bir A kümesinde analitiktir demektir. Örneğin ; f,

$$S = \{z: |z| \leq 1\}$$

de analitik deniyorsa, f ,bir

$$A = \{z: |z| \leq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

kümesinde analitiktir. Çünkü tanım gereği her $|z| = 1$ noktasının bir δ_z-komşuluğunda f analitiktir. Böylece S nin sınır noktalarını da iç nokta kabul eden bir açık kümede analitiktir.

Bazen analitik olduğu küme belirtilmeden "f analitik olsun " denilir. Bunun anlamı f nin $\mathbb{C}$ de analitik olduğu noktalar var demektir.

Tanım 2.1.4:

Bir kompleks fonksiyona ne zaman analitik fonksiyon denilebileceğini Tanım 2.1.1 de belirtmiştik. Bir f fonksiyonu analitik olduğu bir z_0 noktasının komşuluğunda Taylor serisi diye adlandırılan ve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

biçiminde olan bir kuvvet serisine açılabilir. Tanım 2.1.1 deki verdiğimiz ifadeden hareketle elde ettiğimiz bu kuvvet serisine açılım, oldukça önemli bir özelliktir ve çoğu kez analitiklik tanımı bu kuvvet serisi yardımıyla verilir.

Tanım 2.1.5:

Her bir $a_k \in \mathbb{C}$ olmak üzere ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

kompleks sayılar serisini göz önüne alalım.

a) Bu serinin $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ olarak tanımlanan s_n kısmi toplamlar dizisi bir s_0 değerine yakınsıyor ise yukarıdaki seri s_0 a yakınsıyor denir. Bu yakınsama çoğu kez

$$s_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

yazılarak belirtilir ve s_0 a serinin toplamı denir.

b) Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi yakınsak ise yukarıdaki seri için mutlak yakınsaktır denir.

Teorem 2.1.1:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ şeklindeki bir kuvvet serisi kendi yakınsaklık çemberinin iç kısmı üzerinde bir analitik fonksiyon belirtir.

Teorem 2.1.2: (Taylor Teoremi)

f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitikse bu noktanın bir komşuluğundaki z ler için geçerli olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

açılımı vardır. Bu kuvvet serisi bir $D(z_0, R)$ diski üzerinde mutlak yakınsar ve bu diskin kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgündür.

2.2 Bernstein Polinomları

$[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli f fonksiyonları için Bernstein polinomlar dizisi

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\binom{k}{n} x^k (1 - x)^{n-k}$$

x $\in [0,1]$ şeklinde verilmiştir. B_n operatörü sürekli fonksiyonlar uzayından sürekli fonksiyonlar uzayına dönüşüm yapar, yani

$$B_n: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

Eğer f fonksiyonu sürekli ise $B_n(f; x)$ in $f(x)$ e düzgün yakınsadığını göstereceğiz. Analitik fonksiyonlar için bu tip gösterimlerin mevcut olduğu bilinmektedir. Buna göre f nin herhangi bir mertebeden türevinin olması gerekir. Bernstein polinomları bu açıdan daha kullanışlıdır. Hatta f nin $\frac{k}{n}$ değerlerinin bilinmesi yeterlidir.

2.2.1: Bernstein Polinomlarının Özellikleri

1. $B_n(f;0) = f(0)$ ve $B_n(f;1) = f(1)$

2. $B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(x + (1-x)\right)^n = 1$

3. $f(t) = t$ için

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} \frac{k}{n} = \binom{n-1}{k-1}$$

olduğundan

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte k yerine $k+1$ yazılırsa

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x\left(x + (1-x)\right)^n = x$$

elde edilir.

$f(t) = t^2$ için

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \frac{k}{n} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} \frac{k-1}{n} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$+ \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k}$$

$$+ \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} x^{k} (1-x)^{n-k-1}$$

$$B_n(t^2;x) = x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!\,(n-k-2)!} x^k (1-x)^{n-k-2} + \frac{x}{n} B_{n-1}(1;x)$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} B_{n-2}(1;x) + \frac{x}{n} B_{n-1}(1;x)$$

$$= x^2 \frac{n-1}{n} + \frac{x}{n}$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

olur.

4. Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in C[0,1]$ için

$$B_n(af + bg; x) = aB_n(f; x) + bB_n(g; x)$$

eşitliği sağlandığından dolayı Bernstein polinomlar operatörü lineerdir.

5. $B_n(f)$ monoton bir operatördür. Her x $\in [a, b]$ için

$$f(x) \geq 0 \Longrightarrow B_n(f; x) \geq 0$$

şartının sağlandığını gösterelim.

$B_n(1; x) = 1$ olduğundan $m \leq f(x) \leq M$ ise x $\in$ [0,1] için

$$B_n(m; x) \leq B_n(f; x) \leq B_n(M; x) \Longrightarrow m \leq B_n(f; x) \leq M$$

dır. $m = 0$ alınırsa ve $f(x) \geq 0$ ve x $\in$ [0,1] için $B_n(f; x) \geq 0$ olur.

2.3 q- Tam Sayılar ve Özellikleri

Tanım 2.3.1:

$n \in \mathbb{N}$ ve q tam sayısı $q > 0$ olmak üzere

$$[n] = [n]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q} & , q \neq 1 \\ n & , q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan tam sayıya q tam sayısı denir. q tam sayılarının kümesi

$$\mathbb{N}_{q=}\{[n]: n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1+q, 1+q+q^2, \cdots, 1+q+\cdots+q^{n-1}, \cdots\}$$

olarak gösterilir.

Tanım 2.3.2:

$n \in \mathbb{N}$**,** $q > 0$ için q faktöriyel $[n]!$ aşağıdaki gibidir.

$$[n]! = \begin{cases} [n][n-1]\cdots[1] , & n \geq 1 \\ 1 \quad , & n = 0 \end{cases}$$

Tanım 2.3.3:

Binom sabiti q tam sayılarda aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1] \ldots [n-r+1]}{[r]!} = \frac{[n]!}{[r]!\,[n-r]!}$$

Lemma 2.3.1:

Reel analizde binom katsayıları için

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini biliyoruz. Bu ifadenin q analizdeki karşılğını verelim.

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + q^r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}$$

Basit hesaplamalarla bu ifadenin doğruluğunu gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix} + q^r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix} &= \frac{[n-1]!}{[n-r]!\,[r-1]!} + q^r \frac{[n-1]!}{[n-r-1]!\,[r]!} \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r]!\,[r]!}([r] + q^r [n-r]) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r]!\,[r]!}\left(\frac{1-q^r}{1-q} + q^r \frac{1-q^{n-r}}{1-q}\right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r]!\,[r]!}\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \\
&= \frac{[n-1]!}{[n-r]!\,[r]!}[n]! \\
&= \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Teorem 2.3.1:

Klasik analizde biliyoruz ki

$$(1+x)^n = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s$$

gibidir. Bunun q analizdeki karşılığı aşağıdaki gibidir.

$$\prod_{s=1}^{n} (1+q^{s-1}x) = \sum_{s=0}^{n} q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} x^s$$

İspat: $G_{\boldsymbol{n}}(x) = (1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^{n-1}x) = \sum_{r=0}^{n} c_r x^r$

dir. Bu eşitlikte x yerine qx yazılırsa eşitlik doğru olur.

$$(1+q^n x)G_{\boldsymbol{n}}(x) = (1+x)G_{\boldsymbol{n}}(qx)$$

$$(1+q^n x)\sum_{r=0}^{n} c_r x^r = (1+x)\sum_{r=0}^{n} c_r (qx)^r$$

dır. x^s lerin katsayıları eşitlendiği taktirde

$$c_s + q^n c_{s-1} = q^s c_s + q^{s-1} c_{s-1}$$

$$c_s = \frac{1-q^{n-s+1}}{1-q^s} q^{s-1} c_{s-1}$$

$$= \frac{[n-s+1]_q}{[s]_q} q^{s-1} c_{s-1}$$

$s = 1$ için $c_1 = [n]_q c_0$

$s = 2$ için $c_2 = \frac{[n-1]_q}{[2]_q} q c_1 = \frac{[n]_q [n-1]_q}{[2]_q [1]_q} q$

$\vdots$

s için $c_s = q^{\frac{s(s-1)}{2}} \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [n]_q}{[1]_q [2]_q \dots [s]_q} q = q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}_q$

olur. Bu eşitlik ise ifadenin doğru olduğunu gösterir.

Lemma 2.3.2:

Her $n \epsilon \mathbb{N}$ $k \geq 2$ için

$$(k-1) - [k-1]_q \leq \frac{1}{[n]_q} \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat:

$$(k-1) - [k-1]_q = (k-1) - (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{k-2})$$
$$= (k - 1 - 1 - q - q^2 - q^3 - \dots - q^{k-2})$$

İfadeye $k-2$ tane 1 ekleyip 1 çıkarırsak basit hesaplamalarla

$$(k-1) - [k-1]_q = k - 2 + (1 - 1 - q + 1 - 1 - q^2 + \dots 1 - 1 - q^{k-2})$$
$$= k - 2 + \left(1 - q + 1 - q^2 + \dots 1 - q^{k-2} - 1(k-2)\right)$$
$$= 1 - q + 1 - q^2 + 1 - q^3 - \dots 1 - q^{k-2}$$

$$(k-1)-[k-1]_q=(1-q)\Big(1+(1+q)+\cdots+(1+q+q^2+\cdots+q^{k-3})\Big)$$

$0<1-q<\frac{1}{[n]_q}$ eşitsizliğini kullandığımızda

$$\begin{aligned}(k-1)-[k-1]_q &\leq \frac{1}{[n]_q}(1+2+3+\cdots+k-2)\\ &\leq \frac{1}{[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)}{2}\end{aligned}$$

elde ederiz.

Tanım 2.3.4:

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için $f(x)$ in q-diferensiyeli $d_qf(x)$ olarak gösterilir ve $d_qf(x)=f(qx)-f(x)$ olarak tanımlıdır.

Tanım 2.3.5:

f fonksiyonun q -türevi $D_qf(x)$ ile gösterilir.

$$D_qf(x)=\frac{d_qf(x)}{d_qx}=\frac{f(qx)-f(x)}{x(q-1)}$$

olarak tanımlıdır. Burada $f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$\lim_{q\to 1}D_qf(x)=\lim_{q\to 1}\frac{f(qx)-f(x)}{x(q-1)}=f^{'}(x)$$

olduğu açıktır. Şimdi bazı fonksiyonların q -türevlerinin alınışını görelim.

