Mine CİHANGİROĞLU   Yüksek Lisans Tezi   KÜ 2010

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

UNİVALENT FONKSİYONLAR

Mine CİHANGİROĞLU

ARALIK 2010

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

UNİVALENT FONKSİYONLAR

Mine CİHANGİROĞLU

ARALIK 2010

Matematik Anabilim Dalı Mine CİHANGİROĞLU tarafından hazırlanan UNİVALENT FONKSİYONLAR adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : (Unvanı, Adı ve Soyadı, İmzası) ....
Üye (Danışman) : (Unvanı, Adı ve Soyadı, İmzası) ....
Üye : (Unvanı, Adı ve Soyadı, İmzası) ....

..... / ..... / ....

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. İhsan ULUER
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

UNİVALENT FONKSİYONLAR

CİHANGİROĞLU, Mine
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA
Aralık 2010, 67 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı, kaynaklar ve univalent fonksiyonlar hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde kompleks trigonometrik bağıntılar, kompleks türevler, kompleks integraller ile ilgili bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde univalent fonksiyonlar tanımlanmış ve univalent fonksiyonlarla ilgili teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde univalent fonksiyonlarla ilgili bazı alan teoremleri verilmiştir. Beşinci bölümde ise univalent fonksiyonların seri açılımında mevcut olan bazı katsayı bağıntıları ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Univalent fonksiyonlar, Koebe fonksiyonu, Minkowski eşitsizliği, Normalleştirilmiş univalent fonksiyonlar.

ABSTRACT

UNİVALENT FUNCTIONS

CİHANGİROĞLU, Mine
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department Of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA
December 2010, 67 pages

This thesis contains five sections. The first section gives general information on the purpose of the thesis, resources and univalent functions. The second section explains complex trigonometric relations, complex derivatives and complex integrals. The third section describes univalent functions and gives theorems regarding univalent functions. The fourth section deals with some area theorems concerning univalent functions. The fifth section points out some coefficient relations exist in the series expansion of univalent functions.

Key words: Univalent functions, the Koebe function, Minkowski inequality, Normalized univalent functions.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve büyük destek olan tez yöneticisi hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya, eşime ve aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$f'(z)$	f fonksiyonunun z noktasındaki türevi
u_x	u fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi türevi
u_y	u fonksiyonunun y değişkenine göre kısmi türevi
$[a,b]$	a, b kapalı aralığı
(a,b)	a, b açık aralığı

1. GİRİŞ

Univalent veya Basit Fonksiyonlar ya da yalınkat analitik fonksiyon olarak isimlendirilen fonksiyonlar sınıfı analitik fonksiyonların bir alt sınıfıdır. Bu tezde univalent fonksiyonların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tek değerli ve bire–bir olan univalent fonksiyonlar potansiyel teori ve elastisite teorisinde önemli uygulamalara sahiptir. Bilindiği gibi kompleks fonksiyonlar kompleks düzlemde genel olarak bölgeleri bölgelere dönüştüren fonksiyonlardır. Fonksiyonların analitik, tek değerli, univalent v.s. olmasına göre görüntüleri tipik şekillere sahiptir. Örneğin belli koşulların sağlanması durumunda görüntüler konveks, yıldızıl v.s. bölgeler olur. Yine aynı şekilde fonksiyonlar kuvvet serisine açıldığında katsayıların sağladığı bazı koşullar altında univalent fonksiyonların dönüştürdüğü bölgeler ilginç özelliklere sahiptir. Örneğin $w = f(z)$ univalent fonksiyon için

$$Re\left[1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha \qquad f'(z) \neq 0 \quad , \quad 0 \leq \alpha < 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(z)$ α–basamaktan konveks bir fonksiyon olur. Benzer şekilde

$$Re\left[\frac{z f'(z)}{f(z)}\right] > \alpha \qquad , \quad 0 \leq \alpha < 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa α–basamaktan $f(z)$ yıldızıldır.

Benzer şekilde univalent fonksiyonların birçok özelliklerini ortaya koymak mümkündür.

1.1. Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı; univalent fonksiyonların serisel gösterilimleri, bazı katsayı bağıntıları ve dönüşmüş bölgenin alanı ile çevre uzunluğunu veren temel bağıntıları incelemektir.

Tezde önce, univalent fonksiyonların teorisinde önemli rol oynayan kompleks analizde bazı topolojik kavramlar ile kompleks integral özellikleri verilmiştir. Daha sonra univalent fonksiyon kavramı örneklerle açıklanmıştır. Önemli uygulamaları olan ve univalent fonksiyonlara bir örnek oluşturan

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n$$

Koebe fonksiyonunun bazı geometrik özellikleri bu tezde incelenmiştir. İleri aşama olarak

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+p}$$

şeklinde p–değerli univalent fonksiyonlar ve bu fonksiyonların geometrik özellikleri incelenebilir.

1.2. Kaynak Özetleri

Univalent fonksiyonların temel özellikleri (1) kaynağından incelenmiştir.

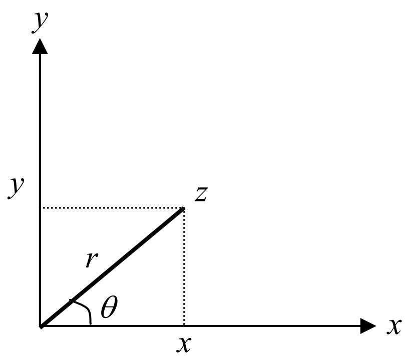
Kompleks Analizde eğrisel integraller, analitik fonksiyonların serisel gösterilimleri gibi bazı kavramlar (2) kaynağından ortaya konmuştur. İnceleme sırasında geçen bazı tanım ve kavramlar ise diğer kaynaklardan araştırılmıştır.

2. BAŞLANGIÇ KOŞULLARI VE BAZI BAĞINTILARIN İNCELENMESİ

2.1. Bazı Trigonometrik Bağıntılar

Bu kesimde, bazı trigonometrik bağıntıları ve bunların kompleks analizdeki karşılıklarını ortaya koyacağız. Şekilden de görüldüğü gibi

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z|\cos\theta = r\cos\theta \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z|\sin\theta = r\sin\theta$$



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

olup buradan

$$z = x + iy = |z|\cos\theta + i\,|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= r\,e^{i\theta}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$z = x + iy$ ya da $z = r\,e^{i\theta}$ dersek

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n \quad (z \neq 1)$$

yazılabilir. Bu bağıntıda z yerine $re^{i\theta}$ yazarsak

$$\frac{1 - (r\,e^{i\theta})^{n+1}}{1 - r\,e^{i\theta}} = 1 + r\,e^{i\theta} + (r\,e^{i\theta})^2 + \ldots + (r\,e^{i\theta})^n$$

$$= 1 + r\,e^{i\theta} + r^2\,e^{2i\theta} + ... + r^n\,e^{i\theta\,n}$$

olur. $e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\,\sin\,\theta$ olduğundan

$$\frac{1-(r\,e^{i\theta})^{n+1}}{1-r\,e^{i\theta}} = 1 + r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta) + r^2\,(\cos(2\theta) + i\,\sin(2\theta)) + ...$$

$$+ r^n\,(\cos(n\theta) + i\,\sin(n\theta))$$

$$= 1 + r\,\cos\theta + r^2\,\cos(2\theta) + ... + r^n\,\cos(n\theta)$$

$$+ i\,[r\,\sin\,\theta + r^2\,\sin(2\theta) + ... + r^n\,\sin(n\theta)]$$

elde edilir.

Buradan,

$$\frac{1 - r^{n+1}\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)^{n+1}}{1 - r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)} = \frac{1 - r^{n+1}\,(\cos(n+1)\theta + i\,\sin\,(n+1)\,\theta)}{1 - r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)}$$

$$= \frac{\left[1 - r^{n+1}\,(\cos(n+1)\,\theta + i\,\sin(n+1)\,\theta)\right]\left[(1 - r(\cos\theta - i\,\sin\theta))\right]}{\left[1 - r(\cos\theta + i\,\sin\,\theta)\right]\left[(1 - r\,(\cos\theta - i\,\sin\theta))\right]}$$

$$= \frac{1 - r^{n+1}\,\cos(n+1)\,\theta - i\,r^{n+1}\,\sin(n+1)\,\theta\,(1 - r\,\cos\,\theta + i\,r\,\sin\theta)}{1 + r^2 - 2r\,\cos\theta}$$

$$= \frac{1 - r\,\cos\theta - r^{n+1}\,\cos(n+1)\,\theta + r^{n+2}\,\cos(n+1)\,\theta\,\cos\theta + r^{n+2}\,\sin(n+1)\,\theta\,\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\,\cos\theta}$$

$$+ \frac{i\,[r\,\sin\theta - r^{n+2}\,\sin\theta\,\cos(n+1)\theta - r^{n+1}\,\sin(n+1)\theta + r^{n+2}\,\sin(n+1)\,\theta\,\cos\theta]}{1 + r^2 - 2r\,\cos\theta}$$

bulunur. Son eşitlikte

$$\cos(n+1)\theta\,\cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\cos[(n+1)\theta + \theta] + \cos(n\theta)\right\}$$

$$\sin(n+1)\theta\,\sin\theta = -\frac{1}{2}\left\{\cos[(n+1)\theta + \theta] - \cos(n\theta)\right\}$$

$$\sin\theta \cos(n+1)\theta = \frac{1}{2}\left\{\sin[(n+1)\theta+\theta]-\sin(n\theta)\right\}$$

$$\sin(n+1)\theta \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\sin[(n+1)\theta+\theta]-\sin(-n\theta)\right\}$$

trigonometrik bağıntıları kullanırsak,

$$\frac{1-r^{n+1}(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}}{1-r(\cos\theta+i\sin\theta)} = \frac{1-r\cos\theta-r^{n+1}\cos(n+1)\theta+r^{n+2}\cos n\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

$$+\frac{i[r\sin\theta-r^{n+1}\sin(n+1)\theta+r^{n+2}\sin n\theta]}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{[1-r^{n+1}(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}]}{1-r(\cos\theta+i\sin\theta)} = 1+r\cos\theta+r^2\cos(2\theta)+\ldots+r^n\cos(n\theta)$$

$$+i[r\sin\theta+r^2\sin(2\theta)+\ldots+r^n\sin(n\theta)]$$

olur. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n} r^k\cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n} r^k \sin k\theta$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n} r^k\cos k\theta + i\sum_{k=1}^{n} r^k\sin k\theta$$

yazılabilir. Bu eşitlikte reel ve sanal kısımlar birbirlerine eşitlenirse

$$1+\sum_{k=1}^{n} r^k\cos k\theta = \frac{1-r\cos\theta-r^{n+1}\cos(n+1)\theta+r^{n+2}\cos n\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} r^k\sin k\theta = \frac{r\sin\theta-r^{n+1}\sin(n+1)\theta+r^{n+2}\sin n\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{2.2}$$

bulunur. $n \to \infty$ için her iki tarafın limitini alırsak $r < 1$ için $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ ve $\sin\theta$, $\cos\theta$ sınırlı fonksiyon olduklarından

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{2.3}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{2.4}$$

bulunur.

n'i sonlu kabul edip, (2.2)'de $r = 1$ dersek,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\theta-\sin(n+1)\theta+\sin n\theta}{1-2\cos\theta+1}$$

$$= \frac{\sin\theta-[\sin n\theta\cos\theta+\sin\theta\cos n\theta]+\sin n\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}-[2\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}]\cos\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$-\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos n\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{2\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}[\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\cos n\theta]+[2\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}][2\sin^2\frac{\theta}{2}]}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{[\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\cos n\theta]}{2\sin\frac{\theta}{2}}+\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\,[1-\cos n\theta]}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\,2\sin^2\frac{n\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}$$

$$= \frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + \left(\frac{\cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2} + \cos\frac{n\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

olup böylece

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\,[\sin(n+1)\frac{\theta}{2}]}{\sin\frac{\theta}{2}} \tag{2.5}$$

bulunur. Benzer yollarla

$$1+\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\,[\sin(n+1)\frac{\theta}{2}]}{\sin\frac{\theta}{2}} \tag{2.6}$$

elde edilir. Buradan birçok kompleks bağıntılar türetmek mümkündür. Örneğin

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}2\,r^k\cos k\theta = 1+\sum_{k=1}^{\infty}2\,r^k\,\frac{1}{2}(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta})$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty}[(r\,e^{i\theta})^k + (r\,e^{-i\theta})^k]$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty}(r\,e^{i\theta})^k + \sum_{k=1}^{\infty}(r\,e^{-i\theta})^k$$

olup burada $z = r\, e^{i\theta}$ dersek,

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} 2\, r^k \cos k\theta = 1+\sum_{k=1}^{\infty} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k}$$

olur. k yerine $k + 1$ yazarsak

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} 2r^k \cos k\theta = 1+\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)}$$

$$= 1 + z\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \qquad \text{(Geometrik seriden)}$$

$$= 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{1+z-z}{1-z} + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-r\, e^{i\theta}} + \frac{r\, e^{-i\theta}}{1-r\, e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1}{1-r\, e^{i\theta}} + \frac{r}{e^{i\theta}-r}$$

$$= \frac{e^{i\theta} - r + r(1-r\, e^{i\theta})}{(1-r\, e^{i\theta})(e^{i\theta}-r)}$$

$$= \frac{e^{i\theta}(1-r^2)}{e^{i\theta} - r - r\, e^{2i\theta} + r^2\, e^{i\theta}}$$

$$= \frac{1-r^2}{1 - r\, e^{-i\theta} - r\, e^{i\theta} + r^2}$$

$$= \frac{1-r^2}{1-2r\left|\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right| + r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

yazılabilir. Böylece

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \tag{2.7}$$

elde edilir. (2.7) bağıntısına Poisson çekirdeği denir.

