T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

METRİK TAMLIĞI KARAKTERİZE EDEN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Ali ERDURAN

2012

KIRIKKALE

Matematik Anabilim Dalında Ali Erduran tarafından hazırlanan METRİK TAMLIĞI KARAKTERİZE EDEN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye (Danışman)	: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	____________________

18/01/2012

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

METRİK TAMLIĞI KARAKTERİZE EDEN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ERDURAN, Ali

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İshak ALTUN

Ocak 2012, 111 sayfa

Bu tez çalışmasında, Banach büzülme prensibinin metrik uzayın tamlığını karakterize eden bir genellemesi verildi. Ardından, Kannan, Chatterjea gibi bazı genelleştirmeleri incelendi. Daha sonra, Suziki sabit nokta teoreminin kapalı bağıntı yardımıyla bir genellemesi verildi.

Anahtar kelimeler: Tam Metrik Uzay, Büzülme dönüşümü, Sabit Nokta

ABSTRACT

SOME FİXED POİNT THEOREMS THAT CHARACTERİZES METRİC COMPLETENESS

ERDURAN, Ali

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. İshak ALTUN

January 2012, 111 pages

In this study, a generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness is given. Then, some generelized versions, such as Kannan and Chatterjea were analyzed. After then we were given a fixed point theorem for single valued map in a complete metric space using implicit relation

Key Words: Complete Metric Space, Contraction mapping, Fixed Point

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her türlü bilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Yrd. Doç Dr. İshak ALTUN'a, çalışmam boyunca desteğini benden esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, varsa tekliğini ve nasıl bulunacağını inceler. X boş olmayan bir küme ve T, X ten X e tanımlı bir dönüşüm olsun. $Tx_0 = x_0$ olacak şekilde X in x_0 noktalarına T nin sabit noktası denir. Örneğin; $X = [0,1]$, $T: X \to X$, $Tx = x^2$ şeklinde tanımlı T fonksiyonunun $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ noktaları sabit noktasıdır. $X = (0,1]$, $T: X \to X$, $Tx = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlı T fonksiyonunun sabit noktası yoktur. $X = [0,1]$, $T: X \to X$, $Tx = \frac{x}{10}$ şeklinde tanımlı T fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktası sabit noktasıdır.

Örneklerden de anlaşılacağı üzere bir dönüşümün sabit noktasının varlığı kümenin yapısına bağlı olduğu gibi dönüşümün niteliğine de bağlıdır.

Matematiğin çeşitli dallarında $Sx = 0$ veya $Tx = x$ tipindeki denklemlerle sıkça karşılaşılır. Bu denklemleri çözmek başlı başına bir problemdir. Bunun için bazıları tam sonucu bazıları da yaklaşık sonucu veren metotlar vardır. Sabit nokta teoride bu metotlardan biridir.

Örneğin; $x^2 - 10x + 16 = 0$ denklemini göz önüne alalım. $x = 2$, $x = 8$ bu denklemin kökleridir. Bu denklemi $x = \frac{x^2+16}{10}$ şeklinde de yazabiliriz. $Tx = \frac{x^2+16}{10}$ denirse $Tx = x$ denklemi elde edilir. Böylece $x = 2$, $x = 8$, T nin sabit noktalarıdır. Bu durumda $Sx = 0$ gibi bir denklemin çözüm problemi ile $Sx = Tx - x$ şeklinde verilen T dönüşümünün sabit noktasını bulmak aynıdır.

'$T: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $Tx_0 = x_0$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in [a, b]$ vardır.' Teoremini Brouver 1912 yılında n-boyutlu Euclid uzayına genişletmiştir. 'C, $\mathbb{R}^n$'de kapalı bir yuvar, $T: C \to C$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda T, C de bir sabit noktaya sahiptir.'

Matematikte yukarıda bahsedilen problemler genel olarak sonsuz boyutlu uzaylarda özellikle fonksiyon uzaylarında karşımıza çıkmaktadır. Brouver'ın bu teoremi bazı ek şartlarla birlikte 1930 yılında Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara genişletilmiştir. "X bir Banach uzayı, C, X in kompakt, konveks altkümesi ve $T: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, C de bir sabit noktaya sahiptir."
C üzerindeki kompaktlık kuvvetli bir şarttır. Metrik uzaylarda kompakt kümeler kapalı ve sınırlıdır fakat bunun tersi sonlu boyutlu uzaylarda geçerlidir. Sonsuz boyutlu uzaylarda ise kapalılık ve sınırlılık kompaktlığa yetmemektedir. Buna örnek olarak fonksiyon uzaylarında kapalı, sınırlı ve eş sürekli kümeler kompakttır. Bu nedenle yukarıdaki teoremde küme üzerindeki kompaktlık şartı Schauder'ın teoreminin ikinci versiyonu ile biraz hafifletilmiştir. "X bir Banach uzayı, C, X in konveks altkümesi $T: C \to C$ sürekli ve kompakt dönüşüm olsun. Bu durumda T, C de bir sabit noktaya sahiptir."
(X, d) bir metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına T nin Lipschitz sabiti denir. T Lipschitz dönüşüm için, $\alpha < 1$ ise T dönüşümüne büzülme dönüşümü, $\alpha = 1$ ise T Lipschitz dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm denir. $x \neq y$ olacak şekilde ki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.
Bu tanımları göz önüne aldığımızda şu sonuçları çıkarabiliriz. Her büzülme dönüşümü büzülebilir dönüşümdür. Her büzülebilir dönüşüm genişlemeyen dönüşümdür.

Örneğin; $X = [0, \infty)$ ve d alışılmış metrik olsun. $T: X \to X$, $Tx = \frac{x}{5}$ denirse her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) = \frac{1}{5} d(x, y)$ dır. O halde T bir Lipschitz dönüşümüdür. Üstelik $\alpha = \frac{1}{5} < 1$ olduğundan büzülme dönüşümüdür. Ayrıca büzülebilir dönüşümdür. Eğer T dönüşümünü $T: X \to X$, $Tx = \sqrt{x^2+1}$ şeklinde tanımlarsak. $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) = \left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right|$$

$$= \frac{\left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right|\left|\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}\right|}{\left|\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}\right|}$$

$$= \frac{|x^2 - y^2|}{\left|\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}\right|} = \frac{|x-y||x+y|}{\left|\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}\right|}$$

$$< |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan büzülebilir dönüşümdür fakat büzülme değildir.

$T: X \to X$, $Tx = x + 1$ şeklinde tanımlı T dönüşümü $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ olduğundan genişlemeyen dönüşümdür.

Banach sabit nokta teoremi çok önemlidir. Çünkü lineer olmayan analizde çok kuvvetli bir araçtır. Kannan sabit nokta teoremi de çok önemlidir. Çünkü Subrahmanyam 1975'te Kannan teoreminin metrik tamlığını karakterize ettiğini göstermiştir, yani X tamdır ancak ve ancak X üzerinde tanımlı her Kannan dönüşümü sabit noktaya sahiptir. Diğer yandan, Connell 1959 da X uzayı tam olmayıp X üzerinde tanımlı her büzülme dönüşümü sabit noktaya sahip olan örnek vermiştir. Bu durumda Banach sabit nokta teoremi metrik tamlığını karakterize etmez. Bu yüzden Kannan teoremi bu açıdan Banach teoreminden daha kuvvetlidir.

Metrik tamlığını karakterize eden dönüşümlerden biri de Suzuki tipi dönüşümlerdir. Tomanari Suzuki 2008 de Metrik tamlığını karakterize eden Banach büzülme prensibinin bir genellemesini şu şekilde vermiştir; "(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta_1: [0,1) \to \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ artmayan fonksiyonunu

$$\theta_1(r) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le r \le \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \\ \dfrac{(1-r)}{r^2} & , \quad \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \le r \le \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{1+r} & , \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le r < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $x, y \in X$ için

$$\theta_1(r) d(x, Tx) \le d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \le r d(x, y)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsar." Ayrıca bu makalesinde Suzuki $\theta_1(r)$ nın büzülmeyi sağlayan en iyi sabit olduğunu göstermiştir. Burada şunu da göreceğiz ki Suzuki tipi büzülme ile Kannan dönüşümleri birbirinden bağımsızdır. Yani, T Kannan dönüşümü olmasına rağmen Suzuki büzülme koşullarını sağlamayabilir, aksine T dönüşümü büzülme koşulunu sağlarken Kannan dönüşümü olmayabilir. Bundan sonra Kikkawa ve Suzuki bu teoremin Kannan versiyonunu vermiştir. Daha sonra Ovidiu Popescu Chatterjea versiyonunu vermiştir. 2009 da Yusuke Enjouji, Masoto Nakanishi ve Suzuki Kannan sabit nokta teoreminin bazı genellemelerini vermiştir.

1.1. Kaynak özetleri :

Metrik uzay, topolojik uzay ve fonksiyonel analiz ile ilgili temel kavramları için Koçak'ın Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Turgut Başkan, Osman Bizim, İsmail Naci Cangül ün "Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş" adlı kitabı ile Soykan'ın "Fonksiyonel Analiz" adlı kitabı kullanılmıştır [1,2,3]. Banach sabit nokta, Kannan sabit nokta ve Chatterjea sabit nokta teoremleri için Agarwal, O'Regan ve Sahu'nun "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications" adlı kitabı temel alınmıştır [4]. Daha sonra tezin asıl amacını oluşturan Suzuki sabit nokta teoremi için Suzuki'nin "A Generalized Banach Contraction Principle That Characterizes Metric Completeness" adlı makalesi temel alınmıştır [5]. Ayrıca Suzuki sabit noktanın Kannan versiyonunu Kikkawa ve Suzuki'nin "Some similarity Between Contractions and Kannan Mappings" adlı makalesi incelenmiştir [6]. Son olarak Suzuki sabit nokta teoreminin bazı genelleştirmeleri için Kikkawa ve Suzuki'nin "Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces" adlı makalesi, Enjouji, Nakanishi, Suzuki'nin "A Generalization of Kannan's Fixed Point Theorem" adlı makalesi, Popescu'nun "Two Fixed Point Theorems For Generalized Contractions With Constans In Complete Metric Space" ve "Fixed Point Theorems In Metric Spaces" adlı makaleleri, Nakanishi, Suzuki'nin "An Observation On Kannan Mappings" adlı makalesi ve bu makalelerden yola çıkarak Ishak ve Ali'nin Suzuki Type Fixed Point incelenmiştir. [7, 8, 9, 10, 11,12].

1. 2. Çalışmanın Amacı

Tomanari Suzuki, 2008 yılında yayınladığı bir makalesinde aşağıdaki teoremi ispatlamıştır: (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta_1: [0,1) \to (\frac{1}{2}, 1]$ artmayan fonksiyonunu

$$\theta_1(r) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq r \leq \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \\ \dfrac{(1-r)}{r^2} & , \quad \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \leq r \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{1+r} & , \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $x, y \in X$ için

$$\theta_1(r)d(x,Tx) \leq d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq rd(x,y)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsar. Daha sonra Suzuki'nin bu teoremi pek çok yazar tarafından genelleştirilmiş, uygulamaları yapılmış, farklı uzaylarda ispatları yapılmıştır. Bu tez çalışmasında, yapılan bu çalışmaları irdeleyerek yeni çalışmaların yapılması amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ileride kullanılacak bazı tanım ve kavramlara değinilecektir.

2.1 Bazı Temel Tanımlar ve Kavramlar

2.1.1 Tanım: X boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik, bu fonksiyonla birlikte (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

1. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

3. $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Bu aksiyomlardan, $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$ olduğundan her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dır. O halde d pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

2.1.2 Tanım: (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$\mathrm{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar sınırı denir.

2.1.3 Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $x \in A$ için $B(x, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $B(x, \varepsilon)$ açık yuvar bulunuyor ise x noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

2.1.4 Tanım: (X, d) bir metrik uzay $U \subset X$ olsun. Her $x \in U$ için $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \subset U$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ varsa U ya d-açık küme denir. Bir başka ifadeyle her noktası iç nokta olan kümeye açık küme denir.

2.1.1. Teorem: Her (X, d) metrik uzayında, $B(x, \varepsilon)$ açık yuvarı bir açık kümedir.

İspat: $y \in B(x, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda $d(x, y) < \varepsilon$ dur. Öyleyse $r := \varepsilon - d(x, y) > 0$ olmak üzere $B(y, r) \subset B(x, \varepsilon)$ olduğunu iddia ediyoruz. $z \in B(y, r)$ olsun. Bu durumda $d(y, z) < r = \varepsilon - d(x, y)$. Buradan

$$d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon$$

ve böylece

$$d(x,z) < \varepsilon$$

olduğundan $z \in B(x,\varepsilon)$ olur.

2.1.5 Tanım: (X,d) bir metrik uzay $U \subset X$ olsun. $X \setminus U$ kümesi açıksa U ya kapalı küme denir.

2.1.2. Teorem: Her (X,d) metrik uzayında, $D(x,\varepsilon)$ kapalı yuvarı bir kapalı kümedir

İspat: $U = \{y \in X: d(x,y) > \varepsilon\}$ kümesi, $D(x,\varepsilon) = \{y \in X: d(x,y) \leq \varepsilon\}$ kapalı yuvarının tümleyenidir. $y \in U$ olsun. Bu durumda $d(x,y) > \varepsilon$ olduğundan $r = d(x,y) - \varepsilon > 0$ dır. $B(y,r) \subset U$ olduğunu iddia ediyoruz. $z \in B(y,r)$ olsun. Öyleyse

$$d(y,z) < r = d(x,y) - \varepsilon$$

olur.

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$< d(x,z) + r$$

olduğundan

$$d(x,y) - r < d(x,z)$$

ve buradan

$$\varepsilon < d(x,z)$$

elde edilir ki bu durumda $z \in U$ dur ve dolayısıyla $B(y,r) \subset U$ dur. Bu durumda U açık ve tümleyeni $D(x,\varepsilon)$ kapalıdır.

2.1.6 Tanım: Bir (X,d) metrik uzayındaki tüm açık altkümelerinin

$$\boldsymbol{\tau} = \{A \subset X : A, d - açık\}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye metrik topoloji adı verilir.

2.1.7 Tanım: Bir (X,d) topolojik uzayı verilsin. Eğer metrik topolojisi τ olacak şekilde X üzerinde bir metrik varsa bu τ topolojisine metriklenebilir denir.

2.1.8 Tanım: (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $A, B \subseteq X$ olsun.

$$d(x_0, A) = inf\{d(x_0, x) : x \in A\}$$

değerine x_0 noktasının A kümesine olan uzaklığı,

$$d(A, B) = inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

değerine A ve B kümeleri arasındaki uzaklık ve

$$d(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

değerine de A kümesinin çapı denir. Çapı sonlu olan kümeye sınırlı küme, çapı sonlu olmayan kümeye de sınırsız küme denir.

2.1.9 Tanım: (X, d) bir metrik uzay, (x_n) terimleri X de olan bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $n > n_0$ özelliğindeki her bir n doğal sayısı için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir ve $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ veya $(x_n) \to x$ şeklinde gösterilir.

