KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

GÜLSÜM ULUSOY

ŞUBAT 2012

Matematik Anabilim Dalında Gülsüm ULUSOY tarafından hazırlanan DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Ali ARAL

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Ali ARAL	____________________
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN	____________________

28/02/2012

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

ULUSOY, Gülsüm

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Ali ARAL

Şubat 2012, 84 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörlerinin integrallenebilir fonksiyonlar için yakınsaklık hızı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Bernstein Durrmeyer operatörleri verilmiş ve bu operatörlerin düzgün yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Lineer pozitif operatör, Süreklilik modülü, Baskakov operatör, Bernstein operatör

ABSTRACT

THE CONVERGENCE PROPERTİES OF DURRMEYER OPERATORS

ULUSOY, Gülsüm

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali ARAL

February 2012, 84 pages

This thesis consist of four chapters. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, some fundamental definitions and consepts are given.

In the third chapter, rate of convergence for generalized Baskakov Durrmeyer operators of integrable functions is studied.

In the fourth chapter, Bernstein Durrmeyer operators are given and uniform convergence of these operators are also studied.

Keywords: Linear positive operators, Modulus of Continuity, Baskakov Operators, Bernstein Operators

TEŞEKKÜR

Hayatımın başlangıcından itibaren olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, yüksek lisans öğrenimimde ve tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı ve ilgisini esirgemeyen, değerli danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Ali ARAL'a , çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya ve Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Yaklaşımlar teorisindeki asıl amaç keyfi bir fonksiyonun daha basit daha kullanışlı diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir.

$[a,b]$ sonlu aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$ e $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinomlar dizisinin varlığı Weierstrass tarafından ispatlanmıştır.

Bu teoremi ispat için 1912 de Bernstein sürekli fonksiyonlara yaklaşım için $B_n(f:x)$ operatörünü tanımlayarak bu operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün olarak $f(x)$ e yaklaştığını ispatlamıştır.

Daha sonra Korovkin sınırlı aralıklarda lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini ele alarak Korovkin teoremini ispatlamıştır.
Korovkin teoremine göre eğer $L_n f$ fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $e_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$ fonksiyonları için yakınsaksa $[a,b]$ aralığında tanımlı tüm sürekli f fonksiyonları için de $L_n f$, f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

Dzjadyk, Korovkin'in çözdüğü problemi $L_p[a,b]$ uzayına taşımıştır. Bu teoreme göre $f \in L_p[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n f - f \right\|_{L_p[a,b]} = 0$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart yukarıdaki eşitliğin yalnızca $e_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$ fonksiyonları için sağlanmasıdır.

$f(x)$ fonksiyonunun sınırsız aralıklarda olması durumunda da yaklaşım problemleri incelenmiştir.

1950 yılında Szasz, f fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve bu aralığın her kapalı alt aralığında sınırlı olması durumunda Szasz operatörler dizisini oluşturmuş ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

1960 yılında Durrmeyer, [0,1] aralığında sürekli fonksiyonlar kümesini genişletmek için [0,1] aralığında sürekli fonksiyonlar yerine [0,1] aralığında Lebesque integrallenebilir fonksiyonları alarak Bernstein operatörünün integral modifikasyonu olan ve Bernstein Durrmeyer operatörleri olarak adlandırılan operatör dizisini tanımlamış ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

Biz de bu tezde, L_p yakınsaklığı $[0,\infty)$ aralığında Durrmeyer tipli operatörlerle düzgün yakınsaklığın nasıl elde edildiğini göstereceğiz. Bunun için de genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer tipli operatörleri kullanacağız.

Yaklaşımlar teorisinin bir diğer problemi de operatörlerle birim operatörlere hangi hızla yaklaşıldığının bulunması problemidir. Bu hızı bulmak için de genellikle süreklilik modülü kullanılır. Biz bu tezde yaklaşım hızını bulmak için K fonksiyonellerini kullanacağız. Daha sonra da K fonksiyonellerinin L_p süreklilik modülüne denkliğini kullanarak yaklaşım hızını hesaplayacağız.

1.2. Çalışmanın Amacı

Genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer tipli operatörlerle birim operatörlere yaklaşım hızı hesaplanacak ve yine aynı operatörlerle düzgün yaklaşım problemi çözülecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1: (Operatör)

X ve Y lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu durumda X uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve $g(x) = L(f, x)$ biçiminde gösterilir. X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$g(x) = L(f, x)$$

Y uzayının bir elamanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine L operatörünün değer kümesi denir. Bu küme de $\mathbb{R}(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2: (Lineer Operatör)

$L : X \to Y$ bir operatör olsun. Her $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 L(f_1; x) + \alpha_2 L(f_2; x)$$

eşitliği sağlanıyor ise L ye lineer operatör denir.

Tanım 2.3: (Normlu Uzay)

X, bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \in X$ deki değerini $\|x\|$ şeklinde gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, X e de bir normlu uzay denir:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $x, y \in X$ olmak üzere $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 2.4: (Sınırlı Operatör)

$L : X \to Y$ bir operatör olsun. $D(L) \subset X$, L nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f \in D(L)$ için,

$$\|L(f;x)\|_Y \leq M\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \mathbb{R}^+$ varsa L ye $D(L)$ de sınırlı operatör denir.

$$\|L\|_{X\to Y} = \inf\left\{M : \|L(f;x)\|_Y \leq M\|f\|_X\right\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

Lemma 2.1:

$X \to Y$ sınırlı lineer operatörü için,

$$\|L\|_{X \to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği sağlanır [2].

Tanım 2.5: (Pozitif Operatör)

$X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0\}$, $Y^+ \{g \in Y : g(t) \geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını göz önüne alalım. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesindeki bir fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne lineer pozitif operatör denir. L lineer pozitif operatör ise $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur.

Teorem 2.1: (Korovkin Teoremi)

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x), \beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için,

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x) \tag{2.1}$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x) \tag{2.2}$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x) \tag{2.3}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsar. Burada f, $[a,b]$ de sürekli, a da sağdan, b de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur.

İspat:

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm x ler için

$$|f(x)| \leq M \tag{2.4}$$

olacak şekilde M pozitif sayısı vardır. $f \in C[a,\mathrm{b}]$ olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,\mathrm{b}]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.5}$$

sağlanır.