(2.7)'de θ ya göre türev alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, r^k \sin k\theta = r \sin\theta \, \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta + r^2)^2} \tag{2.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)\theta} = \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\theta + i \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)\theta} &= \sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta} \,.\, e^{2ik\theta} \\
&= e^{-i\theta}\, e^{2i\theta} \, \frac{1-e^{2ni\theta}}{1-e^{2i\theta}} \\
&= \frac{e^{i\theta}\,(e^{2ni\theta}-1)}{e^{2i\theta}-1} \\
&= e^{i\theta}\, \frac{e^{ni\theta}(e^{ni\theta}-e^{-ni\theta})}{e^{i\theta}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})} \\
&= 2\, \frac{e^{ni\theta}\left(\dfrac{e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}}{2}\right)}{\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right)2} \\
&= e^{ni\theta}\, \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \\
&= (\cos n\theta + i \sin n\theta)\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right) \\
&= \frac{\cos n\theta \sin n\theta}{\sin\theta} + i\, \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{1}{2} \sin \frac{2n\theta}{\sin\theta} + i\left(\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}\right)
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\theta = \frac{1}{2}\frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta} \ , \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta} \tag{2.10}$$

özdeşlikleri yazılabilir.

Trigonometrik yarımaçı formüllerinden

$$\frac{n+1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\cos k\theta = \frac{\sin^2[(n+1)\theta/2]}{2\sin^2(\theta/2)} \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\sin k\theta = \frac{(n+1)\sin\theta - \sin(n+1)\theta}{4\sin^2(\theta/2)} \tag{2.12}$$

bulunabilir.

Eğer k ve m farklı tamsayılarsa,

$$\int_0^{2\pi} \sin k\theta \sin m\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos k\theta \cos m\theta \, d\theta = 0 \tag{2.13}$$

dır. Ayrıca tüm k, m tamsayıları için

$$\int_0^{2\pi} \sin k\theta \cos m\theta \, d\theta = 0 \tag{2.14}$$

dır. Eğer $k \neq 0$ ise,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 k\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 k\theta = \pi \tag{2.15}$$

ve

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, e^{im\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad k+m \neq 0 \text{ ise} \\ 2\pi & , \quad k+m = 0 \text{ ise} \end{cases} \tag{2.16}$$

dır. Şimdi $\eta = e^{2\pi i/n}$ olmak üzere n pozitif bir tamsayı ve k herhangi bir tamsayı ise, bu durumda

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\eta^j)^k = \begin{cases} 0 & , \quad k \neq 0 \text{ ise} \,(mod\ n) \\ n & , \quad k \equiv 0 \text{ ise} \,(mod\ n) \end{cases} \tag{2.17}$$

olduğunu gösterelim.

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\eta^j)^k = \sum_{j=0}^{n-1} (e^{2\pi i/n})^{jk}$$

$k = 0$ ise $m \in N$ için *mod n*'e göre $k = mn$ olur.

$\sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i\, j\, m} = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ tane}$ olur. Çünkü $e^{ik\pi} = (-1)^k$ dır.

$k \neq 0$ ise $m \in N$ için *mod n*'e göre $k \neq mn$ olduğundan,

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2k\pi\, i\, j}{n}} = 1 + e^{k\pi\, i \frac{2j}{n}} + \ldots + e^{k\pi\, i \frac{2(n-1)}{n}} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

$$= 1 + (-1)^1 + (-1)^2 + \ldots$$

$$= 0$$

bulunur.

q herhangi bir reel sayı olmak üzere Binom Teoreminden

$$\frac{1}{(1-z)^q} = 1 + qz + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!} z^n \tag{2.18}$$

yazılabilir. Buradan, $q \le 0$ tamsayısı varsa, (2.18) bir polinomdur. Şimdi

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \quad , \quad x > 0 \tag{2.19}$$

olarak tanımlanan Gamma fonksiyonunu göz önüne alalım.

$n \ge 0$ pozitif tamsayı ise, $\Gamma(n + 1) = n!$ dır.

Eğer n yeterince büyük seçilirse

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{2.20}$$

Stirlings Formülü yazılabilir.

$\sin \pi z$ bir Taylor Serisi gösterilimine sahip olduğu gibi

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{2.21}$$

şeklinde bir sonsuz çarpım gösterilimine de sahiptir. (2.21)'de $z = \dfrac{1}{2}$ yazarsak, π için Wallis formülü adı verilen

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.2.4.4.6.6...(2n)(2n)}{1.3.3.5.5.7...(2n-1)(2n+1)} \tag{2.22}$$

bağıntısı elde edilir.

2.2. Bazı Eşitsizlikler

$a_1, a_2, \dots , a_n$ pozitif sayılarının sonlu dizileri için geometrik, harmonik, aritmetik eşitsizlikler verilebilir. Yani

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \qquad G = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \quad , \qquad H = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

için

$$A \geq G \geq H \tag{2.23}$$

dır. İntegralleri kullanarak toplamları yazabiliriz. Eğer *f(x)* pozitif bir alt sınıra sahipse ve [*a,b*] aralığında integrallenebiliyorsa, (2.23) eşitsizliğinin Riemann integralleri için de doğru olduğu görülebilir. Yani

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad , \qquad G = exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b ln\, f(x)\,dx\right) \quad , \qquad H = \frac{b-a}{\int_a^b \left(\frac{1}{f(x)}\right) dx}$$

olmak üzere (2.23) eşitsizliği yine geçerlidir. Herhangi iki sayı dizisi için

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) \tag{2.24}$$

olarak yazılabilen eşitsizliğe Cauchy – Bunyakowsky – Schwarz (CBS) eşitsizliği denir.

Eğer *f(x)* ve *g(x)* [*a,b*] aralığında integrallenebiliyorsa,

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right) \tag{2.25}$$

eşitsizliği de yazılabilir. Diğer taraftan *f(x)* ve *g(x)* negatif olmayan ve [*a,b*] aralığında integralenebilen fonksiyonlar ve

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.26}$$

olacak şekildeki p, q pozitif tamsayılarını göz önüne alalım.

Bu durumda,

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \le \left(\int_a^b [f(x)]^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b [g(x)]^q\, dx \right)^{1/q} \tag{2.27}$$

eşitsizliği geçerlidir (2.27) eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Hölder eşitsizliğinde hemen hemen her yerde $[f(x)]^p = C\ [g(x)]^q$ olursa, bir tek bu durumda eşitsizlik eşitlik halini alır.

$p = q = 2$ olduğu zaman (2.27)'nin özel bir versiyonu olarak CBS (Cauchy–Bunyakowsky–Schwarz) eşitsizliği ortaya çıkar.

(2.26) daki p ve q sayılarına eşlenik üsteller de denir. (2.26)'daki şart $(p-1)(q-1) = 1$ ya da $p = \dfrac{q}{q-1}$ şeklinde de yazılabilir. $0 < q \le 1$ olsun. Bu durumda,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k^q \right|^{1/q} + \left| \sum_{k=1}^{n} b_k^q \right|^{1/q} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \left(|a_k| + |b_k| \right)^q \right)^{1/q} \tag{2.28}$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.28) eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir.

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilen ve negatif olmayan fonksiyonlar ve $0 < q \le 1$ olsun. Bu durumda Minkowski eşitsizliğinin integral formunu

$$\left(\int_a^b [f(x)]^q\, dx \right)^{1/q} + \left(\int_a^b [g(x)]^q\, dx \right)^{1/q} \le \left(\int_a^b \left(f(x) + g(x) \right)^q dx \right)^{1/q} \tag{2.29}$$

şeklinde verebiliriz.

$q > 1$ ise eşitsizlik (2.28) ve (2.29)'da yön değiştirir.

2.3. Türevlenebilme

$D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere D bölgesinde $w = f(z)$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in D$ olmak üzere,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise bu limite $f(z)$ nin z_0 noktasındaki türevi denir. Bu türev

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

olarak da yazılabilir.

Not 2.1. Bir kompleks fonksiyonun reel ve sanal kısmının kısmi türevlere sahip olması kompleks fonksiyonun türevlenebilir olmasını gerektirmez. Ancak kompleks fonksiyon türeve sahipse reel ve sanal kısımları türevlenebilir olmak zorundadır.

Teorem 2.1. $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere D bölgesinde $w = f(z)$ fonksiyonu verilsin.

$z_0 \in D$ olmak üzere eğer $f'(z_0)$ türevi varsa, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ için

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) = -\,iu_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0)$$

dır.

Sonuç 2.1. Her $z \in D$ için $f'(z)$ varsa, D bölgesinde

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = -iu_y(x,y) + v_y(x,y)$$

eşitliği sağlanır ve bu eşitlik Cauchy – Riemann sistemi olarak bilinen

$$u_x = v_y \qquad , \qquad v_x = -u_y \tag{2.30}$$

reel kısmî türevli denklem sistemine denktir.

Tanım 2.1. $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $w = f(z)$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in D$ olmak üzere z_0 ın en az bir $D(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ komşuluğundaki her z noktasında $f'(z)$ türevi varsa $f(z)$ ye z_0 noktasında analitiktir denir.

Eğer her $z \in D$ için $f(z)$, z noktasında analitikse $f(z)$ ye D bölgesinde analitiktir denir.

Not 2.2. $f(z)$ fonksiyonu bir $z_0 \in D$ bölgesinde C–R sistemini sağladığı halde $f(z)$ bu noktada analitik olmayabilir.

D bölgesindeki $z = r\, e^{i\theta}$ yı ya da $f(D)$ görüntü kümesindeki $w = R\, e^{i\Phi}$ yi kullanarak kutupsal koordinatlara geçiş yapılabilir. $w = f(z)$ dönüşümü 4 farklı yolla bulunabilir.

1- Kartezyenden $\rightarrow$ kartezyene
2- Kartezyenden $\rightarrow$ kutupsala
3- Kutupsaldan $\rightarrow$ kartezyene
4- Kutupsaldan $\rightarrow$ kutupsala

Bu şıklar Cauchy – Riemann sisteminin 4 farklı durumunu verir. Örneğin (2.30), 1 için bir dönüşümdür.

Şimdi

$$f(x + iy) = R\, e^{i\Phi} \text{ olduğu zaman } R_x = R\, \Phi_y \text{ ve } R_y = -R\, \Phi_x \tag{2.31}$$

olduğunu gösterelim.

$$f(x + iy) = R\, e^{i\Phi} = R \cos \Phi + i\, R \sin \Phi \quad , \quad R = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad \Phi = Arc\tan \frac{u}{v}$$

$$u = R \cos \Phi \quad , \quad v = R \sin \Phi$$

olmak üzere

$$u_x = R_x \cos \Phi - R \sin \Phi\, \Phi_x\,,$$
$$u_y = R_y \cos \Phi - R \sin \Phi\, \Phi_y\,,$$

$v_x = R_x \sin \Phi + R \cos \Phi \, \Phi_x$,

$v_y = R_y \sin \Phi + R \cos \Phi \, \Phi_y$,

yazılabilir. Buradan

$u_x = v_y$ ifadesi $R_x \cos \Phi - R \sin \Phi \, \Phi_x = R_y \sin \Phi + R \cos \Phi \, \Phi_y$

ifadesine denk olduğundan,

$$R_x = R \, \Phi_y \quad , \quad R_y = -R \, \Phi_x \tag{2.31}$$

bulunur. Diğer taraftan

$f(r\,e^{i\theta}) = u + iv = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = arc\,tan\,\dfrac{y}{x}$

olması nedeniyle

$$r_x = \frac{x}{r} \quad , \quad r_y = \frac{y}{r} \quad , \quad \theta_x = \frac{-y}{r^2} \quad , \quad \theta_y = \frac{x}{r^2}$$

yazılabilir. Böylece

$$u_x = u_r\, r_x + u_\theta\, \theta_x = u_r\, \frac{x}{r} + u_\theta\, \frac{-y}{r^2} \ , \quad u_y = u_r\, r_y + u_\theta\, \theta_y = u_r\, \frac{y}{r} + u_\theta\, \frac{x}{r^2} \ ,$$

$$v_x = v_r\, r_x + v_\theta\, \theta_x = v_r\, \frac{x}{r} + v_\theta\, \frac{-y}{r^2} \ , \quad v_y = v_r\, r_y + v_\theta\, \theta_y = v_r\, \frac{y}{r} + v_\theta\, \frac{x}{r^2} \ ,$$

olup buradan $u_x = v_y$ olduğundan,

$$u_r\, \frac{x}{r} - \frac{y}{r^2}\, u_\theta = \frac{y}{r}\, v_r + \frac{x}{r^2}\, v_\theta$$

$$u_r\, r\, x - y\, u_\theta = r\, y\, v_r + x\, v_\theta$$

elde edilir. x yerine $x = r\cos\theta$, y yerine $y = r\sin\theta$ yazalım. Böylece

$$u_r\, r^2 \cos\theta - r\sin\theta\, u_\theta = r^2 \sin\theta\, v_r + r\cos\theta\, v_\theta$$

bulunur. Buradan

$$u_r\, r^2 = r\, v_\theta \quad , \quad -r\, u_\theta = r^2\, v_r$$

elde edilir. O halde

$$u_r\, r = v_\theta \quad , \quad -u_\theta = r\, v_r \tag{2.32}$$

olup bu da Cauchy – Riemann sisteminin başka bir halidir.

Komplekste alışılmış iki önemli türev operatörü vardır. Bu türev operatörleri

$$\frac{\partial \bullet}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial x} - i\frac{\partial \bullet}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial \bullet}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bullet}{\partial x} + i\frac{\partial \bullet}{\partial y}\right)$$

olarak tanımlanır.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ için

$f_x = u_x + iv_x$, $f_y = u_y + iv_y$ olur.