2.1.1 Önerme: Metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

2.1.10 Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) de X de bir dizi olsun. $n_k \leq n_{k+1}$ olmak üzere (x_{n_k}) dizisine (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

2.1.2 Önerme: Bir (X, d) metrik uzayında bir (x_n) dizisi yakınsak ise her (x_{n_k}) alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

2.1.11 Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) de X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

2.1.3 Önerme: Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak olan bir (x_n) dizisi Cauchy dizisidir.

2.1.4 Önerme: (X, d) metrik uzayındaki her bir Cauchy dizisi sınırlıdır.

2.1.5 Önerme: (X, d) bir metrik uzay (x_n), X de bir dizi ve $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ olsun. Bu durumda (x_n) bir Cauchy dizisidir.

İspat: $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1})$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1})$$

olur. $\sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1})$ verilen serinin kalan terimi olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir ki bu (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

2.1.1 Örnek: $X = (0,1)$, $x_n = \frac{1}{n}$ olarak alırsak (x_n) dizisi Cauchy dizisi fakat yakınsak değildir.

2.1.12 Tanım: Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

2.1.13 Tanım: (X, d) herhangi bir metrik uzay ve $\mathcal{A} = \{A : A \subset X\}$ ailesi verilsin. $\mathrm{G} \subset X$ olmak üzere $\mathrm{G} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ oluyor ise $\mathcal{A}$ ailesine G kümesinin bir örtüsü, $\mathcal{A}$

ailesinin her bir öğesi açık küme ise $\mathcal{A}$ ailesine G kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer $\mathcal{A}$ ailesi sonlu ise $\mathcal{A}$ ailesine sonlu örtü denir.

2.1.14 Tanım: (X, d) bir metrik uzay $K \subset X$ olsun. Eğer K altkümesinin her bir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü var ise K kümesine kompakt küme denir. Özel olarak X kompakt ise (X, d) ikilisine de kompakt metrik uzay denir.

2.1.6 Önerme: (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer X kompakt ise $K \subset X$ kapalı kümesi kompakttır.

2.1.15 Tanım: (X, d) bir metrik uzay, (x_n) X de bir dizi olsun. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) < r$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlıdır denir. Bu tanıma denk olarak aşağıdaki ifade verilebilir.

$$(x_n) \text{ sınırlı dizidir } \Leftrightarrow A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ kümesi sınırlıdır.}$$

2.1.4 Önerme: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kapalıdır ancak ve ancak (x_n), A da bir dizi ve $(x_n) \to x$ ise $x \in A$ dır.

2.1.16 Tanım: (X,d), (Y,e) metrik uzaylar, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $f(x_0)$ noktasının her $B(f(x_0),\varepsilon)$ açık komşuluğu için $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$ olacak şekilde x_0 noktasının bir $B(x_0,\delta)$ açık komşuluğu varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer $f: X \to Y$ fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye X üzerinde bir sürekli fonksiyon denir.

2.1.17 Tanım: (X,d) ve (Y,e) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. X içinde herhangi bir (x_n) dizisi x e yakınsak iken, Y içindeki $(f(x_n))$ dizisi $f(x)$ e yakınsak ise f fonksiyonuna x noktasında dizisel sürekli denir.

2.1.18 Tanım: (X,d) ve (Y,e) metrik uzaylar olmak üzere bire bir ve örten bir $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x,y \in X$ için $d(x,y) = e(f(x),f(y))$ ise f fonksiyonuna bir izometri, (X,d) ve (Y,e) ye de f fonksiyonuna göre izometrik uzaylar denir.

2.1.19 Tanım: X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer her $x,y,z \in X$ ve her $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ için

i. $x + y \in X$,

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$,

iii. $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ var,

iv. $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ var,

v. $x + y = y + x$,

vi. $\alpha x \in X$,

vii. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

viii. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$,

ix. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

x. $1x = x1 = x$. (Burada 1, $\mathbb{K}$ nın birim elemanıdır.)

şartları sağlanıyorsa X e $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir Lineer uzay veya Vektör uzayı denir.

2.1.20 Tanım: X, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x \in X$ elemanını bir $\|x\| \in \mathbb{R}$ elemanına eşleyen ve $\alpha \in \mathbb{K}$ olmak üzere,

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

2.1.21 Tanım: Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayında her $x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan metriğe norm metriği ve bu metrikle üretilen topolojiye de norm topolojisi denir. O halde her normlu uzay bir metrik uzay, dolayısıyla bir topolojik uzaydır.

2.1.22 Tanım: d ve η, boş olmayan X kümesi üzerinde farklı iki metrik olsun. Eğer d metriğine göre açık olan bir küme η metriğine göre de açık ve η metriğine göre açık olan bir küme d metriğine göre açık ise d ve η metriklerine denk metrikler denir.

2.1.23 Tanım: Bir X vektör uzayı üzerinde $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları verilsin. Eğer bu normlar tarafından elde edilen metrikler denk ise bu normlara denk normlar denir.

2.1.24 Tanım: X normlu lineer uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir.

2.1.25 Tanım: $\mathbb{R}_+$ negatif olmayan reel sayılar, ψ; aşağıdaki koşulları sağlayan $F: {\mathbb{R}_+}^6 \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarının sınıfı olsun.

i. $F(t_1, t_2, \cdots, t_6)$ fonksiyonu $t_2, t_3, \cdots, t_6$ değişkenlerine göre artmayan,

ii. $F(u, v, v, u, u + v, 0) \leq 0$ veya

$F(u, v, 0, u+v, u, v) \leq 0$ veya

$F(u, v, v, v, v, v) \leq 0$

ise $u \leq rv$ olacak şekilde $r \in [0,1)$ vardır.

iii. $u > 0$ için $F(u, 0,0, u, u, 0) > 0$ sağlanır.

2.1.2 Örnek: $F(t_1, t_2, \cdots, t_6) = t_1 - rt_2$, $r \in [0,1)$, şeklinde tanımlı F fonksiyonu sürekli ve üsteki $(\mathrm{i}) - (\mathrm{iii})$ koşullarını sağladığından $F \in \psi$ dir.

2.1.3 Örnek: $F(t_1, t_2, \cdots, t_6) = t_1 - \alpha(t_3 + t_4)$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ şeklinde tanımlı F fonksiyonu sürekli ve üsteki $(\mathrm{i}) - (\mathrm{iii})$ koşullarını sağladığından $F \in \psi$ dir.

2.1.4 Örnek: $F(t_1, t_2, \cdots, t_6) = t_1 - \alpha max\,\{t_3, t_4\}$, $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ şeklinde tanımlı F fonksiyonu sürekli ve üsteki $(\mathrm{i}) - (\mathrm{iii})$ koşullarını sağladığından $F \in \psi$ dir.

2.1.5 Örnek: $F(t_1, t_2, \cdots, t_6) = t_1 - \alpha t_3 - \beta t_4$, $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ şeklinde tanımlı F fonksiyonu sürekli ve üsteki $(\mathrm{i}) - (\mathrm{iii})$ koşullarını sağladığından $F \in \psi$ dir.

2.1.26 Tanım: X boş olmayan bir küme $T, S: X \to X$ iki fonksiyon olsun. Her $x \in X$ için $STx = TSx$ ise S ve T fonksiyonlarına değişimli denir.

2.1.27 Tanım: X boş olmayan bir küme $T, S: X \to X$ iki fonksiyon olsun.

$Sx = Tx$ olacak şekilde ki $x \in X$ noktalarına çakışık nokta denir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

3.1.1 Tanım: (X, d) bir metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına T nin Lipschitz sabiti denir. T Lipschitz dönüşüm için $\alpha < 1$ ise T dönüşümüne büzülme dönüşümü, $\alpha = 1$ ise T Lipschitz dönüşümüne T genişlemeyen dönüşüm denir.

$x \neq y$ olacak şekilde ki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

3.1.1. Teorem: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$, L Lipschitz sabitine sahip bir büzülme dönüşümü olsun; bu durumda T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar ve $d(T^n x_0, z) \leq \frac{L^n}{1-L} d(Tx_0, x_0)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi başlangıç noktasını seçelim.

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2 x_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

şeklinde tanımlı iterasyon dizisini göz önüne alalım, bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leq Ld(x_{n-1}, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\leq L^n d(x_0, x_1)$$

olur. O halde $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} d(x_0, x_1)$$

$$= [L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{m-1}] d(x_0, x_1)$$

$$= L^n [1 + L + \mathrm{L}^2 + \cdots + L^{m-n-1}] d(x_0, x_1)$$

$$= L^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{m-n-1} L^j$$

$$= L^n \frac{1-L^{m-n}}{1-L} d(x_0, x_1)$$

$$\leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

elde edilir. $0 \leq L < 1$ olduğundan $n \to \infty$ iken limit alınırsa (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan (x_n) dizisi X içinde bir $x \in X$ noktasına yakınsaktır. Şimdi x elemanının T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx)$$

$$= d(x, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tx)$$

$$\leq d(x, x_{n+1}) + Ld(x_n, x)$$

olup $n \to \infty$ iken limit alınırsa $d(x, Tx) = 0$ elde edilir ve buradan $Tx = x$ bulunur. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x \neq y$ olmak üzere $Ty = y$ olacak şekilde bir $y \in X$ var olsun. Bu durumda,

$$0 < d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y) < d(x, y)$$

olur ki $0 \leq L < 1$ olmasıyla çelişir. Öyleyse T nin sabit noktası tektir.

1968 de R. Kannan aşağıdaki sabit nokta teoremini ifade ve ispat etmiştir.

3.1.2. Teorem: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq L[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olacak şekilde $0 \leq L < \frac{1}{2}$ sayısı varsa T bir tek sabit noktaya sahiptir. Üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere, $x_n = T^n x_0 = Tx_{n-1}$ dizisini göz önüne alalım. O halde $n = 1,2,3, ...$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leq L[d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)]$$

$$= L[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n x_{n+1})]$$

ve buradan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. $\frac{L}{1-L} = \lambda$ denirse, $0 \leq \lambda < 1$ dir. Böylece $n = 1,2,\cdots$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n)$$

veya

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$$

bulunur. Diğer taraftan $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq \lambda^n d(x_0, x_1) + \lambda^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \lambda^{m-1} d(x_0, x_1)$$

$$= \lambda^n (1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{m-n-1}) d(x_0, x_1)$$

$$= \lambda^n \frac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$$

$$\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1)$$

olduğundan (x_n) bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x_n \to z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Böylece, $n = 1,2,\cdots$ için

$$d(x_n, Tz) = d(Tx_{n-1}, Tz)$$

$$\leq L[d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(z, Tz)]$$

$$= L[d(x_{n-1}, x_n) + d(z, Tz)]$$

olur ki $n \to \infty$ için limit alınırsa z, T nin sabit noktası olduğu görülür. Şimdi z ve y, T nin sabit noktaları ise,

$$d(z, y) = d(Tz, Ty) \leq L[d(z, Tz) + d(y, Ty)] = 0$$

elde edilir ki buradan $z = y$ dir. O halde T nin sabit noktası tektir. Teoremin ispatından da anlaşılacağı üzere her $x_0 \in X$ için $(T^n x_0)$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar.

3.1.3. Teorem: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq L[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

olacak şekilde $0 \leq L < \frac{1}{2}$ sayısı varsa T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $x_n = T^n x_0 = Tx_{n-1},\ n = 1,2,\cdots$ şeklinde tanımlı (x_n) dizisini göz önüne alalım.

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$= L[d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})]$$

$$= L[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)]$$

$$\leq L[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]$$

olup buradan,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{n-1}, x_n)$$

bulunur. Yani $\lambda = \frac{L}{1-L} < 1$ olmak üzere $n = 1,2,\cdots$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq \lambda^2 d(x_{n-2}, x_{n-1})$$

$$\vdots$$

$$\leq \lambda^n d(x_0, x_1)$$

elde edilir. Bu ise,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

olduğunu gösterir. (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu Banach ya da Kannan teoreminde olduğu gibi gösterilebilir. X tam olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z$$

olacak şekilde $z \in X$ vardır. Yine

$$d(x_n, Tz) = d(Tx_{n-1}, Tz)$$

$$\leq L[d(x_{n-1}, Tz) + d(z, Tx_{n-1})]$$

$$= L[d(x_{n-1}, Tz) + d(z, x_n)]$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$d(z, Tz) \leq L[d(z, Tz) + d(z, z)] = Ld(z, Tz)$$

olur ki bu ise $d(z, Tz) = 0$ olmasıyla mümkündür. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliğini görmek kolaydır.

Aşağıdaki teoremlerde Suziki Banach büzülme prensibinin bir genellemesini vermiş ve metrik tamlığını karakterize etmiştir.

3.1.4. Teorem: (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\theta_1: [0,1) \to (\frac{1}{2}, 1]$ artmayan fonksiyonunu

$$\theta_1(r) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq r \leq \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \\ \dfrac{(1-r)}{r^2} & , \quad \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2} \leq r \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{1+r} & , \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Her $x, y \in X$ için

$$\theta_1(r) d(x, Tx) \leq d(x,y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq r d(x,y)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi $z \in X$ noktasına yakınsar. [5]

İspat: $\theta_1(r) \leq 1$ olduğundan her $x \in X$ için $\theta_1(r) d(x, Tx) \leq d(x, Tx)$ olup hipotezimizden her $x \in X$ için

$$d(Tx, T^2 x) \leq r d(x, Tx) \qquad (1)$$

elde edilir. Sabit bir $u \in X$ noktasını göz önüne alalım ve X üzerinde $u_n = T^n u$ şeklinde bir (u_n) dizisi tanımlayalım. Bu durumda (1) den

$$d(u_n, u_{n+1}) = d(T^n u, T^{n+1} u) \leq rd(T^{n-1} u, T^n u)$$

$$\leq r[rd(T^{n-2} u, T^{n-1} u)]$$

$$= r^2 d(T^{n-2} u, T^{n-1} u)$$

$$\vdots$$

$$\leq r^n d(u, Tu)$$

elde edilir. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n, u_{n+1}) < \infty$ olduğundan (u_n) bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan (u_n) dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsar. Şimdi her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx, z) \leq rd(x, z) \tag{2}$$

olduğunu gösterelim. $x \in X \setminus \{z\}$ için $d(x, z) > 0$ ve $u_n \to z$ olduğundan $n \geq v$ için $d(u_n, z) \leq \frac{d(x,z)}{3}$ olacak şekilde bir $v \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda

$$\theta_1(r) d(u_n, Tu_n) \leq d(u_n, Tu_n) = d(u_n, u_{n+1})$$

$$\leq d(u_n, z) + d(u_{n+1}, z)$$

$$\leq \frac{2}{3}d(x,z) = d(x,z) - \frac{d(x,z)}{3}$$

$$\leq d(x,z) - d(u_n,z)$$

$$\leq d(u_n,x)$$

elde edilir ki hipotezimizden $n \geq v$ için

$$d(u_{n+1},Tx) \leq rd(u_n,x) \tag{3}$$

bulunur. $n \to \infty$ için limit aldığımızda

$$d(Tx,z) \leq rd(x,z)$$

elde edilir. Yani, (2) yi göstermiş oluruz. Şimdi sabit noktanın varlığını gösterelim. Her $j \in \mathbb{N}$ için $T^j z \neq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2) den $j \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^{j+1}z,z) = d(TT^j z,z)$$

$$\leq rd(T^j z,z)$$

$$\vdots$$

$$\leq r^j d(Tz, z)$$

elde edilir. Şimdi üç durum incelemeliyiz.