$x,t \in [a,\mathrm{b}]$ olduğunda (2.5) eşitsizliği f fonksiyonunun $[a,\mathrm{b}]$ aralığında düzgün sürekli olmasından dolayı gerçeklenir. $x \in [a,\mathrm{b}]$, $t \notin [a,\mathrm{b}]$ olduğunda ise (2.5) eşitsizliği f fonksiyonuna a noktasında soldan ve b noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir. (2.4) ve (2.5) eşitsizliklerinden dolayı her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,\mathrm{b}]$ için

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon+\frac{M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{2.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t-x|<\delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ ayrıca $\frac{M}{\delta^2}(t-x)^2$ sağlanır.

$|t-x|\geq\delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2\geq 2M$ sağlanır. Bu durumda $\varepsilon>0$ için (2.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}|f(t)-f(x)| &\leq |f(t)|+|f(x)| \\ &\leq 2M \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2(t-x)^2}+\varepsilon\end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned}\|L_n(f;x)-f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)L_n(1;x)-f(x)\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(f(t)-f(x);x)\|_{C[a,b]}+\|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]}+\|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]}\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim (2.1) den dolayı sıfıra yakınsar. Yani, $n\to\infty, \varepsilon_n\to 0$ için

$$\|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x)-1\|_{C[a,b]}\leq\varepsilon_n$$

eşitsizliğini sağlayan ε_n dizisi vardır. O halde

$$\|L_n(f(t)-f(x);x\|_{C[a,b]}\leq\|L_n(|f(t)-f(x)|;x\|_{C[a,b]}+\varepsilon_n \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi birinci terimi hesaplayalım. (2.7) eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı

$$\left\| L_n(|f(t)-f(x)|;x) \right\|_{C[a,b]} \le L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 ; x \right)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2;x)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;x) \right]$$

$$= \varepsilon\left[L_n(1;x) - 1 \right] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left\{ \left[L_n(t^2;x) - x^2 \right] \right.$$

$$\left. - 2x\left[L_n(t;x) - x \right] + x^2\left[L_n(1;x) - 1 \right] \right\}$$

$$= \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} x^2 \right)\left[L_n(1;x) - 1 \right]$$

$$+ \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x) - x^2 \right] - \frac{4M}{\delta^2} x\left[L_n(t;x) - x \right]$$

elde edilir. $x \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} x^2 \right) \le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} b^2 \quad , \quad \left(\frac{4\mathrm{M}}{\delta^2} x \le \frac{4\mathrm{M}}{\delta^2} b \right)$$

dir. O halde

$$C_1 = \frac{2M}{\delta^2} b^2, C_2 = 2bC_1, C_3 = \varepsilon + C_1 b^2$$

eşitliklerini kabul edersek,

$$\left\| L_n(|f(t)-f(x)|;x \right\|$$

$$\le \varepsilon + C_1\left\| L_n(t^2;x) - x^2 \right\| + C_2\left\| L_n(t;x) - x \right\| + C_3\left\| L_n(1;x) - 1 \right\|$$

yazılabilir ve burada $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük seçilebilen bir sayıdır. (2.1), (2.2) ve (2.3) eşitsizliklerinden dolayı $n \to \infty$ için

$$\left\| L_n(|f(t) - f(x)|; x \right\| \to 0$$

olur. Bu sonuç ve (2.6) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left\| L_n(f; x) - f(x) \right\| \to 0$$

olduğu görülür.

Tanım 2.6: (Operatörün Sürekliliği)

X ve Y normlu uzaylar $L : X \to Y$ lineer operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir pozitif $\delta(\varepsilon, f_0)$ sayısı bulunabilir ki $\left\| f - f_0 \right\|_X < \delta$ olduğunda $\left\| L(f) - L(f_o) \right\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanırsa L operatörü $f_0 \in X$ için süreklidir denir.

Tanım 2.7: (Süreklilik Modülü)

$x, y \in [a, b]$ olmak üzere $|x - y| \le \delta$ şartını sağlayan $\delta > 0$ için $|f(x) - f(y)|$ nin en küçük üst sınırına f nin süreklilik modülü denir.

$$w(f; \delta) = \sup_{|x-y| \le \delta} |f(x) - f(y)|$$

veya

$$w(f; \delta) = \sup_{|h| \le \delta} |f(x+h) - f(x)|$$

sembolleri ile gösterilir.

Süreklilik Modülünün bazı özellikleri;

1) w fonksiyonu monoton artandır. Yani;

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow w(f:\delta_1) \leq w(f:\delta_2)$$

dir.

2) $m \in \mathrm{N}$ ise

$$w(f:m\delta) \leq mw(f:\delta)$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} w(f:m\delta) &= \sup_{|h|\leq m\delta} \left| f(x+h) - f(x) \right| \\ &= \sup_{|mh|\leq m\delta} \left| f(x+mh) - f(x) \right| \\ &= \sup_{|h|\leq\delta} \left| \sum_{k=1}^{m} \left[f(x+kh) - f(x+(k-1)h) \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{|h|\leq\delta} \left| f(x+kh) - f(x+(k-1)h \right| \\ &= mw(f:\delta) \end{aligned}$$

bulunur.

3) $\lambda > 0$ için,

$$w(f:\lambda\delta) \leq (1+\lambda)w(f:\delta)$$

dir. Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
w(f:\lambda\delta) &\leq w\big(f:([\![|\lambda|]\!]+1)\delta\big) \\
&\leq \big(1+[\![|\lambda|]\!]\big)w(f:\delta) \\
&\leq (1+\lambda)w(f:\delta)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

4) f , $[a,b]$ de sürekli ise,

$$
|f(t)-f(x)| \leq w\big(f:|t-x|\big)
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
w\big(f:|t-x|\big) &= \sup_{|t-x|\leq|t-x|} |f(t)-f(x)| \\
&= \sup_{t,x\in[a,b]} |f(t)-f(x)| \\
&\geq |f(t)-f(x)|
\end{aligned}
$$

sağlanır.

5) Süreklilik modülünün tanımından,

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leq w\big(f:|x-y|\big) \\
&\leq w\left(f:\frac{\delta|x-y|}{\delta}\right) \\
&\leq \left(1+\frac{|x-y|}{\delta}\right)w(f:\delta)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

Tanım 2.8: (Newton İnterpolasyon Polinomu)

Verilen f fonksiyonu ve $(x_1, y_1),...,(x_n, y_n), y_n = f(x_n)$ şeklindeki n tane nokta için,

$$P_j = Y_j \prod_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

olmak üzere,

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x)$$

şeklinde tanımlanan polinoma Newton İnterpolasyon Polinomu denir.