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[u_x + v_y - i(u_y - v_x)\right] \tag{2.33}$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[u_x - v_y + i(u_y + v_x)\right] \tag{2.34}$$

yazılabilir. f_z ve $f_{\bar{z}}$ kısmî operatörleri D nin tanım bölgesinde oldukları zaman daha kullanışlı olurlar. Eğer $f(z)$, D'de analitik ise bu durumda,

$$f_{\bar{z}} = 0 \quad \text{ve} \quad f_z = f'(z) \tag{2.35}$$

olur. Tersine eğer *D* bölgesinde $f_{\bar{z}} = 0$ ya da $f_z = f'(z)$ ise *f(z)* *D* bölgesinde analitiktir. Ayrıca,

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = j\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \qquad (f(z) \neq 0 \text{ ise}) \tag{2.36}$$

dır. *f(z)* nin *D* nin tanım bölgesinde analitik olduğunu varsayalım ve $z = z(t)$, *t* ye göre türevlenebilir olsun. Bu takdirde, zincir kuralından,

$$\frac{df(z)}{dt} = f'(z)\frac{dz}{dt} \tag{2.37}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

olur. Ayrıca, *t* reel değişken olduğundan

$$\frac{d}{dt} Re\, f(z) = Re \frac{df}{dt} = Re\left(f'(z)\frac{dz}{dt}\right) \tag{2.38}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Örnek olarak $ln\,|f(z)| = Re\, ln\, f(z)$ denkleminde *z* yerine $z = r\, e^{it}$ yazılırsa,

$$\frac{d}{dt}|f(z)| = -|f(z)|\, Im \frac{z\, f'(z)}{f(z)} \tag{2.39}$$

eşitliği elde edilir.

2.4. Kompleks İntegraller

Tanım 2.2. $[a,b] \subset R$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Kapalı eğri: Bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ ise Γ ya kapalı eğridir denir.

Basit eğri: Bir Γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ oluyorsa bu eğriye basit eğridir denir.

Basit kapalı eğri: Γ basit bir eğri ve $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ ise bu durumda Γ ya basit kapalı eğri denir.

Yay: Bir Γ eğrisi verildiğinde Γ' türevi var ve sürekli ise Γ ya diferensiyellenebilir eğri (yay) denir.

Düzgün eğri: Γ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\Gamma'(t) \neq 0$ ise, Γ ya düzgün (regüler) eğri denir.

Parçalı Diferansiyellenebilir Eğri: $[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç, Γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa Γ parçalı diferansiyellenebilir eğridir denir.

Parçalı Düzgün Eğri: Γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer her $t \in [a,b]$ için $\Gamma'(t) \neq 0$ ise, Γ ya parçalı düzgün eğridir denir.

Not 2.2. Her basit kapalı düzgün eğri parçalı düzgündür ama parçalı düzgün eğri düzgün olmayabilir.

Γ basit kapalı parçalı düzgün bir eğri, $f(z)$ Γ üzerinde sürekli ve Γ ile sınırlandırılmış bölgeye D diyelim. z, D nin içinde bir nokta ve $\zeta \in \Gamma$ olsun.

Teorem 2.2. Cauchy Teoremi. *f(z),* Γ üzerinde ve çevrelediği kapalı alanda analitikse bu takdirde

$$\int_{\Gamma} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad (2.40)$$

dır.

Cauchy kendi ispatında $f'(z)$ nin $\Gamma \cup D$ de sürekli olduğunu varsaymaktadır. Goursat bu ilave hipotezi çıkardığından dolayı (2.40)'a bazen Cauchy – Goursat teoremi de denir.

f(z), bir Γ eğrisi üzerinde ve çevrelediği bölgede analitikse

$n = 0, 1, 2, ...$ için

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (2.41)$$

olur ve bu formül Cauchy Türev Formülü olarak bilinir. n = 0 için elde edilen formüle de Cauchy İntegral Formülü adı verilir.

$|z| < R$ için $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ise, bu durumda $n = 0, 1, 2, ...$ ve $0 < r < R$ için

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{f(r\, e^{i\theta})\, e^{-in\theta}}{r^n}\, d\theta \qquad (2.42)$$

olur. Burada C_r, r yarıçaplı çember eğrisidir.

Daha genel olarak, $f(z)$ $a < |z| < b$ halkasal tanım bölgesinde analitikse, bu durumda $f(z)$ nin

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \tag{2.43}$$

şeklinde bir Laurent Açılımı verilebilir.

(a,b) aralığındaki her bir r ve her bir n tamsayısı için (2.42) eşitliği a_n katsayısını verir.

Tanım 2.3. $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplace denkleminin reel çözümlerine harmonik fonksiyon denir.

Poisson Formülü: $u(r\, e^{i\theta})$, $r \leq R$ kapalı diski üzerinde harmonik olsun. *(0,R)* aralığındaki her bir r için

$$u(r\, e^{i\theta}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(R\, e^{i\phi})\, d\phi}{R^2 - 2R\, r\cos(\theta - \phi) + r^2} \tag{2.44}$$

olur. Daha genel olarak eğer $u(R\, e^{i\phi})$, C_R çemberi üzerinde parçalı sürekli reel değerli bir fonksiyon ise, bu durumda (2.44) $r < R$ açık diskinin içinde harmonik bir fonksiyon tanımlar.

Ayrıca $R\, e^{i\theta}$, $u(R\, e^{i\theta})$ nın bir sürekli olduğu noktalar ise $r \rightarrow R$ olduğunda $u(r\, e^{i\theta}) \rightarrow u(R\, e^{i\theta})$ olur.

Poisson integral formülünün en belirgin özelliği eğer u fonksiyonunun sınır üzerindeki değeri belliyse iç noktalardaki değerinin tespit edilebilmesidir.

Şimdi u ve v nin, x ve y değişkenlerinin reel değerli fonksiyonları olduğunu ve $\bar{D}$ üzerinde sürekli olduğunu varsayalım. Düzlemdeki Green Teoreminden

$$\int_{\Gamma} u\, dx + v\, dy = \iint_{D} (v_x - u_y)\, dx\, dy \tag{2.45}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Buradan da (2.45)'in özel bir durumu olarak

$$Alan(D) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma}\left(x\,dy - y\,dx\right) \tag{2.46}$$

olur.

Reeldeki (2.46) Green Teoremi kullanılarak kompleks Analizde çok kullanılan

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma}\phi\,dz = \iint_{D}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}}\,dx\,dy \tag{2.47}$$

ve

$$-\frac{1}{2i}\int_{\Gamma}\phi\,d\overline{z} = \iint_{D}\frac{\partial\phi}{\partial z}\,dx\,dy \tag{2.48}$$

bağıntıları elde edilebilir.

(2.47) ve (2.48) de $\phi = pq$ yazarsak (p, q türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere)

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma}p\,q\,dz = \iint_{D}\left(p\,\frac{\partial q}{\partial\overline{z}} + q\,\frac{\partial p}{\partial\overline{z}}\right)dx\,dy \tag{2.49}$$

ve

$$-\frac{1}{2i}\int_{\Gamma}p\,q\,d\overline{z} = \iint_{D}\left(p\,\frac{\partial q}{\partial z} + q\,\frac{\partial p}{\partial z}\right)dx\,dy \tag{2.50}$$

olur.

Eğer $f(z)$ ve $g(z)$ $\overline{D}$ de regüler analitik fonksiyonlar olmak üzere, (2.49) da $p = f$ ve $q = \overline{g}$ alınırsa $f_{\overline{z}} = 0$ olacağından (2.49)'dan

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} f\ \overline{g}\ dz = \iint_{D} f\ \overline{g}'\ dx\ dy \tag{2.51}$$

yazılabilir. Ayrıca (2.50)'den

$$-\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} f\ \overline{g}\ d\overline{z} = \iint_{D} \overline{g}\ f'\ dx\ dy \tag{2.52}$$

olur. Eğer (2.51)'de $g(z) \equiv z$ yazarsak

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} \overline{z}\ f(z)\ dz = \iint_{D} f(z)\ dx\ dy \tag{2.53}$$

bulunur. Eğer (2.51)'de $f(z) = g'(z)$ yazarsak

$$\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} g'(z)\ \overline{g(z)}\ dz = \iint_{D} \left|g'(z)\right|^{2}\ dx\ dy \tag{2.54}$$

elde edilir.

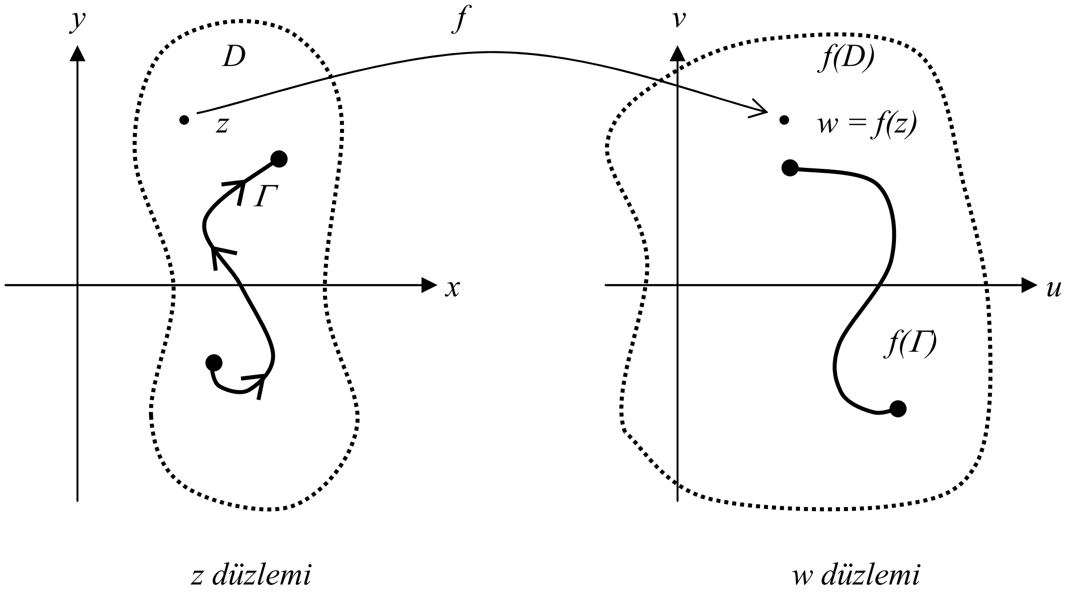
3. TANIMLAR VE UNİVALENT FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

3.1. Bazı Tanımlar ve Örnekler

Bir $f(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemdeki görüntüsü $f(D)$ olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu D bölgesini bire–bir olarak $f(D)$ bölgesine dönüştürüyorsa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde univalent fonksiyon denir.

Tanım 3.1. $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $w = f(z)$ fonksiyonu verilsin. Her $z_1, z_2 \in D$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa, tersine her $z_1, z_2 \in D$ için $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa $f(z)$'ye D üzerinde univalent fonksiyon denir.
Bu durumu geometrik olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$f : D \to \mathbb{C}$$
$$z \to w = f(z) = u(v,y) + iv(x,y) = u(z) + iv(z)$$
$$u,v : D \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to u = u(x,y)$$
$$v = v(x,y)$$



Şekil 3.1. Univalent fonksiyonların geometrik yorumu

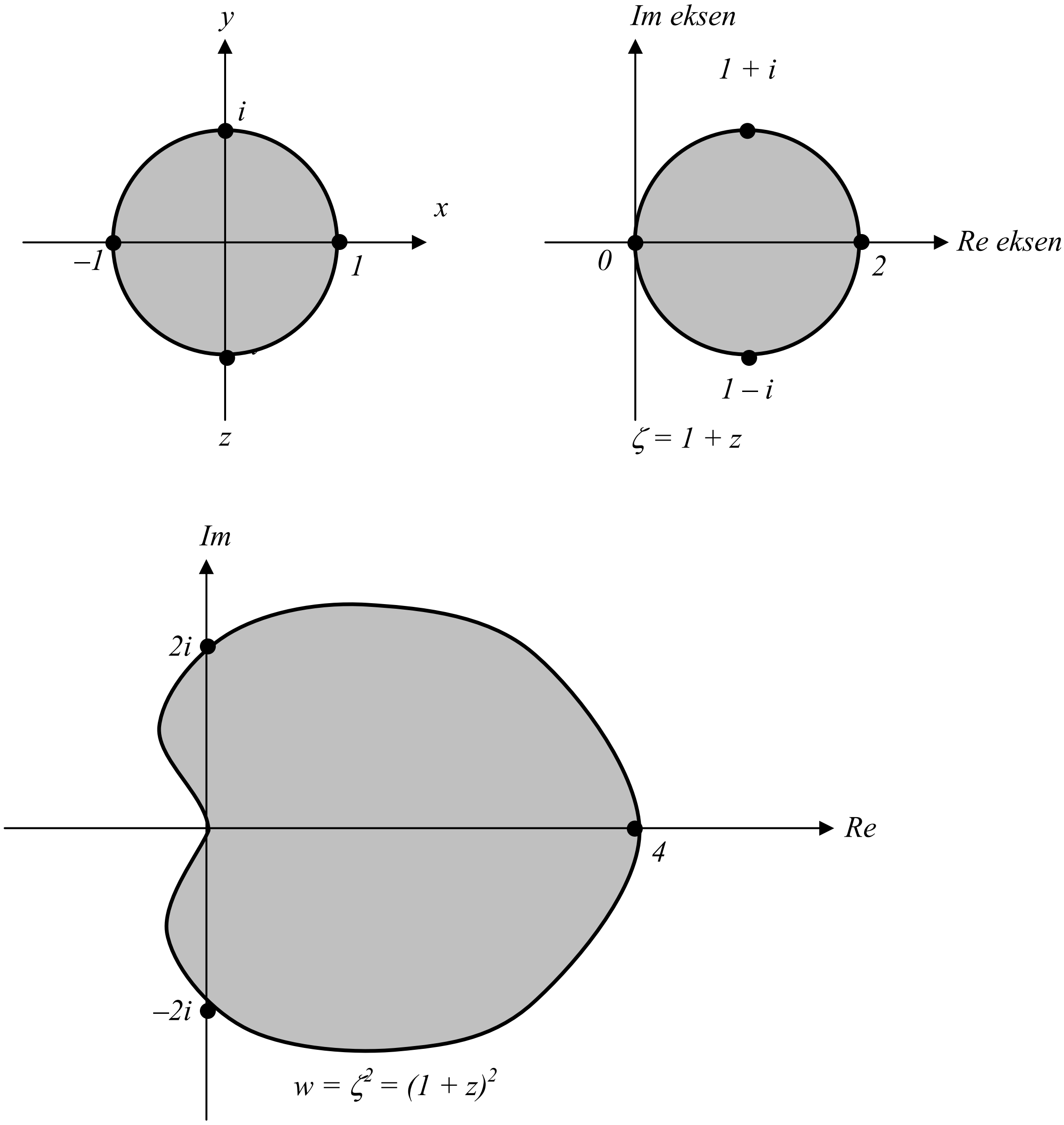
Kompleks fonksiyonlar genelde kompleks düzlemde bölgeleri bölgelere dönüştürür. Öyle fonksiyonlar vardırki z–düzlemindeki diski, w–düzlemindeki sınırsız bir bölgeye, kompleks düzlemin tamamına ya da z–düzlemindeki sınırlı bölgeyi w–düzleminden sınırsız bölgeye dönüştüren fonksiyonlar vardır.