Örnek 2.3.1:

$f(z) = z^2$ olarak verilsin. Fonksiyonun q türevini bulalım.

$$D_q f(z) = \frac{(qz)^2 - z^2}{x(q-1)} = \frac{z^2(q^2-1)}{z(q-1)} = [2]z$$

Örnek 2.3.2:

$f(z) = z^n$ ise $D_q f(z) = [n]z^{n-1}$ yazılabilir.

Tanım 2.3.6:

f ve g fonsiyonlarının çarpımlarının q türevi aşağıdaki gibidir.

$$D_q\big(f(x)g(x)\big) = \frac{(fg)(qx) - (fg)(x)}{x(q-1)}$$

$$D_q\big(f(x)g(x)\big) = \frac{f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x)}{x(q-1)}$$

$$= f(qx)\left(\frac{g(qx) - g(x)}{x(q-1)}\right) + g(x)\left(\frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)}\right)$$

$$= f(qx)D_q\big(g(x)\big) + \ g(x)D_q\big(f(x)\big)$$

Örnek 2.3.3:

$f(z) = \prod_{s=0}^{n-j-1}(1 - q^s z)$ olarak verilen fonsiyonun q türevini bulalım.

$$D_q\left(\prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z)\right) = D_q\big((1-z)_q^{n-j}\big) = -\big([n]_q - [j]_q\big)\prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z)$$

Burada basit hesaplamalarla

$$[n]_q - [j]_q = \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{1-q^j}{1-q} = \frac{1-q^n-1+q^j}{1-q} = \frac{q^j-q^n}{1-q}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her tarafını q^j ile bölersek

$$\frac{[n]_q - [j]_q}{q^j} = \frac{q^j-q^n}{(1-q)q^j} \frac{[n]_q - [j]_q}{q^j} = \frac{1-q^{n-j}}{(1-q)}$$

olur ve buradan

$$[n]_q - [j]_q = q^j \frac{1-q^{n-j}}{1-q}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu ifadeyi yerine yazarsak

$$D_q\left(\prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z)\right) = \left(q^j \frac{1-q^{n-j}}{1-q}\right)\prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z)$$

bulunur.

Tanım 2.3.7 :(Bernstein Eşitsizliği)

$n \in \mathbb{N}$ ve her $k \in \{0,1,\cdots n\}$ için , $a_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$$

olsun ve $r > 0$ için $\|P_n\|_r = maks\{|P_n(z)|: |z| \leq r\}$ ile gösterilsin.

i) Her $|z| \leq 1$ için $|P'_n(z)| \leq n\|P_n\|_1$

ii) Eğer $r > 0$ ise her $|z| \leq r$ için $|P'_n(z)| \leq \frac{n}{r}\|P_n\|_r$ dir.

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

Biz bu tezde belirli gösterimler kullanacağız. Her $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}\ \ ve\ k = 1,2,\ldots$ için

$$\pi_{k+1,n}(z) = \frac{z(1-z)}{n}\pi'_{k,n}(z) + z\pi_{k,n}(z) \tag{3.1}$$

eşitliği yazılabilir.

$$S_{k,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} j^k \binom{n}{j} z^j (1-z)^{n-j} \tag{3.2}$$

gösterilişini kullanırsak ifadede k yerine $k+1$ yazıldığında

$$S_{k+1,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} j^{k+1} \binom{n}{j} z^j (1-z)^{n-j} \tag{3.3}$$

elde edilir. z değişkenine göre türev aldığımızda çarpımın türevinden basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
S'_{k,n}(z) &= \sum_{j=0}^{n} j^k \binom{n}{j} j z^{j-1}(1-z)^{n-j} - \sum_{j=0}^{n} j^k \binom{n}{j} z^j (1-z)^{n-j-1}(n-j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} j^{k+1} \binom{n}{j} z^{j-1}(1-z)^{n-j} - \sum_{j=0}^{n} j^k \binom{n}{j} z^j (1-z)^{n-j-1} n \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n} j^k \binom{n}{j} z^j (1-z)^{n-j-1} j
\end{aligned}$$

$$S'_{k,n}(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n} j^{k+1}\binom{n}{j} z^j (1-z)^{n-j}}{z} - \frac{\sum_{j=0}^{n} j^{k}\binom{n}{j} z^j (1-z)^{n-j}}{1-z}$$

$$+ \frac{\sum_{j=0}^{n} j^{k+1}\binom{n}{j} z^j (1-z)^{n-j}}{1-z}$$

bulunabilir. Bulduğumuz bu eşitlik (3.2) ve (3.3) eşitliklerine göre düzenlenildiğinde

$$S'_{k,n}(z) = \frac{S_{k+1,n}(z)}{z} - n\frac{S_{k,n}(z)}{1-z} + \frac{S_{k+1,n}(z)}{1-z}$$

$$= S_{k+1,n}(z)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) - n\frac{S_{k,n}(z)}{1-z}$$

$$= \frac{S_{k+1,n}(z)}{z(1-z)} - n\frac{S_{k,n}(z)}{1-z}$$

$$\frac{S_{k+1,n}(z)}{n} = \frac{\mathrm{z}(1-z)}{\mathrm{n}} S'_{k,n}(z) + zS_{k,n}(z)$$

eşitliğinin gerçeklendiği görülür. $\pi_{k,n}(z)$ ifadesi

$$\pi_{k,n}(z) = \frac{S_{k,n}(z)}{n^k}$$

olarak yazılırsa, eşitliğin her tarafını n^k ile böldüğümüzde

$$\frac{S_{k+1,n}(z)}{nn^k} = \frac{\mathrm{z}(1-z)}{\mathrm{n}} \frac{S'_{k,n}(z)}{n^k} + \frac{S_{k,n}(z)}{n^k}$$

$$\frac{S_{k+1,n}(z)}{n^{k+1}} = \frac{\mathrm{z}(1-z)}{\mathrm{n}} \frac{S'_{k,n}(z)}{n^k} + \frac{S_{k,n}(z)}{n^k}$$

$$\pi_{k+1,n}(z) = \frac{\mathrm{z}(1-z)}{\mathrm{n}} \pi'_{k,n}(z) + z\pi_{k,n}(z)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerde k yerine $k-1$ yazılırsa

$$S_{k,n}(z) = \frac{z(1-z)}{n} S'_{k-1,n}(z) + zS_{k-1,n}(z) \tag{3.4}$$

$$\pi_{k,n}(z) = \frac{z(1-z)}{n} \pi'_{k-1,n}(z) + z\pi_{k-1,n}(z) \tag{3.5}$$

bulunur. Şimdi $\pi_{k,n}(z) = min\{n,k\} \leq k$ olacak şekilde ve k. dereceden bir $E_{k,n}(z)$ polinomunu

$$E_{k,n}(z) = \pi_{k,n}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)k}{2n} \tag{3.6}$$

olarak gösterelim. k yerine $k-1$ alınırsa bu polinom

$$E_{k-1,n}(z) = \pi_{k-1,n}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n} \tag{3.7}$$

yazılabilir. Eşitliğin z değişkenine göre türevini alındığında

$$E'_{k-1,n}(z) = \pi'_{k-1,n}(z) - (k-1)z^{k-2} - \frac{z^{k-3}(1-z)(k-1)(k-2)^2}{2n} + \frac{z^{k-2}(k-1)(k-2)}{2n} \tag{3.8}$$

olarak yazılabilir.

Lemma 3.1:

Her $|z| \leq 1,\ k \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ için $\left(\|\cdot\|, C(\overline{D})\right)$ uzayında düzgün bir norm olsun. $E_{k,n}(z)$ polinomu için $\|E'_{k,n}\| \leq k\|E_{k,n}\|$ eşitsizliği gerçeklenir.

İspat :

Bernstein eşitsizliğinden açıktır.

Lemma 3.2:

Her $k \geq 2\,, n \in \mathbb{N}\ \ ve\ z \in \overline{D}$ için

$$\mathrm{E_{k,n}(z)} = \frac{\mathrm{z}(1-\mathrm{z})}{\mathrm{n}}\mathrm{E'_{k-1,n}(z)} + \mathrm{zE_{k-1,n}(z)} + \frac{\mathrm{z^{k-2}}(1-z)(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[(\mathrm{k}-2)-\mathrm{z}(\mathrm{k}-1)]$$

eşitliği doğrudur.

İspat :

Yukarıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Eşitliğin sağ tarafında (3.7) ve (3.8) ifadelerine karşılık gelen eşitlikleri yazalım.

$$\frac{\mathrm{z}(1-z)}{\mathrm{n}}\Bigg(\pi'_{\mathrm{k-1}}(\mathrm{z}) - (k-1)\mathrm{z^{k-2}}$$

$$- \frac{\mathrm{z^{k-3}}(1-z)(k-1)(k-2)^2}{2\mathrm{n}} + \frac{\mathrm{z^{k-2}}(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}}\Bigg) + \mathrm{z}\Bigg(\pi_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})$$

$$- \mathrm{z^{k-1}} - \frac{\mathrm{z^{k-2}}(1-z)(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}}\Bigg)$$

$$+ \frac{\mathrm{z^{k-2}}(1-z)(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[(\mathrm{k}-2)-\mathrm{z}(\mathrm{k}-1)]$$

$$= \frac{z(1-z)}{n}\pi'_{k-1,n}(z) - \frac{z(1-z)}{n}(k-1)z^{k-2}$$

$$- \frac{z(1-z)}{n}\frac{z^{k-3}(1-z)(k-1)(k-2)^2}{2n}$$

$$+ \frac{z(1-z)}{n}\frac{z^{k-2}(k-1)(k-2)}{2n} + z\pi_{k-1,n}(z) - z^k$$

$$- z\frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n}$$

$$+ \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2) - z(k-1)]$$

$$= \frac{z(1-z)}{n}\pi'_{k-1,n}(z) + z\pi_{k-1,n}(z) - z^k - \frac{z(1-z)}{n}(k-1)z^{k-2}$$

$$- \frac{z(1-z)}{n}\frac{z^{k-3}(1-z)(k-1)(k-2)^2}{2n}$$

$$+ \frac{z(1-z)}{n}\frac{z^{k-2}(k-1)(k-2)}{2n} - z\frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n}$$

$$+ \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2) - z(k-1)]$$

elde edilir. Burada (3.5) ifadesi kullanılırsa

$$= \pi_{k,n}(z) - z^k - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)}{n} - \frac{z^{k-2}(1-z)^2(k-1)(k-2)^2}{2n^2}$$

$$+ \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n^2} - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n}$$

$$+ \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)(k-2)}{2n^2}$$

$$- \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)z(k-1)}{2n^2}$$

şeklinde yazılabilir. Basit hesaplamalarla ifade düzenlenildiğinde

$$=\pi_{k,n}(z) - z^k - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)}{n} - \frac{z^{k-2}(1-z)^2(k-1)(k-2)^2}{2n^2}$$

$$+ \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n^2} - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n}$$

$$+ \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)^2}{2n^2} - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)^2(k-2)}{2n^2}$$

$$=\pi_{k,n}(z) - z^k + \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n^2}\big(1-(k-1)\big)$$

$$+ \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)^2}{2n^2}(-(1-z)+1) - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)}{n}$$

$$- \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n}$$

$$=\pi_{k,n}(z) - z^k + \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)(2-k)}{2n^2} + \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)^2 z}{2n^2}$$

$$+ \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)}{2n}\big(-2-(k-2)\big)$$

$$=\pi_{k,n}(z) - z^k - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)^2}{2n^2} + \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)(k-2)^2}{2n^2}$$

$$+ \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(-k)}{2n}$$

$$=\pi_{k,n}(z) - z^k - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)k}{2n}$$

elde edilir. $e_k(z) = z^k$ olarak tanımladığımız için

$$=\pi_{k,n}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)k}{2n}$$

$$= E_{k,n}(z)$$

gerçeklendiği görülür.