Tanım 2.9 : (Lineer Fonksiyonel)

$F = \mathbb{R}$ veya F=$\mathbb{C}$ olmak üzere X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $T : X \to F$ operatörüne fonksiyonel denir. Eğer T lineer ise T ye lineer fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.10 :

Her pozitif σ için,

$$W_{L_p}(f{:}\sigma) = \sup_{|t| \leq \sigma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+t) - f(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

ifadesine f nin L_P uzayındaki süreklilik modülü denir.

Tanım 2.11: (Taylor Serileri)

Bir noktada aldığı değer ve türevleri f fonksiyonununkilerle aynı olan p polinomuna f ile uyumlu polinom adı verilir. Eğer,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

polinomu $x = 0$ noktasında n inci mertebeden türevlenebilen f fonksiyonu ile uyumlu ise,

$$p(0) = f(0) \Leftrightarrow a_0 = f(0)$$
$$p'(0) = f'(0) \Leftrightarrow a_1 = f'(0)$$
$$p''(0) = f''(0) \Leftrightarrow 2a_2 = f''(0)$$
$$p'''(0) = f'''(0) \Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot a_3 = f'''(0)$$
$$p^{(4)}(0) = f^{(4)}(0) \Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 = f^{(4)}(0)$$

olup bu şekilde devam edilirse,

$$p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k \cdot a_k = f^{(k)}(0)$$

olur. Yani $k = 0,1,2,...,n$ için,

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

bulunur. Böylece $x = a$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomunun,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

olduğu elde edilir.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = K_n(x)$$

denirse,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + K_n(x)$$

kalan terimli Taylor formülü elde edilir.

Lemma 2.2: (Cauchy Schwartz Eşitsizliği)

$a_1,...,a_n$ ve $b_1,...,b_n$ herhangi $2n$ reel sayıysa,

$$\left(a_1 b_1 + ... + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + ... + b_n^2\right)$$

dir [3].

İspat :

$$P(x) = \left(a_1 x - b_1\right)^2 + ... + \left(a_n x - b_n\right)^2$$

olsun. Eğer,

$$A = a_1^2 + ... + a_1^2$$
$$B = b_1^2 + ... + b_1^2$$
$$C = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$$

ise,

$$p(x) = Ax^2 - 2Cx + B$$

elde ederiz. Her $x \in \mathbb{R}$ için, $p(x)$ karelerinin toplamı olduğundan $p(x) \geq 0$ çıkar. Yani her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$Ax^2 - 2Cx + B = p(x) \geq 0$$

bulunur. Her reel sayı için geçerli olan böyle bir eşitsizlik ancak $C^2 - AB \leq 0$ ise mümkündür. Bu durumda

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

olur.

Teorem 2.2: (Fubini Teoremi)

$f: \mathbb{R} = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

a) $$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve

$$\iint_R f(x,y)dydx = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

dir.

b)

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde integrallenebilir ve

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d g(y)dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dydx$$

dir [1].

Teorem 2.3 :

$f, \mathbb{R} = [a,b] \times [c,d]$ kümesi üzerinde integrallenebilen bir fonksyion olsun.

(a) Her $x \in [a,b]$ için $h(y) = f(x,y)$ şeklinde tanımlı, $h:[c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$g(x) = \int_c^d h(y)dy = \int_c^d f(x,y)dy$$

şeklinde tanımlı $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

dir.

(b) Her $y \in [c,d]$ için $h(x) = f(x,y)$ şeklinde tanımlı $h:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

şeklinde tanımlı $g:[c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde integrallenebilir ise,

$$\iint_R f(x,y)\,dydx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

dir [1].

Tanım 2.12: (Tam Uzay)

(X,d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m,n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer X deki her Cauchy dizisi yakınsaksa yani $x_n \to x \in X$ ise X uzayına tam uzay denir.

Tanım 2.13: (Banach Uzay)

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X e bir Banach uzayı denir.

Teorem 2.4: (Banach – Steinhaus Teoremi)

(A_n), bir X Banach uzayından bir Y normlu uzayı içine olan sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi ve X üzerinde,

$$\lim_n \sup \|A_n(x)\| < \infty$$

olsun. Bu taktirde,

$$\sup_n \|A_n(x)\| < \infty$$

dir. Yani, $(\|A_n\|)$ normlar dizisi sınırlıdır.

Tanım 2.14: (Limit)

(s_n) reel terimli bir dizi olsun. (s_n) dizisinin sonlu adetteki terimleri hariç diğer tüm terimleri bir s sayısının keyfi $\varepsilon > 0$ komşuluğunda kalıyorsa (s_n) dizisinin limiti s dir denir ve $(s_n) \to s$ ile veya $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ ile gösterilir.

Tanım 2.15:

$f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. a, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer terimleri $A \setminus \{a\}$ kümesinden seçilen ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ görüntü dizisi aynı L sayısına yakınsıyorsa x değişkeni a noktasına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L dir denir ve

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.16: (Baskakov Operatörü)

$f \in C[0,\infty)$ ve $n \in N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_n(f;x) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

ifadesine Baskakov operatörü denir.

Tanım 2.17: (Szasz Operatörü)

$f \in C[0,\infty)$ ve $x \in [0,\infty)$ olmak üzere,

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

ifadesine Szasz operatörü denir.

Tanım 2.18: (Mutlak Süreklilik)

f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyleki

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

şartını sağlayan her sonlu ve ikişerli ayrık

$$\{(a_k, b_k) \subset [a,b] : k = 1,2,...,n\}$$

aralık ailesi için

$$\sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon$$

sağlanır. Bu tanıma göre mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir fakat bunun karşıtı doğru değildir.

Tanım 2.19:

(X,U,μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p = \left\{ f \in M(X,U) : |f|^p \in L(X,U,\mu) \right\}$$

kümesine p.kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

Tanım 2.20: (L_p Yakınsaklık)

f_n ve f fonksiyonları L_p uzayının elemanları olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna p-inci mertebeden ortalama yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ öyleki $\forall n \geq n_0$ için

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon.$$

Bu yakınsaklık çeşidine L_p de yakınsaklık da denir. Burada $p \geq 1$ olup

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

dir.