i. $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olsun. Bu durumda $r^2 + r - 1 \leq 0,\ 2r^2 < 1$ dir. Böylece $d(T^2z, z) < d(T^2z, T^3z)$ olduğunu kabul edersek,

$$d(Tz, z) \leq d(Tz, T^2z) + d(T^2z, z)$$

$$< d(T^2z, T^3z) + d(Tz, T^2z)$$

$$\leq r^2 d(Tz, z) + r d(Tz, z)$$

$$\leq (r^2 + r) d(Tz, z)$$

$$\leq d(Tz, z)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Öyleyse $d(T^2z, z) \geq d(T^2z, T^3z) = d(T^2z, TT^2z)$ dir. Hipotezimiz ve (2) den

$$d(Tz, z) \leq d(Tz, T^3z) + d(T^3z, z)$$

$$\leq r d(T^2z, z) + r^2 d(Tz, z)$$

$$\leq r^2 d(Tz,z) + r^2 d(Tz,z)$$

$$\leq 2r^2 d(Tz,z)$$

$$< d(Tz,z).$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

ii. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun. Bu durumda $2r^2 < 1$ dir. $d(T^2z,z) < \theta_1(r) d(T^2z,T^3z)$ olduğunu kabul edersek

$$d(Tz,z) \leq d(z,T^2z) + d(T^2z,Tz)$$

$$< \theta_1(r) d(T^2z,T^3z) + r d(Tz,z)$$

$$\leq \theta_1(r) r^2 d(Tz,z) + r d(Tz,z) = d(Tz,z)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Öyleyse $d(T^2z,z) \geq \theta_1(r) d(T^2z,T^3z)$ dır. Bir önceki durum gibi $d(Tz,z) \leq 2r^2 d(Tz,z) < d(Tz,z)$ dır. Bu da bir çelişkidir.

iii. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ olsun. Şimdi her $x, y \in X$ için

$$\theta_1(r) d(Tx,x) \leq d(x,y)$$

veya

$$\theta_1(r)d(Tx,T^2x) \leq d(Tx,y)$$

sağlandığını iddia edelim. Kabul edelim ki $\theta_1(r)d(Tx,x) > d(x,y)$ ve $\theta_1(r)d(Tx,T^2x) > d(Tx,y)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(Tx,x) &\leq d(x,y) + d(y,Tx) \\ &< \theta_1(r)d(Tx,x) + \theta_1(r)d(Tx,T^2x) \\ &\leq \theta_1(r)(d(Tx,x) + rd(Tx,x)) \\ &\leq d(Tx,x) \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$\theta_1(r)d(u_{2n},u_{2n+1}) \leq d(u_{2n},z)$ veya $\theta_1(r)d(u_{2n+1},u_{2n+2}) \leq d(u_{2n+1},z)$

olduğundan

$d(u_{2n+1},Tz) \leq rd(u_{2n},z)$ veya $d(u_{2n+2},Tz) \leq rd(u_{2n+1},z)$

vardır. (u_n) dizisi $z \in X$ noktasına yakınsak olduğundan üsteki eşitsizlikten (u_n) dizisinin Tz ye yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu $Tz = z$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir dolayısıyla en az bir $j \in \mathbb{N}$ için $T^j z = z$ dır. $(T^n u)$ dizisi Cauchy dizisi olduğundan $Tz = z$ dır. Sabit noktanın tekliğini görmek (2) den kolaydır.

Aşağıdaki teorem her $r \in [0,1)$ için $\theta_1(r)$ nin en iyi sabit olduğunu gösterir.

3.1.5. Teorem: Teorem 3.1.4 deki θ_1 fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda her $r \in [0,1)$ için bir (X, d) tam metrik uzayı ile her $x, y \in X$ için

$$\theta_1(r)d(Tx, x) < d(x, y) \;\Rightarrow\; d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

özelliğini sağlayan ve hiçbir sabit noktaya sahip olmayan bir $T: X \to X$ dönüşümü vardır. [5]

İspat:

i. $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olsun. $\mathbb{R}$ öklid uzayının $X = \{-1,1\}$ alt uzayının tam olduğu açıktır. X üzerinde T fonksiyonunu her $x \in X$ için $Tx = -x$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda T sabit noktaya sahip değildir ve her $x, y \in X$ için $\theta_1(r)d(Tx, x) = 2 \geq d(x, y)$ dir.

ii. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun ve $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - r$, $n \geq 3$ için $x_n = (1 - r - r^2)(-r)^{n-3}$ olmak üzere $\mathbb{R}$ Öklid uzayının $X = \{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ şeklindeki bir tam alt uzayını göz önüne alalım. Ayrıca her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $Tx_n = x_{n+1}$ şeklinde tanımlı T fonksiyonu üsteki tüm koşulları sağlar.

iii. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ olsun. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n = (1-r)(-r)^n$olacak şekilde $\mathbb{R}$ Öklid uzayının $X = \{0,1\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tam alt uzayını göz önüne alalım. $T0 = 1,\ T1 = x_0$, her $\mathrm{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $Tx_n = x_{n+1}$ şeklinde T fonksiyonunu tanımlayalım.

- $x = 0,\ y = 1$ olarak alırsak

$$d(T0, T1) = (x_0 - 1) = 1 - (r - 1) = r = rd(0,1)$$

elde edilir.

- Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x = 0,\ y = x_n$ olarak alırsak

$$\theta_1(r)d(0, T0) \geq \theta_1(r)d(x_n, Tx_n) = d(0, x_n)$$

elde edilir.

- Her $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x = x_m,\ y = x_n$ olarak alırsak

$$d(Tx_n, Tx_m) = rd(x_n, x_m).$$

Ayrıca her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x = 1,\ y = x_n$ olarak alırsak

$$d(T1, Tx_n) - d(1, x_n) = 1 - 2r - 2(-r)^{n+1} - 2(-r)^{n+2}$$

$$\leq 1 - 2r + 2r^{n+1} - 2(r)^{n+2}$$

$$= 1 - 2r + 2r^{n+1}(1 - r)$$

$$\leq 1 - 2r + 2r^{1}(1 - r)$$

$$= 1 - 2r^2 \leq 0.$$

Bu durumda ispat tamamlanır.

Suziki tip büzülme dönüşümleri alışılmış büzülmeyi sağlar, fakat Suziki tip büzülmeler ve Kanan dönüşümleri bağımsızdır. Aşağıdaki buna örnektir.

3.1.1. Örnek: $X = \{(0,0), (4,0), (0,4), (4,5), (5,4)\}$ üzerinde d metriğini

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

şeklinde tanımlayalım. (X, d) metrik uzayının tam olduğu açıktır. X üzerinde T fonksiyonunu

$$T(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1, 0) & , x_1 \leq x_2 \\ (0, x_2) & , x_1 > x_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda T Teorem 3.1.4 deki koşulları sağlar fakat T Kannan dönüşümü değildir. [5]

İspat: Eğer $(x,y) \neq \big((4,5),(5,4)\big)$ ve $(y,x) = ((4,5),(5,4))$ ise $d(Tx,Ty) \leq \frac{4}{5}d(x,y)$ dir. Her $r \in [0,1)$ için $\theta_1(r)d\big((4,5),T(4,5)\big) > \frac{5}{2} > 2 = d((4,5),(5,4))$ ve $\theta_1(r)d\big((5,4),T(5,4)\big) > d((5,4),(4,5))$ olduğundan T Teorem 2 de ki koşulu sağlar fakat,

$$d\big(T(5,4),T(4,5)\big) = 8 > 5 = \frac{1}{2}(d((4,5),T(4,5)) + d((5,4),T(5,4)))$$

olduğundan T Kannan dönüşümü değildir.

3.1.2. Örnek: $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ üzerinde alışılmış metrik ile birlikte tam metrik uzay olmak üzere X üzerinde T fonksiyonunu

$$Tx = \begin{cases} 0 & , x \neq 2 \\ -1 & , x = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda T Kannan dönüşümüdür fakat, Teorem 3.1.4 deki koşulları sağlamaz. [5]

İspat: Her $x \in X$ için

$$d(Tx, T2) \leq 1 = \frac{1}{3}d(T2,2) \leq \frac{1}{3}[d(Tx,x) + d(T2,2)]$$

olduğundan T Kannan dönüşümüdür. Fakat her $r \in [0,1)$ için

$$\theta_1(r)d(T1,1) \leq 1 = d(2,1)$$

ve

$$d(T1, T2) = 1 = d(1,2)$$

olduğundan T Teorem 3.1.4 deki koşulları sağlamaz.

3.1.1. Lemma: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. $x \in X$, bir $r \in [0,1)$ için $d(Tx, T^2x) \leq rd(Tx, x)$ sağlansın. Bu durumda $y \in X$ için $\frac{1}{1+r}d(Tx, x) \leq d(x, y)$ veya $\frac{1}{1+r}d(Tx, T^2x) \leq d(Tx, y)$ vardır.

İspat: $\frac{1}{1+r}d(Tx, x) > d(x, y)$ ve $\frac{1}{1+r}d(Tx, T^2x) > d(Tx, y)$ sağlandığını iddia edelim. Bu durumda

$$d(Tx, x) \leq d(Tx, y) + d(y, x)$$

$$< \frac{1}{1+r} d(Tx, x) + \frac{1}{1+r} d(Tx, T^2x)$$

$$\leq \frac{1}{1+r} \big(d(Tx, x) + rd(Tx, x)\big) = d(Tx, x)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

3. 1.6 Teorem: (X, d) tam metrik uzay ve T, X üzerinde tanımlı bir dönüşüm olsun. $\theta_2: [0,1) \to (\frac{1}{2}, 1]$ artmayan fonksiyonunu

$$\theta_2(r) = \begin{cases} 1 \quad , & 0 \leq r < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{1+r} \quad , & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için $r := \frac{\alpha}{1-\alpha} \in [0,1)$ olarak alalım. Her $x, y \in X$ için

$$\theta_2(r) d(Tx, x) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(Tx, x) + d(Ty, y)]$$

ise T bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir ve her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$ sağlanır. [6]

İspat: $\theta_2(r) \leq 1$ olduğundan $\theta_2(r) d(Tx, x) \leq d(Tx, x)$ sağlanır. Bu durumda kabulümüzden

$$d(Tx, T^2x) \leq \alpha[d(Tx, x) + d(Tx, T^2x)]$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(Tx, x) = rd(Tx, x)$$

elde edilir ki buradan her $x \in X$ için

$$d(Tx, T^2x) \leq rd(Tx, x) \tag{4}$$

elde edilir. $u \in X$ noktasını göz önüne alalım. $u_0 = u$, her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ şeklinde (u_n) dizisini tanımlayalım. (4) ten

$$d(u_n, u_{n+1}) = d(T^n u, T^{n+1} u) \leq rd(T^{n-1} u, T^n u)$$

$$\leq r^2 d(T^{n-2} u, T^{n-1} u)$$

$$\vdots$$

$$\leq r^n d(Tu, u) = r^n d(u_o, u_1)$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n, u_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(u_o, u_1) < \infty$ olduğundan (u_n) dizisi Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $u_n \to z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Şimdi $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx, z) \leq \alpha d(Tx, x) \tag{5}$$

olduğunu göstereceğiz. $d(x,z) > 0$ ve $u_n \to z$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ için $d(u_n, z) \leq \frac{d(x,z)}{3}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$\theta_2(r)d(u_n, Tu_n) \leq d(u_n, Tu_n) = d(u_n, u_{n+1})$$

$$\leq d(u_n, z) + d(u_{n+1}, z)$$

$$\leq \frac{2}{3}d(x,z) = d(x,z) - \frac{d(x,z)}{3}$$

$$\leq d(x,z) - d(u_n, z) \leq d(u_n, x)$$

ve dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ için

$$d(Tu_n, Tx) \leq \alpha[d(u_n, Tu_n) + d(Tx, x)]$$

elde edilir. Bu durumda $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx, z) = \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tx) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, Tx)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \alpha[d(u_n, Tu_n) + d(Tx, x)]$$

$$= \alpha d(Tx, x)$$

dır. Şimdi $Tz = z$ olduğunu gösterelim.

i. $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun. Kabul edelim ki T$z \neq z$. Bu durumda (5) ten

$$d(T^2z, z) \leq \alpha d(Tz, T^2z) \leq \alpha r d(Tz, z)$$

ve dolayısıyla

$$d(Tz, z) \leq d(Tz, T^2z) + d(T^2z, z)$$

$$\leq r d(Tz, z) + \alpha r d(Tz, z)$$

$$= \frac{r + 2r^2}{1 + r} d(Tz, z)$$

$$< \frac{r+1}{1+r} d(Tz, z) = d(Tz, z)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $Tz = z$ dir.

ii. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ olsun. Lemma 3.1.1 den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta_2(r) d(u_{2n}, u_{2n+1}) \leq d(u_{2n}, z)$$

veya

$$\theta_2(r)d(u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq d(u_{2n+1}, z)$$

sağlanır. Bu durumda (n) nin (n_j) alt dizisi vardır ve her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\theta_2(r)d(u_{n_j}, u_{n_{j+1}}) \leq d(u_{n_j}, z)$$

sağlanır. Kabulümüzden

$$d(Tz, z) = \lim_{j\to\infty} d(u_{n_{j+1}}, Tz)$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} \alpha d\left(u_{n_j}, u_{n_{j+1}}\right) + \alpha d(Tz, z)$$

$$= \alpha d(Tz, z)$$

$\alpha < 1$ olduğundan $Tz = z$ elde edilir. Böylece her iki durum içinde z, T nin sabit noktası olur. Sabit noktanın tekliği (5) ten açıktır.

Aşağıdaki teorem her r için $\theta_2(r)$ nin en iyi sabit olduğunu gösterir.

3. 1.7 Teorem: Teorem 3.1.6 deki gibi θ_2 fonksiyonunu tanımlayalım. Her $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ için $r = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ olarak alalım. Her $r \in [0,1)$ için bir (X, d) tam metrik uzayı ile

$$\theta_2(r)d(Tx, x) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \alpha d(Tx, x) + \alpha d(Ty, y).$$

özelliğini sağlayan ve hiçbir sabit noktası olmayan bir $T: X \to X$ dönüşümü vardır. [6]

İspat:

i. $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun. $\mathbb{R}$ öklid uzayının $X = \{-1,1\}$ alt uzayının tam olduğu açıktır. X üzerinde T fonksiyonunu her $x \in X$ için $Tx = -x$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda T sabit noktaya sahip değildir ve her $x, y \in X$ için

$$\theta_2(r)d(Tx, x) = 2 \geq d(x, y)$$

sağlanır.

ii. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1$ olsun. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n = (1-r)(-r)^n$ şeklinde $\mathbb{R}$ Öklid uzayının $X = \{0,1\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ tam alt kümesini tanımlayalım. $T0 = 1$, $T1 = x_0$, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $Tx_n = x_{n+1}$ şeklinde T fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır.