Lemma 3.3:

$$\pi_{k,n}(z) - z^k = \frac{z(1-z)}{n}\left[\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right]' + \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} + z\left[\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right]$$

eşitliği doğrudur.

İspat :

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında bilinenler yerine yazıldığında

$$\frac{z(1-z)}{n}\left[\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right]' + \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} + z\left[\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right]$$

$$= \frac{z(1-z)}{n}\left[\pi'_{k-1,n}(z) - (k-1)z^{k-2}\right] + \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} + z\pi_{k-1,n}(z) - z^k$$

$$= \frac{z(1-z)}{n}\pi'_{k-1,n}(z) - \frac{z(1-z)}{n}(k-1)z^{k-2} + \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} + z\pi_{k-1,n}(z) - z^k$$

$$= \frac{z(1-z)}{n}\pi'_{k-1,n}(z) + z\pi_{k-1,n}(z) - \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} + \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} - z^k$$

$$= \pi_{k,n}(z) - z^k$$

elde edilir.

Lemma 3.4:

Her $|z| \leq 1,\ k \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|\pi_{k,n} - e_k\right\| \leq \frac{3}{n}(k-1)k$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat :

Yukarıdaki eşitsizliği gösterirken $|z| = 1$, $|(1 - z)| \leq 1 + |z| \leq 2$ ve $\left|z^{k-1}\right| = 1$ den yararlanacağız ve her k, n için $\left|\pi_{k,n}\right| \leq 1$, $|e_k(z)| \leq 1$ kullanacağız. Lemma 3.3 deki eşitliğin her iki tarafının normu alındığında

$$\left\|\pi_{k,n} - e_k\right\| = \left\|\frac{z(1-z)}{n}\left[\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right]' + \frac{(k-1)(e_{k-1} - e_k)}{n}\right.$$

$$\left. + z\left[\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right]\right\|$$

$$\left\|\pi_{k,n} - e_k\right\| \leq \frac{|z||(1-z)|}{n}\left\|\left[\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right]'\right\|$$

$$+ \frac{(k-1)|z^{k-1}||(1-z)|}{n} + |z|\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|$$

elde edilir. Burada Tanım 2.3.8 deki Bernstein eşitsizliğini kullanılarak

$$\left\|\pi_{k,n} - e_k\right\| \leq \frac{(k-1)2}{n}\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|$$

$$+ \frac{(k-1)2}{n} + \left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|$$

$$\left\|\pi_{k,n} - e_k\right\| \leq \frac{2(k-1)}{n}\left(\left\|\pi_{k-1,n}\right\| + \|e_{k-1}\|\right)$$

$$+ \frac{(k-1)2}{n} + \left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|$$

elde edilir. Ayrıca burada $\left|\pi_{k,n}\right| \leq 1$, $|e_k(z)| \leq 1$ ifadelerinden en büyük değerini $\left\|\pi_{k-1,n}\right\| + \|e_{k-1}\| = 2$ alarak yerine yazılabilir.

$$\|\pi_{k,n}-e_k\| \leq \frac{4(k-1)}{n}+\frac{2(k-1)}{n}+\|\pi_{k-1,n}-e_{k-1}\|$$

$$\leq \|\pi_{k-1,n}-e_{k-1}\|+\frac{6(k-1)}{n}$$

elde ettiğimiz bu son eşitsizlikte

$$\|\pi_{k,n}-e_k\| \leq \|\pi_{k-1,n}-e_{k-1}\|+\frac{6(k-1)}{n}$$

$k=1,2,\cdots$ için sırasıyla k değerleri verilirse

$$\|\pi_{1,n}-e_1\| \leq \|\pi_{0,n}-z^0\|+\frac{6(1-1)}{n}$$

$$\|\pi_{2,n}-e_2\| \leq \|\pi_{1,n}-e_1\|+\frac{6(2-1)}{n}$$

$$\|\pi_{3,n}-e_3\| \leq \|\pi_{2,n}-e_2\|+\frac{6(3-1)}{n}$$

$$\vdots$$

$$\|\pi_{k,n}-e_k\| \leq \|\pi_{k-1,n}-e_{k-1}\|+\frac{6(k-1)}{n}$$

bulunur. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanıldığında

$$\|\pi_{k,n}-e_k\| \leq \|\pi_{0,n}-1\|+\frac{6}{n}\big(1+2+3+\cdots+(k-1)\big)$$

$$\leq \frac{6}{n}\frac{(k-1)k}{2}$$

$$\|\pi_{k,n}-e_k\| \leq \frac{3}{n}(k-1)k$$

elde edilir. Burada $\pi_{0,n}(z) = z^0 = 1$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlikte k yerine $k-1$ yazılırsa

$$\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\| \leq \frac{3}{n}(k-1)(k-2) \tag{3.9}$$

bulunur.

Lemma 3.5:

Her $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ için $\sum_{j=3}^{k} j(j-1)(j-2) \leq k(k-1)(k-2)^2$ eşitsizliği doğrudur.

İspat :

$$\sum_{j=3}^{k} j(j-1)(j-2) = \sum_{j=3}^{k} (j^3 - 3j^2 + 2j)$$

$$= \sum_{j=3}^{k} j^3 - 3\sum_{j=3}^{k} j^2 - 2\sum_{j=3}^{k} j$$

$$= \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2 - 3 - 3\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - 3\right) + 2\left(\frac{k(k+1)}{2} - 3\right)$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} - 3 - \frac{k(k+1)(2k+1)}{2} + 9 + k(k+1) - 6$$

$$= k(k+1)\left(\frac{k(k+1)}{4} - \frac{2k+1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{k(k+1)(k^2 + k - 4k - 2 + 4)}{4}$$

$$= \frac{k(k+1)(k^2 - 3k + 2)}{4}$$

$$= \frac{k(k+1)(k-1)(k-2)}{4}$$

elde edilir. Burada $k \geq 3$ için $\frac{k+1}{4} < k-2$ olacağından

$$\sum_{j=3}^{k} j(j-1)(j-2) \leq k(k-1)(k-2)^2$$

bulunur.

Lemma 3.6:

$\|\cdot\|_r$, $C(\overline{D})_r$ de bir norm olarak tanımlansın. $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| \leq r\}$ her $k, n \in \mathbb{N}$, $|z| \leq r,\ 1 \leq r$ için

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \leq \frac{3r(1+r)}{2n} k(k-1) r^{k-2}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat :

Bernstein eşitsizliği kapalı birim diskte her $|z| \leq r,\ r > 1$ için

$$|\, P'_k(z)| \leq \frac{k}{r} \|P_k\|_r$$

olduğundan k yerine $k-1$ alındığında

$$\left|\left(\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right)'\right| = \frac{k-1}{r}\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|_r \tag{3.10}$$

olarak yazılabilir. Her $k, n \in \mathbb{N}$, $|z| \leq r, \left|\pi_{k,n}(z)\right| \leq r^k$ ve $|e_k(z)| \leq r^k$ eşitsizliklerinin gerçeklendiğini biliyoruz. Bu ifadelerde k yerine $k-1$ alındığında

$$\left|\pi_{k-1,n}(z)\right| \leq r^{k-1}$$

ve

$$|e_{k-1}(z)| \leq r^{k-1}$$

elde edilir. Lemma 3.3 deki eşitlikte her iki tarafın normu alındığında

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| = \left|\frac{z(1-z)}{n}\left[\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right]' + \frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n} + z\left[\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right]\right|$$

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \leq \left|\frac{z(1-z)}{n}\right|\left|\left(\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right)'\right| + \left|\frac{(k-1)z^{k-1}(1-z)}{n}\right| + |z|\left|\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right|$$

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \leq \frac{|z||(1-z)|}{2n}\left|\left(\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right)'\right| + \frac{(k-1)\left|z^{k-1}\right||(1-z)|}{n} + |z|\left|\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right|$$

yazılabilir. Burada $|z| \leq r$ ve $|(1-z)| \leq 1 + |z| \leq 1 + r$ aynı zamanda (3.10) deki eşitsizlik de kullanıldığında

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \leq \frac{r(1+r)}{n}\frac{(k-1)}{r}\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|_r$$

$$+ \frac{(k-1)(1+r)r^{k-1}}{n} + r\left|\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right|$$