Buna göre (f_n) dizisi f fonksiyonuna L_p de yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

3. DURRMEYER TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

$(\phi_n)_{n\in N}$, $b>0$ olmak üzere, $[0,b]$ aralığında tanımlı her $n\in N$, $k\in N_0$ için,

$\phi_n \in C^{\infty}[0,b]$ ve $\phi_n(0)=1$ olsun. (3.1)

ϕ_n tam monoton, yani $(-1)^k \phi_n^{(k)} \geq 0$ ve ϕ_n, $n>\max\{0,-c\}$ olmak üzere, $\exists c\in Z$ için,

$$\phi_n^{(k+1)} = -n\phi_{n+c}^{(k)} \tag{3.2}$$

eşitliği sağlansın.

Yukarıdaki şartları sağlayan (ϕ_n) dizileri için aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

$\phi_n(x)=(1-x)^n$, $x\in[0,1]$ aralığında , $c=1$

$\phi_n(x)=e^{-nx}$, $x\in[0,\infty)$ aralığında , $c=0$

$\phi_n(x)=(1+cx)^{-n/c}$, $x\in[0,\infty)$ aralığında , $c>0$.

Tanım 3.1:

$n\in N$, $c\in N_0$, $f\in L_p[0,\infty)$, $x\in[0,\infty)$, $n>c$ ve

$$P_{n,k}(x)=(-1)^k \frac{x^k}{k!}\phi_n^{(k)}(x)$$

olmak üzere,

$$(M_n f)(x)=\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)(n-c)\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)f(t)dt \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanan operatöre Baskakov Durrmeyer operatörü denir.

Tanım 3.2: (Süreklilik Modülü ve K-fonksiyoneli)

Yaklaşım hızı verilirken $L_p[0,\infty)$ uzayında tanımlı süreklilik modülünü,

$$W_\varphi^r(f,t)_p = \sup_{0<h\leq r}\left\|\Delta_h^r \varphi f\right\|_p \;,\; f\in L_p[0,\infty),\; 1\leq p\leq\infty\;,\; \varphi(x)=\sqrt{x(1+cx)},$$

$$\Delta_H^r f(x) = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k f(x+(\frac{r}{2}-k)H)\;,\; \left[x-\frac{r}{2}H, x+\frac{r}{2}H\right]\subset[0,\infty)$$

şeklinde tanımlayacağız. Diğer durumlarda ise, $\Delta_H^r f(x)=0$ alacağız.

Burada süreklilik modülü

$$W_p^r(\varphi,[0,\infty)) = \{g\in L_p[0,\infty): g^{(r-1)}\in AC_{loc}(0,\infty); \varphi^r g^{(r)}\in L_p[0,\infty)\}$$

$$\overline{W}_p^r(\varphi,[0,\infty)) = \{g\in L_p[0,\infty): g^{(r-1)}\in AC_{loc}(0,\infty); \varphi^r g^{(r)}\in L_p[0,\infty)\}$$

olmak üzere,

$$K_\varphi^r(f,t^r)_p = \inf_{g\in W_p^r(\varphi,[0,\infty))}\{\|f-g\|_p + t^r\left\|\varphi^r g^{(r)}\right\|_p\}$$

$$\overline{K}_\varphi^r(f,t^r)_p = \inf_{g\in \overline{W}_p^r(\varphi,[0,\infty))}\{\|f-g\|_p + t^r\left\|\varphi^r g^{(r)}\right\|_p + t_\tau^r\left\|g^{(r)}\right\|_p\}$$

şeklinde tanımlı K- fonksiyoneli $W_\varphi^r(f,t)_p$ ile verilen süreklilik modülüne denktir [8].

Şimdi $P_{n,k}$ ağırlık fonksiyonunun sağladığı bazı özellikleri verelim. (ϕ_n) fonksiyonlar dizisinin sağladığı özellikler dikkate alınırsa aşağıdaki eşitlikler kolayca elde edilir.

Lemma 3.1: Her $n\in N$, $n>c$, $k\in N_0$, $x\in[0,\infty)$ için,

1) $\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) = 1$, (3.4)

2) $\lim_{n\to\infty} x^k \phi_n^{(k-1)}(x) = \lim_{n\to\infty} x^{k-1}\phi_n^{(k-2)}(x) = ... = \lim_{n\to\infty}\phi_n(x) = 0$ için,

$$\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)dt = \frac{1}{n-c} \quad , \tag{3.5}$$

3) $\frac{k}{n} P_{n,k}(x) = xP_{n+c,k-1}(x)$, (3.6)

4) $\varphi(x)^2 \frac{d}{dx} P_{n,k}(x) = (k-nx)P_{n,k}(x)$, (3.7)

5) $n\left[P_{n+c,k-1}(x) - P_{n+c,k}(x)\right] = \frac{d}{dx} P_{n,k}(x)$, (3.8)

dir. Eğer $k < 0$ ise $P_{n,k}(x) = 0$ dır.

İspat:

1) (ϕ_n) türevlenebilir fonksiyonlar dizisi olduğundan,

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_n^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

ile $x = t$ noktasında, $\phi_n(x)$ fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomunu gösterelim. Fonksiyonda $x = 0$ alınırsa, $\phi_n(x)$ in tanımında $\phi_n(0) = 1$ olduğundan,

$$\phi_n(0) = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_n^{(k)}(t)}{k!}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(t)$$

elde edilir.

Özel olarak , $\phi_n(x) = e^{-nx}$ seçilirse ,

$$\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^k e^{-nx}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} P_{n,k}(x) &= (-1)^k \frac{x^k}{k!} \phi_n^{(k)}(x) \\ &= (-1)^k \frac{x^k}{k!} (-1)^k n^k e^{-nx} \\ &= \frac{x^k}{k!} n^k e^{-nx} \end{aligned}$$

bulunur. $\phi_n(x)$ in $x = t$ noktasındaki Taylor polinomundan faydalanarak,

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_n^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k e^{-nt}}{k!} (x-t)^k \end{aligned}$$

olduğu görülür. $x = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \phi_n(0) = 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^k e^{-nt}}{k!} (-1)^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} n^k e^{-nt} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $f(\frac{k}{n}) = 1$ için Szasz operatörüdür.