- $x = 0, y = 1$ olarak alırsak

$$d(T0, T1) = r = \alpha d(T0,0) + \alpha d(T1,1)$$

sağlanır.

- Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x = 0, y = x_n$ olarak alırsak,

$$\theta_2(r)d(0, T0) \geq \theta_2(r)d(x_n, Tx_n) = d(0, x_n)$$

sağlanır.

- Her $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x = x_n, y = x_m$ olarak alırsak,

$$d(Tx_n, Tx_m) \leq d(0, Tx_m) + d(0, Tx_n)$$

$$= \alpha d\left(x_{m,} Tx_{m,}\right) + \alpha d(x_n, Tx_n)$$

elde edilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x = 1, y = x_n$ olarak alırsak,

$$d(T1, Tx_n) \leq d(0, T1) + d(0, Tx_n)$$

olduğundan eşitsizliğin her iki yanından $[\alpha d(T1,1) + \alpha d(x_n, Tx_n)]$ çıkarılırsa

$$d(T1, Tx_n) - [\alpha d(T1,1) + \alpha d(x_n, Tx_n)] \leq d(0, T1) - \alpha d(T1,1)$$

$$= \frac{1-2r^2}{1+r} \leq 0$$

elde edilir.

Şimdi Teorem 3.1.6 nın daha genel bir halini vereceğiz.

3. 1.8 Teorem: Teorem 3.1.4 deki gibi θ_1 fonksiyonunu tanımlayalım. (X, d) tam metrik uzay ve T, X üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\theta_1(r)d(Tx, x) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rmax\{d(Tx, x), d(Ty, y)\}$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa T bir tek $z \in X$ sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$ dir. [6]

İspat: $\theta_1(r)d(Tx, x) \leq d(Tx, x)$ olduğundan hipotezimiz gereği

$$d(Tx, T^2x) \leq rmax\,\{d(Tx, x), d(Tx, T^2x)\}$$

ve dolayısıyla her $x \in X$ için

$$d(Tx, T^2x) \leq rd(Tx, x) \tag{6}$$

elde edilir. Bir $u_0 = u$ noktasını göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ olacak şekilde bir (u_n) dizisi tanımlayalım. Teorem 3.1.6 nin ispatındaki gibi (u_n) dizisinin bir $z \in X$ noktasına yakınsadığı ispatlanabilir. Her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx,z) \leq rd(Tx,x) \tag{7}$$

olduğunu gösterelim. $u_n \to z$ olduğundan yeterince büyük n ler için

$$\theta_1(r)d(u_n,Tu_n) \leq d(u_n,x)$$

sağlanır. Dolayısıyla kabulümüzden $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx,z) = \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1},Tx) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n,Tx)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} r max\{d(u_n,Tu_n), d(Tx,x)\}$$

$$= rd(Tx,x).$$

Şimdi z nin T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

i. $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun. Bu durumda $\theta_1(r) \leq \frac{1-r}{r}$ sağlanır. $n \geq 2$ olacak şekilde ki $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n z,Tz) \leq rd(Tz,z) \tag{8}$$

olduğunu tüme varım yoluyla gösterelim. $n = 2$ için

$$d(T^2z, Tz) \leq rd(Tz, z) \tag{9}$$

olduğundan (6) gereği (9) vardır. $n \geq 2$ olacak şekildeki bazı $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n z, Tz) \leq rd(Tz, z)$$

olduğunu kabul edelim.

$$d(Tz, z) \leq d(Tz, T^n z) + d(T^n z, z)$$

$$\leq rd(Tz, z) + d(T^n z, z)$$

olduğundan

$$d(Tz, z) \leq \frac{1}{1-r} d(T^n z, z)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\theta_1(r) d(T^n z, T^{n+1} z) \leq \frac{1-r}{r^2} d(T^n z, T^{n+1} z)$$

$$\leq \tfrac{1-r}{r^n} d(T^n z, T^{n+1} z)$$

$$\leq (1-r) d(Tz, z) \leq d(z, T^n z)$$

olduğundan hipotezimiz gereği

$$d(T^n z, Tz) \leq rmax\{d(T^n z, T^{n+1} z), d(Tz, z)\} = rd(Tz, z).$$

Böylece tüme varım yöntemiyle (8) in var olduğunu göstermiş olduk. $Tz \neq z$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse her $n \in \mathbb{N}$ için (8) den $T^n z \neq z$ dir. Bu durumda (7) den

$$d(T^{n+1} z, z) \leq rd(T^n z, T^{n+1} z) \leq r^{n+1} d(Tz, z)$$

elde edilir. Bu $T^n z \to z$ olmasını gerektirir ki bu durum (8) ile çelişir. Öyleyse kabulümüz yanlıştır. Yani $Tz = z$ dir.

ii. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ olsun. Teorem 3.1.7 ispatında olduğu gibi $j \in \mathbb{N}$ için

$$\theta_1(r) d(u_{n_j}, u_{n_j+1}) \leq d(u_{n_j}, z)$$

olacak şekilde (n) nin bir (n_j) alt dizinin var olduğu gösterilebilir. Kabulümüzden

$$d(Tz, z) = \lim_{j \to \infty} d(u_{n_j+1}, Tz)$$

$$\leq \lim_{j \to \infty} rmax\left\{d\left(u_{n_j}, u_{n_j+1}\right), d(Tz, z)\right\}$$

$$= rd(Tz, z)$$

elde edilir. $r < 1$ olduğundan üsteki eşitsizlik $Tz = z$ olmasını gerektirir. Böylece her iki durum içinde sabit noktanın varlığını göstermiş olduk. Sabit noktanın tekliğini (7) den görmek kolaydır.

Aşağıdaki teorem $\theta_1(r)$ nin en iyi sabit olduğunu gösterir.

3. 1.9 Teorem: Teorem 3.1.4 deki θ_1 fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda her $r \in [0,1)$ için bir (X, d) tam metrik uzayı ile

$$\theta_1(r)d(Tx, x) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rmax\{d(Tx, x), d(Ty, y)\}$$

özelliğini sağlayan ve hiçbir sabit noktaya sahip olmayan bir $T: X \to X$ dönüşümü vardır. [6]

İspat: $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ veya $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ durumunda $\theta_1(r) = \theta_2(r)$ olduğundan tüm sonuçlar gösterilmiştir. Bu yüzden $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ durumunu kabul edelim. $\mathbb{R}$ Öklid uzayının $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - r$, $n \geq 3$ için $x_n = (1 - r - r^2)(-r)^{n-3}$, $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlı altkümesinin tam olduğu açıktır. X üzerinde $n \in \mathbb{N}$ için $Tx_n = x_{n+1}$ şeklinde T fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır.

- $x = x_0,\ y = x_1$ aldığımızda

$$d(Tx_0, Tx_1) = |x_1 - x_2| = |1 - (1 - r)| = r$$

$$= rd(x_0, Tx_0) = rmax\{d(x_0, Tx_0), d(x_1, Tx_1)\}$$

- $x = x_0,\ y = x_2$ aldığımızda

$$\theta_1(r)d(Tx_0, x_0) \geq \theta_1(r)d(Tx_2, x_2) = \frac{1 - r}{r^2}|1 - r - (1 - r - r^2)|$$

$$= (1 - r) = d(x_0, x_2)$$

- $x = x_0,\ y = x_n$ aldığımızda $n \geq 3$ için

$$\theta_1(r)d(Tx_0, x_0) \geq \theta_1(r)d(Tx_n, x_n) = \frac{1 - r}{r^2}|(1 - r - r^2)(-r)^{n-3}(1 + r)|$$

$$= \frac{1-r}{r^2}[(1 - 2r^2 - r^3)(-r)^{n-3})]$$

$$= (1 - r - r^2)(-r)^{n-3}\frac{1+r^2}{r^2}$$

$$= \frac{1+r^2}{r^2}d(x_0, x_n)$$

dır.

- $x = x_1,\ y = x_2$ aldığımızda

$$d(Tx_1, Tx_2) = |x_2 - x_3| = |1 - r - (1 - r - r^2)| = r^2 = rd(x_1, Tx_1)$$

$$x_3 \leq x_5 \leq x_7 \leq \cdots \leq x_0 \leq \cdots \leq x_8 \leq x_6 \leq x_4 \leq x_2 \leq x_1$$

olduğundan aşağıdaki ifadeler vardır.

- $x = x_1,\ y = x_n$ aldığımızda $n \geq 3$ için

$$d(Tx_1, Tx_n) = |x_2 - x_{n+1}| < d(x_2, x_3) = |1 - r - (1 - r - r^2)|$$

$$= r^2 = rd(x_1, Tx_1).$$

- $x = x_2,\ y = x_n$ aldığımızda $n \geq 3$ için

$$d(Tx_2, Tx_n) - rd(x_2, Tx_2) \leq d(x_3, x_4) - r^3 = 2r^2 - 1 \leq 0.$$

- $x = x_m,\ y = x_n$ aldığımızda $3 \leq m < n$ için

$$d(Tx_m, Tx_n) \leq d(Tx_m, Tx_{m+1}) = rd(x_m, Tx_m).$$

Böylece ispat tamamlanır.

3. 1.2 Lemma: $a \leq A$, $b \leq B$ olacak şekilde dört reel sayı olsun. Bu durumda $aB + Ab \leq ab + AB$ dir. [7]

İspat: $b \leq B \Rightarrow 0 \leq B - b$ dir. $a \leq A$ eşitsizliğinin her iki yanını $B - b$ ile çarpalım bu durumda

$$a(B - b) \leq A(B - b)$$

$\Rightarrow \; aB - ab \leq AB - Ab$

$\Rightarrow \; aB + Ab \leq ab + AB.$

$\triangle = \{(\alpha, \beta): \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta < 1\}$ üçgensel bölgesini

$$\triangle_1 = \{(\alpha, \beta) \in \triangle: \alpha \leq \beta, \alpha + \beta + \alpha^2 < 1\}$$

$$\triangle_2 = \{(\alpha, \beta) \in \triangle: \alpha \geq \beta, \alpha + \beta + \beta^2 < 1\}$$

$$\triangle_3 = \{(\alpha, \beta) \in \triangle: \alpha \geq \beta, \alpha + \beta + \beta^2 \geq 1\}$$

$$\triangle_4 = \{(\alpha, \beta) \in \triangle: \alpha \leq \beta, \alpha + \beta + \alpha^2 \geq 1\}$$

bölgelere bölebiliriz. Bu durumda yukarıda verdiğimiz Teoremi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

3.1. 10 Teorem: ψ:$\Delta \to (\frac{1}{2}, 1]$ artmayan fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\psi(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 & , \quad (\alpha,\beta) \in \Delta_1 \\ 1 & , \quad (\alpha,\beta) \in \Delta_2 \\ 1-\beta & , \quad (\alpha,\beta) \in \Delta_3 \\ \frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha} & , \quad (\alpha,\beta) \in \Delta_4 \end{cases} \tag{10}$$

T, (X,d) metrik uzayı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x,y \in X$ için

$$\psi(\alpha,\beta)d(Tx,x) \le d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \le \alpha d(Tx,x) + \beta d(Ty,y)$$

sağlayan $(\alpha,\beta) \in \Delta$ varsa T dönüşümü $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$ dir. [7]

İspat: $q \coloneqq \frac{\beta}{1-\alpha} \in [0,1),\ r \coloneqq \frac{\alpha}{1-\beta} \in [0,1)$ (11)

şeklinde alalım. $\psi(\alpha,\beta) \le 1$ olduğundan her $x \in X$ için

$$\psi(\alpha,\beta)d(Tx,x) \le d(Tx,x)$$

olup hipotezimizden

$$d(Tx, T^2x) \leq \alpha d(Tx, x) + \beta d(Tx, T^2x)$$

$$\leq \frac{\alpha}{1-\beta} d(Tx, x)$$

sağlanır ve dolayısıyla her $x \in X$ için

$$d(Tx, T^2x) \leq rd(Tx, x) \tag{12}$$

elde edilir. $\psi(\alpha, \beta) d(Tx, T^2x) \leq d(Tx, T^2x) \leq rd(Tx, x) \leq d(Tx, x)$ olduğundan

$$d(T^2x, Tx) \leq \alpha d(Tx, T^2x) + \beta d(Tx, x)$$

$$\leq \frac{\beta}{1-\alpha} d(Tx, x)$$

elde edilir buradan her $x \in X$ için

$$d(Tx, T^2x) \leq qd(Tx, x) \tag{13}$$

dır. Bir $u \in X$ noktasını göz önüne alalım ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ şeklinde bir (u_n) dizisi tanımlayalım. Bu durumda (12) den

$$d(u_{n+1}, u_n) = d(T^2 u_{n-1}, Tu_{n-1}) \leq rd(u_n, u_{n-1})$$

$$\leq r^2 d(u_{n-1}, u_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$\leq r^n d(Tu, u)$$

elde edilir. Buradan da

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_{n+1}, u_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(Tu, u) < \infty$$

olduğundan (u_n) Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $u_n \to z$ olacak şekilde z $\in X$ vardır. Şimdi her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx, z) \leq \beta d(Tx, x) \tag{14}$$

olduğunu göstereceğiz. (u_n) yakınsak olduğundan yeterince büyük n ler için

$$\psi(\alpha, \beta) d(u_n, Tu_n) \leq d(u_n, u_{n+1}) \leq d(u_n, x)$$

ve dolayısıyla $x = u_n$, $y = x$ alarak $d(Tu_n, Tx) \leq \alpha d(u_n, Tu_n) + \beta d(x, Tx)$ olur ki bu yüzden her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx, z) = \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tx) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, Tx)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \alpha d(u_n, Tu_n) + \beta d(x, Tx) = \beta d(x, Tx)$$

(14) ile

$$d(Tx, x) \leq d(x, z) + d(z, Tx) \leq d(x, z) + \beta d(Tx, x)$$

ve buradan her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$(1 - \beta) d(Tx, x) \leq d(x, z) \tag{15}$$

elde edilir. Şimdi $z \in X$ noktasının T nin sabit noktası olduğunu gösterelim

i. $(\alpha, \beta) \in \Delta_1$ ve $Tz \neq z$ olsun. Bu durumda

$$d(Tz, T^2 z) \leq r d(z, Tz) < d(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} d(Tz, u_n)$$

elde edilir. Öyleyse yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$$\psi(\alpha, \beta) d(Tz, T^2 z) = d(Tz, T^2 z) \leq d(Tz, u_n)$$

sağlanır ve dolayısıyla

$$d(T^2 z, z) = \lim_{n\to\infty} d(T^2 z, Tu_n)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}[\alpha d(Tz,T^2z)+\beta d(u_n,Tu_n)]$$

$$= \alpha d(Tz,T^2z)$$

elde edilir. Bu durumda

$$d(z,Tz) \leq d(z,T^2z)+d(Tz,T^2z)$$

$$\leq (1+\alpha)d(Tz,T^2z)$$

$$\leq (1+\alpha)rd(z,Tz)$$

$$= \frac{\alpha+\alpha^2}{1-\beta}d(z,Tz)$$

$$< d(z,Tz)$$

bu bir çelişkidir. Buradan $Tz = z$ dır.

ii. $(\alpha,\beta) \in \Delta_2$ ve $Tz \neq z$ olsun. Öyleyse

$$d(z,Tz) \leq d(z,T^2z)+d(T^2z,Tz)$$

$$\leq (1+\beta)d(T^2z,Tz)$$

$$\leq (1+\beta)qd(z,Tz)$$

$$= \frac{\beta+\beta^2}{1-\alpha} d(z,Tz)$$

$$< d(z,Tz)$$

bu bir çelişkidir. Bu yüzden $Tz = z$ dir.

iii. $(\alpha,\beta) \in \Delta_3$ durumunda aşağıdaki iki durumu kabul edelim.