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \leq \frac{(k-1)(1+r)}{n}\Big(\left\|\pi_{k-1,n}\right\|_r + \|e_{k-1}\|_r + \frac{(k-1)(1+r)r^{k-1}}{n}$$

$$+r\left|\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right|\Big)$$

elde edilir ve eşitsizlikte düzenlemeler yapıldığında

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \leq \frac{(k-1)(1+r)}{n} 2r^{k-1} + \frac{(k-1)(1+r)r^{k-1}}{n}$$

$$+r\left|\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right|$$

$$\leq r\left|\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right| + 3(1+r)r^{k-1}\frac{(k-1)}{n}$$

bulunur. Son olarak

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \leq r\left|\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right| + 3(1+r)r^{k-1}\frac{(k-1)}{n}$$

ifadesini kullanarak

$$\left|\pi_{k,n}(z)\right| + \left|e_{k,n}(z)\right| \leq r\left(\left|\pi_{k-1,n}(z)\right| + \left|e_{k-1,n}(z)\right|\right) + 3(1+r)r^{k-1}\frac{(k-1)}{n}$$

yazılabilir. $k = 1,2, \ldots$ için ayrı ayrı uygulanarak

$$\left|\pi_{1,n}(z)\right| + \left|e_{1,n}(z)\right| \leq r\left(\left|\pi_{0,n}(z)\right| + \left|e_{0,n}(z)\right|\right) + 3(1+r)r^{1-1}\frac{(1-1)}{n}$$

$$\left|\pi_{2,n}(z)\right| + \left|e_{2,n}(z)\right| \leq r\left(\left|\pi_{1,n}(z)\right| + \left|e_{1,n}(z)\right|\right) + 3(1+r)r^{2-1}\frac{(2-1)}{n}$$

$$\left|\pi_{3,n}(z)\right| + \left|e_{3,n}(z)\right| \le r\left(\left|\pi_{2,n}(z)\right| + \left|e_{2,n}(z)\right|\right) + 3(1+r)r^{3-1}\frac{(3-1)}{n}$$

$$\vdots$$

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \le r\left|\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right| + 3(1+r)r^{k-1}\frac{(k-1)}{n}$$

eşitsizlikler taraf tarafa toplanıldığında

$$\begin{aligned}\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| &\le \frac{3(1+r)r^{k-1}}{n}[1+2+3+\cdots+(k-1)] \\ &= \frac{3(1+r)r^{k-1}}{n}\frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{3r(1+r)}{2n}k(k-1)r^{k-2}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\|\pi_{k,n} - e_k\right\|_r \le \frac{3r(1+r)k(k-1)r^{k-2}}{2n}$$

k yerine $k-1$ alındığında

$$\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|_r \le \frac{3r(1+r)(k-1)(k-2)r^{k-3}}{2n} \tag{3.11}$$

bulunur.

Lemma 3.7:

$$E_{k,n,q}(z) = \frac{z(1-z)}{[n]_q} D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z) + zE_{k-1,n,q}(z) + G_{k,n,q}(z) \tag{3.12}$$

eşitliği doğrudur. Burada

$$G_{k,n,q}(z) = \frac{z^{k-2}(1-z)}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$
$$-\frac{z^{k-2}(1-z)z}{2[n]_q}\left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + 2(k-1) - 2[k-1]_q\right)$$

dır.

İspat :

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında (3.12) ve (3.19) da bulduğumuz ifadeyi yerine koyalım.

$$E_{k,n,q}(z) = \frac{z(1-z)}{[n]_q}\left\{D_q\left[\pi_{k-1,n,q}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right](z)\right\}$$
$$+z\left\{\pi_{k-1,n,q}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right\} + G_{k,n,q}(z)$$
$$= \frac{z(1-z)}{[n]_q} D_q\left[\pi_{k-1,n,q}\right](z) - \frac{z(1-z)}{[n]_q} D_q[e_{k-1}(z)](z)$$
$$- D_q\left[\frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right](z)$$
$$+ z\left\{\pi_{k-1,n,q}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right\}$$
$$+ G_{k,n,q}(z)$$

$$E_{k,n,q}(z)=\frac{z(1-z)}{[n]_q}D_q\left[\pi_{k-1,n,q}\right](z)-\frac{z(1-z)}{[n]_q}[k-1]_q z^{k-2}$$

$$-\frac{z(1-z)}{[n]_q}\left\{\frac{[k-2]_q z^{k-3}(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right\}$$

$$+\frac{z(1-z)}{[n]_q}\left\{\frac{[k-1]_q z^{k-2}(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right\}+z\pi_{k-1,n,q}(z)-zz^{k-1}$$

$$-z\frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}+G_{k,n,q}(z)$$

elde edilir. $G_{k,n,q}(z)$ nin eşiti olan ifadeyi yerine yazdığımızda çeşitli düzenlemelerle

$$E_{k,n,q}(z)=\frac{z(1-z)}{[n]_q}D_q\left[\pi_{k-1,n,q}\right](z)+\ z\pi_{k-1,n,q}(z)-\frac{z^{k-1}(1-z)[k-1]_q}{[n]_q}$$

$$-\frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)[k-2]_q}{2[n]_q[n]_q}+\frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)[k-1]_q}{2[n]_q[n]_q}$$

$$-z^k-\frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}+\frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)[k-2]_q}{2[n]_q[n]_q}$$

$$-\frac{z^{k-2}(1-z)z}{2[n]_q}\left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q}+2(k-1)-2[k-1]_q\right)$$

$$E_{k,n,q}(z)=\pi_{k,n,q}(z)-\frac{z^{k-1}(1-z)[k-1]_q}{[n]_q}+\frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)[k-1]_q}{2[n]_q[n]_q}-z^k$$

$$-\frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}-\frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)[k-1]_q}{2[n]_q[n]_q}$$

$$-\frac{2z^{k-1}(1-z)(k-1)}{2[n]_q}+\frac{2z^{k-1}(1-z)[k-1]_q}{2[n]_q}$$

$$=\pi_{k,n,q}(z)-z^k-\frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}-\frac{2z^{k-1}(1-z)(k-1)}{2[n]_q}$$

$$= \pi_{k,n,q}(z) - z^k - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)}{2[n]_q}(k-2+2)$$

$$= \pi_{k,n,q}(z) - z^k - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)k}{2[n]_q}$$

$$= E_{k,n,q}(z)$$

Lemma 3.8:

Her $k, n \in \mathbb{N}$, $|z| \leq r,\ 1 \leq r$ için

$$\left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z)\right| \leq \frac{3r(1+r)}{2n} k(k-1)r^{k-2}$$

olduğunu gösterelim.

İspat:

$\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| \ \leq r\}$ ve Bernstein eşitsizliği kapalı birim diskte her

$$|z| \ \leq r,\ \ r > 1$$

için

$$|\ P'_k(z)| \leq \frac{k}{r} \|P_k\|_r$$

olduğundan k yerine $k-1$ alındığında

$$\left|\left(\pi_{k-1,n}(z) - z^{k-1}\right)'\right| = \frac{k-1}{r} \left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|_r$$

olarak yazılabilir.

Her $k,n \in \mathbb{N}, |z| \leq r$, $\left|\pi_{k,n}(z)\right| \leq r^k$ ve $|e_k(z)| \leq r^k$ eşitsizliklerinin gerçeklendiğini biliyoruz. Bu ifadelerde k yerine $k-1$ alındığında

$$\left|\pi_{k-1,n}(z)\right| \leq r^{k-1} \text{ ve } |e_{k-1}(z)| \leq r^{k-1}$$

elde edilir. Lemma 3.6 da ispatladığımız eşitsizliği ve

$$\begin{aligned}\left|z^{k-2}(1-z)\right| &= \left|z^{k-2}\right||(1-z)| \\ &= r^{k-2}(1+r)\end{aligned}$$

kullanarak aşağıdaki eşitsizliği düzenleyelim. $\left|E'_{k-1,n}(z)\right|$ ifadesinin değerini hesaplayalım. $E_{k-1,n}(z)$ değerinin $k \geq 3$ için $(k-1)$. dereceden küçük bir polinom olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}\left|E'_{k-1,n}(z)\right| &\leq \frac{k-1}{r}\left\|E_{k-1,n}\right\|_r \\ &\leq \frac{k-1}{r}\left(\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1} - \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n}\right\|_r\right) \\ &\leq \frac{k-1}{r}\left(\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|_r + \left\|\frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n}\right\|_r\right) \\ &\leq \frac{k-1}{r}\left(\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|_r + \frac{(k-1)(k-2)r^{k-2}(1+r)}{2n}\right)\end{aligned}$$

$\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1}\right\|_r$ ifadesini kullanırsak

$$\left|\mathrm{E}'_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| \leq \frac{k-1}{r}\left(\frac{3r(1+r)(k-1)(k-2)r^{k-3}}{2n} + \frac{r^{k-2}(k-1)(k-2)(1+r)}{2\mathrm{n}}\right)$$

yazılabilir. Basit düzenlemelerle

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{E}'_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| &\leq \frac{(k-1)(k-1)(k-2)}{2n}\left(3(1+r)r^{k-3} + (1+r)r^{k-3}\right)\\ &= \frac{(k-1)(k-1)(k-2)}{2n}4(1+r)r^{k-3}\\ &= \frac{2(k-1)(k-1)(k-2)}{n}(1+r)r^{k-3}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada k yerine $k-1$ alınarak

$$\left|\mathrm{E}'_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| \leq \frac{2k(k-1)(k-2)}{n}(1+r)r^{k-3}$$

yazılabilir.

Lemma 3.9:

$k \geq 3$ olmak üzere $\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right|$ ifadesi için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| \leq \frac{3r^{k-1}k(k-1)(k-2)}{[n]_q}$$

İspat:

$$\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| \leq \frac{k-1}{r}\left\|E_{k-1,n,q}\right\|_r$$

$$\leq \frac{k-1}{r}\left\|\pi_{k-1,n,q} - e_{k-1} - \frac{(e_{k-2}-e_{k-1})(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right\|_r$$

$$\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| \leq \frac{k-1}{r}\left(\left\|\pi_{k-1,n,q} - e_{k-1}\right\|_r\right.$$

$$\left.+\frac{\|(e_{k-2}-e_{k-1})(k-1)(k-2)\|_r}{2[n]_q}\right)$$

$$\leq \frac{k-1}{r}\left\{\frac{2(k-2)[k-2]_q r^{k-1}}{[n]_q} + \frac{(k-1)(k-2)r^{k-2}(1+r)}{2[n]_q}\right\}$$

Burada $r^{k-1} \leq r^k$ olduğunu biliyoruz ve bu ifadeyi kullanarak

$$r^{k-2}(1+r) = r^{k-2} + r^{k-1}$$

$$\leq r^k + r^k$$

$$\leq 2r^k$$

yazabiliriz. Eşitsizliğini kullandığımız taktirde

$$\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| \leq \frac{k-1}{r}\left\{\frac{2(k-2)[k-2]_q r^k}{[n]_q} + \frac{(k-1)(k-2)2r^k}{2[n]_q}\right\}$$

Burada $[k-2]_q \leq k-1 \leq k$ ve $k-1 \leq k$ için

$$\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| \leq \frac{k-1}{r}\left\{\frac{2(k-2)kr^k}{[n]_q} + \frac{k(k-2)r^k}{[n]_q}\right\}$$

$$= \frac{3r^{k-1}k(k-1)(k-2)}{[n]_q}$$

bulunur.