Şimdi $\phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ seçilirse ,

$$\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n(n+1)\ldots(n+(k-1))(1+x)^{-(n+k)}$$

olup,

$$\begin{aligned} P_{n,k}(x) &= (-1)^k \frac{x^k}{k!} \phi_n^{(k)}(x) \\ &= x^k (1+x)^{-(n+k)} \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_n^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1+x)^{-(n+k)} (x-t)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi_n(0) = 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1+x)^{-(n+k)} (-1)^k t^k \binom{n+k-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k (1+x)^{-(n+k)} \binom{n+k-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $f(\frac{k}{n}) = 1$ için klasik Baskakov operatörüdür.

2) Şimdi

$$\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)dt = \frac{1}{n-c}$$

olduğunu gösterelim. $x^k = u$, $\phi_n^{(k)}(x)dx = dv$ olmak üzere,

$\int_0^{\infty} x^k \phi_n^{(k)}(x)dx$ integraline k kez kısmi integrasyon uygularsak,

$$\int_0^\infty x^k \phi_n^{(k)}(x)dx = x^k \phi_n^{(k-1)}(x)\Big|_0^\infty - k\int_0^\infty \phi_n^{(k-1)}(x)x^{k-1}dx$$

$$= x^{k-1}\phi_n^{(k-2)}(x)\Big|_0^\infty + k(k-1)\int_0^\infty \phi_n^{(k-2)}(x)x^{k-2}dx$$

$$= x^{k-2}\phi_n^{(k-3)}(x)\Big|_0^\infty - k(k-1)(k-2)\int_0^\infty \phi_n^{(k-3)}(x)x^{k-3}dx$$

.

.

.

$$= k(k-1)(k-2)...(k-(k-2))\int_0^\infty \phi_n'(x)dx$$

$$= (-1)^k k!\int_0^\infty \phi_n(x)dx$$

$$= -\frac{(-1)^k k!}{n-c}\int_0^\infty \phi'_{n-c}(x)dx$$

$$= -\frac{(-1)^k k!}{n-c}\phi_{n-c}(x)\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{(-1)^k k!}{n-c}$$

bulunur. Buradan,

$$\int_0^\infty P_{n,k}(x)dx = \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^\infty x^k \phi_n^{(k)}(x)dx$$

$$= -\frac{(-1)^k(-1)^k k!}{k!(n-c)}$$

$$= \frac{1}{n-c}$$

elde edilir.

Özel olarak $\phi_n(x) = e^{-nx}$ seçilip k kez kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^\infty x^k e^{-nx}dx = x^k e^{-nx}\Big|_0^\infty + \frac{k}{n}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-nx}dx$$

$$\int_0^\infty x^k e^{-nx} dx = -\frac{k(k-1)}{n^2}\int_0^\infty x^{k-2} e^{-nx} dx$$

$$\vdots$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(k-2))}{n^k}\int_0^\infty e^{-nx} dx$$

$$= \frac{k!}{n^k}\int_0^\infty e^{-nx} dx = -\frac{k!}{n^k}\frac{1}{n-c}\int_0^\infty (\phi_{n-c})'(x) dx$$

$$= -\frac{k!}{n^k(n-c)}\phi_{n-c}(x)\Big|_0^\infty = \frac{k!}{n^k(n-c)} e^{-x(n-c)}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{k!}{n^k(n-c)}$$

bulunur. Böylece,

$$\int_0^\infty P_{n,k}(t) dt = \frac{n^k}{k!}\int_0^\infty x^k e^{-nx} dx$$

$$= \frac{n^k}{k!}\frac{k!}{n^k(n-c)}$$

$$= \frac{1}{n-c}$$

elde edilir. $\phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ seçilip k kez kısmi integrasyon uygularsak,

$$\int_0^\infty x^k (1+x)^{-(n+k)} dx = -x^k \frac{(1+x)}{(n+k-1)}^{-(n+k-1)}\Bigg|_0^\infty - \frac{k}{(n+k-1)}\int_0^\infty x^{k-1}(1+x)^{-(n+k-1)} dx$$

$$= -\frac{k(k-1)}{(n+k-1)(n+k-2)}\int_0^\infty (1+x)^{-(n+k-2)} x^{k-2} dx$$

$$\vdots$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(k-2))}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}\int_0^\infty (1+x)^{-n} dx$$

$$\int_0^\infty x^k (1+x)^{-(n+k)} dx = -\frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}\frac{1}{n-c}\int_0^\infty (\phi_{n-c})'(x)dx$$

$$= -\frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}\frac{1}{n-c}\,\phi_{n-c}(x)\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}\frac{1}{n-c}\,(1+x)^{-(n-c)}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n(n-c)}$$

olup buradan

$$\int_0^\infty P_{n,k}(t)dt = \int_0^\infty x^k (1+x)^{-(n+k)} \binom{n+k-1}{k} dx$$
$$= \frac{k!}{(n+k-1)(n+k-2)\ldots n(n-c)}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$
$$= \frac{1}{n-c}$$

elde edilir.

3) Şimdi de

$$\frac{k}{n}P_{n,k}(x) = xP_{n+c,k-1}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x) = \frac{x}{k}(-1)^{k-1}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\phi_{n+c}^{(k-1)}$$

olup, (3.2) kullanılırsa,

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x) = (-1)^k \frac{x^k}{k!}\phi_n^{(k)}\frac{1}{n}$$

bulunur. Böylece,

$$xP_{n+c,k\text{-}1}(x) = \frac{k}{n} P_{n,k}(x)$$

elde edilir.

Özel olarak $\phi_n(x) = e^{-nx}$ seçilirse , $\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^k e^{-nx}$ olup,

$$\begin{aligned}\frac{x}{k} P_{n+c,k-1}(x) &= \frac{x}{k}(-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(-1)^{k-1}(n+c)^{k-1} e^{-x(n+c)} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}(n+c)^{k-1} e^{-x(n+c)}(-1)^{k-1}\end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{x}{k} P_{n+c,k-1}(x) &= \frac{1}{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!}\phi_n^{(k)} = \frac{1}{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!}(-1)^k n^k e^{-nx} \\ &= \frac{1}{n} P_{n,k}(x)\end{aligned}$$

elde edilir.