Univalent fonksiyonlar için birçok değişik ifadeler kullanılmaktadır. Univalent fonksiyonlar basit fonksiyonlar olarak da adlandırılır. Univalent fonksiyonları Almanlar Schlicht fonksiyon olarak adlandırmaktadır.

Biz temel olarak, D'de regüler (analitik, holomorfik) olan univalent fonksiyonları inceleyeceğiz. Burada regülerlik singülerliği olmayan fonksiyon anlamındadır. Sonuç olarak, univalent ifadesi $f(z)$'nin regüler olduğunu gösterir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu D'de basit kutuplara ya da daha yüksek basamaktan kutup yerlerine sahipse bu bir univalent fonksiyon olamaz.

Univalent fonksiyonların teorisi çok çeşitli ve karışıktır. Bu nedenle bazı basitleştirici varsayımlara ihtiyaç vardır. Bu basitleştirmede en belirgin olanı keyfi D bölgesini $E : |z| < 1$ birim diski olarak seçmektir.

Basit bir örnek olarak, birim disk E'de $f(z) = (1 + z)^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyonun E de univalent olduğu kolayca görülebilir. $1 + z$ fonksiyonu birim diski birim diske dönüştürür ve dönüşmüş disk 1 birim sağdadır. Bu üç bölge aşağıdaki şekillerle gösterilmektedir.



Şekil 3.2. Birim diskin univalent fonksiyon altındaki görüntüsü

$f(z) = (1 + z)^2$ fonksiyonunun E birim diskinde univalent olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten

$f(z_1) = (1 + z_1)^2$, $f(z_2) = (1 + z_2)^2$, $f(z_1) = f(z_2)$ olsun.

$z_1 = z_2$ olduğu gösterilmelidir.

$$(1 + z_1)^2 = (1 + z_2)^2$$

$$1+2z_1+z_1^2=1+2z_2+z_2^2 \Rightarrow 2z_1+z_1^2=2z_2+z_2^2$$

$$\Rightarrow 2(z_1-z_2)+(z_1-z_2)(z_1+z_2)=0$$

$$(z_1-z_2)(2+z_1+z_2)=0$$

Buradan, $z_1 = z_2$ olduğu görülür. Benzer şekilde $w = (1 + z)^3$ E birim diskinde univalent değildir.

Eğer $g(z)$ E'de regüler ise E'de mutlak yakınsak olan

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{3.1}$$

şeklinde bir Maclaurin serisi açılımı vardır.

$g(z)$ nin gösterimi ile ilgili iki soru aklımıza gelebilir. Bunlardan birincisi $\{b_n\}$ katsayılarının dizisi verildiğinde bu dizi $g(z)$ nin geometrik özelliklerini nasıl etkilemektedir? İkincisi ise $g(z)$ nin bu özellikleri (3.1) deki katsayıları nasıl etkilemektedir?

Yani katsayılar değişirse fonksiyon nasıl etkilenir, fonksiyon değişirse katsayılar nasıl etkilenir?

Eğer $g(z)$ fonksiyonu E'de univalent ise $g(z) + C$ fonksiyonu da E de univalent olur. Burada C sabittir. Bu yüzden (3.1)'deki b_0 keyfi bir sabittir. Normalleştirme (kanonik, standart hale getirme) yönünde birinci aşamada (3.1)'deki denklemin her iki tarafından b_0'ı çıkaralım. Buradan eğer $g'(z_0) = 0$ ise $g(z)$ nin z_0'ın herhangibir komşuluğunda univalent olmadığını görürüz.

Netice itibariyle $g(z)$ E'de univalent ise $b_1 = g'(0) \neq 0$ olur. Bundan dolayı (3.1) nin her iki tarafı b_1'e bölünürse,

$f(z) = (g(z) - b_0) / b_1$

yazılabilir. $f(z)$ fonksiyonunun b_1'e bölünmesiyle sanal bölgeyi döndürüp, genişlettiğinden dolayı, $g(z)$ nin D'de univalent olması $f(z) = (g(z) - b_0) / b_1$ nin de aynı bölgede univalent olmasını gerektirir. Tersine eğer $f(z)$ D de univalent ise $g(z)$ de univalenttir. (3.1)'de $\frac{b_n}{b_1} = a_n$ dersek,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{3.2}$$

normalleştirilmiş formunu elde ederiz.

Tanım 3.2. (3.2) formunda yazılabilen bir fonksiyona normalleştirilmiş fonksiyon denir. Eğer $f(z)$ univalent ise ve (3.2) formundaysa $f(z)$ fonksiyonuna normalleştirilmiş univalent fonksiyon denir.

Regüler ve E de univalent olan bütün normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfını S ile gösterelim.

Eğer $g(z)$ (3.1) formunda ve E'de univalent ise $|b_n|$ istenildiği kadar büyük olabilir. (Uygun bir M ile $g(z)$ çarpıldığında univalentlik bozulmaz.) Normalleştirilmiş univalent fonksiyonların S sınıfında $n > 2$ olduğunda S'deki her $f(z)$ fonksiyonu için $|a_n| < A_n$ olacak şekilde bir A_n sınırı vardır. A_n nin yaklaşık değerini bulmak için büyük katsayılara sahip bir univalent fonksiyon bulmalıyız.

Şimdi

$$w(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad , \quad g(z) = w^2(z) \quad , \quad f(z) = \frac{1}{4}(g(z) - 1) \tag{3.3}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$w(z)$ fonksiyonu E bölgesini $Re\ u > 0$ yarı düzlemine dönüştürdüğü görülebilir. Gerçekten $z = x + iy$ dersek,

$$w(x+iy)=\frac{1+x+iy}{1-x-iy}$$

olur. Buradan

$$=\frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x-iy)(1-x+iy)}=\frac{-x^2-y^2+1}{x^2+y^2-2x+1}+i\,\frac{2y}{x^2+y^2-2x+1}$$
$$=u(x,y)+iv(x,y)$$

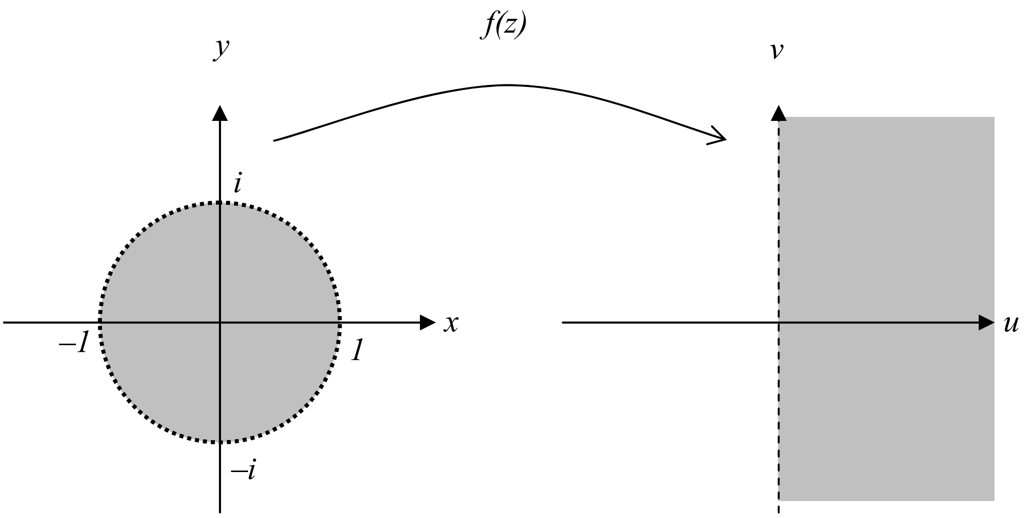
olup

$$u(x,y)=\frac{-x^2-y^2+1}{x^2+y^2-2x+1}\quad,\quad v(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2-2x+1}$$

elde edilir.

$|z|<1$ ya da $x^2+y^2<1$ olduğundan

$u(x,y)>0$ olmak zorundadır. Bunu aşağıdaki şekille gösterebiliriz.



Şekil 3.3. *w(z)* fonksiyonunun *E* bölgesini $u>0$ düzlemine dönüştürmesi

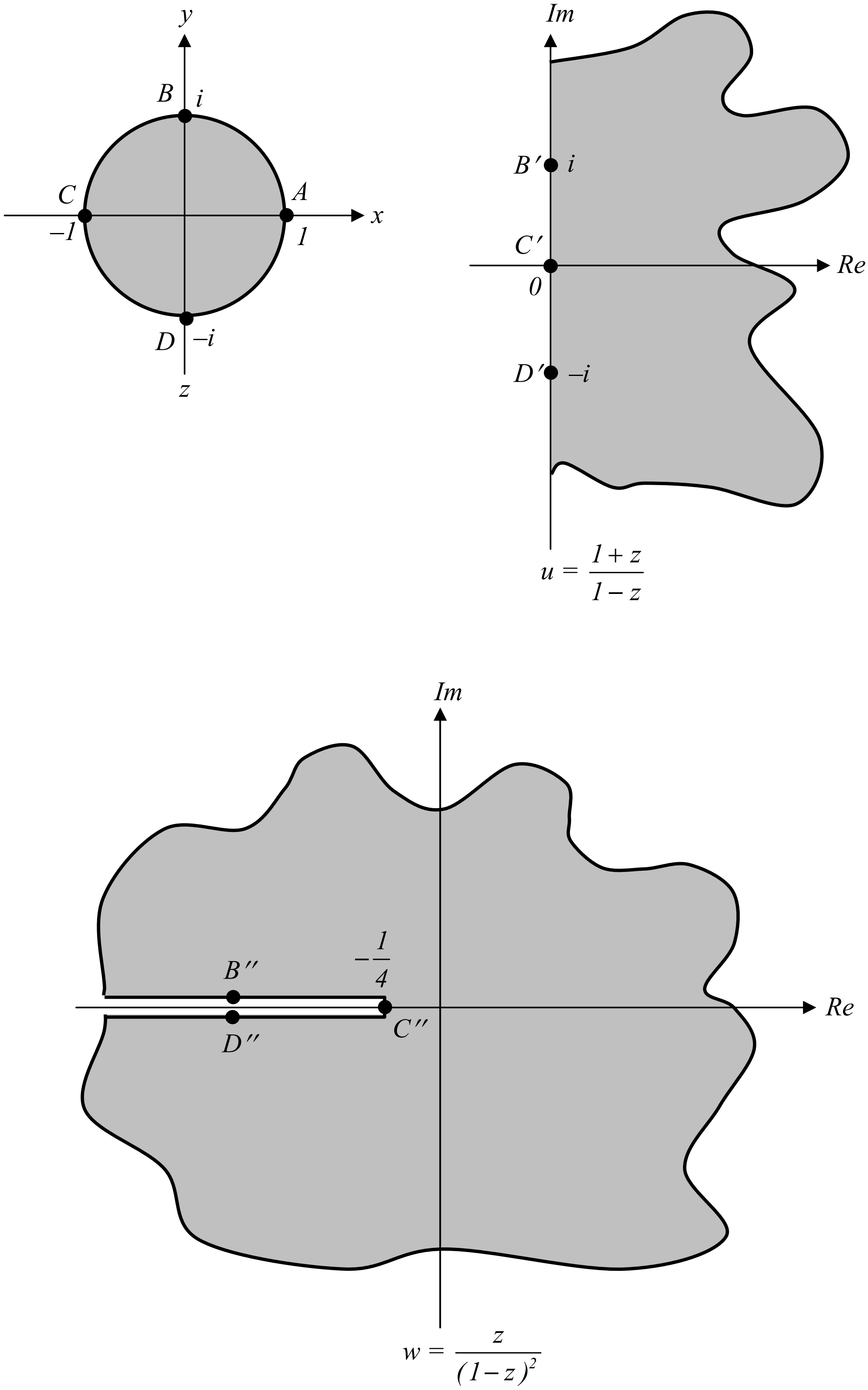
Görüldüğü gibi *xy*–düzleminde *z*'ler birim diskte değiştikçe *w*–düzleminde *u*'lar pozitif olmak zorunda yani $Re\ w>0$ olmak zorunda.

f(z) düzenlenirse

$$f(z)=(g(z)-1)/4=\frac{1}{4}\left(w^2(z)-1\right)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{4z}{(1-z)^2}\right]=\frac{z}{(1-z)^2}$$

bulunur. Bu fonksiyona Koebe fonksiyonu denir ve k(z) ile gösterilir.



Şekil 3.4. Koebe fonksiyonunun görüntüsü

Teorem 3.1. $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n$ (3.4)

dır.

Koebe fonksiyonu S sınıfındaki en geniş fonksiyondur. Koebe fonksiyonu birim diskin içini negatif reel eksen hariç kompleks düzlemin tamamına birebir olarak dönüştürür. Bu özelliği olan tek bölge bu değildir. Sonlu bir w_0'den başlayıp sonsuza giden bir Γ eğrisini seçersek bu taktirde E de regüler ve univalent bir fonksiyon bulunabilir ve E yi Γ eğrisinin tümleyenine dönüştürür.