G ⊂ ℂ olacak şekilde G kümesi R> 1 yarıçaplı, sıfır merkezli açık bir disk olarak tanımlansın. $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu G kümesinde analitik ise her $z \in G$ için

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

yazılabilir. Buradan da Kompleks Bernstein polinomlarını

$$B_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} f\left({}^{k}\!/_{n}\right)$$

olarak tanımlayabiliriz.

Teorem 3.1: (Kompleks Bernstein Polinomları İçin Vornovskaja Tipli Teorem)

i) Her $n \in \mathbb{N}, z \in \overline{D}$ için Voronovskaja tipli sonucun kapalı birim diskte gerçeklenmesi aşağıdaki gibidir.

$$\left| B_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1-z)}{n} f''(z) \right| \leq \frac{|z||(1-z)|}{2n} \frac{10M(f)}{n}$$

Burada $M(f)$ ifadesi sonludur yani

$$0 \leq M(f) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)^2 |c_k| \ < \infty$$

dır.

ii) Her $n \in \mathbb{N}, |z| \leq r \ , r \in [1, R)$ için

$$\left| B_n(f)(z) - f(z) - \frac{\mathrm{z}(1-z)}{\mathrm{n}} f''(\mathrm{z}) \right| \leq \frac{5(1+r)^2}{2n} \cdot \frac{M_r(f)}{n}$$

şeklindedir. Burada $M_r(f)$ ifadesi sonludur yani

$$M_r(f) = \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| k(k-1)(k-2)^2 r^{k-2} \leq \infty$$

dır.

İspat :

(i) $k = 0,1,2, \ldots$ için $e_k(z)$ ve $B_n(e_k)(z)$ ifadeleri $e_k(z) = z^k$ ve $B_n(e_k)(z) = \pi_{k,n}(z)$ olarak gösterilirse $B_n(f)(z)$ polinomu analitik olduğundan

$$B_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \pi_{k,n}(z)$$

olarak yazabiliriz. Her $n \in \mathbb{N}, z \in \overline{D}$ için

$$\left|B_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1-z)}{n} f''(z)\right| \le \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| \left|\pi_{k,n}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1-z)(k-1)k}{2n}\right|$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu ispatlayalım. İspatı yaparken kullanacağımız bazı ifadelerin doğru olduğunu gösterelim. Bu eşitlikler sayesinde $E_{k,n}(z)$ ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabiliriz.

Öncelikle her $|z| \le 1,\ k \ge 2,\ n \in \mathbb{N}$ için $\left(\|\cdot\|, C(\overline{D})\right)$ uzayında düzgün bir norm olmak üzere Tanım 2.3.7 deki Bernstein eşitsizliğinden yararlanılarak $E_{k,n}(z)$ polinomu için

$$\left\|E'_{k-1,n}\right\| \le (k-1)\left\|E_{k-1,n}\right\|$$

yazılabilir. Her $k \ge 2, n \in \mathbb{N}$ ve $z \in \overline{D}$ için Lemma 3.2 eşitliğinin gerçeklendiğini göstermiştik. Eşitliğin her iki tarafının normu alındığında

$$\begin{aligned}\left|E_{k,n}(z)\right| &= \left|\frac{z(1-z)}{n} E'_{k-1,n}(z) + zE_{k-1,n}(z) + \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2) - z(k-1)]\right| \\ &\le \left|\frac{z(1-z)}{n} E'_{k-1,n}(z)\right| + \left|zE_{k-1,n}(z)\right| + \left|\frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2) - z(k-1)]\right|\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \le \frac{|z||(1-z)|}{n}\left\|E'_{k-1,n}\right\| + |z|\left|E_{k-1,n}(z)\right|$$

$$+\left|\frac{z(1-z)z^{k-3}(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2)-z(k-1)]\right|$$

$$\leq \frac{|z||(1-z)|2}{2n}\left\|E'_{k-1,n}\right\| + |z|\left|E_{k-1,n}(z)\right|$$

$$+\frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{\left|z^{k-3}\right|(k-1)(k-2)}{n}[(k-2)+|z|(k-1)]$$

olur. Burada $|z| = 1$ alınırsa

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\left(2\left\|E'_{k-1,n}\right\| + \frac{(k-1)(k-2)}{n}[(k-2)+(k-1)]\right)$$

$$\leq \left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\left(2\left\|E'_{k-1,n}\right\| + \frac{(k-1)(k-2)(2k-3)}{n}\right)$$

eşitsizlikte $2k-3 < 2k$ olarak alınır ve Bernstein eşitsizliğini kullanılırsa

$$\left\|E'_{k-1,n}\right\| \leq (k-1)\left\|E_{k-1,n}\right\|$$

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\left(2(k-1)\left\|E_{k-1,n}\right\| + \frac{(k-1)(k-2)(2k)}{n}\right)$$

elde edilir. Burada (3.7) deki eşitliği kullanıldığında

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n}(z)\right|$$

$$+\frac{|z||(1-z)|}{2n}\left(2(k-1)\left\|\pi_{k-1,n} - e_{k-1} - \frac{(e_{k-2}-e_{k-1})(k-1)(k-2)}{2n}\right\| + \frac{(k-1)(k-2)(2k)}{n}\right)$$

elde edilir. İfadenin düzenlenmesiyle

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k,n}}(\mathrm{z})\right| \le \left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| \\
&+ \frac{|\mathrm{z}||(1-\mathrm{z})|}{2\mathrm{n}}\Bigg(2(\mathrm{k}-1)\left\|\pi_{\mathrm{k-1,n}} - e_{k-1}\right\| \\
&+ 2(\mathrm{k}-1)\left\|\frac{(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}}[e_{k-2} - e_{k-1}]\right\| + \frac{(k-1)(k-2)2k}{\mathrm{n}}\Bigg)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$
e_{k-2} - e_{k-1} = \mathrm{z}^{\mathrm{k}-2} - \mathrm{z}^{\mathrm{k}-1} = \mathrm{z}^{\mathrm{k}}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right) = \mathrm{z}^{\mathrm{k}}\frac{(1-\mathrm{z})}{\mathrm{z}^2} = \mathrm{z}^{\mathrm{k}-2}(1-\mathrm{z})
$$

olarak yazılabilir ve her iki tarafın normu alındığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$
\|e_{k-2} - e_{k-1}\| \le 2
$$

(3.9) eşitsizliğini kullandığımızda

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k,n}}(\mathrm{z})\right| &\le \left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{|\mathrm{z}||(1-\mathrm{z})|}{2\mathrm{n}}\Bigg(2(\mathrm{k}-1)\frac{3}{n}(k-1)(k-2) \\
&\quad +2(\mathrm{k}-1)\left\|\frac{(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}}[e_{k-2} - e_{k-1}]\right\| + \frac{(k-1)(k-2)2k}{\mathrm{n}}\Bigg) \\
&\le \left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{|\mathrm{z}||(1-\mathrm{z})|}{2\mathrm{n}}\Bigg[\frac{2(\mathrm{k}-1)}{n}\Bigg(3(k-1)(k-2) \\
&\quad + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\|e_{k-2} - e_{k-1}\| + k(k-2)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve basit hesaplamalar yapılarak

$$\left|\mathrm{E}_{k,n}(z)\right| \leq \left|\mathrm{E}_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\left[\frac{2(k-1)}{n}(3(k-1)(k-2)\right.$$

$$\left.+\frac{(k-1)(k-2)2}{2}+k(k-2)\Big)\right]$$

$$= \left|\mathrm{E}_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\left[\frac{2(k-1)}{n}\big(4(k-1)(k-2)+k(k-2)\big)\right]$$

$$= \left|\mathrm{E}_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\left[\frac{2(k-1)}{n}(k-2)(4k-4+k)\right]$$

bulunur. Burada $5k > 5k-4$ olarak alınırsa

$$\left|\mathrm{E}_{k,n}(z)\right| \leq \left|\mathrm{E}_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\left(\frac{2(k-1)(k-2)5k}{n}\right)$$

$$= \left|\mathrm{E}_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10(k-1)(k-2)k}{n}$$

$$\leq \left|\mathrm{E}_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10(k-1)(k-2)k}{n}$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu eşitsizlikte $k = 1,2,\cdots$ için sırasıyla k değerleri verildiğinde

$$\left|\mathrm{E}_{1,n}(z)\right| \leq \left|\mathrm{E}_{0,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10(1-1)(1-2)1}{n}$$

$$\left|\mathrm{E}_{2,n}(z)\right| \leq \left|\mathrm{E}_{1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10(2-1)(2-2)2}{n}$$

$$\left|\mathrm{E}_{3,n}(z)\right| \leq \left|\mathrm{E}_{2,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10(3-1)(3-2)3}{n}$$

$\vdots$

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10(k-1)(k-2)k}{n}$$

olduğu görülür. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanıldığında

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq \left|E_{0,n}(z)\right| + \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10}{n}\sum_{j=3}^{k} j(j-1)(j-2)$$

elde edilir . $E_{0,n}(z) = 0$ olduğunu biliyoruz. Şimdi Lemma 3.5 deki

$$\sum_{j=3}^{k} j(j-1)(j-2) \leq k(k-1)(k-2)^2$$

eşitsizliğini kullanılarak ispatın sonun da bulunan eşitsizlik aşağıdaki gibi düzenlenebilir. Bu düzenlemeyle

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10}{n}k(k-1)(k-2)^2$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\left|B_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1-z)}{n}f''(z)\right| \leq \sum_{k=3}^{\infty}|c_k|\left|E_{k,n}(z)\right|$$

$$\leq \frac{|z||(1-z)|}{2n}\frac{10}{n}\sum_{k=3}^{\infty}|c_k|\; k(k-1)(k-2)^2$$

$$f^{(4)}(\mathrm{z}) = \sum_{k=4}^{\infty} c_k \; k(k-1)(k-2)(k-3)\mathrm{z}^{\mathrm{k}-4}$$

Serisi $\overline{D}$ ’da mutlak yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=3}^{\infty} |c_k| \; k(k-1)(k-2)^2 < \infty$$

olur.

İspat :

(ii) Lemma 3.2 deki eşitliğin her iki tarafının normu alındığında

$$\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k,n}}(\mathrm{z})\right| = \left|\frac{\mathrm{z}(1-\mathrm{z})}{\mathrm{n}} \mathrm{E}'_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z}) + \mathrm{z}\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z}) + \frac{\mathrm{z}^{\mathrm{k}-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[(\mathrm{k}-2) - \mathrm{z}(\mathrm{k}-1)]\right|$$

elde edilir. Lemma 3.8 deki eşitsizlikler kullanılarak aşağıdaki düzenlemeler yapılabilir.