$\phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ seçilirse , $\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n(n+1)...(n+(k-1))(1+x)^{-(n+k)}$ olup,

$$\begin{aligned}\frac{x}{k} P_{n+c,k-1}(x) &= \frac{x}{k}(-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(-1)^{k-1}(n+c)(n+c+1)...(n+c+(k-1))(1+x)^{-(n+c+k-1)} \\ &= \frac{x^k}{k!}(-1)^{k-1}\phi_{n+c}^{(k-1)}(x)\end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.2) kullanılırsa

$$\frac{x}{k}P_{n+c,k-1}(x)=\frac{1}{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}(-1)^k n(n+1)\ldots(n+(k-1))(1+x)^{-(n+k)}$$
$$=\frac{1}{n}P_{n,k}(x)$$

olduğu görülebilir.

4) $$\varphi(x)^2\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)=(k-nx)P_{n,k}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$c=1$ olarak alınırsa $\phi_n(x)=(1+x)^{-n}$ ve $\varphi(x)=\sqrt{x(1+x)}$ olur. Bu durumda,

$$\phi_n^{(k)}(x)=(-1)^k n(n+1)\ldots(n+(k-1))(1+x)^{-n-k}$$

olup,

$$P_{n,k}(x)=x^k(1+x)^{-n-k}\binom{n+k-1}{k}$$

bulunur. $P_{n,k}(x)$ in türevi alınıp denklem düzenlenirse,

$$\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)=\left[\frac{x}{x}k\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}}-(n+k)\frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}\right]\binom{n+k-1}{k}$$
$$=\frac{k}{x}P_{n,k}(x)-\frac{(n+k)}{(1+x)}P_{n,k}(x)$$
$$=\frac{k(1+x)-(n+k)x}{x(1+x)}P_{n,k}(x)$$
$$=\frac{k-nx}{\varphi^2(x)}P_{n,k}(x)$$

elde edilir.

$\phi_n(x) = e^{-nx}$ olarak alınırsa, $\phi_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^k e^{-nx}$ ve $\varphi(x) = x$ olup,

$$P_{n,k}(x) = \frac{x^k}{k!} n^k e^{-nx}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} P_{n,k}(x) &= \frac{x}{x} \frac{n^k}{k!} kx^{k-1} e^{-nx} - \frac{n^k}{k!} nx^k e^{-nx} \\
&= \frac{n^k}{k!} \frac{k}{x} x^k e^{-nx} - \frac{n^k}{k!} nx^k e^{-nx} \\
&= \frac{k}{x} P_{n,k}(x) - nP_{n,k}(x) \\
&= P_{n,k}(x) \left(\frac{k}{x} - n \right) \\
&= \frac{k - nx}{x} P_{n,k}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

5) $$n\left[P_{n+c,k-1}(x) - P_{n+c,k}(x)\right] = \frac{d}{dx} P_{n,k}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$$P_{n,k}(x) = (-1)^k \frac{x^k}{k!} \phi_n^{(k)}(x)$$

olup,

$$\frac{d}{dx} P_{n,k}(x) = \frac{(-1)^k}{k!} \left[kx^{k-1} \phi_n^{(k)}(x) + x^k \phi_n^{(k+1)}(x) \right]$$

$$\frac{d}{dx} P_{n,k}(x) = (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \phi_n^{(k)}(x) + \frac{(-1)^k}{k!} x^k \phi_n^{(k+1)}(x)$$

(3.2) den

$$\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)=(-1)^k\,\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(-n)\phi_{n+c}^{(k-1)}(x)+\frac{(-1)^k}{k!}x^k(-n)\phi_{n+c}^{(k+1)}(x)$$

$$=nP_{n+c,k-1}(x)-nP_{n+c,k}(x)$$

$$=n\left[P_{n+c,k-1}(x)-P_{n+c,k}(x)\right]$$

elde edilir.

Özel olarak $\phi_n(x)=e^{-nx}$ alınırsa,

$$\phi_n^{(k)}(x)=(-1)^k n^k e^{-nx} \quad \text{ve} \quad P_{n,k}(x)=\frac{x^k}{k!}n^k e^{-nx}$$

olup, (3.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}P_{n,k}(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{x^k}{k!}n^k e^{-nx}\right]\\
&= \frac{n^k}{k!}\left[kx^{k-1}e^{-nx}-nx^k e^{-nx}\right]\\
&= \frac{n^k}{(k-1)!}e^{-nx}x^{k-1}-\frac{n^{k+1}}{k!}e^{-nx}x^k\\
&= (-1)^k\,\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\phi_n{}^{(k)}(x)-\frac{x^k}{k!}(-1)^{k+1}\phi_n{}^{(k+1)}(x)\\
&= (-1)^k\,\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}(-n)\phi_{n+c}^{(k-1)}(x)-\frac{x^k}{k!}(-1)^{k+1}(-n)\phi_{n+c}^{(k)}(x)\\
&= n\left[(-1)^{k-1}\,\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\phi_{n+c}^{(k-1)}(x)-(-1)^k\,\frac{x^k}{k!}\phi_{n+c}^{(k)}(x)\right]\\
&= n\left[P_{n+c,k-1}(x)-P_{n+c,k}(x)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak, $\phi_n(x)=(1+x)^{-n}$ alınırsa,

$$P_{n,k}(x) = x^k (1+x)^{-n-k} \binom{n+k-1}{k}$$

ve

$$\phi_n^k(x) = (-1)^k n(n+1)\ldots(n+(k-1))(1+x)^{-n-k}$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{d}{dx} P_{n,k}(x) = \frac{d}{dx}\left[x^k (1+x)^{-n-k} \binom{n+k-1}{k} \right]$$

$$= \binom{n+k-1}{k} \left[\frac{kx^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - (n+k) \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} \right]$$

$$= \binom{n+k-1}{k} k \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \binom{n+k-1}{k} (n+k) \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} k \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} (n+k) \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}$$

$$= \frac{n(n+k-1)!}{n(n-1)!(k-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \frac{n(n+k)!}{n!k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}}$$

$$= n\left[\binom{n+k-1}{k-1} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - \binom{n}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} \right]$$

$$= n\left[P_{n+1,k-1}(x) - P_{n,k}(x) \right]$$

olduğu gösterilmiş olur.