Not 3.1. S sınıfındaki $f(z)$ fonksiyonu (3.2)'deki Maclaurin serisi gibi yazılabiliyorsa, her $n \geq 2$ için

$|a_n| \leq n$ (3.5)

olur. Bu conjectur literatürde Bieberbach conjecture olarak bilinir çünkü Bieberbach 1916'daki çalışmasının dipnotunda bu conjecturu kullanmıştır. Koebe fonksiyonunun özellikleri nedeniyle, Bieberbach conjectorunun kullanılması daha kolaydır. Bu nedenle matematikçilerin pek çoğu 1920'lerde bu conjectoru kullandılar.

Bu conjectorün birçok özel durumları ispatlanmıştır. Buna rağmen yukarıdaki conjektor hala tamamlanamamıştır.

$n = 2, 3, 4, 5, 6$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliği ispatlanmıştır fakat şu an için n'nin 7 ve 7'den büyük durumları için eşitsizlik ispatlanamamıştır.

Fitz Gerald metodunu kullanan D. Horowitz tüm n'ler için $|a_n| < 1.0657n$ eşitsizliğini ispatlamıştır.

3.2. Univalent Fonksiyonlar Kümesinde Bazı İşlemler

Bir fonksiyon sınıfının elemanlarını bir diğer fonksiyon sınıfının elemanlarına dönüştüren operatörleri kullanmak bazı hesaplamalarda büyük kolaylıklar sağlar. S sınıfı için bu temel işlemlerden dört tanesini inceleyelim:

Teorem 3.2. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu S sınıfından ise bu takdirde

$$e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\alpha} z^n \qquad (\alpha \text{ reel}) \tag{3.6}$$

$$\overline{f(\overline{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a}_n z^n \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{t} f(t z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n-1} z^n \qquad 0 < t \le 1 \tag{3.8}$$

$$\left[f(z^k) \right]^{1/k} = z + \frac{a_2}{k} z^{k+1} + \frac{1}{2k^2} (2ka_3 - (k-1)a_2^2) z^{2k+1} + \ldots \quad (k \text{ pozitif tamsayı}) \tag{3.9}$$

fonksiyonları da S sınıfındandır.

İspat: (3.2)'de z yerine $z\, e^{i\alpha}$ yazarsak ve eşitliğin her iki tarafını $e^{-i\alpha}$ ile çarparsak

$$e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\alpha} z^n \qquad (\alpha \text{ reel}) \tag{3.6}$$

bulunur.

(3.2)'de z yerine $\overline{z}$ alınır ve eşitliğin her iki yanının eşleneği alınırsa

$$\overline{f(\overline{z})} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a}_n z^n \tag{3.7}$$

elde edilir.

(3.2)'de z yerine $t\,z$ yazıp ve eşitliğin her iki tarafını $1/t$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{t} f(t\,z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, t^{n-1}\, z^n \qquad\qquad 0 < t \leq 1 \tag{3.8}$$

elde edilir.

Şimdi (3.9) eşitliğini ispatlayalım.

(3.2) de z yerine z^k yazılırsa

$$\begin{aligned} f(z^k) &= z^k + a_2 z^{2k} + a_3 z^{3k} + \ldots + a_n z^{nk} + \ldots \\ &= z^k \left[1 + a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \ldots + a_n z^{(n-1)k} + \ldots \right] \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın k. kökü alınıp

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \;, \alpha \in \mathbb{R}$$

Binom eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left[f(z)^k \right]^{1/k} &= z\left[1 + a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \ldots + a_n z^{(n-1)k} + \ldots \right]^{1/k} \\ &= z \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{k}}{n} \left(a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \ldots + a_n z^{(n-1)k} \right)^n \\ &= z\left[1 + \frac{1}{k}\left(a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \ldots + a_n z^{(n-1)k} + \ldots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1 \right)}{2!} \left(a_2 z^k + a_3 z^{2k} + \ldots + a_n z^{(n-1)k} + \ldots \right)^2 + \ldots \right] \\ &= z\left[1 + \frac{1}{k} a_2 z^k + \frac{1}{2k^2}(1-k) a_2^2 z^{2k} + \frac{1}{k} a_3 z^{2k} + \ldots \right] \\ &= z + \frac{1}{k} a_2 z^{k+1} + \frac{1}{2k^2}\left[2k a_3 - (k-1) a_2^2 \right] z^{2k+1} + \ldots \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left[f(z^k)\right]^{1/k} = z + \frac{a_2}{k} z^{k+1} + \frac{1}{2k^2}(2ka_3 - (k-1)a_2^2)\, z^{2k+1} + \dots \quad \textit{(k pozitif tamsayı)} \quad (3.9)$$

Tanım 3.3. *D* bölgesi $\frac{2\pi}{k}$ açısıyla orjin çevresinde döndürülünce tekrar *D* bölgesi oluşuyorsa *D* bölgesine *k*–katlı simetriktir denir. Yani *E*'deki her *z* için

$$f(e^{2\pi i/k} z) = e^{2\pi i/k} f(z) \quad (3.10)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu taktirde *f(z)* fonksiyonuna *E*'de *k*–katlı simetriktir denir. Şimdi ispatsız olarak aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.3. (Gronwall, 1916). Eğer *g(z)* regüler ve *E*'de *k*-katlı simetrik ise bu takdirde *g(z)* fonksiyonu

$$g(z) = b_1 z + b_{k+1} z^{k+1} + b_{2k+1} z^{2k+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk+1} z^{nk+1} \quad (3.11)$$

şeklinde bir kuvvet serisi gösterimine sahiptir.

Tersine eğer *g(z)* (3.11)'deki gibi kuvvet serisiyle gösteriliyorsa bu durumda *g(z)* fonksiyonu serilerin yakınsaklık çemberi içinde k-katlı simetriktir.

Tanım 3.3 ve Teorem 3.3 için *f(z)*'nin univalent olmasına gerek yoktur. Eğer uygun düzenlemeler yapılırsa Tanım 3.3 Riemann yüzeyindeki bir *D* bölgesine uygulanabilir. Bu tezde kullanılan fonksiyonlar normalleştirilmiş univalent fonksiyonlardır. Bu yüzden, *S* sınıfının bir alt sınıfı olan ve k-katlı simetrik fonksiyonlar sınıfı ele alınacaktır. Bu sınıfı $S^{(k)}$ ile gösterelim. Eğer *f(z)*, $S^{(2)}$ sınıfından ise *f(z)* tek univalent fonksiyon olarak adlandırılır.

Teorem 3.4. Eğer $f(z) \in S$ ve

$$\phi(z) = \frac{z+\lambda}{1+\bar{\lambda} z} \quad , \quad |\lambda| < 1 \tag{3.12}$$

ise bu takdirde,

$$g(z) = C\left[f(\phi(z)) - f(\lambda)\right] = z + b_2 z^2 + \dots \tag{3.13}$$

fonksiyonu da S sınıfındandır. Burada

$$C = \frac{1}{f'(\lambda)\,\phi'(0)} = \frac{1}{f'(\lambda)\left(1-|\lambda|^2\right)} \tag{3.14}$$

ve

$$b_2 = \frac{\left(1-|\lambda|^2\right) f''(\lambda)}{2\, f'(\lambda)} - \bar{\lambda} \tag{3.15}$$

dır.

Teorem 3.5. $f \in S$ ve her $z \in E$ için $f(z) \neq \gamma$ olsun. Bu takdirde

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - \dfrac{f(z)}{\gamma}} = z + \left(a_2 + \frac{1}{\gamma}\right) z^2 + \dots \tag{3.16}$$

fonksiyonu da S nin bir elemanıdır.

Not 3.2. Bir D bölgesinde $f(z) = \gamma$ denkleminin çözümü yoksa $f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde γ değerine ulaşamaz ve her $z \in D$ için $f(z) \neq \gamma$ dir.

İspat: $\left|\dfrac{f(z)}{\gamma}\right| < 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)| < |\gamma|$ olup buradan

$$g(z) = f(z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f(z)}{\gamma}\right)^n$$

$$= \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f(z)}{\gamma}\right)^n\right)$$

$$= \left(z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\right)\left(1 + \frac{f(z)}{\gamma} + \frac{f^2(z)}{\gamma^2} + \ldots\right)$$

$$= z + \frac{z\, f(z)}{\gamma} + \frac{z\, f^2(z)}{\gamma^2} + \ldots + a_2 z^2 + a_2 z^2\,\frac{f(z)}{\gamma} + a_2 z^2\,\frac{f^2(z)}{\gamma^2} + \ldots$$

$$+ a_3 z^3 + a_3 z^3\,\frac{f(z)}{\gamma} + a_3 z^3\,\frac{f^2(z)}{\gamma^2} + \ldots$$

yazılabilir. *f(z)* yi yerine yazarsak, bu durumda

$$\text{g(z)} = z + z\,\frac{(z + a_2 z^2 + \ldots)}{\gamma} + z\,\frac{(z + a_2 z^2 + \ldots)(z + a_2 z^2 + \ldots)}{\gamma^2} + \ldots + a_2 z^2 + \ldots$$

$$= z + \frac{z^2}{\gamma} + \ldots + a_2 z^2 + \ldots$$

$$= z + \left(a^2 + \frac{1}{\gamma}\right) z^2 + \ldots$$

bulunur. Bu ise $g \in S$ olduğunu gösterir.

E birim diskinin dışını kullanmak istediğimizde *f(z)* yerine $\dfrac{1}{f(z)}$ yi yazmamız gerekir.

Şimdi birkaç sembol verelim:

E^x, $1 < |\zeta| < \infty$ (birim diskin dışı) bölgesini göstermek üzere E^x de analitik, regüler ve

$$\phi(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n} = \zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots \qquad (3.17)$$

formunda yazılabilen fonksiyonların sınıfını Σ ile gösterelim.

Tanım kümesi içinde sıfır değerini almayan fonksiyonlar sınıfını Σ_0 ile gösterelim.

Teorem 3.6: Eğer $f \in S$ ise bu takdirde

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \zeta - a_2 + \left(a_2^2 - a_3\right)\frac{1}{\zeta} + \dots \qquad (3.18)$$

fonksiyonu Σ_0 sınıfındandır. Tersine eğer $\phi(\zeta)$ (3.17) formunda verilmişse ve Σ_0 sınıfından ise bu durumda

$$f(z) = \frac{1}{\phi\left(\frac{1}{z}\right)} = z - c_0 z^2 + \left(c_0^2 - c_1\right) z^3 + (2c_0\, c_1 - c_2 - c_0^3)\, z^4 + \dots \qquad (3.19)$$

S sınıfındandır.

Eğer (3.18)'deki dönüşüm Koebe fonksiyonuna uygulanırsa, $\phi(\zeta)$ basit şekle gelir. Yani

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{k\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \zeta - 2 + \frac{1}{\zeta}$$

olup bu fonksiyon E^x bölgesini tüm kompleks düzlemden $-4 \le w \le 0$ doğru parçasının çıkarılmasıyla oluşan irtibatlı bölgeye dönüştürür.

4. BAZI ALAN TEOREMLERİ

Bir bölgenin ölçüsü daima pozitif olup alanlarla ilgili olarak bazı eşitsizliklerle zaman zaman karşılaşırız. Böyle eşitsizlikler univalent fonksiyonlar teorisindeki temel teoremlerin bazılarının ispatında kullanılabilmektedir. Ancak yay uzunluğuyla ilgili benzer yaklaşımlar çok kullanışlı değildir.

Bu bölümde alanla ilgili bazı teoremler vereceğiz.

Teorem 4.1. (Fejer Teoremi)

Serisel olarak verilen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4.1}$$

fonksiyonu kapalı $\overline{E_r} : |z| \leq r$ diskinde regüler olsun. Eğer $A(r\ ,\ f) \equiv A(r)$, $f(\overline{E_r})$ bölgesinin alanıysa, bu durumda;

$$A(r) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|^2\, r^{2n} \tag{4.2}$$

dir.

İspat: $w = u + iv$, $z = x + iy$ olsun. Bu durumda,

$$A(r) = \iint_{f(\overline{E_r})} du\, dv = \iint_{\overline{E_r}} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy \tag{4.3}$$

dır. Çünkü, çift katlı integral kuralından bir D bölgesinin alanı,

$\iint_D dx\, dy = Alan\ D$ şeklindedir. Diğer taraftan

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{array}\right\} \text{ bire-bir ve örten ise } \begin{array}{l} u=\varphi_x(x,y) \\ v=\psi_x(x,y) \end{array}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \qquad\qquad dx\,dy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

olup buradan

$$A(r)=\iint_{E_r}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy \tag{4.3}$$

dır.

Teoremin hipotezleri altında kısmî türevler süreklidir ve Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmaktadır. Yani

$f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y$ olup buradan $u_x - v_y = 0$, $u_y + v_x = 0$ dır.

Böylece

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix}=u_x^2+v_x^2=\left|f'(z)\right|^2 \tag{4.4}$$

bulunur. Eğer (4.4) eşitliğini (4.3)'de yerine yazarsak ve kutupsal koordinatlara geçersek,

$(z = x + iy = \rho\, e^{i\theta}\, ,\ x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta)$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\,\rho \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho$$

olup buradan

$$A(r) = \iint_{f(E_r)} du\, dv = \iint_{E_r} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy = \iint_{|z|\le r} |f'(z)|^2\, dx\, dy$$

$$= \int_{\rho=0}^{r} \int_{\theta=0}^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho\, d\theta\, d\rho \tag{4.5}$$

elde edilir.

(4.5) eşitliğindeki $|f'(z)|$ ifadesi (4.4)'den de görüldüğü gibi büyüme çarpanıdır ve $w = f(z)$ dönüşümü altında yeni bölgenin alan elemanı $du\, dv = |f'(z)|^2\, dx\, dy$ şekline gelir.

Öte yandan $f(z)$ analitik olduğundan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$$

yazılabilir. Taylor serisi yakınsaklık çemberinin içinde mutlak yakınsak, doğal olarak da yakınsaktır. Bu yüzden türev ve toplam yer değiştirebilir.