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k,n}}(\mathrm{z})\right| &\leq \frac{|\mathrm{z}||(1-\mathrm{z})|}{2\mathrm{n}}\left|\mathrm{E}'_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + |\mathrm{z}|\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| \\
&\quad + \frac{\left|\mathrm{z}^{\mathrm{k}-2}\right||1-\mathrm{z}|(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[(\mathrm{k}-2) + |\mathrm{z}|(\mathrm{k}-1)] \\
&\leq \frac{r(1+r)}{n}\frac{2k(k-1)(k-2)(1+r)r^{k-3}}{n} + r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| \\
&\quad + \frac{(1+\mathrm{r})r^{k-2}(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[(\mathrm{k}-2) + \mathrm{r}(\mathrm{k}-1)] \\
&\leq \frac{2r(1+r)^2 k(k-1)(k-2)r^{k-3}}{\mathrm{n}^2} + r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right|
\end{aligned}$$

$$+\frac{(1+\mathrm{r})r^{k-2}(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[(\mathrm{k}-2)+\mathrm{r}(\mathrm{k}-1)]$$

$$\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k,n}}(\mathrm{z})\right| \leq r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{(1+\mathrm{r})r^{k-2}(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[4\mathrm{k}(1+\mathrm{r})+(\mathrm{k}-2)+\mathrm{r}(\mathrm{k}-1)]$$

$$= r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{(1+\mathrm{r})r^{k-2}(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[4\mathrm{k}+4\mathrm{kr}+\mathrm{k}-2+\mathrm{rk}-\mathrm{r}]$$

$$= r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{(1+\mathrm{r})r^{k-2}(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[5\mathrm{k}-2+\mathrm{r}(5\mathrm{k}-1)]$$

Burada $5k > 5k-1$ ve $5k > 5k-2$ alınırsa

$$\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k,n}}(\mathrm{z})\right| \leq r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{(1+\mathrm{r})r^{k-2}(k-1)(k-2)}{2\mathrm{n}^2}[5\mathrm{k}+5\mathrm{rk}]$$

$$= r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{(1+\mathrm{r})r^{k-2}(k-1)(k-2)5k(r+1)}{2\mathrm{n}^2}$$

$$= r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{(1+\mathrm{r})^2 k(k-1)(k-2)r^{k-2}}{2\mathrm{n}^2}$$

bulunabilir. Elde ettiğimiz bu eşitsizlik için

$$\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k,n}}(\mathrm{z})\right| \leq r\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{5(1+\mathrm{r})^2 k(k-1)(k-2)r^{k-2}}{2\mathrm{n}^2}$$

yazılabilir. $\mathrm{E}_{0,\mathrm{n}}(\mathrm{z}) = \mathrm{E}_{1,\mathrm{n}}(\mathrm{z}) = \mathrm{E}_{2,\mathrm{n}}(\mathrm{z}) = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlik $k = 1,2,\cdots$ için ayrı ayrı uygulanırsa

$$\left|\mathrm{E}_{1,\mathrm{n}}(\mathrm{z})\right| \leq r\left|\mathrm{E}_{0,\mathrm{n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{5(1+\mathrm{r})^2 1(1-1)(1-2)r^{1-2}}{2\mathrm{n}^2}$$

$$\left|\mathrm{E}_{2,\mathrm{n}}(\mathrm{z})\right| \leq r\left|\mathrm{E}_{1,\mathrm{n}}(\mathrm{z})\right| + \frac{5(1+\mathrm{r})^2 2(2-1)(2-2)r^{2-2}}{2\mathrm{n}^2}$$

$$\left|E_{3,n}(z)\right| \leq r\left|E_{2,n}(z)\right| + \frac{5(1+r)^2 3(3-1)(3-2)r^{3-2}}{2n^2}$$

$\vdots$

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{5(1+r)^2 k(k-1)(k-2)r^{k-2}}{2n^2}$$

bulunur. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanıldığında

$$\begin{aligned}\left|E_{k,n}(z)\right| &\leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{5(1+r)^2 k(k-1)(k-2)r^{k-2}}{2n^2} \\ &\leq \frac{5(1+r)^2 r^{k-2}}{2n^2}\left[\sum_{j=3}^{k} j(j-1)(j-2)\right]\end{aligned}$$

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq \frac{5(1+r)^2 k(k-1)(k-2)^2 r^{k-2}}{2n^2}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left|B_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1-z)}{n} f''(z)\right| &\leq \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| \left|E_{k,n}(z)\right| \\ &\leq \frac{5(1+r)^2}{2n^2} \sum_{k=3}^{\infty} |c_k|\, k(k-1)(k-2)^2 r^{k-2}\end{aligned}$$

$f^{(4)}(z) = \sum_{k=4}^{\infty} c_k \; k(k-1)(k-2)(k-3)z^{k-4}$

Seri $\overline{D}$ ’da mutlak yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=3}^{\infty} |c_k| \; k(k-1)(k-2)^2 < \infty$$

dır.

Teorem 3.2:

$0 < q < 1$, $R > 1$ olmak üzere , $D_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ verilsin. $f: D_R \longrightarrow \mathbb{C}$, f fonksiyonu D_R uzayında analitik olmak üzere, her $z \in D_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olarak yazabiliriz.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, z \in \overline{D_1}$ için

$$\left| B_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{\mathrm{z}(1-z)}{2[n]_q} f''(\mathrm{z}) \right| \leq \frac{|\mathrm{z}(1-\mathrm{z})|}{2[n]_q} \frac{9M(f)}{[n]_q}$$

gerçeklenir. Burada

$$0 < M(f) = \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| k(k-1)(k-2)^2 < \infty$$

olarak tanımlıdır.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, |z| \leq r$, $r \in [1, R)$ için

$$\left| B_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{\mathrm{z}(1-z)}{2[n]_q} f''(\mathrm{z}) \right| \leq \frac{(1+r)}{2[n]_q} \frac{9K_r(f)}{[n]_q}$$

Burada

$$K_r(f) = \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| k(k-1)(k-2)^2 r^{k-2} \leq \infty$$

dır.

İspat:

(i) $k = 0,1,2,\ldots$ için $e_k(z) = z^k$ ve $B_{n,q}(e_k)(z) = \pi_{k,n,q}(z)$ olarak gösterelim. $B_{n,q}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \pi_{k,n,q}(z)$ olarak yazabiliriz. Her $n \in \mathbb{N}, z \in \overline{D_1}$ için

$$\left|B_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{z(1-z)}{2[n]_q} f''(z)\right| \leq \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| \left|\pi_{k,n,q}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1-z)k(k-1)}{2[n]_q}\right|$$

olduğunu ispatlayalım. İspatı yaparken kullanacağımız ifadelerin doğru olduğunu görelim.

$$\pi_{k+1,n,q}(z) = \frac{z(1-z)}{[n]_q} D_q\left[\pi_{k,n,q}\right](z) + z\pi_{k,n,q}(z) \tag{3.13}$$

olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}\,, z\epsilon\overline{D_1}$ için

$$S_{k,n,q}(z) = \sum_{j=0}^{n} [j]_q^k \binom{n}{j}_q z^j \prod_{s=0}^{n-j-1}(1 - q^s z) \tag{3.14}$$

$$S_{k+1n,q}(z) = \sum_{j=0}^{n} [j]_q^{k+1} \binom{n}{j} z^j \prod_{s=0}^{n-j-1}(1 - q^s z) \tag{3.15}$$

Tanım 2.1.5 belirtildiği gibi çarpımın türevini kullandığımızda

$$D_q\left[S_{k,n,q}\right](z) = \sum_{j=0}^{n} [j]_q^k \binom{n}{j}_q \left\{\prod_{s=0}^{n-j-1}(1 - q^s z)\, D_q(z^j)(z) + (zq)^j D_q\left(\prod_{s=0}^{n-j-1}(1 - q^s z)\right)\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} [j]_q^k \binom{n}{j}_q \left\{[j]_q z^{j-1} \prod_{s=0}^{n-j-1}(1 - q^s z) + z^j q^j \prod_{s=0}^{n-j-1}(1 - q^s z)\left(\frac{1}{1-q}\frac{q^{n-j}-1}{1-z}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sum_{j=0}^{n}[j]_q^k \binom{n}{j}_q [j]_q z^j \prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z)}{z} - \frac{\sum_{j=0}^{n}[j]_q^k \binom{n}{j}_q z^j \prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z) q^j \left(1-q^{n-j}\right)}{(1-z)(1-q)}$$

$$= \frac{S_{k+1,n,q}(z)}{z} - \frac{\sum_{j=0}^{n}[j]_q^k \binom{n}{j}_q z^j \prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z)}{1-z}\left([n]_q - [j]_q\right)$$

$$= \frac{S_{k+1,n,q}(z)}{z} - \frac{\sum_{j=0}^{n}[j]_q^k \binom{n}{j}_q z^j \prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z)[n]_q}{1-z} + \frac{\sum_{j=0}^{n}[j]_q^k \binom{n}{j}_q z^j \prod_{s=0}^{n-j-1}(1-q^s z)[j]_q}{1-z}$$

$$= \frac{S_{k+1,n,q}(z)}{z} - \frac{[n]_q}{1-z} S_{k,n,q}(z) + \frac{S_{k+1,n,q}(z)}{(1-z)}$$

$$= \frac{S_{k+1,n,q}(z)}{z(1-z)} - \frac{[n]_q}{1-z} S_{k,n,q}(z)$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu eşitliği düzenlersek

$$\frac{S_{k+1,n,q}(z)}{[n]_q} = \frac{D_q[S_{k,n,q}](z)z(1-z)}{[n]_q} + zS_{k,n,q}(z)$$

yazabiliriz. Burada k yerine $k-1$ alınırsa

$$\frac{S_{k,n,q}(z)}{[n]_q} = \frac{D_q[S_{k-1,n,q}](z)z(1-z)}{[n]_q} + zS_{k-1,n,q}(z) \qquad (3.16)$$

yazılabilir.