Lemma 3.2:

$$a_n(k) = (n-c)\int_0^\infty P_{n,k}(t) f(t) dt, \quad \Delta^{r+1} a_n(k) = \Delta(\Delta^r a_n(k)),$$

$$\Delta a_n(k) = \Delta^1 a_n(k) = a_n(k+1) - a_n(k),$$

eşitliklerini tanımlayalım. Bu taktirde

$f \in L_p[0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$ ve tüm n , $r \in N$ *için* , $n > cr$, $x \in [0,\infty)$

olmak üzere ,

1) $$\left(M_n f\right)^{(r)}(x) = \prod_{l=0}^{r-1} (n+cl) \sum_{k=0}^{\infty} P_{n+cr,k}(x) \Delta^r a_n(k) \ , \tag{3.9}$$

2)

$$\left(M_n f\right)^{(r)}(x) = (-1)^r (n-c) \prod_{l=0}^{r-1} \frac{n+cl}{n-c(l+1)} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n+cr,k}(x) \int_0^{\infty} P^{(r)}_{n-cr,k+r}(t) f(t) dt \tag{3.10}$$

sağlanır.

İspat:

1) İspatı tümevarım metodu ile yapalım.

$$(M_n f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)(n-c) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) f(t) dt$$

olmak üzere, $r = 1$ için (3.9) un doğru olduğunu gösterelim. $(M_n f)$ in türevi,

$$(M_n f)'(x) = (n-c) \sum_{k=0}^{\infty} (P_{n,k})'(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) f(t) dt$$

olup, eşitlikte (3.8) kullanılırsa,

$$(M_n f)'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (n-c) n \left[P_{n+c,k-1}(x) - P_{n+c,k}(x)\right] \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) f(t) dt$$

bulunur. $P_{n,-1}(x) = 0$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
(M_n f)'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}(n-c)nP_{n+c,k-1}(x)\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)f(t)dt \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty}(n-c)nP_{n+c,k}(x)\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)f(t)dt
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Denklemin ilk kısmında $k \to k+1$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
(M_n f)'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(n-c)nP_{n+c,k}(x)\int_0^{\infty}P_{n,k+1}(t)f(t)dt \\
&\quad -\sum_{k=0}^{\infty}(n-c)nP_{n+c,k}(x)\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)f(t)dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
(M_n f)'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}nP_{n+c,k}(x)\left\{(n-c)\int_0^{\infty}\left[P_{n,k+1}(t)-P_{n,k}(t)\right]f(t)dt\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}nP_{n+c,k}(x)\left[a_n(k+1)-a_n(k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}nP_{n+c,k}(x)\Delta a_n(k)
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani $r=1$ için ifade doğrudur.

Şimdi (3.9) un r için doğru olduğunu kabul edip $r+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$
\left(M_n f\right)^{(r)}(x) = \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}P_{n+cr,k}(x)\Delta^r a_n(k)
$$

denkleminin türevi alınırsa,

$$
\left(M_n f\right)^{(r+1)}(x) = \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}(P_{n+cr,k})'(x)\Delta^r a_n(k)
$$

olur. Burada (3.8) kullanılıp $P_{n+c(r+1),-1}(x)=0$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\left(M_n f\right)^{(r+1)}(x) &= \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}(n+cr)\left[P_{n+c(r+1),k-1}(x)-P_{n+c(r+1),k}(x)\right]\Delta^r a_n(k) \\ &= \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=1}^{\infty}(n+cr)P_{n+c(r+1),k-1}(x)\Delta^r a_n(k) \\ &- \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}(n+cr)P_{n+c(r+1),k}(x)\Delta^r a_n(k)\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi ilk toplamda $k \to k+1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left(M_n f\right)^{(r+1)}(x) &= \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}(n+cr)P_{n+c(r+1),k}(x)\Delta^r a_n(k+1) \\ &- \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}(n+cr)P_{n+c(r+1),k}(x)\Delta^r a_n(k)\end{aligned}$$

elde dilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\left(M_n f\right)^{(r+1)}(x) &= \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}(n+cr)P_{n+c(r+1),k}(x)\left[\Delta^r a_n(k+1)-\Delta^r a_n(k)\right] \\ &= \prod_{l=0}^{r-1}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}(n+cr)P_{n+c(r+1),k}(x)\Delta^{r+1} a_n(k) \\ &= \prod_{l=0}^{r}(n+cl)\sum_{k=0}^{\infty}P_{n+c(r+1),k}(x)\mathit{\Delta}^{r+1} a_n(k)\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

2) İspat için $r \in N$ olmak üzere,

$$\prod_{l=1}^{r}(n-cl)\Delta^r a_n(k)=(-1)^r(n-c)\int_0^{\infty}P_{n-cr,k+r}^{(r)}(t)f(t)dt \tag{3.11}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ifadeyi göstermek için de tümevarım metodunu uygulayalım. $r=1$ için (3.11) in doğru olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(n-c)\Delta^1 a_n(k) &= (n-c)a_n(k+1)-(n-c)a_n(k)\\
&=\left\{(n-c)\int_0^\infty P_{n,k+1}(t)f(t)dt-(n-c)\int_0^\infty P_{n,k}(t)f(t)dt\right\}\\
&=(n-c)\left\{\int_0^\infty (n-c)(P_{n,k+1}(t)-P_{n,k}(t))f(t)dt\right\}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

yazılabilir. (3.8) de n yerine $n-c$ ve k yerine $k+1$ yazılırsa

$$
(n-c)\left[P_{n,k}(t)-P_{n,k+1}(t)\right]=\frac{d}{dx}P_{n-c,k+1}(t)
$$

bulunur. Bu ifade (3.12) de yerine yazılırsa

$$
(n-c)\Delta^1 a_n(k)=(n-c)\int_0^\infty (-1)(P_{n-c,k+1})' f(t)dt
$$

elde edilir. Bu da $r=1$ için (3.11) in doğru olduğunu gösterir. Şimdi (3.11) in r için doğru olduğunu kabul edip $r+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{r+1}(n-cl)\Delta^{r+1}a_n(k) &= \prod_{l=1}^{r+1}(n-cl)\left[\Delta^r a_n(k+1)-\Delta^r a_n(k)\right]\\
&=\prod_{l=1}^{r+1}(n-cl)(n-c)\left[\int_0^\infty P_{n,k+1}^{(r)}(t)-\int_0^\infty P_{n,k}^{(r)}(t)\right]f(t)dt
\end{aligned}
$$

olur. Burada n yerine $n-cr$, k yerine $k+r$ yazılıp (3.8) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{r+1}(n-cl)\Delta^{r+1}a_n(k) &=(n-c(r+1))(n-c)\int_0^\infty \left[P_{n-cr,k+r+1}^{(r)}(t)-P_{n-cr,k+r}^{(r)}(t)\right]f(t)dt\\
&=(-1)^{r+1}(n-c)\int_0^\infty \left[\frac{d}{dx}P_{n-c(r+1),k+r+1}^{(r)}(t)\right]f(t)dt\\
&=(-1)^{r+1}(n-c)\int_0^\infty P_{n-c(r+1),k+r+1}^{(r+1)}(t)f(t)dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.3:

$n \in N,\ n > c,\ \varphi(x) = \sqrt{x(1+cx)}$ ve $x \in [0,\infty)$, $s \in N_0$, $T_{n,0}(x) = 1,\ T_{n,1}(x) = 0$ olmak üzere,

$$T_{n,s}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)(k-nx)^s$$

olsun. Bu durumda,

$$T_{n,s+1}(x) = \varphi(x)^2[(T_{n,s})'(x) + snT_{n,s-1}(x)]$$

sağlanır.