Diğer taraftan $z = \rho e^{i\theta}$ kutupsal koordinatlara geçersek

$$f'(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (\rho e^{i\theta})^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, \rho^{n-1} e^{i\theta(n-1)}, \overline{f'(\rho e^{i\theta})} = \sum_{m=1}^{\infty} m\, \overline{a_m}\, \rho^{m-1} e^{-(m-1)i\theta}$$

olur.

Her iki tarafın θ ya göre integralini alırsak

$$\int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} f'(\rho e^{i\theta})\, \overline{f'(\rho e^{i\theta})}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, \rho^{n-1} e^{(n-1)i\theta} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m\, \overline{a_m}\, \rho^{m-1} e^{-(m-1)i\theta} \right) d\theta \tag{4.6}$$

elde edilir. Ayrıca

$m \neq n$ ise,

$$\int_0^{2\pi} e^{(n-1)i\theta}\; e^{-(m-1)i\theta}\; d\theta = \int_0^{2\pi} e^{(n-m)i\theta}\; d\theta$$

$$= \frac{1}{i(n-m)}\; e^{i(n-m)\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$m = n$ ise

$$\int_0^{2\pi} e^{(n-1)i\theta}\; e^{-(n-1)i\theta}\; d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

olur. 2π değerinin (4.6) da yerine yazılmasıyla

$$\int_0^{2\pi} \left| f'(\rho\, e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, |a_n|^2\; \rho^{2n-2} \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) nin (4.5) de yerine yazılmasıyla

$$A(r) = \int_{\rho=0}^{r} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, |a_n|^2\; \rho^{2n-2}\; \rho\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{r} \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, |a_n|^2\; \rho^{2n-1}\; d\rho$$

elde edilir. (4.7)’deki seri kapalı ve sınırlı bir bölge içindeki her z için mutlak yakınsaktır. Mutlak yakınsak bir seri aynı zamanda düzgün yakınsak olduğundan son eşitlikte integral ve toplam yer değiştirebilir. Bu durumda

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, |a_n|^2 \int_{\rho=0}^{r} \rho^{2n-1}\; d\rho$$

$$= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, |a_n|^2\; \frac{\rho^{2n}}{2n}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=r} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, |a_n|^2\; r^{2n}$$

olup böylece teorem ispatlanmış olur.

Bu teoremde $f(z)$ nin univalent olmadığını unutmayalım. Bu alan $f(\overline{E_r})$ Riemann yüzeyinin alanını kastetmektedir. D bölgesi (z'ler tarafından) bir defa tarandığında görüntü kümesi olan $f(\overline{E_r})$ k defa taranıyorsa, bu taktirde $A(r)$ k defa sayılmalıdır. $A(r)$ formülü toplamsaldır. Böylece, eğer $f(z)$ $a_n z^n$ şeklinde tek terimli bir ifade ile belirtiliyorsa bu durumda $f(\overline{E_r})$ $R = |a_n| r^n$ yarıçapının n-katlı diskidir ve n-katlı diskin alanı $n\pi R^2 = n\ \pi |a_n|^2\ r^{2n}$ dir. (4.2)'deki eşitlik bu tarz ifadelerin bir toplamıdır.

Teorem 4.2.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^n \tag{4.8}$$

fonksiyonu $D \equiv \overline{E}(r,R)\ :\ r \le |z| \le R$ kapalı halkasal bölgesinde regüler olsun. Bu durumda $f(D)$ nin alanı

$$A = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, |a_n|^2\, (R^{2n} - r^{2n}) \tag{4.9}$$

dir.

İspat: $f(z)$ nin D halkasal bölgesinde

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, z^{-n}$$

şeklinde Laurent serisine açılabildiğini varsayalım. Buradan önce türev alıp sonra $z = \rho\, e^{i\theta}$ kutupsal koordinatlara geçersek

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n\, z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, (-n)\, z^{-n-1}\ ,$$

$$f'(\rho\, e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, \rho^{n-1}\, e^{i\theta(n-1)} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, n\, \rho^{-n-1}\, e^{i\theta(-n-1)}\ ,$$

$$\overline{f'(\rho\, e^{i\theta})} = \sum_{m=1}^{\infty} m\, \overline{a_m}\, \rho^{m-1}\, e^{-i\theta(m-1)} - \sum_{m=1}^{\infty} \overline{a_{-m}}\, m\, \rho^{-m-1}\, e^{-i\theta(-m-1)}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\int_0^{2\pi} \left| f'(\rho\, e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f'(\rho\, e^{i\theta})\, \overline{f'(\rho\, e^{i\theta})}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, \rho^{n-1}\, e^{i\theta(n-1)} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m\, \overline{a_m}\, \rho^{m-1}\, e^{-i\theta(m-1)} \right) d\theta$$

olup $m \neq n$ için $\int_0^{2\pi} e^{(n-1)i\theta}\, e^{-(m-1)i\theta}\, d\theta = 0$ olduğundan $m = n$ için

$$\int_0^{2\pi} f'(\rho\, e^{i\theta})\, \overline{f'(\rho\, e^{i\theta})}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, \rho^{n-1}\, e^{i\theta(n-1)} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, n\, \rho^{-n-1}\, e^{-i\theta(n+1)} \right) .$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\, \overline{a_n}\, \rho^{n-1}\, e^{-i\theta(n-1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{-n}}\, n\, \rho^{-n-1}\, e^{i\theta(n+1)} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, \overline{a_n}\, a_n\, \rho^{2n-2} + \varphi_n(\rho,\theta) \right) d\theta$$

$$- \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n\, \overline{a_{-n}}\, \rho^{-2}\, e^{2in\theta} + \psi_n(\rho,\theta) \right) d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, \overline{a_n}\, n^2\, \rho^{-2}\, e^{-2i\theta n} + \Psi_n(\rho,\theta) \right) d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, \overline{a_{-n}}\, n^2\, \rho^{-2n-2} + \phi_n(\rho,\theta) \right) d\theta \qquad (4.10)$$

elde edilir.

Not 4.1. $\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad , \quad c_n = a_1 b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + b_n a_1$

Bu serilerin çarpımı sonunda integraller alındığında, farklı indisli terimlerin integralleri sıfır olacağından sadece aynı indisli terimlerin integrallerinden sıfırdan farklı değerler ortaya çıkar.

Diğer taraftan

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\ e^{im\theta}\ d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad k+m \neq 0 \\ 2\pi & , \quad k+m = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

dır. (2.16)'dan farklı n'ler için integrallerin sonuçları sıfır olur. İntegrallerinin sonucu sıfır olan terimleri $\varphi_n(\rho,\theta), \psi_n(\rho,\theta), \Psi_n(\rho,\theta), \phi_n(\rho,\theta)$ ile gösterirsek

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(\rho,\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \psi_n(\rho,\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \phi_n(\rho,\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \Psi_n(\rho,\theta)\, d\theta = 0$$

olur. Ayrıca (4.10)'daki 2. ve 3. integrallerin içinde üstel ifade olduğundan bu integrallerin sonuçları da sıfır olur. Sonuçta (4.10) integrali

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f'(\rho e^{i\theta})\, \overline{f'(\rho e^{i\theta})}\, d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|a_n\right|^2 \rho^{2n-2} \right) d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\ \overline{a_{-n}}\ n^2\ \rho^{-2n-2} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|a_n\right|^2 \rho^{2n-2} \right) d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|a_{-n}\right|^2 \rho^{-2n-2} \right) d\theta \\
&= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|a_n\right|^2 \rho^{2n-2} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left|a_{-n}\right|^2 \rho^{-2n-2} \\
&= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left|a_n\right|^2 \rho^{2n-2}
\end{aligned}$$

şekline gelir.

Şimdi

$\int_r^R \left| f'(\rho\, e^{i\theta}) \right|^2 \rho\, d\rho$ integralini hesaplayalım:

$$\left| f'(\rho\, e^{i\theta}) \right|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left|a_n\right|^2 \rho^{2n-2}$$

olduğundan

$$\int_r^R \left| f'(\rho\, e^{i\theta}) \right|^2 \rho\, d\rho = \int_r^R 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left| a_n \right|^2 \rho^{2n-2}\, \rho\, d\rho = 2\pi \int_r^R \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left| a_n \right|^2 \rho^{2n-1}\, d\rho$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left| a_n \right|^2 \int_r^R \rho^{2n-1}\, d\rho = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left| a_n \right|^2 \left. \frac{\rho^{2n}}{2n} \right|_r^R$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| a_n \right|^2 \left(R^{2n} - r^{2n} \right)$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $f(z)$ fonksiyonu regüler ve $C_r : |z| = r$ çemberi üzerinde univalent olsun. C_r çemberinin $f(z)$ altındaki görüntüsü pozitif yönde yönlendirilmiş (saat yönünün tersine) Γ olsun. $\theta = 0$'dan 2π'ye kadar Γ eğrisinin sınırladığı bölgenin alan

$$I = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left| a_n \right|^2 r^{2n} \tag{4.11}$$

dır. Eğer Γ negatif yönde (saat yönünde) yönlendirilmiş olsaydı $I < 0$ ve Γ nın sınırladığı bölgenin alanı $|I|$ olurdu.

İspat: w-düzleminde $f = u + iv$ ve Γ basit kapalı pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğri olsun. Γ nın $a \le t \le b$ olmak üzere $u = u(t),\ v = v(t)$ şeklinde parametrik olarak ifade edildiğini varsayalım. Γ eğrisi ile sınırlandırılan bölgeye D diyelim. *Alan* $D = A$ olsun. Bu durumda düzlemdeki Green Teoreminden

$$A = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u\, dv - v\, du) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(u(t) \frac{dv}{dt} - v(t) \frac{du}{dt} \right) dt \tag{4.12}$$

olur.

Diğer taraftan

$f = u + iv$, $\overline{f} = u - iv$ olmak üzere f ve $\overline{f}$ taraf tarafa toplanırsa $u = \dfrac{f+\overline{f}}{2}$; taraf tarafa çıkarılırsa $v = \dfrac{f-\overline{f}}{2i}$ bulunur.

$z = r\,e^{i\theta}$ kutupsal koordinatları kullanırsak

$$u(\theta) = \frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(z)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\, r^n\, e^{in\theta} + \overline{a_n}\, r^n\, e^{-in\theta}\right) \tag{4.13}$$

$$v(\theta) = \frac{1}{2i}\left(f(z) - \overline{f(z)}\right) = \frac{1}{2i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\, r^n\, e^{in\theta} - \overline{a_n}\, r^n\, e^{-in\theta}\right) \tag{4.14}$$

elde edilir.

(4.13) ve (4.14) denklemlerinde θ ya göre türev alırsak

$$u'(\theta) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, r^n\,(in)\,e^{in\theta} + \overline{a_n}\, r^n\,(-in)\,e^{-in\theta}\right)$$

$$v'(\theta) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, r^n\,(in)\,e^{in\theta} + \overline{a_n}\, r^n\,(in)\,e^{-in\theta}\right)$$

olur. Bunları (4.12) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_a^b \left(u(t)\,v'(t) - v(t)\,u'(t)\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\, r^n\, e^{in\theta} + \overline{a_n}\, r^n\, e^{-in\theta}\right)\frac{1}{2i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\, r^n\,(in)\,e^{in\theta} + \overline{a_n}\, r^n\,(in)\,e^{-in\theta}\right)\right\}d\theta \\
&- \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\, r^n\, e^{in\theta} - \overline{a_n}\, r^n\, e^{-in\theta}\right)\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(a_n\, r^n\,(in)\,e^{in\theta} + \overline{a_n}\, r^n\,(-in)\,e^{-in\theta}\right)\right\}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{4i}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, a_n\, r^{2n}\,(in)\,e^{2in\theta} + \varphi_n(r,\theta) + \frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\overline{a_n}\,(in)\,r^{2n} + \psi_n(r,\theta)\right.\right. \\
&\left.\left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{a_n}\, a_n\, r^{2n}\,(in) + \Psi_n(r,\theta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{a_n}\,\overline{a_n}\, r^{2n}\,(in)\,e^{-2in\theta} + \xi_n(r,\theta)\right]\right\}d\theta
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{4i}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, a_n\, r^{2n}\,(in)\,e^{2in\theta}+\eta_n(r,\theta)+\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\overline{a_n}\, r^{2n}\,(-in)+\phi_n(r,\theta)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,\overline{a_n}\, r^{2n}\,(in)+\Phi_n(r,\theta)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{a_n}\,\overline{a_n}\, r^{2n}\,(in)\,e^{-2in\theta}+\delta_n(r,\theta)\right]\right\}d\theta$$

bulunur.