1. $u_n = z$ olacak şekilde en küçük iki tane n doğal sayısı vardır.
2. Yeterince büyük n ler için $u_n \neq z$ dir.

1. Durumu: $Tz \neq z$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse (u_n) Cauchy değildir. Bu durumda $Tz = z$ olur.
2. Durumu: (15) ile yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ ler için $\psi(\alpha,\beta)d(u_n,Tu_n) \leq d(u_n,z)$ dir. Kabulümüzden

$$d(z,Tz) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n,Tz)$$

$$\leq lim_{n\to\infty}\, \alpha d(u_n,Tu_n) + \beta d(z,Tz)$$

$$= \beta d(z,Tz).$$

$\beta < 1$ olduğundan $Tz = z$ dir.

iv. $(\alpha,\beta) \in \Delta_4$ ve bu bölgede $\psi(r) = \frac{1}{1+r}$ olsun. Lemma 3.1.1 ile her $n \in \mathbb{N}$ için

$\psi(\alpha,\beta)d(u_n,Tu_n) \leq d(u_n,z)$ veya $\psi(\alpha,\beta)d(Tu_n,T^2u_n) \leq d(Tu_n,z)$

Bu durumda (n) nin (n_j) alt dizisi vardır öyle ki $j \in \mathbb{N}$ için

$$\psi(\alpha,\beta)d(u_{n_j},Tu_{n_j}) \leq d(u_{n_j},z)$$

elde edilir. Kabulümüzden

$$d(Tz,z) = \lim_{j\to\infty} d(Tu_{n_j},Tz)$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} \alpha d\left(u_{n_j},Tu_{n_j}\right) + \beta d(Tz,z)$$

$$= \beta d(Tz,z)$$

$\beta < 1$ olduğundan $Tz = z$ dır. Bu durumda tüm durumlar için z nin T nin sabit noktası olduğunu göstermiş olduk. (14) ten sabit noktanın tekliği kolayca görülür.

Bu kısımda her $(\alpha,\beta) \in \Delta$ için $\psi(\alpha,\beta)$nın en iyi sabit olduğunu ispatlayacağız.

3.1. 11 **Teorem:** Teorem 3.1.10 deki gibi ψ fonksiyonu tanımlayalım. Her $(\alpha,\beta) \in \Delta$ için bir (X,d) tam metrik uzayı ile her $x,y \in X$ için

$$\psi(\alpha,\beta)d(Tx.x) < d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \alpha d(Tx,x) + \beta d(Ty,y)$$

özelliğini sağlayan ve hiçbir sabit noktaya sahip olmayan bir $T: X \to X$ dönüşümü vardır. [7]

İspat: q ve r yi (11) deki gibi alalım.

i. $(\alpha, \beta) \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ olsun. $\mathbb{R}$ Öklid uzayının $X = \{-1,1\}$ şeklinde tanımlı altkümesinin tam olduğu açıktır. X üzerinde T fonksiyonunu her $x \in X$ için $Tx = -x$ şeklinde tanımlayalım. T sabit noktaya sahip değildir ve $x, y \in X$ için

$$\psi(\alpha, \beta) d(Tx, x) = 2 \geq d(x, y)$$

sağlanır.

ii. $(\alpha, \beta) \in \Delta_3$ ve $p := \frac{\beta}{1-\beta} \in (0,1)$ olarak alalım. Bu durumda $\psi(\alpha, \beta)(1 + p) = 1$ dır. $\mathbb{R}$ Öklid uzayının $X = \{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n = (1 - q)(-p)^n$ şeklinde tanımlı altkümesinin tam olduğu açıktır. X kümesi üzerinde $T0 = 1$, $T1 = x_0$, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $Tx_n = x_{n+1}$ şeklinde T fonksiyonunu tanımlayalım. Öyleyse

- $x = 0,\ y = 1$ olarak alırsak

$$\psi(\alpha, \beta) d(0, T0) < d(0,1)$$

olduğundan

$$d(T1, T0) = q = \alpha d(T1,1) + \beta d(T0,0) \leq \alpha d(T0,0) + \beta d(T1,1)$$

elde edilir.

- Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x = 0,\ y = x_n$ alırsak

$$\psi(\alpha,\beta)d(0,T0) > \psi(\alpha,\beta)d(x_n,Tx_n)$$

$$= (1-q)p^n = d(0,x_n)$$

elde edilir

$$d(Tx_n,T1) - [\alpha d(Tx_n,x_n) + \beta d(T1,1)]$$

$$= (1-q)\left(1-(-p)^{n+1} - \frac{\alpha}{\beta}p^{n+1} - \frac{\beta^2}{1-\alpha-\beta}\right)$$

$$\leq (1-q)\left(1-\frac{\beta^2}{1-\alpha-\beta}\right) + (1-q)p^{n+1}\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$\leq 0$$

bu durumda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$d(Tx_n,T1) \leq \alpha d(Tx_n,x_n) + \beta d(T1,1) \leq \alpha d(T1,1) + \beta d(Tx_n,x_n)$$

elde edilir. $m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $m < n$ için

$$d(Tx_n, Tx_m) - [\alpha d(Tx_n, x_n) + \beta d(Tx_m, x_m)]$$

$$= (1-q)(|(-p)^{n+1} - (-p)^{m+1}| - \frac{\alpha}{\beta} p^{n+1} - p^{m+1})$$

$$\leq (1-q)(p^{n+1} + p^{m+1} - \frac{\alpha}{\beta} p^{n+1} - p^{m+1}) \leq 0$$

olduğundan

$$d(Tx_n, Tx_m) \leq \alpha d(Tx_n, x_n) + \beta d(Tx_m, x_m)$$

$$\leq \alpha d(Tx_m, x_m) + \beta d(Tx_n, x_n)$$

elde edilir.

iii. $(\alpha, \beta) \in \Delta_4$ olsun. Bu durumda $\psi(\alpha, \beta)(1 + r) = 1$ ve $r \geq 2^{-\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$ dır. ℓ^∞; $\mathbb{N}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı tüm fonksiyonların sınıfı olsun. $\|f\| \coloneqq \sup_n |f(n)| < \infty$ normu ile birlikte $(\ell^\infty, \|.\|)$ Banach uzayıdır. ℓ^∞ un kanonik tabanı $\{e_n\}$ olsun. ℓ^∞ uzayının her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n = (1 - r)r^n[e_{n+1} - e_{n+2}]$, $X = \{0, e_1\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ şeklinde tanımlı altkümesinin tam olduğu açıktır. Bu durumda her $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m < n$ için

$$d(x_n, x_m) = \begin{cases} (1 - r^2)r^m, & m + 1 = n \\ (1 - r)r^m \;, & m + 1 < n \end{cases}$$

sağlanır. Ayrıca $T0 = e_1, Te_1 = x_0$, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $Tx_n = x_{n+1}$ şeklinde X üzerinde T fonksiyonunu tanımlayalım. Öyleyse

$$d(T0, Te_1) = r = \alpha d(T0,0) + \beta d(Te_1, e_1)$$

$$\leq \alpha d(Te_1, e_1) + \beta d(T0,0)$$

elde edilir. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\psi(\alpha, \beta) d(T0,0) > \psi(\alpha, \beta) d(Tx_n, x_n) = (1-r)r^n = d(0, x_n).$$

$$d(Te_1, Tx_0) - [\alpha d(Te_1, e_1) + \beta d(Tx_0, x_0)] = (1-\beta)(1-2r^2) \leq 0$$

olduğundan

$$d(Te_1, Tx_0) \leq \alpha d(Te_1, e_1) + \beta d(Tx_0, x_0) \leq \alpha d(Tx_0, x_0) + \beta d(Te_1, e_1)$$

dır. $\alpha + \beta + \alpha^2 \geq 1$ olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(Te_1, Tx_n) = 1 - r \leq \alpha r = \alpha d(Te_1, e_1)$$

$$< \alpha d(Te_1, e_1) + \beta d(Tx_n, x_n)$$

$$\leq \alpha d(Tx_n, x_n) + \beta d(Te_1, e_1)$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$d(Tx_n, Tx_{n+1}) = (1 - r^2)r^{n+1} = \alpha d(Tx_n, x_n) + \beta d(Tx_{n+1}, x_{n+1})$$

$$\leq \alpha d(Tx_{n+1}, x_{n+1}) + \beta d(Tx_n, x_n)$$

dır. $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m + 1 < n$ için

$$\psi(\alpha, \beta) d(Tx_m, x_m) = (1 - r)r^m = d(x_m, x_n),$$

$$d(Tx_n, Tx_m) - [\alpha d(Tx_n, x_n) + \beta d(Tx_m, x_m)] < d(Tx_n, Tx_m) - \beta d(Tx_m, x_m)$$

$$= r^{m+1}(1 - r) - \beta r^m (1 - r^2)$$

$$= r^m (1 - r)(\alpha - \beta) \leq 0.$$

olur ki bu ispatı tamamlar.

$\triangle = [0,1)^2$ alalım. $\triangle$ nın bir çok alt kümesini tanımlayabiliriz.

$\triangle_1 = \{(\alpha, \beta) \in \triangle : \alpha + \alpha^2 < 1 \; veya \; \beta + \beta^2 < 1\}$

$\triangle_2 = \{(\alpha, \beta) \in \triangle : \alpha \geq \beta, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

$\Delta_3 = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : \alpha \geq \beta, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \beta < 1\}$

$\Delta_4 = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : \alpha \leq \beta, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta \leq \alpha^2 - \alpha + 1\}$

$\Delta_5 = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha^2 - \alpha + 1 \leq \beta \leq 1 - \frac{\alpha^3}{1+\alpha}\}$

$\Delta_6{}^{*} = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{\alpha^3}{1+\alpha} \leq \beta\}$

$\Delta_6{}^{**} = \{(\alpha,\beta) \in \Delta : \alpha \leq \beta, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \alpha < 1\}$

$\Delta_6 = \Delta_6{}^{*} \cup \Delta_6{}^{**}$

3.1. 12 Teorem: $\psi : \Delta \rightarrow (\frac{1}{2}, 1]$ artmayan fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\psi(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 & , \ (\alpha,\beta) \in \Delta_1 \\ \dfrac{(1-\beta)}{\beta^2} & , \ (\alpha,\beta) \in \Delta_2 \\ \dfrac{1}{1+\beta} & , \ (\alpha,\beta) \in \Delta_3 \\ \dfrac{(1-\alpha)}{\alpha^2} & , \ (\alpha,\beta) \in \Delta_4 \\ \dfrac{(1-\beta)}{\alpha^3} & , \ (\alpha,\beta) \in \Delta_5 \\ \dfrac{1}{1+\alpha} & , \ (\alpha,\beta) \in \Delta_6 \end{cases}$$

Biçimlendirilmiş: Yazı tipi: 12 nk

T, (X,d) tam metrik uzayı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x,y \in X$ için

$$\psi(\alpha,\beta)d(Tx,x) \leq d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq max\,\{\alpha d(Tx,x), \beta d(Ty,y)\}$$

olacak şekilde $(\alpha,\beta) \in \Delta$ varsa T bir tek $z \in X$ sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = z$ dır.

İspat: $r \coloneqq min\{\alpha,\beta\} \in [0,1)$ olarak alalım. $\psi(\alpha,\beta) \leq 1$ olduğundan $\psi(\alpha,\beta)d(Tx,x) \leq d(Tx,x)$ sağlanır. Hipotezimizden

$$d(Tx,T^2x) \leq max\,\{\alpha d(Tx,x), \beta d(Tx,T^2x)\}$$

elde edilir. Buradan her $x \in X$ için

$$d(Tx,T^2x) \leq \alpha d(Tx,x) \tag{16}$$

olur.

$$\psi(\alpha,\beta)d(Tx,T^2x) \leq d(Tx,T^2x) \leq \alpha d(Tx,x) \leq d(Tx,x)$$

olduğundan

$$d(Tx,T^2x) \leq max\,\{\alpha d(Tx,T^2x),\beta d(Tx,x)\}$$

olur ve buradan her $x \in X$ için

$$d(Tx,T^2x) \leq \beta d(Tx,x) \quad (17)$$

elde edilir. $(16),(17)$ den her $x \in X$ için

$$d(Tx,Tx^2) \leq rd(Tx,x) \quad (18)$$

elde edilir. Şimdi $u \in X$ noktasını göz önüne alalım, $n \in N$ için $u_n = T^n u$ olarak alırsak (18) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n,u_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(Tu,u) < \infty$$

elde ederiz ki ve buradan (u_n), X üzerinde bir Cauchy dizisi olduğunun görürüz. X tam olduğundan $u_n \to z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Şimdi $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx,z) \leq \beta d(Tx,x) \quad (19)$$

olduğunu gösterelim. $u_n \to z$ olduğundan yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$$\psi(\alpha,\beta)d(Tu_n,u_n) \leq d(u_n,u_{n+1}) \leq d(u_n,x)$$

sağlanır ve buradan

$$d(Tu_n, Tx) \leq max\,\{\alpha d(Tu_n, u_n), \beta d(Tx, x)\}$$

elde edilir. Bu durumda her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx, z) = \lim_{n\to\infty} d(u_{n+1}, Tz) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, Tx)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} max\{\alpha d(Tu_n, u_n), \beta d(Tx, x)\}$$

$$= \beta d(Tx, x).$$

Böylece her $x \in X \setminus \{z\}$ için (19) un olduğunu göstermiş olduk. Şimdi $z \in X$ in T nin sabit noktası olduğunu gösterelim.

i. $(\alpha, \beta) \in \Delta_1$ ve $Tz \neq z$ olsun. Bu durumda $r^2 + r < 1$ dir. Öyleyse

$$d(Tz, T^2z) \leq rd(Tz, z) < d(Tz, z) = \lim_{n\to\infty} d(Tz, u_n)$$

sağlanır. Yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$$\psi(\alpha, \beta) d(Tz, T^2z) \leq d(Tz, u_n)$$

dır ve buradan

$$d(T^2z,z) = \lim_{n\to\infty} d(T^2z,Tu_n)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} max\{\alpha d(Tz,T^2z),\beta d(Tu_n,u_n)\}$$

$$= \alpha d(Tz,T^2z)$$

(19) u ve bu eşitsizliği kullanarak,

$$d(T^2z,z) \leq rd(Tz,T^2z)$$

elde ederiz. Buradan

$$d(Tz,z) \leq d(Tz,T^2z) + d(T^2z,z) \leq (1+r)d(Tz,T^2z)$$

$$\leq (r+r^2)d(Tz,z) < d(Tz,z)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $Tz = z$ olur.