$$\pi_{k,n,q}(z) = \frac{S_{k,n,q}(z)}{[n]_q^{k+1}}$$

olarak tanımlanırsa eşitliğinin her tarafı $[n]_q^{k+1}$ ile bölündüğünde

$$\frac{S_{k+1,n,q}(z)}{[n]_q[n]_q^{k+1}} = \frac{D_q[S_{k,n,q}](z)z(1-z)}{[n]_q[n]_q^{k+1}} + \frac{zS_{k,n,q}(z)}{[n]_q^{k+1}}$$

$$\pi_{k+1,n,q}(z) = \frac{D_q\left[\pi_{k,n,q}\right](z)z(1-z)}{[n]_q} + z\pi_{k,n,q}(z)$$

elde ederiz Burada k yerine $k-1$ alınırsa

$$\pi_{k,n,q}(z) = \frac{D_q\left[\pi_{k-1,n,q}\right](z)z(1-z)}{[n]_q} + z\pi_{k-1,n,q}(z) \tag{3.17}$$

$$E_{k,n,q}(z) = \pi_{k,n,q}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1-z)k(k-1)}{2[n]_q} \tag{3.18}$$

olarak tanımlanıp k yerine $k-1$ alınırsa

$$E_{k-1,n,q}(z) = \pi_{k-1,n,q}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q} \tag{3.19}$$

yazılabilir. Lemma 3.7 de gösterdiğimiz

$$E_{k,n,q}(z) = \frac{z(1-z)}{[n]_q} D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z) + zE_{k-1,n,q}(z) + G_{k,n,q}(z)$$

eşitliğini kullanalım. Her iki tarafın normunu aldığımızda

$$\begin{aligned}
\left|E_{k,n,q}(z)\right| = \Bigg| & \frac{z(1-z)}{[n]_q} D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z) + zE_{k-1,n,q}(z) \\
& + \frac{z^{k-2}(1-z)}{2[n]_q} \frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q} \\
& - \frac{z^{k-2}(1-z)z}{2[n]_q} \left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + 2(k-1) - 2[k-1]_q \right) \Bigg|
\end{aligned}$$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \frac{|z||1-z|}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| + |z|\left|E_{k-1,n,q}(z)\right|$$

$$+\frac{|z|^{k-3}|z||1-z|}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$

$$-\frac{|z|^{k-2}|z||1-z|}{2[n]_q}\left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + 2(k-1) - 2[k-1]_q\right)$$

Burada kompleks analizdeki ortalama değer teoremiden hesaplanarak $\mathbb{C}(\overline{D_1})$ uzayında tanımlı $\|\cdot\|_1$ düzgün norm için

$$\left|D_q(f)(z)\right| \leq \|f'\|_1$$

eşitsizliği söylenebilir. Bu özellikten yararlanarak

$$\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| \leq \left\|E'_{k-1,n,q}\right\|_1$$

ifadesi kullanlabilir.

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}2\left\|E'_{k-1,n,q}\right\|_1 + |z|\left|E_{k-1,n,q}(z)\right|$$

$$+\frac{|z|^{k-3}|z||1-z|}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$

$$-\frac{|z|^{k-2}|z||1-z|}{2[n]_q}\left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + 2(k-1) - 2[k-1]_q\right)$$

$|z| \leq 1$ olduğundan $|z| = 1$, $|z|^{k-3} = 1$, $|z|^{k-2} = 1$ alacağız.

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2\left\|E'_{k-1,n,q}\right\|_1\right.$$

$$\left.+\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + 2(k-1) - 2[k-1]_q\right\}$$

$$\leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2\left\|E'_{k-1,n,q}\right\|_1\right.$$

$$\left.+\frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\left([k-2]_q + [k-1]_q\right) + 2\left((k-1) - [k-1]_q\right)\right\}$$

Burada $[k-1]_q \geq [k-2]_q$ olduğu açıktır. Bu eşitsizlik kullanıldığında

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2\left\|E'_{k-1,n,q}\right\|_1\right.$$

$$\left.+\frac{2(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + 2\left((k-1) - [k-1]_q\right)\right\}$$

yazılabilir. Lemma 2.3.2 de gösterilen eşitsizlik kullanıldığında

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2\left\|E'_{k-1,n,q}\right\|_1\right.$$

$$\left.+\frac{2(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + \frac{2(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right\}$$

bulunur. Bernstein eşitsizliğini kullandığımızda

$$\left\|E'_{k-1,n,q}\right\|_1 \leq (k-1)\left\|E_{k-1,n,q}\right\|_1$$

eşitsizliği için

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2(k-1)\left\|E_{k-1,n,q}\right\|_1\right.$$

$$\left. + \frac{2(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + \frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\right\}$$

yazılabilir.

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2(k-1)\left\|\pi_{k-1,n,q} - e_{k-1} - \frac{z^{k-2}(1-z)(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right\|_1\right.$$

$$\left. + \frac{2(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + \frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\right\}$$

$$\leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2(k-1)\left\|\pi_{k-1,n,q} - e_{k-1}\right\|_1\right.$$

$$\left. +2(k-1)\frac{\|(e_{k-2}-e_{k-1})\|_1(k-1)(k-2)}{2[n]_q} + \frac{2(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + \frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\right\}$$

Burada

$$\left\|\pi_{k-1,n,q} - e_{k-1}\right\|_1 \leq \frac{2(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$

eşitsizliğinden yararlanalım. Ayrıca $|z^{k-2}| = 1$ ve $|1-z| \leq 1 + |z| = 2$ ifadelerini kullanalım.

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2(k-1)\frac{2(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}\right.$$

$$+\frac{2(k-1)^2|z^{k-2}||1-z|(k-2)}{2[n]_q}$$

$$\left.+\frac{2(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q}+\frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\right\}$$

$$\leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\left\{2(k-1)\frac{2(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}\right.$$

$$\left.+\frac{2(k-1)^2(k-2)2}{2[n]_q}+\frac{2(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q}+\frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\right\}$$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\left\{4[k-2]_q+2(k-1)+2[k-1]_q+1\right\}$$

Burada $[k-1]_q \leq k$ ve $[k-2]_q \leq k-1$ eşitsizliklerini kullanarak

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\{4(k-1)+2(k-1)+2k+1\}$$

$$\leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{|z||1-z|}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}(8k-5)$$

bulunur ve son olarak eşitsizlikte $8k-5<9k$ olarak alınırsa

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{9|z||1-z|k(k-1)(k-2)}{2[n]_q[n]_q}$$

elde edilir.

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{9|z||1-z|k(k-1)(k-2)}{2[n]_q[n]_q}$$

$E_{1,n,q}(z) = E_{2,n,q}(z) = 0$

olduğunu biliyoruz. Eşitsizliğin her iki tarafı için $k = 1,2,...$ için ayrı ayrı uygulanırsa

$$\left|E_{2,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{1,n,q}(z)\right| + \frac{9|z||1-z|2(2-1)(2-2)}{2[n]_q^2}$$

$$\left|E_{3,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{2,n,q}(z)\right| + \frac{9|z||1-z|3(3-1)(3-2)}{2[n]_q^2}$$

$\vdots$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{9|z||1-z|k(k-1)(k-2)}{2[n]_q^2}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanıldığında

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \left|E_{1,n,q}(z)\right| + \frac{9|z||1-z|}{2[n]_q^2}\left\{\sum_{j=3}^{k} j(j-1)(j-2)\right\}$$
$$\leq \frac{|z||1-z|}{[n]_q}\frac{9}{[n]_q}\; k(k-1)(k-2)^2$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left|B_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{z(1-z)}{[n]_q} f''(z)\right| \leq \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| \left|E_{k,n,q}(z)\right|$$
$$\leq \frac{|z||(1-z)|}{2[n]_q}\frac{9}{[n]_q}\sum_{k=3}^{\infty}|c_k|\; k(k-1)(k-2)^2$$

$$f^{(4)}(\mathrm{z}) = \sum_{k=4}^{\infty} c_k \ k(k-1)(k-2)(k-3)\mathrm{z}^{\mathrm{k}-4}$$

bulunur. Seri $\overline{D_1}$ de mutlak yakınsak olduğundan $\sum_{k=3}^{\infty}|c_k| \ k(k-1)(k-2)^2 < \infty$ olur.

İspat :

(ii) Her $k, n \epsilon \mathbb{N}$ ve $|z| \leq r$, $1 \leq r < R$ için

$$\left|\pi_{\mathrm{k,n,q}}(\mathrm{z}) - e_k(z)\right| \leq \ 2r^k \frac{(k-1)[k-1]_q}{[n]_q}$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\|\cdot\|_r$, $\mathrm{C}(\overline{D})_r$ uzayında bir norm,

$$\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| \ \leq r\}$$

tanımlı olsun. Bernstein eşitsizliğini kapalı birim diskte her $|z| \ \leq r, \ \ r \geq 1$ için $|\ P'_k(z)| \leq \frac{k}{r}\|P_k\|_r$ olarak yazabiliyorduk. Kompleks analizdeki ortalama değer teoreminden $P_k(z)$, k. dereden küçük komleks bir polinom olmak üzere her $|z| \leq r$ için

$$\left|D_q(P_k)(z)\right| \leq \|P'_k\|_r \leq \ \frac{k}{r}\|P_k\|_r$$

yazabiliriz. Buradan da ispatta kullanacağımız

$$\left|\left(\pi_{\mathrm{k-1,n}}(\mathrm{z}) - \mathrm{z}^{\mathrm{k-1}}\right)'\right| = \ \frac{k-1}{r}\left\|\pi_{\mathrm{k-1,n}} - e_{k-1}\right\|_r$$

ifadesi yazılabilir. Her $k, n \epsilon \mathbb{N}$ ve $|z| \leq r,\ k \geq 2$ için Lemma 3.7 deki eşitlikte her iki tarafın normu alındığında

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| = \left|\frac{z(1-z)}{[n]_q} D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z) + zE_{k-1,n,q}(z)\right.$$
$$+\frac{z^{k-2}(1-z)}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$
$$\left.-\frac{z^{k-2}(1-z)z}{2[n]_q}\left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + 2(k-1) - 2[k-1]_q\right)\right|$$

yazılabilir.