Böylece Not 4.1’den

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2\, r^{2n}\,(in)\,e^{2in\theta}+\varphi_n(r,\theta)+\frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\, r^{2n}\,(in)+\Psi_n(r,\theta)\right.$$

$$+\frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\, in\, r^{2n}+\psi_n(r,\theta)+\frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\overline{a_n})^2\, r^{2n}\,(in)\,e^{-2in\theta}+\xi_n(r,\theta)$$

$$-\frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2\, r^{2n}\,(in)\,e^{2in\theta}+\eta_n(r,\theta)-\frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\, r^{2n}\,(-in)+\phi_n(r,\theta)$$

$$\left.+\frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\, r^{2n}\,(in)+\Phi_n(r,\theta)-\frac{1}{4i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{a_n}^{\,2}\, r^{2n}\,(in)\,e^{-2in\theta}+\delta_n(r,\theta)\right\}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4i}\,4\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\, r^{2n}\,(in)\,d\theta\;=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\, r^{2n}\, n\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\, r^{2n}\, n\, d\theta=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\, r^{2n}\, n$$

$$=I$$

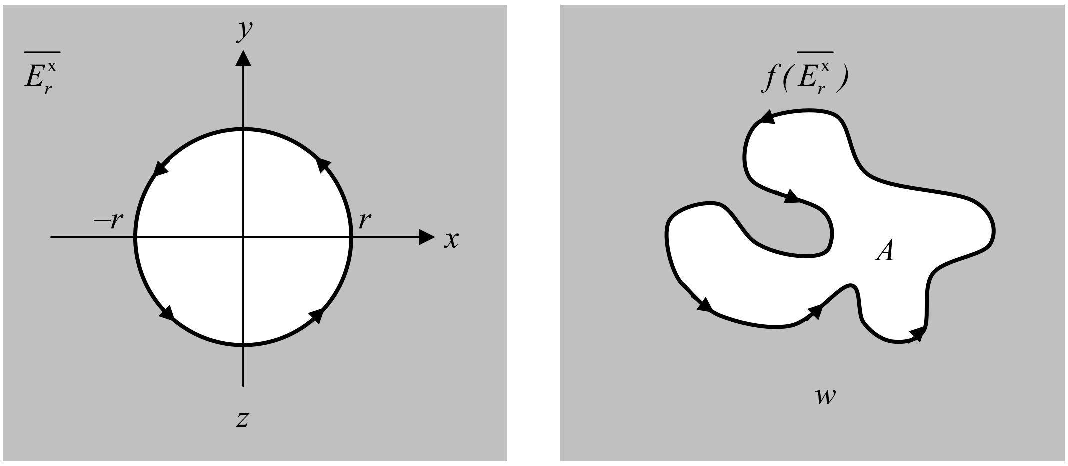
bulunur. Eğer Γ negatif yönde yönlendirilirse, θ yerine $-\theta$ yazarsak bu durumda $A=-I$ ve $I<0$ olur. Alan hiçbir zaman negatif olamayacağı için $A=|I|$ olur.

Not 4.2. $f(z)=c\,z+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}\quad,\quad c\neq 0$ (4.15)

ile verilen $f(z)$ fonksiyonu $\overline{E_r^{x}}\;:\; r\leq |z|<\infty$ da regüler ve univalent olsun. Bu durumda $f(\overline{E_r^{x}})$ in tümleyeninin alanı

$$A = \pi \left(|c|^2 \, r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|c_n|^2}{r^{2n}} \right) \tag{4.16}$$

ile verilir.



Şekil 4.1. $f(E_r^x)$ ve Tümleyenin Alanı

Şekil 4.1'e bakarsak $\overline{E_r^x}$ ve onun görüntüsü taralı alandır. (4.17)'deki seriler *w*-düzleminde taranmış bölgenin alanını vermektedir.

Gerçekten eğer *f(z)* univalent ise bu durumda $\rho > r$ için C_ρ çemberinin *f(z)* altındaki görüntüsü $w = c\ \rho\ e^{i\theta}$ kapalı çemberidir. Böylece Γ_r $f(C_\rho)$ çemberi de pozitif yönlüdür. *f(z)* sürekli ve univalent olduğundan bu pozitif yönlendirme bütün $\rho \geq r$ için geçerlidir. Bu taktirde Γ_r pozitif yönde yönlendirilmiş bir eğridir. $a_{-n} = c_n$ $(n = 1,2,...)$ ve $a_1 = c$ seçilirse Teorem 4.3 uygulanabilir. O halde (4.11) eşitliği (4.16) eşitliğini verir. Böylece

$$I = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2\, r^{2n} \tag{4.11}$$

$$= \pi \left(... - 3|a_{-3}|^2\, r^{-6} - 2|a_{-2}|\, r^{-4} - |a_{-1}|^2\, r^{-2} + |a_1|^2\, r^2 + |a_2|^2\, r^4 + ... \right)$$

$$A = \pi \left(|c|^2 \, r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, |c_n|^2}{r^{2n}} \right) \tag{4.16}$$

olur. O halde Teorem 4.3'ün hipotezleri altında

$$0 \leq |c|^2 \, r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, |c_n|^2}{r^{2n}} \tag{4.17}$$

yazılabilir ve bu da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |c_n|^2}{r^{2n}} \leq |c|^2 \, r^2$$

eşitsizliğini verir.

Teorem 4.4. (Gronwall Alan Teoremi)

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} \tag{4.18}$$

fonksiyonu $E^{\times} : \{ z \in \mathbb{C} : |z| > 1 \}$'de regüler ve univalent ise, bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \, |c_n|^2 \leq 1 \tag{4.19}$$

dır.

İspat: $r > 1$ ve $c = 1$ için (4.17)'den

$$0 \leq r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, |c_n|^2}{r^{2n}}$$

yazılabilir. Buradan eşitsizliğinin her iki tarafının r^2 ile bölünüp $r \to r^+$ için limit alınırsa (4.19) eşitsizliği doğrudan görülür.

Not 4.3. $f(E^x)$ alanı sıfır olan kümeler dışında bütün kompleks düzlemi örtüyorsa (4.19)'daki eşitsizlik hali eşitliğe dönüşür. Bu durumun haricinde (4.19)'daki denklemde eşitlik sözkonusu değildir.

Burada eğer $f(E^x)$ in tümlemesi hiçbir açık küme kapsamıyorsa bu taktirde $f(E^x)$'e sıfır alanlıdır denir.

Bu teorem Alan Teoremi ismiyle verilebilir. Çünkü univalent fonksiyonlar teorisinin son derece önemli bir teoremidir. Bu teorem Almanca'da Flächensatz Teoremi olarak bilinir.

5. KATSAYILAR İÇİN SINIRLANDIRMALAR

5.1. *S* Kümesinde 2. Katsayı İçin Sınırlandırma

Bu kesimde,

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,z^n \tag{5.1}$$

formundaki fonksiyonlarda a_2 katsayısı için bir sınırlandırma yapacağız. Bunu bir teoremle ifade edelim:

Teorem 5.1. (Bieberbach, 1916) Eğer

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,z^n \tag{5.1}$$

S sınıfındansa, bu durumda

$$|a_2|\leq 2 \tag{5.2}$$

dir.

İspat: $g(z)=\sqrt{f(z^2)}$ olsun. Bu durumda Teorem 3.2'den $\left(f(z^2)\right)^{1/2}=g(z)$

$k=2$ için

$$\begin{aligned}\left[f(z^2)\right]^{1/2}&=z+\frac{a_2}{2}z^3+\frac{1}{8}(4a_3-a_2^2)\,z^5+...\\&=z+\frac{a_2}{2}z^3+\left(\frac{a_3}{2}-\frac{a_2^2}{8}\right)z^5+...\end{aligned} \tag{5.3}$$

fonksiyonu *S* sınıfındandır.

Teorem 3.6'dan

$$g(z) = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \left(\frac{a_3}{2} - \frac{a_2^2}{8} \right) z^5 + \ldots \in S$$

olması nedeniyle

$$\phi(\xi) = \frac{1}{g(1/\xi)} = \xi - \frac{a_2}{2} \frac{1}{\xi} + c_3 \frac{1}{\xi^3} + c_5 \frac{1}{\xi^5} + \ldots \in \Sigma_0 \tag{5.4}$$

dır. c_0, c_2, $c_4 = 0$ dır. $c_1 = -\frac{1}{2} a_2$ dir.

Teorem 4.4'den,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| c_n \right|^2 = \left| \frac{-a_2}{2} \right|^2 + 3\left| c_3 \right|^2 + 5\left| c_5 \right|^2 + \ldots \leq 1 \tag{5.5}$$

olur. Böylece $\left| \frac{-a_2}{2} \right|^2 \leq 1$ dir. Buradan her iki tarafın karekökünü alırsak,

$\frac{\left| -a_2 \right|}{2} \leq 1 \Rightarrow \left| a_2 \right| \leq 2$ olur.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Eğer $a_2 = 2\, e^{i\alpha}$ alınırsa (5.5)'deki eşitsizlikten bütün $n \geq 2$'ler için $c_n = 0$ elde ederiz.

$$1 + 3\left| c_3 \right|^2 + 5\left| c_5 \right|^2 + \ldots \leq 1 \tag{5.5}$$

olduğundan, $\left| c_3 \right|^2 + \left| c_5 \right|^2 + \ldots = 0$ yani $n \geq 2$ için $c_n = 0$ elde edilir.

Böylece,

$$\phi(\xi) = \frac{1}{g(1/\xi)} = \xi - \frac{a_2}{2} \frac{1}{\xi} + c_3 \frac{1}{\xi^3} + c_5 \frac{1}{\xi^5} + \ldots \tag{5.4}$$

de $c_n = 0$ ve $a_2 = 2\, e^{i\alpha}$ yazarsak,

$$\phi(\xi) = \frac{1}{g(1/\xi)} = \xi - \frac{2\, e^{i\alpha}}{2}\frac{1}{\xi} + 0 + \ldots$$
$$= \xi - \frac{e^{i\alpha}}{\xi}$$

olur. Buradan, $\xi = \dfrac{1}{z}$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$g(z) = \frac{1}{\phi\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{z} - e^{i\alpha}\, z} = \frac{z}{1 - e^{i\alpha}\, z^2}$$

olur. Böylece

$$f(z^2) = g^2(z) = \frac{z^2}{\left(1 - e^{i\alpha}\, z^2\right)^2}$$

elde edilir. Buradan da,

$$f(z) = \frac{z}{\left(1 - e^{i\alpha}\, z\right)^2}$$

olduğu görülür.

$f(z)$ sade ve sadece Koebe fonksiyonunun bir dönmesi yani,

$$f(z) = e^{-i\alpha}\, k\,(e^{i\alpha}\, z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}\, z)^2} \tag{5.6}$$

ise (5.2)'deki eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

5.2. Diğer Bazı Katsayı Sınırları

Teorem 5.1'in ispatında $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$ olmadığını farzedersek ve (5.5) eşitliğinde $\phi(\xi) = \dfrac{1}{f(1/\xi)}$ yi yazarsak, Teorem 5.2'yi elde ederiz.

Teorem 5.2. (Bieberbach, 1916)

f(z) S sınıfındansa bu durumda

$$\left|a_2^2 - a_3\right| \le 1 \tag{5.7}$$

dır.

İspat: Bu teoremin ispatı çeşitli kompleks analiz kitaplarında bulunmaktadır.

Eğer *f(z)*,

$$\tilde{k}_\phi(z) = \frac{z}{1 - bz + z^2} \ , -2 \le b \le 2 \quad b = 2\cos\phi \tag{5.8}$$

fonksiyonunun bir rotasyonu (döndürmesi) ise (5.7)'deki eşitsizlik eşitliğe dönüşür.

S sınıfındaki herhangi bir *f(z)* fonksiyonu için $|a_2| \le 2$ ile birlikte (5.7) eşitsizliğinin $|a_3| \le 5$ sınırını verdiği gösterilirse,

$$\left|a_2^2 - a_3\right| \ge \left|a_3\right| - \left|a_2^2\right|$$

$$\left|a_3\right| \le \left|a_2^2 - a_3\right| + \left|a_2^2\right|$$

$\left|a_2^2 - a_3\right| \le 1 \quad , \quad \left|a_2^2\right| \le 4$ olduğundan

$\left|a_3\right| \le 5$ olur.

Açıklama 1. $f(z)$, S sınıfından bir fonksiyon ve $a_2 = 0$ olsun. Bu durumda,

$$|a_3| \leq 1 \tag{5.9}$$

dir ve bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik durumu sadece

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\alpha} z^2} \;, \; \alpha \text{ reel} \tag{5.10}$$

olduğunda gerçekleşir. Diğer taraftan

$$f(z) = \frac{z}{1 - e^{i\alpha} z^2}$$

için

$$f(-z) = \frac{-z}{1 - e^{i\alpha} z^2} = -\frac{z}{\left(1 - e^{i\alpha} z^2\right)} = -f(z)$$

dir. Burada $f(z)$ nin tek bir fonksiyon olduğu görülür. $f(z)$ tek bir fonksiyon olduğundan, bu açıklama $S^{(2)}$ sınıfındaki tek univalent fonksiyonlarda $|a_3|$ ün maksimize edilmesi problemlerinde kullanılır.

Teorem 5.3. $k > 1$ bir tamsayı ve

$$g(z) = z + b_{k+1} z^{k+1} + b_{2k+1} z^{2k+1} + \ldots = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk+1} z^{nk+1} \tag{5.11}$$

$S^{(k)}$ sınıfından olsun. Bu durumda

$$\left|b_{k+1}\right| \leq \frac{2}{k} \tag{5.12}$$

dır.

İspat: *g(z)*, $S^{(k)}$ sınıfından olması nedeniyle

$$g(z) = \left[f(z^k)\right]^{1/k} = \left[z^k + a_2 z^{2k} + a_3 z^{3k} + ...\right]^{1/k}$$
$$= \left[z^k(1 + a_2 z^k + a_3 z^{2k} + ...)\right]^{1/k}$$
$$= z\left[1 + a_2 z^k + a_3 z^{2k} + ...\right]^{1/k}$$

olacak şekilde *S* sınıfından bir *f(z)* fonksiyonu vardır.

Teorem 3.2'den,

$$g(z) = z + \frac{a_2}{k} z^{k+1} + \left(\frac{1}{k} a_3 - \frac{1}{2}\frac{(k-1)}{k^2} a_2^2\right) z^{2k+1} + ...$$

yazılabilir. Buradan görüldüğü gibi $b_{k+1} = \frac{a_2}{k}$ dır. Böylece *S* sınıfındaki *f(z)* fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ olduğundan, $|b_{k+1}| \leq 2/k$ olduğu ortaya çıkar. Teorem 5.1'deki eşitlik sadece ve sadece *f(z)* Koebe fonksiyonunun bir rotasyonuysa ortaya çıkıyordu. Böylece (5.12) deki eşitlik hali sadece *f(z)* Koebe fonksiyonu olduğunda yani $g(z) = \left[f(z^k)\right]^{1/k}$ olduğunda geçerlidir.

f(z) fonksiyonu

$$g(z) = \frac{z}{(1 - z^k)^{2/k}} \tag{5.13}$$

fonksiyonunun bir döndürmesi ise yalnızca bu durumda eşitlik söz konusudur.