ii. $(\alpha,\beta) \in \Delta_2$ olsun. $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için

$$d(T^nz,Tz) \leq \beta d(Tz,z) \tag{20}$$

olduğunu tümevarım metoduyla gösterelim. $n = 2$ olduğunda, (17) den (20) vardır. $n \geq 2$ olacak şekildeki bazı n ler için (20) in var olduğunu kabul edelim.

$$d(Tz,z) \leq d(Tz,T^n z) + d(T^n z,z) \leq \beta d(Tz,z) + d(T^n z,z) \leq \frac{1}{1-\beta} d(T^n z,z)$$

olduğundan

$$\psi(\alpha,\beta)d(T^n z,T^{n+1}z) = \frac{1-\beta}{\beta^2} d(T^n z,T^{n+1}z) \leq \frac{1-\beta}{\beta^n} d(T^n z,T^{n+1}z)$$

$$\leq (1-\beta)d(Tz,z) \leq d(T^n z,z)$$

elde edilir. Kabulümüzden

$$d(T^{n+1}z,Tz) \leq max\{\alpha d(T^n z,T^{n+1}z),\beta d(Tz,z)\} = \beta d(Tz,z)$$

elde ederiz. Bu durumda $k = n + 1$ olduğunda (20) vardır. Böylece $n \geq 2$ için (20) in var olduğunu tümevarım yoluyla göstermiş olduk. $Tz \neq z$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse (20) den $T^n z \neq z$ dır. (19) u kullanarak,

$$d(T^{n+1}z,z) \leq \beta d(T^n z,T^{n+1}z) \leq \beta^{n+1} d(Tz,z)$$

elde ederiz ki bu $\lim_{n\to\infty} T^n z = z$ olmasını gerektirir. Bu da (20) ile çelişir. Öyleyse $Tz = z$ dir.

iii. $(\alpha,\beta) \in \Delta_4 \cup \Delta_5$ olsun. Bu durumda $\psi(\alpha,\beta) = min\{\frac{1-\alpha}{\alpha^2}, \frac{1-\beta}{\alpha^3}\}$ sağlanır. $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$ için (20) in var olduğunu tümevarım yoluyla gösterelim. (16) yı kullanırsak

$$d(Tz,z) \leq d(Tz,T^2z) + d(T^2z,z) \leq \alpha d(Tz,z) + d(T^2z,z) \leq \frac{1}{1-\alpha} d(T^2z,z)$$

sağlanır. Buradan

$$\psi(\alpha,\beta) d(T^2z,T^3z) \leq \frac{1-\alpha}{\alpha^2} d(T^2z,T^3z) \leq (1-\alpha) d(Tz,z) \leq d(T^2z,z)$$

elde ederiz. Kabulümüzden

$$d(T^3z,Tz) \leq max\{\alpha d(T^2z,T^3z), \beta d(Tz,z)\} = \beta d(Tz,z)$$

dır. Bu durumda $n = 3$ için (20) vardır. $n \geq 3$ olacak şekildeki bazı n ler için (20) nin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$d(Tz,z) \leq d(Tz,T^nz) + d(T^nz,z) \leq \beta d(Tz,z) + d(T^nz,z)$$

$$\leq \frac{1}{1-\beta} d(T^nz,z),$$

$$\psi(\alpha,\beta) d(T^nz,T^{n+1}z) \leq \frac{1-\beta}{\alpha^3} d(T^nz,T^{n+1}z)$$

$$\leq (1-\beta)\alpha^{n-3}d(Tz,z)$$

$$\leq (1-\beta)d(Tz,z) \leq d(Tz,z)$$

elde edilir. Kabulümüzden

$$d(T^{n+1}z,Tz) \leq max\{\alpha d(T^n z,T^{n+1}z),\beta d(Tz,z)\} = \beta d(Tz,z)$$

dır. Bu durumda $k = n+1$ içinde (20) in var olduğunu gösterdik. Öyleyse $(\alpha,\beta) \in \Delta_2$ durumunda olduğu gibi $Tz = z$ olduğunu gösterebiliriz.

iv. $(\alpha,\beta) \in \Delta_3 \cup \Delta_6$ olsun. Bu durumda $\psi(\alpha,\beta) = \frac{1}{1+r}$ dir. Lemma 3.1.1 den her $n \in \mathbb{N}$ için $\psi(\alpha,\beta)d(Tu_n,u_n) \leq d(u_n,z)$ veya $\psi(\alpha,\beta)d(Tu_n,T^2u_n) \leq d(Tu_n,z)$ vardır. Buradan her $j \in \mathbb{N}$ için $\psi(\alpha,\beta)d(Tu_{n_j},u_{n_j}) \leq d\left(u_{n_j},z\right)$ olacak şekilde (n) nin (n_j) altdizisi vardır. Kabulümüzden

$$d(Tz,z) = \lim_{j\to\infty} d\left(Tu_{n_j},Tz\right)$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} max\left\{\alpha d\left(Tu_{n_j},u_{n_j}\right),\beta d(Tz,z)\right\}$$

$$= \beta d(Tz,z).$$

elde edilir ki $\beta < 1$ olduğundan $Tz = z$ dir. (19) dan z nin bir tek olduğu kolayca görülür.

Bu kısımda her $(\alpha, \beta) \in \Delta$ için $\psi(\alpha, \beta)$ nın en iyi sabit olduğunu göstereceğiz.

3.1. 13 Teorem: Teorem 3.1.12 deki gibi ψ fonksiyonu tanımlayalım. Her $(\alpha, \beta) \in \Delta$ için (X, d) tam metrik uzayı ile

$$\psi(\alpha, \beta) d(Tx, x) < d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq max\{\alpha d(Tx, x), \beta d(Ty, y)\}.$$

özelliğini sağlayan ve hiçbir sabit noktaya sahip olmayan bir $T: X \to X$ fonksiyonu vardır.

İspat: Teorem 3.1.4 kullanılarak, $(\alpha, \beta) \in \Delta \backslash \Delta_5 \cup {\Delta_6}^*$ durumundaki sonuçlar ispatlanabilir. Bu yüzden $(\alpha, \beta) \in \Delta_5 \cup {\Delta_6}^*$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda$1 \leq \alpha + \alpha^2$ ve $\alpha^2 + \alpha^3 < 1$ sağlanır. Ayrıca $\psi(\alpha, \beta) = max\left\{\frac{1-\beta}{\alpha^3}, \frac{1}{1+\alpha}\right\}$ dır.

$$p = \begin{cases} \dfrac{\alpha^3 + \beta - 1}{1 - \beta} & , (\alpha, \beta) \in \Delta_5 \\ \alpha & , (\alpha, \beta) \in {\Delta_6}^* \end{cases}$$

olarak alalım. $p \leq \alpha$ ve $\psi(\alpha, \beta)(1 + p)$=1 dır.

$0 = (0,0,0)$, $e_1 = (1,0,0)$, $w = (1 - \alpha, 0, \alpha^2)$ ve

$$x_n = \begin{cases} \left((1-\beta)p^n, (1-\beta)p^n, 0\right) & , n \text{ çift} \\ (0, (1-\beta)p^n, 0) & , n \text{ tek} \end{cases}$$

olacak şekilde $\mathbb{R}^3$ ün $X = \{0, e_1, w\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ alt kümesi X üzerinde

$$d\left((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\right) = max\,\{|a_j - b_j| : j = 1,2,3\}$$

şeklinde tanımlı d metriği ile birlikte tam olduğu açıktır. X üzerinde T fonksiyonunu $T0 = e_1$, $Te_1 = w$, $Tw = x_0$, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $Tx_n = x_{n+1}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$d(Te_1, T0) = \alpha = max\{\alpha d(T0,0), \beta d(Te_1, e_1)\} < max\,\{\alpha d(Te_1, e_1), \beta d(T0,0)\}$$

$$d(Tw, T0) = \beta = ma\,x\{\alpha d(Tw, w), \beta d(T0,0)\},$$

$$\psi(\alpha,\beta) d(T0,0) = \psi(\alpha,\beta) \geq \frac{1}{1+\alpha} > \alpha^2 = d(0,,w)$$

ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\psi(\alpha,\beta) d(T0,0) > \psi(\alpha,\beta) d(Tx_n, x_n) = \psi(\alpha,\beta)(1+p)(1-\beta)p^n = d(0, x_n)$$

dır. Ayrıca

$$d(Te_1, Tw) = \alpha^2 = max\{\alpha d(Te_1, e_1), \beta d(Tw, w)\}$$

$$< max\,\{\alpha d(Tw,w), \beta d(Te_1,e_1)\}$$

ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$d(Te_1,Tx_n) = \alpha^2 = max\{\alpha d(Te_1,e_1), \beta d(Tx_n,x_n)\}$$

$$< max\,\{\alpha d(Tx_n,x_n), \beta d(Te_1,e_1)\}$$

dır. $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $(1-\beta)(1+p) \leq \alpha^3$ olduğundan

$$d(Tw,Tx_n) \leq d(x_0,x_1) = (1-\beta)(1+p)$$

$$\leq \alpha^3$$

$$= max\{\alpha d(Tw,w), \beta d(Tx_n,x_n)\}$$

$$< max\{\alpha d(Tx_n,x_n), \beta d(Tw,w)\}$$

elde edilir. Son olarak $m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m < n$ için

$$d(Tx_m,Tx_n) \leq d(x_{m+1},x_{n+1}) = (1-\beta)p^{m+1}(1+p)$$

$$\leq \alpha(1-\beta)p^m(1+p)$$

$$= \ max\{\alpha d(Tx_m,x_m), \beta d(Tx_n,x_n)\}$$

$$< max\{\alpha d(Tx_n, x_n), \beta d(Tx_m, x_m)\}$$

Bu durumda ispat tamamlanır.

3.1.3 Örnek: $z = (0,0)$, $u_1 = (2,0)$, $u_2 = (-18,0)$,$u_3 = (-6,0)$, $v_1 = (2,18)$, $v_2 = (0,3)$, $X = \{z, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\}$ olacak şekilde $\mathbb{R}^2$ nin tam alt kümesini tanımlayalım. X üzerinde ki d metriğini $d\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ şeklinde tanımlayalım. X üzerindeki T fonksiyonunu da $Tz = z$, $Tu_1 = u_2$, $Tu_2 = u_3$, $Tu_3 = z$, $Tv_1 = v_2$, $Tv_2 = z$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler vardır.

i. $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.9$ ile birlikte (1) sağlanır.

ii. Her $\alpha \in [0,1)$ için $(x, y) \in X^2$ vardır öyle ki (2) sağlanmaz.

İspat: Dikkat edelim ki $\psi(0.6, 0.9) = 1$ dir. $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.9$ ile birlikte (a) nın sağlandığı kolayca görülür. Kabul edelim ki bazı $\alpha \in [0,1)$ için (2) sağlansın. $\theta(\alpha)d(Tz, z) = 0 \leq d(z, u_1)$ olduğundan

$$18 = d(Tz, Tu_1) \leq \alpha\, max\{d(Tz, z), d(Tu_1, u_1)\} = 20\alpha$$

ve dolayısıyla $\alpha \geq 0.9$. Bu durumda $\theta(\alpha) \leq \frac{1}{1.9} < 0.6. \theta(\alpha)d(Tv_1, v_1) < 0.6 \times 19 < 18 = d(v_1, u_1)$olduğundan

$$21 = d(Tv_1, Tu_1) \leq \alpha max\{d(Tv_1, v_1), d(Tu_1, u_1)\} = 20\alpha < 20.$$

Bu bir çelişkidir.

3.1. 14 **Teorem** Teorem3.1.4 deki gibi θ_1 fonksiyonu tanımlayalım. (X, d) tam metrik uzay S ve T, X üzerinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonlar olsun.

i. S, süreklidir;

ii. $T(X) \subseteq S(X)$;

iii. S ve T değişimlidir.

Kabul edelim ki her $x, y \in X$ için

$$\theta_1(r)d(Sx, Tx) \leq d(Sx, Sy) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rd(Sx, Sy)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa S ve T bir tek çakışık noktaya sahiptir.

Zamfirescu; Büzülme, Kannan, Chatterjea nın birleşmiş tanımını vermiştir.

3.1. 15 **Teorem:** (X, d) tam metrik uzay T, her $x, y \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan

a) $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$,

b) $d(Tx, Ty) \leq b[d(Tx, x) + d(Ty, y)]$,

c) $d(Tx, Ty) \leq c[d(Ty, x) + d(Tx, y)]$.

bir fonksiyon olsun. Öyleyse T bir tek p sabit noktaya sahip ve her $x \in X$ için $T^n x \to p$ dir.

İspat: $(a) - (c)$ büzülme koşullarını sağlayan bir T operatörüne Z operatörü denir ve buna denk olan aşağıdaki ifade verilebilir. Her $x, y \in X$ için

$$m_T(x,y) = \left\{d(x,y), \frac{d(Tx,x) + d(Ty,y)}{2}, \frac{d(Ty,x) + d(Tx,y)}{2}\right\}$$

$d(Tx,Ty) \leq hm_T(x,y)$ olacak şekilde $0 < h < 1$ vardır. Böylece her $x, y \in X$ için

$$M_T(x,y) = max\left\{d(x,y), d(Tx,x), d(Ty,y), \frac{d(Ty,x) + d(Tx,y)}{2}\right\}$$

olmak üzere $d(Tx,Ty) \leq hM_T(x,y)$ olacak şekilde $0 < h < 1$ vardır koşulunu sağlayan fonksiyonların bir alt sınıfı Z operatörlerinin sınıfıdır. Üsteki koşulu sağlayan fonksiyonların sınıfını Ciric 1972 de tanımlamıştır. Yaygın olarak Ciric genelleştirilmiş büzülme olarak isimlendirilir. Aşağıdaki teorem Ciric genelleştirilmiş büzülme sınıfı ve Z operatörleri sınıfı için teorem3.1.14-3.1.15 in sonuçlarının bir genellemesini vermiştir.

3.1. 16 Teorem: Teorem 3.1.4 deki gibi θ_1 fonksiyonunu tanımlayalım. (X, d) tam metrik uzay S ve T, X üzerinde tanımlı aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyon olsun.

i. S, süreklidir;

ii. $T(X) \subseteq S(X)$;

iii. S ve T değişimlidir.

Kabul edelim ki her $x, y \in X$ için

$$M_{S,T}(x,y) = max\{d(Sx,Sy), d(Sx,Tx), d(Sy,Ty), \frac{d(Sx,Ty) + d(Sy,Tx)}{2}\}$$

$$\theta_1(r)d(Sx,Tx) \leq d(Sx,Sy) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq rM_{S,T}(x,y)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ varsa S ve T bir tek çakışık sabit noktaya sahiptir.