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \frac{|z||1-z|}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| + |z|\left|E_{k-1,n,q}(z)\right|$$
$$+\frac{|z|^{k-3}|z||1-z|}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$
$$-\frac{|z|^{k-2}|z||1-z|}{2[n]_q}\left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q} + 2(k-1) - 2[k-1]_q\right)$$

eşitsizlikte Lemma 2.3.2 kullanıldığında

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \frac{|z||1-z|}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| + |z|\left|E_{k-1,n,q}(z)\right|$$

$$+\frac{|z|^{k-2}|1-z|}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$

$$+\frac{|z|^{k-2}|z||1-z|}{2[n]_q}\left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q}+\frac{2(k-1)(k-2)}{2[n]_q}\right)$$

elde edilir. $|z| \leq r$ olduğundan $|z| = r$, $|(1-\mathrm{z})| \leq 1 + |\mathrm{z}| \leq 1 + \mathrm{r}$ yazılabilir ve bu ifadeler kullanılarak eşitsizlik düzenlenildiğinde

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \frac{r(r+1)}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| + r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right|$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)r}{2[n]_q}\left(\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q}+\frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}\right)$$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{r(r+1)}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right|$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-2]_q}{[n]_q}$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)r}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)[k-1]_q}{[n]_q}$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)r}{2[n]_q}\frac{(k-1)(k-2)}{[n]_q}$$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{r(r+1)}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right|$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2[n]_q^2}\left([k-2]_q + r[k-1]_q + r\right)$$

bulunur. Burada $[k-2]_q \leq k-1$ için $r[k-2]_q \leq r(k-1)$ yazılabilir. Eşitsizlikte yerine yazıldığında

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{r(r+1)}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right|$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2[n]_q^2}\left(r[k-2]_q + r[k-1]_q + r\right)$$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{r(r+1)}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right|$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2[n]_q^2}(r(k-1) + rk + r)$$

$$\leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{r(r+1)}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right|$$

$$+\frac{r^{k-2}(1+r)r(k-1)(k-2)2k}{2[n]_q^2}$$

bulunur ve son olaraka $3k > 2k$ aldığımızda

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{r(r+1)}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| + \frac{3(1+r)r^{k-1}k(k-1)(k-2)}{2[n]_q^2}$$

gerçeklenir. Lemma 3.9 daki eşitsizlik kullanıldığında

$$\frac{r(r+1)}{[n]_q}\left|D_q\left[E_{k-1,n,q}\right](z)\right| \leq \frac{r(r+1)}{[n]_q}\frac{3r^{k-1}k(k-1)(k-2)}{[n]_q}$$

$$\leq \frac{3(1+r)k(k-1)(k-2)r^k}{[n]_q^2}$$

şeklinde düzenleme yapabiliriz. Bulduğumuz bu eşitsizliği yerine koyduğumuzda

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{3(1+r)k(k-1)(k-2)r^k}{[n]_q^2}$$

$$+\frac{3(1+r)r^{k-1}k(k-1)(k-2)}{2[n]_q^2}$$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{6(1+r)k(k-1)(k-2)r^k}{2[n]_q^2}$$

$$+\frac{3(1+r)r^{k-1}k(k-1)(k-2)}{2[n]_q^2}$$

$$\leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{9(1+r)k(k-1)(k-2)r^k}{2[n]_q^2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği basit işlemlerle aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

$$E_{0,n,q}(z) = E_{1,n,q}(z) = E_{2,n,q}(z) = 0$$

$$\left|E_{1,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{0,n,q}(z)\right| + \frac{9(1+r)1(1-1)(1-2)r^k}{2[n]_q^2}$$

$$\left|E_{2,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{1,n,q}(z)\right| + \frac{9(1+r)2(2-1)(2-2)r^k}{2[n]_q^2}$$

$$\left|E_{3,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{2,n,q}(z)\right| + \frac{9(1+r)3(3-1)(3-2)r^k}{2[n]_q^2}$$

$$\vdots$$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n,q}(z)\right| + \frac{9(1+r)k(k-1)(k-2)r^k}{2[n]_q^2}$$

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq r\left|E_{0,n,q}(z)\right| + \frac{9(1+r)r^k}{2[n]_q^2}\sum_{\mathrm{j}=3}^{\mathrm{k}} \mathrm{j}(\mathrm{j}-1)\,(\mathrm{j}-2)$$

$$\left|E_{k,n,q}(z)\right| \leq \frac{9(1+r)r^k k(k-1)(k-2)^2}{2[n]_q^2}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left|B_{n,q}(f)(z) - f(z) - \frac{\mathrm{z}(1-z)}{2[n]_q} f''(\mathrm{z})\right| \leq \sum_{k=3}^{\infty} |c_k|\left|\mathrm{E}_{\mathrm{k,n,q}}(\mathrm{z})\right|$$

$$\leq \frac{9(1+r)}{2[n]_q^2}\sum_{k=3}^{\infty} |c_k|\ k(k-1)(k-2)^2 r^k$$

bulunur. $f^{(4)}(\mathrm{z}) = \sum_{k=4}^{\infty} c_k\ k(k-1)(k-2)(k-3)\mathrm{z}^{\mathrm{k}-4}$ serisi $|z| \leq r$ de mutlak yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=3}^{\infty} |c_k|\ k(k-1)(k-2)^2 r^k < \infty$$

olur.

Teorem 3.3:

$0 < q^n \leq 1$ için $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$, $R > 1$ ve $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ olsun.

f: $\mathbb{D}_R \longrightarrow \mathbb{C}$, f $\mathbb{D}_R$ de analitik bir fonksiyon olamak üzere , her $z \in \mathbb{D}_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ yazabiliriz. f fonksiyonu birinci dereceden küçük bir polinom olmak üzere $r \in [1, R)$ için

$\left\|B_{n,q_n}(f)-f\right\|_r \geq \frac{C_r(f)}{[n]_{q_n}}, n \in \mathbb{N}$

$\|f\|_r = max\{|f(z)|; |z| \leq r\}$ ve $C_r(f) > 0$

Burada $f; r, q_n, n \in \mathbb{N}$ bağlı, n den bağımsızdır.

İspat:

Her $z \in \mathbb{D}_R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_{n,q_n}(f)-f(z) = \frac{1}{[n]_{q_n}}\left\{\frac{z(1-z)}{2}f''(z)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{[n]_{q_n}}\left[[n]_{q_n}^2\left(B_{n,q_n}(f)(z)-f(z)-\frac{z(1-z)}{2[n]_{q_n}}f''(z)\right)\right]\right\}$$

eşitliği yazılabilir. Her iki tarafın normunu alırsak

$$\left\|B_{n,q_n}(f)-f(z)\right\|_r = \left\|\frac{1}{[n]_{q_n}}\left\{\frac{z(1-z)}{2}f''(z)+\frac{1}{[n]_{q_n}}\left[[n]_{q_n}^2\left(B_{n,q_n}(f)(z)-f(z)-\frac{z(1-z)}{2[n]_{q_n}}f''(z)\right)\right]\right\}\right\|_r$$

$$\left\|B_{n,q_n}(f)-f(z)\right\|_r \geq \frac{1}{[n]_{q_n}}\left\{\left\|\frac{e_1(1-e_1)}{2}f''\right\|_r - \frac{1}{[n]_{q_n}}\left[[n]_{q_n}^2\left\|B_{n,q_n}(f)-f-\frac{e_1(1-e_1)}{2[n]_{q_n}}f''\right\|_r\right]\right\}$$

$\left\|\frac{e_1(1-e_1)}{2}f''\right\|_r > 0$ Eğer her $z \in \mathbb{D}_R$ için $\frac{z(1-z)}{2[n]_{q_n}}f''(z) = 0$ her $z \in \overline{\mathbb{D}_R} \setminus \{0,1\}$

$f''(z) = 0$

$$\left\|\frac{e_1(1-e_1)}{2}f''\right\|_r - \frac{1}{[n]_{q_n}}\left[[n]_{q_n}^2\left\|B_{n,q_n}(f)-f-\frac{e_1(1-e_1)}{2[n]_{q_n}}f''\right\|_r\right] \geq \left\|\frac{e_1(1-e_1)}{2}f''\right\|_r > 0$$

Her $n > n_0$ve $1 \leq n \leq n_0 - 1$ için

$$\left\|B_{n,q_n}(f)-f\right\|_r \geq \frac{1}{[n]_{q_n}}\left\|\frac{e_1(1-e_1)}{4}f''\right\|_r$$

$$\left\|B_{n,q_n}(f)-f\right\|_r \geq \frac{M_{r,n}(f)}{[n]_{q_n}}$$

dir. $M_{r,n}(f)=[n]_{q_n}\left\|B_{n,q_n}(f)-f\right\|_r > 0$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|B_{n,q_n}(f)-f\right\|_r \geq \frac{C_r(f)}{[n]_{q_n}}$$

dir. Burada $C_r(f)=min\left\{M_{r,1}(f), M_{r,2}(f), \ldots, M_{r,n_0-1}(f), \left\|\frac{e_1(1-e_1)}{4}f''\right\|_r\right\}$ olduğu açıktır.

Sonuç:

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3 göz önüne alındığında aşağıdaki ifade gerçeklenir. q^n nin $0 < q^n \leq 1$ aralığındaki değerleri için $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$, $R > 1$ ve $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ olarak alarak alalım. Ayrıca f, $\mathbb{D}_R$ de analitik olmak üzere $f: \mathbb{D}_R \longrightarrow \mathbb{C}$ ye tanımlı bir fonksiyondur. Eğer f birinci derecen küçük bir polinom değilse her $r \in [1, R)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için denklik sabitleri f ve r ye bağlı, $(q_n)_n$ dizisi ise n den bağımsız olduğundan

$$\left\|B_{n,q_n}(f)-f\right\|_r \sim \frac{1}{[n]_{q_n}}$$

dır.

KAYNAKLAR

[1] Sorin G Gal., Approximation by complex Bernstein and convulation type operator, J. Math. Anal. Appl., 18, 416-420, 2009.

[2] Başkan, Turgut., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Nobel Yayın ., 22, 511–515, 2005.

[3] Phillips, G.M. Interpolation and Approximation by Polynomials, CMS Books in Mathematics, vol.14, Springer, Berlin,2003.

[4] Ostrovska, S. q-Bernstein polynomials and their iterates, J. Approx. Theory , 123, 232.255, (2003)(2),

[5] Oruc, H.and Tuncer, N. On the convergence and iterates of q-Bernstein polynomials, J. Ap-prox. Theory, 117, 301-313, (2002)(2)

[6] F. He, The powers and their Bernstein polnomials,Real Analysis Exchange, 9, 578-583, (1983-1984)

[7] Cheney, E. W. Introduction to Approximation Theory, Chelsea Pupishing Company. New York, 1982 (Second Edition)

[8] G.G. Lorentz, Bernstein Polynomials, 2nd editin, Chelsea Publ. ,New York, 1986

[9] Sorin G Gal., Voronoskaja's Theorem and İterations for Complex Bernstein Polinomials in Compact Disks, Mediterr j. Math., 253-252, (2008)(5)