5.3. Univalent Fonksiyonların Sınırlılığı

Sınırlandırılmış univalent fonksiyonlar kümesinde ikinci katsayılar için kesin sınırlar elde edebiliriz.

$E \subset \mathbb{C}$ olmak üzere her $z \in E$ için

$$|f(z)| < M \tag{5.14}$$

eşitsizliğini sağlayan normalleştirilmiş univalent fonksiyonların sınıfını $SB_1(M)$ ile gösterelim.

Öncelikle kompleks fonksiyonlar teorisinin son derece önemli bir teoremi olan ve kullanacağımız Schwarz Lemmasını verelim:

Lemma 5.1. (Schwarz) $f : D = \{z : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ analitik, $z \in D$ için, $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $z \in D$ noktaları için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Ayrıca $z_0 \in D$ $(z_0 \neq 0)$ için $|f(z_0)| = |z_0|$ ise c, $|c| = 1$ özelliğinde bir sabit olmak üzere, $f(z) = c\,z$ dır.

İspat: Bu Lemmanın ispatı için (2) nolu kaynağa bakılabilir.

Schwarz’s lemmasında eğer $M < 1$ ise $SB_1(M)$ kümesinin boş küme olduğunu ve $M = 1$ ise $SB_1(M)$ kümesinin $f(z) = z$ şeklinde tekbir fonksiyon içerdiğini gösterelim.

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklinde verilen fonksiyonun S sınıfından olduğunu biliyoruz.

z noktaları birim diskin içinde olmak üzere

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

fonksiyonu için üçgen eşitsizliğinden,

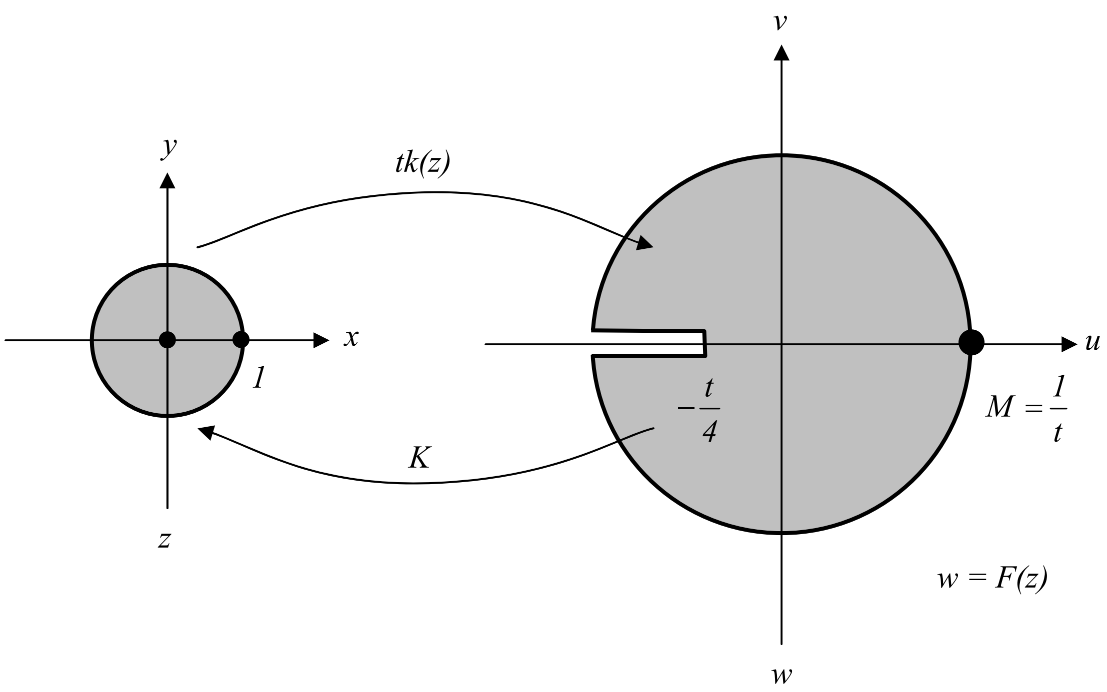
$$|f(z)| \leq |z| + |a_2|\, |z|^2 + |a_3|\, |z|^3 + \ldots < 1 + |a_2| \,.\, 1 + |a_3| \,.\, 1 + \ldots$$

yazılabilir. $|f(z)| \leq M$ ve $f(z) \in S$ olduğundan

$M < 1$ ise f fonksiyonu S nin elemanı olamaz. S nin elemanı olmayacağı için boş kümedir. $M = 1$ ise $|a_2|$, $|a_3|$, $|a_4|$, ... $= 0$ olmak zorundadır. Buradan da $f(z) = z$ olur. Yani,

$M > 1$ ise $f(z)$ S sınıfındandır. $M < 1$ ise $SB_1(M) = \phi$ olur. $M = 1$ ise $SB_1(M)$ kümesinin $f(z) = z$ şeklinde tek bir fonksiyon içerdiğini görürüz. Sonuç olarak, $f(z) \in S$ olduğu sürece $M > 1$ olmak zorundadır. $SB_1(M)$ kümesindeki $|a_2|$ için kesin bir sınır bulmadan önce örnek bir fonksiyon oluşturalım.

$z = K(w)$ $k(z)$ Koebe fonksiyonunun tersini göstersin. Eğer $0 < t < 1$ ise $tk(z)$ fonksiyonu E kümesini, negatif reel eksenin $-\infty$ dan $-\frac{t}{4}$ e kadar olan parçasını içinde bulunduran ince bir şerit hariç kompleks düzlemin tamamına dönüştürür. $K(w)$ bu bölgede regüler olsun ve bölgeyi birim diske dönüştürsün.
$K(w)$ nın görüntüsü negatif reel eksen üzerindeki -1 den $K(-t/4)$'e kadar olan ince şerit hariç E birim diskini tamamen örter. $tk(z)$ ile $K(w)$ fonksiyonlarının bileşkelerini normalleştirebilirsek $F(z) = \dfrac{K(tk/z)}{t}$ olur ve $F(z)$ Şekil 5.1'de görüldüğü gibi E yi kendi içine dönüştürür.



Şekil 5.1. Koebe Fonksiyonunun Tersi

$$K(w) = \frac{2w + 1 - \sqrt{1 + 4w}}{2w} \tag{5.15}$$

olduğunu gösterelim.

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n$$

olmak üzere

$$w = \frac{z}{(1-z)^2} \;\Rightarrow\; z = w(1 - 2z + z^2)$$

$$= w - 2zw + wz^2$$

$$\Rightarrow z + 2zw - wz^2 = w$$

$$\Rightarrow z(1 + 2w) = w + wz^2$$

$$\Rightarrow wz^2 - (1 + 2w)\, z + w = 0$$

olup buradan

$$K(w) = \frac{2w + 1 - \sqrt{1 + kw}}{2w}$$

bulunur.

Eğer $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = w$ ifadesi $K(w)$ da yerine yazılırsa geometrik seri özelliklerinden

$$K(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,(2n)!\, w^n}{(n+1)!\, n!} \tag{5.16}$$

olduğu elde edilebilir. Diğer taraftan

$$F(z)=\frac{1}{t}K(t\,k(z))=\frac{z}{(1-z)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,(2n)!\,t^{n-1}\,z^n}{(n+1)!\,n!\,(1-z)^{2n}} \tag{5.17}$$

yazılabilir. Gerçekten

$$t\,k(z)=\frac{t\,z}{(1-z)^2}$$

olup buradan

$$K(t\,k(z))=K\left(\frac{t\,z}{(1-z)^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,(2n)!}{(n+1)!\,n!}\frac{t^n\,z^n}{(1-z)^{2n}}$$

$$=\frac{z}{(1-z)^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,(2n)!\,t^{n-1}\,z^n}{(n+1)!\,n!\,(1-z)^{2n}} \tag{5.17}$$

bulunur.

K(tk(z)) birim diski birim diske dönüştüğü sürece her $z \in E$ için,

$$|F(z)|=\left|\frac{1}{t}K(t\,k(z))\right|=\frac{1}{t}\left|K\left(\frac{t\,z}{(1-z)^2}\right)\right|<\frac{1}{t}1=\frac{1}{t}$$

olduğundan $|F(z)|<\frac{1}{t}$ olur. Böylece $M = \frac{1}{t}$ bulunur. Bulduğumuz bu değeri (5.17)'de yerine yazar ve (5.15)'i kullanırsak

$$K(w)=\frac{2w+1-\sqrt{1+4w}}{2w} \tag{5.15}$$

$$M=\frac{1}{t} \quad , \quad t=\frac{1}{M}$$

ve buradan

$$F(z)=\frac{1}{t}K(t\,k(z))=M\,K\left(\frac{t\,z}{(1-z)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{t}\left[\frac{2\,\frac{(t\,z)}{(1-z)^2}+1-\sqrt{1+4\,\frac{(t\,z)}{(1-z)^2}}}{2\,\frac{(t\,z)}{(1-z)^2}}\right]$$

$$=M\,\frac{\frac{2\left(\frac{z}{M}\right)}{(1-z)^2}+1-\sqrt{1+\frac{4\left(\frac{z}{M}\right)}{(1-z)^2}}}{\frac{2\left(\frac{z}{M}\right)}{(1-z)^2}}$$

$$=M\,\frac{M(1-z)^2+2z-\sqrt{M^2(1-z)^2+4\,z\,M}}{2z}(1-z)\equiv k(z,M) \tag{5.18}$$

bulunur. Bu $k(z,M)$ fonksiyonu özel bir fonksiyondur. Bazen sınırlandırılmış Koebe fonksiyonu adıyla da anılır. (5.17) eşitliği kullanılır ve geometrik seriden faydalanılırsa,

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,z^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n+1)!\,n!}\frac{t^{n-1}\,z^n}{(1-z)^{2n}}$$

$$=z+2z^2+3z^3+\ldots+(-4)!\frac{\frac{z^2}{M}}{3!\,2!\,(1-z)^4}$$

$$+6!\frac{\frac{z^3}{M^2}}{4!\,3!\,(1-z)^6}+(-8)!\frac{\frac{z^4}{M^3}}{5!\,4!\,(1-z)^8}+\ldots$$

olur. Yine geometrik seriden,

$$\frac{1}{(1-z)^4}=\frac{1}{6}\sum_{n=3}^{\infty}n\,(n-1)(n-2)\,z^{n-3}$$

bulunur. Benzer şekilde $\frac{1}{(1-z)^6},\frac{1}{(1-z)^8}$'de bulunarak son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$k(z,M) = z + \left(1-\frac{1}{M}\right)z^2 + \left(1-\frac{1}{M}\right)\left(3-\frac{5}{M}\right)z^3 + \left(1-\frac{1}{M}\right)\left(4-\frac{16}{M}+\frac{14}{M^2}\right)z^4 + \ldots \quad (5.19)$$

elde edilir.

Teorem 5.4. Eğer $f(z)$ $SB_1(M)$ de ise bu durumda

$$|a_2| \le 2\left(1-\frac{1}{M}\right) \quad (5.20)$$

dir.

İspat: Eğer $|f(z)| < M$ ise bu durumda $k\left(\frac{f(z)}{M}\right)$ regülerdir ve E de univalenttir. M ile çarparak normalleştirilirse

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n ,$$

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n ,$$

$$M\, k\left(\frac{f(z)}{M}\right) = M\left[\frac{f(z)}{M} + 2\frac{f^2(z)}{M^2} + 3\frac{f^3(z)}{M^3} + \ldots\right]$$

$$= f(z) + \frac{2}{M} f^2(z) + \frac{3}{M^2} f^3(z) + \ldots$$

ve

$$\begin{aligned} f^2(z) &= f(z)\, f(z) = [z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots]\, [z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots] \\ &= z^2 + a_2z^3 + a_3z^4 + \ldots + a_2z^3 + a_2^2 z^4 + a_2 a_3 z^5 + \ldots + a_3z^4 + a_3a_2z^5 + a_3^2 z^6 + \ldots \\ &= z^2 + 2a_2z^3 + \ldots \\ f^3(z) &= f(z)\, f^2(z) \\ &= [z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots]\, [z^2 + 2a_2z^3 + \ldots] \\ &= z^3 + 2a_2z^4 + \ldots + a_2z^4 + 2a_2^2 z^5 + \ldots + a_3z^5 + 2a_2a_3z^6 + \ldots \\ &= z^3 + 3a_2z^4 + \ldots \end{aligned}$$

olmak üzere

$$g(z) = M\, k\left(\frac{f(z)}{M}\right) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \frac{2}{M}\left[z^2 + 2a_2 z^3 + \ldots\right] + \frac{3}{M^2}\left[z^3 + 3a_2 z^4 + \ldots\right]$$

$$= z + \left(\frac{2}{M} + a_2\right)z^2 + \left(\frac{4a_2}{M} + a_3 + \frac{3}{M^2}\right)z^3 + \ldots$$

elde edilir. O halde $M\, k\left(\frac{f(z)}{M}\right) \in S$ dir. Böylece $\left|a_2 + \frac{2}{M}\right| \leq 2$ olur. Eşitlik durumu $g(z)$, $k(z)$ nin bir rotasyonuysa geçerlidir. Bu durumda $a_2 \geq 0$ almalıyız. Dolayısıyla, $a_2 + \frac{2}{M} \leq 2$ yazabiliriz. Bu da bize (5.20)'yi verir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez univalent fonksiyonlar için bir temel oluşturmaktadır. İleri bir aşama olarak p–univalent fonksiyonların benzer kalitatif özellikleri ortaya konulabilir. Ayrıca konveks ve yıldızıl fonksiyonlar bu tezde verilen temel bilgilerle incelenebilir.

KAYNAKLAR

(1) Goodman, A. W., Univalent Functions. University of South Florida, Mariner Publishing Company, Inc., Tampa, Florida, 1983.

(2) Başkan, T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2005.

(3) Stewart, J., Kalkulüs Kavram ve Kapsam, Diferansiyel ve İntegral Hesap, TÜBA Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 2007.