İspat: (ii) yardımıyla her $x \in X$ için $SIx = Tx$ olacak şekilde X üzerinde bir I fonksiyonu tanımlanabilir. $\theta_1(r) \leq 1$, olduğundan

$$\theta_1(r)d(Sx,Tx) = \theta_1(r)d(Sx,SIx) \leq d(Sx,SIx)$$

sağlanır. Kabulümüzden

$$d(SIx,SIIx) = d(Tx,TIx) \leq rM_{S,T}(x,Ix)$$

$$\leq rmax\left\{d(Sx, SIx), d(SIx, SIIx), \frac{d(Sx,SIIx)}{2}\right\} \quad (21)$$

$$\leq rmax\{d(Sx, SIx), d(SIx, SIIx), \frac{d(Sx,SIx),d(SIx,SIIx)}{2}\}$$

$$= rmax\{d(Sx, SIx), d(SIx, SIIx)\}.$$

elde edilir. Buradan her $x \in X$ için

$$d(SIx, SIIX) \leq rd(Sx, SIx) \quad (22)$$

elde edilir. $u_0 = u$, her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = I^n u$ olacak şekilde $u \in X$ alalım. Öyleyse dikkat edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $u_{n+1} = Iu_n$ ve $Su_{n+1} = Tu_n$ dir. (22) yardımıyla

$$d(Su_n, Su_{n+1}) = d(SIu_{n-1}, SIIu_{n-1}) \leq rd(Su_{n-1}, SIu_{n-1})$$

$$= rd(Su_{n-1}, Su_n) \leq \cdots \leq r^n d(Su_0, Su_1) \quad (23)$$

ve buradan $\sum_{n=1}^{\infty} d(Su_n, Su_{n+1}) < \infty$ dir. Bu durumda $\{Su_n\}$ dizisi Cauchy dizisidir. X tam metrik uzay olduğundan $Su_n \to z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Ayrıca $Tu_n = Su_{n+1} \to z$ dir. Şimdi her $x \in X,\ Sx \neq z$ için

$$d(Tx, z) \leq rmax\{d(Sx, z), d(Sx, Tx)\} \quad (24)$$

olduğunu gösterelim. $Su_n \to z$, $Tu_n \to z$ ve $Sx \neq z$ olduğundan $v_1 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq v_1$ için $\theta_1(r)d(Su_n, Tu_n) \leq d(Su_n, Sx)$ dir ve dolayısıyla kabulümüzden her $n \in \mathbb{N}, n \geq v_1$ için $d(Tu_n, Tx) \leq rM_{S,T}(x, y)$ bu durumda

$$d(Tx, z) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, Tx) \leq \lim_{n\to\infty} rM_{S,T}(u_n, x)$$

$$= rmax\{d(Sx, z), d(z, z), d(Sx, Tx), \frac{d(Tx,z)+d(Sx,z)}{2}\}$$

elde ederiz. Öyleyse her $x \in X, Sx \neq z$ için (24) sağlanır. Şimdi $z \in X$ in S nin bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz.

$\vartriangle \{n: d(Su_n, Tu_n) > S(u_n, SSu_n)\} = \infty$ olsun. Bu durumda $j \in \mathbb{N}$ için

$$d\left(Su_{n_j}, Tu_{n_j}\right) > d(Su_{n_j}, SSu_{n_j})$$

olacak şekilde (u_n) nin $\left(u_{n_j}\right)$ alt dizisi vardır. Öyleyse

$$d(Sz, z) = \lim_{j\to\infty} d(SSu_{n_j}, z)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left[d\left(SSu_{n_j}, Su_{n_j}\right) + d(Su_{n_j}, z)\right] = 0.$$

$\vartriangle \{n: d(Su_n, Tu_n) > S(u_n, SSu_n)\} < \infty$ olsun. Bu durumda $v_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq v_2$ $d(Su_n, Tu_n) \leq d(Su_n, SSu_n)$ dir. Bu durumda kabulümüzden her $n \geq v_2$ için

$$d(Tu_n, TSu_n) \leq rM_{S,T}(u_n, Su_n)$$

elde ederiz. $TSu_n = STu_n \to Sz$ olduğundan

$$d(Sz, z) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, STu_n) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, TSu_n)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} rM_{S,T}(Su_n, u_n) \tag{25}$$

$$= r\max\left\{d(Sz, z), d(z, z), d(Sz, Sz), \frac{d(Sz,z) + d(Sz,z)}{2}\right\}$$

$$= rd(Sz, z),$$

dolayısıyla $d(Sz, z) = 0$ elde edilir. Bu $Sz = z$ olmasını gerektirir. Bu durumda her iki durumda da z, S nin sabit noktası olur. Şimdi $n \in \mathbb{N}$, $Tz = z$ için

$$d(T^n z, T^{n+1} z) \leq rd(T^{n-1} z, T^n z) \tag{26}$$

olduğunu göstereceğiz.

$$\theta_1(r) d(ST^{n-1} z, T^n z) \leq d(ST^{n-1} z, T^n z)$$

$$= d(ST^{n-1} z, T^n Sz)$$

$$= d(ST^{n-1}z, ST^n z)$$

olduğundan

$$d(T^n z, T^{n+1}z) \leq rM_{S,T}(T^{n-1}z, T^n z)$$

$$= rmax\{d(T^{n-1}z, T^n z), d(T^n z, T^{n+1}z), \frac{d(T^{n-1}z, T^{n+1}z)}{2}\}$$

$$\leq rmax\{d(T^{n-1}z, T^n z), d(T^n z, T^{n+1}z), \frac{[d(T^{n-1}z, T^n z) + d(T^n z, T^{n+1}z)]}{2}\}$$

$$= rmax\{d(T^{n-1}z, T^n z), d(T^n z, T^{n+1}z)\}.$$

Bu her $n \in \mathbb{N}$ için (26) nın sağlandığını gösterir. (26) yı kullanarak tümevarım metoduyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n z, T^{n+1}z) \leq r^n d(Tz, z) \tag{27}$$

olduğunu gösterebiliriz. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n z, z) \leq d(Tz, z) \tag{28}$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ için (28) ün var olduğu açıktır. Kabul edelim ki bazı $n \in \mathbb{N}$ için $d(T^n z, z) \leq d(Tz, z)$ olsun. Eğer $T^n z = z$ ise $T^{n+1}z = Tz$ ve

$\mathrm{d}(T^{n+1}z,z) = d(Tz,z) \leq d(Tz,z)$. Eğer $T^n z \neq z$ ise $ST^n z = T^n Sz = T^n z \neq z$, olduğundan (24) yardımıyla

$$d(TT^n z,z) \leq rmax\{d(z,ST^n z), d(ST^n z,,TT^n z)\}.$$

elde edilir. Buradan

$$d(T^{n+1}z,z) \leq rmax\{d(T^n z,z), d(T^n z,T^{n+1}z)\}$$

elde edilir ve (27) yardımıyla

$$d(T^{n+1}z,z) \leq rmax\{d(T^n z,z), r^n d(Tz,z)\}$$

$$\leq rmax\{d(Tz,z), r^n d(Tz,z)\}$$

$$= rd(Tz,z) \leq d(Tz,z).$$

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için (28) ün var olduğunu göstermiş olduk. Şimdi z nin T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim. İki durumda inceleyeceğiz.

i) $0 \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun. Bu durumda $\theta_1(r) \leq \frac{(1-r)}{r^2}$ dır. İlk olarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n z,Tz) \leq rd(Tz,z) \tag{29}$$

olduğunu ispat edelim. $n = 1$ için (29) un var olduğu açıktır. $n = 2$ için (29) un var olduğu (27) den açıktır. Kabul edelim ki bazı $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için $d(T^n z, Tz) \leq rd(Tz, z)$ olsun.

$$d(Tz, z) \leq d(Tz, T^n z) + d(T^n z, z) \leq rd(Tz, z) + d(T^n z, z)$$

olduğundan $d(Tz, z) \leq \frac{1}{1-r} d(T^n z, z)$ ve dolayısıyla

$$\theta_1(r) d(ST^n z, TT^n z) = \theta_1(r) d(T^n z, T^{n+1} z) \leq \frac{1-r}{r^2} d(T^n z, T^{n+1} z)$$

$$\leq \frac{1-r}{r^n} d(T^n z, T^{n+1} z) \leq (1-r) d(Tz, z) \qquad (30)$$

$$\leq d(T^n z, z) = d(Sz, ST^n z).$$

elde edilir. Kabulümüzden

$$d(T^{n+1} z, Tz) \leq rM_{S,T}(T^n z, z)$$

$$= rmax\left\{d(T^n z, z), d(Tz, z), d(T^n z, T^{n+1} z), \frac{[d(T^{n+1} z, z) + d(Tz, T^n z)]}{2}\right\}$$

$$= rd(Tz, z)$$

elde edilir. Böylece tümevarım metoduyla her $n \in \mathbb{N}$ için (29) un sağlandığını göstermiş olduk. Kabul edelim ki $Tz \neq z$. Bu durumda (29) tan her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n z \neq z$ dir. Öyleyse $ST^n z = T^n Sz = T^n z \neq z$. Buradan (24) yardımıyla

$$d(T^{n+1}z, z) \leq rmax\{d(ST^n z, z), d(ST^n z, T^{n+1}z)\}$$

$$= rmax\{d(T^n z, z), d(T^n z, T^{n+1}z)\}$$

$$\leq rmax\{d(T^n z, z), r^n d(Tz, z)\} \quad (31)$$

elde edilir. $d(T^n z, z) \geq d(Tz, z) - d(T^n z, Tz) \geq d(Tz, z) - rd(Tz, z)$ olduğundan $d(T^n z, z) \geq (1 - r)d(Tz, z)$ dır, buradan $v_3 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq v_3$ için $d(T^n z, z) \geq r^n d(Tz, z)$ dır. Öyleyse (31) yardımıyla $n \geq v_3$ için

$$d(T^{n+1}z, z) \leq rd(T^n z, z) \leq \cdots \leq r^{n-v_3+1} d(T^{v_3} z, z)$$

elde edilir. Bu $T^n z \to z$ olmasını gerektirir ama (29) ile çelişir. Bu durumda $Tz = z$ dir.

ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ olsun. $j \in \mathbb{N}$ için$\theta(r)d(Su_{n_j}, Su_{n_{j+1}}) \leq d(Su_{n_j}, z)$ olacak şekilde (n) nin (n_j) alt dizisi var olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten (23) yardımıyla

$$d(Su_n, Su_{n+1}) = d(SIu_{n-1}, SIIu_{n-1}) \leq rd(Su_{n-1}, SIu_{n-1} = rd(Su_{n-1}, Su_n))$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$\frac{1}{1+r}d(Su_{n-1},Su_n) > d(Su_{n-1},z)$$

ve

$$\frac{1}{1+r}d(Su_n,Su_{n+1}) > d(Su_n,z)$$

olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} d(Su_{n-1},Su_n) &\leq d(u_{n-1},z) + d(Su_n,z) \\ &< \tfrac{1}{1+r}[d(Su_{n-1},Su_n) + d(Su_n,Su_{n+1})] \\ &\leq \tfrac{1}{1+r}[d(Su_{n-1},Su_n) + rd(Su_{n-1},Su_n)] \\ &= d(Su_{n-1},Su_n). \end{aligned}$$

Bu bir çelişkidir. Bu yüzden

$$\frac{1}{1+r}d(Su_{n-1},Su_n) \leq d(Su_{n-1},z)$$

veya

$$\frac{1}{1+r}d(Su_n, Su_{n+1}) \leq d(Su_n, z)$$

dir. Bu $n \in N$ için

$$\theta_1(r)d(Su_{2n-1}, Su_{2n}) \leq d(Su_{2n-1}, z)$$

veya

$$\theta_1(r)d(Su_{2n}, Su_{2n+1}) \leq d(Su_{2n}, z)$$

sağlanmasını gerektirir. Böylece $j \in N$ için $\theta_1(r)d(Su_{n_j}, Su_{n_{j+!}}) \leq d(Su_{n_j}, z)$ olacak şekilde (n) nin (n_j) alt dizisi vardır. Öyleyse $j \in \mathbb{N}$ için $\theta_1(r)d(Su_{n_j}, Tu_{n_j}) \leq d(Su_{n_j}, Sz)$ve kabulümüzden

$$d(Tz, z) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_{n_j}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} rM_{S,T}\,(u_{n_j}, z)$$

$$= rmax\{d(Sz, z), d(z, z), d(Sz, Tz), \tfrac{(d(Tz,z)+d(Sz,z))}{2}\}$$

$$= rd(Tz, z)$$

elde edilir. $r < 1$ olduğundan üsteki eşitsizlik $Tz = z$ olmasını gerektirir. Bu durumda her iki durum için de $Tz = z$ olduğunu göstermiş olduk. Sabit noktanın tekliği (24) ten kolayca görülür.

Teorem 3.1.16 de $S = I$ alınırsa (burada I, X üzerinde tanımlı birim dönüşüm.) aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.1.1 Sonuç: Teorem 3.1.4 deki gibi θ_1 fonksiyonunu tanımlayalım. (X, d) tam metrik uzay ve T bu uzay üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki her $x, y \in X$ için

$$M_{S,T}(x, y) = \{d(x, y), d(Tx, x), d(Ty, y), \frac{d(Tx, y) + d(Ty, x)}{2}\}$$

$$\theta_1(r)d(Tx, x) \leq d(x, y) \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq rM_{S,T}(x, y)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ var olsun. Öyleyse T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Suzuki sabit nokta teoreminin Chatterjea versiyonunu verceğiz.

3.1.17 Teorem: Teorem 3.1.4 deki gibi artmayan θ_1 fonksiyonu tanımlayalım. (X, d) tam metrik uzay ve T, X üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, $r := \frac{\alpha}{1-\alpha} \in [0,1)$ olarak alalım. Kabul edelim ki her $x, y \in X$ için

$$\theta_1(r)d(Tx,x) \leq d(x,y) \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \alpha d(Tx,y) + \alpha d(Ty,x) \tag{32}$$

olsun. Bu durumda T bir tek $z \in X$ sabit noktaya sahiptir ve her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$ dır.

İspat: $\theta_1(r) \leq 1$ olduğundan $\theta_1(r)d(Tx,x) \leq d(Tx,x)$ sağlanır. Kabulümüzden

$$d(Tx,T^2x) \leq \alpha d(x,T^2x) + \alpha d(Tx,Tx) \leq \alpha d(x,Tx) + \alpha d(Tx,T^2x) \tag{33}$$

elde edilir. Bu durumda her $x \in X$ için

$$d(Tx,T^2x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(Tx,x) = rd(Tx,x) \tag{34}$$

olur.$u_0 = u$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n = T^n u$ olacak şekilde $u \in X$ alalım. (34) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n,u_{n+1}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(u_0,u_1) < \infty.$$

Bu durumda, $\{u_n\}$ dizisi X üzerinde Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $u_n \to z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Bu $x \neq z$ ve yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta_1(r)d(Tu_n,u_n) \leq d(u_n,x)$$

olmasını gerektirir. Öyleyse kabulümüzden $x \in X, x \neq z$ için

$$d(Tx, z) = \lim_{n\to\infty} d(Tx, u_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(Tu_n, Tx)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \alpha d(Tx, u_n) + \alpha d(Tu_n, x)$$

$$= \alpha d(Tx, z) + \alpha d(z, x)$$

dır. Bu durumda her $\in X, x \neq z$ için

$$d(Tx, z) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(z, x) = rd(x, z) \tag{35}$$

elde edilir. Şimdi z, T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

i. $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ olsun. Dikkat edelim ki $\theta_1(r) = \frac{1-r}{r^2}$ dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n z, z) \leq d(Tz, z) \tag{36}$$

olduğunu tümevarım yoluyla gösterelim. $n = 1$ için (36) olduğu açıktır. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $d(T^n z, z) \leq d(Tz, z)$ olsun. Eğer $T^n z = z$ ise $T^{n+1} z = Tz$ dır ve böylece $d(T^{n+1} z, z) = d(Tz, z) \leq d(Tz, z)$. Eğer $T^n z \neq z$ ise $x = T^n z$ olarak alırsak (35) den

$$d(T^{n+1} z, z) \leq rd(T^n z, z) \leq rd(Tz, z) \leq d(Tz, z)$$

elde edilir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için (36) nin sağlandığını gösterdik. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n z, Tz) \leq r d(Tz, z) \tag{37}$$

olduğunu gösterelim. $n = 1$ olduğunda (37) olduğu açıktır. $n = 2$ olduğunda (34) ten (37) sağlanır. Kabul edelim ki bazı $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için $d(T^n z, Tz) \leq r d(Tz, z) d(Tz, z) \leq d(Tz, T^n z) + d(T^n z, z) \leq r d(Tz, z) + d(T^n z, z)$ olduğundan

$$d(Tz, z) \leq \frac{1}{1-r} d(T^n z, z)$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\theta_1(r) d(T^n z, T^{n+1} z) \leq \frac{1-r}{r^2} d(T^n z, T^{n+1} z) \leq \frac{1-r}{r^n} d(T^n z, T^{n+1} z)$$

$$\leq (1-r) d(Tz, z) \leq d(Tz, z).$$

Kabulümüzden

$$d(T^{n+1} z, T^n z) \leq \alpha d(T^{n+1} z, z) + \alpha d(T^n z, Tz)$$

$$\leq \alpha d(Tz, z) + \alpha r d(Tz, z)$$

$$= \alpha(1+r) d(Tz, z) = r d(Tz, z)$$

elde edilir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için (37) sağlanır. Kabul edelim ki $Tz \neq z$ olsun. Öyleyse (37) dan her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n z \neq z$ sağlanır. Öyleyse (35) yardımıyla $d(T^{n+1}z, z) \leq rd(T^n z, z) \leq \cdots \leq r^n d(Tz, z)$ elde edilir. Bu $T^n z \to z$ olmasını gerektirir ama (35) ile çelişir. Öyleyse $Tz = z$ dir

ii. $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1$ olsun Teorem 2 nin ispatı gibi $j \in \mathbb{N}$ için $\theta_1(r)d(u_{n_j}, u_{n_{j+1}}) \leq d(u_{n_j}, z)$ olacak şekilde (n) nin (n_j) alt dizisi var olduğunu gösterelim. Gerçekten, (34) ve lemma 3.1.1 yardımıyla $n \in \mathbb{N}$ için $\theta_1(r)d(u_{2n}, u_{2n+1}) \leq d(u_{2n}, z)$ veya $\theta_1(r)d(u_{2n+1}, u_{2n+2}) \leq d(u_{2n+1}, z)$ sağlanır. Kabulümüzden

$$d(Tz, z) = \lim_{j\to\infty} d\left(u_{n_{j+1}}, Tz\right) \leq \lim_{j\to\infty} \alpha d\left(u_{n_j}, Tz\right) + \alpha d\left(u_{n_{j+1}}, z\right) = \alpha d(Tz, z)$$

$\alpha < \frac{1}{2}$ olduğundan üsteki eşitsizlik $Tz = z$ olmasını gerektirir. Bu durumda her iki durum içinde $Tz = z$ olduğunu göstermiş olduk. (37) den sabit noktanın tekliği kolayca görülür.

3.1. 18 Teorem: (X, d) tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Teorem 3.1.4 deki gibi artmayan θ_1 fonksiyonunu tanımlayalım. Kabul edelim ki her $x, y \in X$ için $\theta_1(r)d(x, Tx) \leq d(x, y)$ ise

$$F(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)) \leq 0$$

olacak şekilde $F \in \psi$ varsa T bir tek sabit noktaya sahiptir üstelik her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = z$ dir.

İspat: $\theta_1(r) < 1$ olduğundan her $x \in X$ için

$$\theta_1(r)d(x,Tx) \leq d(x,y)$$

sağlanır. Hipotezimizden

$$F(d(Tx,T^2x),d(x,Tx),d(x,Tx),d(Tx,T^2x),d(x,T^2x),0) \leq 0$$

beşinci değişkenine göre artmayan olduğundan

$$F(d(Tx,T^2x),d(x,Tx),d(x,Tx),d(Tx,T^2x),d(x,Tx)+d(Tx,T^2x),0) \leq 0$$

(ii) özelliğinden her $x \in X$ için

$$d(Tx,T^2x) \leq rd(x,Tx) \tag{39}$$

elde ederiz.

$u \in X$ noktasını göz önüne alalım. $u_n = T^n u$ şeklinde X üzerinde $\{u_n\}$ dizisi tanımlayalım. $d(Tx, T^2x) \leq rd(x, Tx)$ eşitsizliğinden

$$d(u_n, u_{n+1}) = d(Tu_{n-1}, T^2u_{n-1}) \leq rd(u_{n-1}, Tu_{n-1}) \leq \cdots \leq r^n d(u, Tu)$$

elde ederiz. $n \to \infty$ için limit alırsak $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$ elde edilir. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(u_n, u_{n+1}) < \infty$$

elde edilir ki bu (u_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $u_n \to z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Şimdi her $x \in X \setminus \{z\}$ için

$$d(Tx, z) \leq rd(x, z) \tag{39}$$

olduğunu gösterelim. $u_n \to z$ olduğundan $x \in X - \{z\}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n > n_0$ için $d(u_n, z) \leq \frac{d(x,z)}{3}$ dır. Öyleyse

$$\theta_1(r) d(u_n, Tu_n) \leq d(u_n, Tu_n) = d(u_n, u_{n+1})$$

$$\leq d(u_n, z) + d(z, u_{n+1})$$

$$\leq \frac{2}{3} d(x, z) = d(x, z) - \frac{d(x,z)}{3}$$

$$\leq d(x,z) - d(u_n,z) \leq d(u_n,x)$$

Elde edilir. Bu durumda hipotezimizden

$$F(d(Tu_n,Tx), d(u_n,x), d(u_n,Tu_n), d(x,Tx), d(u_n,Tx), d(x,Tu_n)) \leq 0$$

elde edilir. Buradan

$$F(d(u_{n+1},Tx), d(u_n,x), d(u_n,u_{n+1}), d(x,Tx), d(u_n,Tx), d(x,u_{n+1})) \leq 0$$

$n \to \infty$ için limit alınırsa

$$F(d(z,Tx), d(z,x), 0, d(x,Tx), d(z,Tx), d(x,z)) \leq 0$$

elde ederiz. Dördüncü değişkene göre artmayan olduğundan

$$F(d(z,Tx), d(z,x), 0, d(x,z) + d(z,Tx), d(z,Tx), d(x,z)) \leq 0$$

elde ederiz. Buradan (ii) özelliğinden $d(z,Tx) \leq rd(x,z)$ elde ederiz. Şimdi her $m \in \mathbb{N}$ için $T^m z \neq z$ olsun. Bu durumda (39) dan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^m z, z) \leq r^m d(Tz, z)$$

sağlanır.

i. $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olsun. Bu durumda, $\theta_1(r) = 1$ dır. Tümevarım yöntemiyle $n \geq 2$ için

$$d(T^n z, Tz) \leq r d(z, Tz) \tag{40}$$

olduğunu gösterelim. $n = 2$ için (39) den (40) sağlanır. $n \geq 2$ için (40) sağlansın.

$$d(z, Tz) \leq d(z, T^n z) + d(T^n z, Tz)$$

$$\leq d(z, T^n z) + r d(z, Tz)$$

olduğundan

$$d(z, Tz) \leq \frac{1}{1-r} d(z, T^n z)$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\theta_1(r) d(T^n z, T^{n+1} z) = d(T^n z, T^{n+1} z) \leq r^n d(z, Tz)$$

$$\leq \frac{r^n}{1-r} d(z, T^n z) \leq \frac{r^2}{1-r} d(z, T^n z)$$

$$\leq d(z, T^n z)$$

Elde ederiz ki hipotezimizden

$$F(d(T^n z, Tz), d(T^n z, z), d(T^n z, T^{n+1} z), d(z, Tz), d(T^n z, Tz), d(z, T^{n+1} z)) \leq 0$$

elde ederiz ve buradan

$$F(d(T^n z, Tz), r^{n-1} d(Tz, z), r^n d(z, Tz), d(z, Tz), r d(z, Tz), r^n d(z, Tz)) \leq 0$$

sağlanır. Öyleyse

$$F(d(T^n z, Tz), d(Tz, z), d(z, Tz), d(z, Tz), d(z, Tz), d(z, Tz)) \leq 0$$

elde edilir. (ii) özelliğinden

$$d(T^n z, Tz) \leq r d(Tz, z)$$

elde ederiz. Bu durumda (39) sağlanır. (40) dan

$$d(T^{n+1} z, z) \leq r d(T^n z, z) \leq r^n d(Tz, z)$$

sağlanır. $n \to \infty$ için limit alınırsa $T^n z \to z$ olur ki bu bir çelişkidir.

ii. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ olsun. Bu durumda $\theta_1(r) = \frac{1-r}{r^2}$ dır. $n = 2$ için (38) den (39) sağlanır. $n \geq 2$ için (39) sağlansın.

$$d(z,Tz) \leq d(z,T^n z) + d(T^n z,Tz)$$

$$\leq d(z,T^n z) + rd(z,Tz)$$

olduğundan

$$d(z,Tz) \leq \frac{1}{1-r} d(z,T^n z)$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\theta_1(r) d(T^n z,T^{n+1} z) = \frac{1-r}{r^2} d(T^n z,T^{n+1} z) \leq \frac{1-r}{r^n} d(z,Tz)$$

$$\leq (1-r) d(z,Tz) \leq d(z, \leq T^n z)$$

elde edilir. Bir önceki durumda olduğu gibi $n \geq 2$ için (40) ispatlanabilir. Tekrardan (39) dan

$$d(T^{n+1} z,z) \leq rd(T^n z,z) \leq r^n d(Tz,z)$$

elde edilebilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $T^n z \to z$ olur ki bu (40) ile çelişir.

iii. $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq r < 1$ olsun. Bu durumda $\theta_1(r) = \frac{1}{1+r}$ dır. $x,y \in X$ için

$$\theta_1(r)d(x,Tx) \leq d(x,y)$$

veya

$$\theta_1(r)d(Tx,T^2x) \leq d(Tx,y)$$

sağlanır. Gerçekten, kabul edelim ki

$$\theta_1(r)d(x,Tx) > d(x,y)$$

ve

$$\theta_1(r)d(Tx,T^2x) > d(Tx,y)$$

olsun. Bu durumda

$$d(x,Tx) \leq d(x,y) + d(Tx,y) \leq \theta_1(r)[d(x,Tx) + d(Tx,T^2x)]$$

$$\leq \theta_1(r)[d(x,Tx) + rd(x,Tx)] = d(x,Tx)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Öyleyse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta_1(r)d(x,Tx) \leq d(x,y)$$

veya

$$\theta_1(r)d(Tx, T^2x) \leq d(Tx, y)$$

sağlanır.

$$\theta_1(r)d(u_{2n}, Tu_{2n}) \leq d(u_{2n}, z)$$

sağlanırsa hipotezimizden

$$F(d(Tu_{2n}, Tz), d(u_{2n}, z), d(u_{2n}, Tu_{2n}), d(z, Tz), d(u_{2n}, Tz), d(z, Tu_{2n})) \leq 0$$

elde edilir. Buradan

$$F(d(u_{2n+1}, Tz), d(u_{2n}, z), d(u_{2n}, u_{2n+1}), d(z, Tz), d(u_{2n}, Tz), d(z, u_{2n+1})) \leq 0$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$F(d(z, Tz), 0,0, d(z, Tz), d(z, Tz), 0) \leq 0$$

elde edilir ki (iii) ile çelişir.

$$\theta_1(r)d(u_{2n+1}, Tu_{2n+1}) \leq d(u_{2n+1}, z)$$

Sağlanırsa hipotezimizden

$$F(d(Tu_{2n+1}, Tz), d(u_{2n+1}, z), d(u_{2n+1}, u_{2n+2}), d(z, Tz), d(u_{2n+1}, Tz), d(z, u_{2n+2})) \leq 0$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$F(d(z, Tz), 0,0, d(z, Tz), d(z, Tz), 0) \leq 0$$

elde edilir ki bu (iii) ile çelişir. Bu durumda tüm durumlar için $T^m z = z$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. $\{T^n z\}$ Cauchy dizisi olduğundan $Tz = z$ dir. Sabit noktanın tekliğini (38) den görmek kolaydır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, matematiğin çeşitli alanlarında pek çok uygulaması bulunan Suzuki sabit nokta teoreminin ispatı yanı sıra, Kannan tarafından verilen Kannan büzülme kullanılarak Kikkawa ve Suzuki tarafından verilen bu teoremin Kannan versiyonunu incelenmiştir. Ayrıca, 2009 da Yusuke Enjouji, Masoto Nakanishi ve Suzuki tarafından verilen Kannan sabit noktanın bazı genellemeleri detaylı bir şekilde incelenmişir. Daha sonra Ovidiu Popescu tarafından verilen Chatterjea versiyonu ele alınmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Koçak. M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

[2] Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2008.

[3] Başkan, T., Bizim, O., Naci Cangül, İ., Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2006.

[4] Agarwal, O'Regan ve Sahu "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer, New York, 2009.

[5] Suzuki, T., A generelized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, Proc. Amer. Math. Soc., 136, 1861-1869, 2008.

[6] Kikkawa, M., Suzuki, T., Some similarity between contraction and Kannan mappings, Fixed Point Theory Appl., ID 649749, 1-8, 2008.

[7] Kikkawa, M., Suzuki, T., Three fixed point theorems for generalized contractions with constants in complete metric spaces, Nonlinear Anal., 69, 2942-2949, 2008.

[8] Enjouji, Y., Nakanishi, M., Suzuki, T., A generalization of Kannan's fixed point theorem, Fixed Point Theory Appl., ID 192872, 10, 2009.

[9] Popescu, O., Fixed point theorems in metric spaces, Bull. Of Tansilvania Univ. 50, 479-482, 2008.

[10] Popescu, O., Two fixed point theorems for generalized conractions with constants in complete metric space, Cent. Eur. J. Math., 7(3), 529-538, 2009.

[11] Nakanishi, M., Suzuki, T., An observation on Kannan mappings, Cent. Eur. J. Math., 8(1), 170-178, 2009.

[12] Altun, I., Erduran, A., A Suzuki Type Fixed Point Theorem, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, ID 736063, 9, 2011.