İspat:

$$(T_{n,s})'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(P_{n,k})'(x)(k-nx)^s - \sum_{k=0}^{\infty} nsP_{n,k}(x)(k-nx)^{s-1}\right]$$

olup, (3.7) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\varphi(x)^2(T_{n,s})'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[P_{n,k}(x)(k-nx)^{s+1} - ns\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(x)^2 P_{n,k}(x)(k-nx)^{s-1}\right]\\ &= T_{n,s+1}(x) - sn\varphi(x)^2 T_{n,s-1}(x)\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$T_{n,s+1}(x) = \varphi(x)^2[(T_{n,s})'(x) + snT_{n,s-1}(x)]$$

olduğu görülür.

Lemma 3.4:

$f_\mu = (t-x)^\mu$ olmak üzere, $n, \mu, (v+1) \in N$ ve $n > (\mu+1)c$ için,

1) $$(M_n e_v)(x) = \sum_{j=0}^{v} C_{j,v} x^j \sum_{k=0}^{j} D_{k,j,v} \prod_{l=2}^{v-k+1} (n-lc)^{-1} \tag{3.13}$$

2) $$(M_n f_\mu)(x) = \sum_{v=1}^{\mu} \binom{\mu}{v} (-x)^{\mu-v} \sum_{j=0}^{v} C_{j,v} x^j \sum_{\substack{j=0 \\ k\neq v}}^{v} D_{k,j,v} \prod_{l=2}^{v-k+1} (n-lc)^{-1} \tag{3.14}$$

eşitlikleri doğrudur. Burada,

$$C_{j,v} = \frac{v!}{j!}\binom{v}{j} \qquad \text{ve} \qquad D_{k,j,v} = c^{j-k}\,\frac{(v+j-k)!}{v!}\binom{j}{k}$$

dir.

İspat :

1) (3.6) özelliği v kez uygulanırsa,

$$\begin{aligned}(M_n e_v)(x) &= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)t^v dt \\ &= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\prod_{l=1}^{v}(k+l)\prod_{l=1}^{v}(n-lc)^{-1}\int_0^{\infty} P_{n-vc,k+v}(t)dt\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.5) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(M_n e_v)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\prod_{l=1}^{v}(k+l)\prod_{l=2}^{v+1}(n-lc)^{-1} \\ &= \prod_{l=2}^{v+1}(n-lc)^{-1}\sum_{j=0}^{v} C_{j,v}\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\prod_{l=0}^{j-1}(k-l)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik,

$$\prod_{l=1}^{v} (k+l) = \sum_{j=0}^{v} C_{j,v} \prod_{l=0}^{j-1} (k-l)$$

denkleminden görülebilir [9].

Tekrar (3.6) özelliğinin v kez uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned}(M_n e_v)(x) &= \prod_{l=2}^{v+1} (n-lc)^{-1} \sum_{j=0}^{v} C_{j,v} \sum_{k=j}^{\infty} x^j P_{n+cj,k-j}(x) \prod_{l=0}^{j-1} (n+lc) \\ &= \prod_{l=2}^{v+1} (n-lc)^{-1} \sum_{j=0}^{v} C_{j,v} x^j \prod_{l=0}^{v} (n+lc) \qquad (3.15)\end{aligned}$$

elde edilir. $c=0$ için bu ifade gösterilmiş oldu. $c>0$ için

$$\prod_{l=0}^{j-1} (n+cl) = \sum_{k=0}^{j} D_{k,j,v} \prod_{l=0}^{k-1} (n-(v-l+1)c) = \sum_{k=0}^{j} D_{k,j,v} \prod_{l=v-k+2}^{v+1} (n-lc)$$

yazılırsa ispat tamamlanır.

2)

(3.13) ve (3.15) düşünüldüğünde Binom formülünden,

$$\sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} (-x)^{\mu-v} C_{v,v} x^v D_{v,v,v} = x^{\mu} \sum_{v=0}^{\mu} \binom{\mu}{v} (-1)^{\mu-v} = 0$$

eşitliği ile (3.14) deki ifade bulunur.

Özel olarak aşağıdaki ifadeler gösterilebilir.

$$(M_n f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)(n-c) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) f(t)\,dt$$

olmak üzere, $f(t)=1$ alıp (3.4) ve (3.5) özellikleri kullanılırsa,

1)
$$M_n(1)(x) = (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)dt$$
$$= 1$$

olduğu görülebilir.

2) $f(t) = t$ alındığında, $\phi_n(t)$ nin $t = x$ noktasındaki Taylor polinomundan yararlanarak,

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)^k}{k!}\phi_n^{(k)}(x)$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alındığında,

$$\phi_n{}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(t-x)^{k-1}}{k!}\phi_n^{(k)}(x)$$

elde edilir. Son ifadede $t = 0$ alınıp denklemin her iki tarafı $\frac{-x}{n}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{-x\phi_n{}'(0)}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{nk!}(-1)^k x^k \phi_n^{(k)}(x)$$
$$\frac{-x\phi_n{}'(0)}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} P_{n,k}(x)$$

bulunur. $\phi_n^{(k+1)} = -n\phi_{n+c}^{(k)}$ ve $\phi_n(0) = 1$ olduğundan,

$$\phi_n{}'(0) = -n\phi_{n+c}(0)$$
$$= -n$$

yazılabilir. (3.5) ve (3.6) özellikleri kullanılarak bu ifadeler yerine yazılırsa,

$$\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)tdt = \frac{k+1}{n-c}\int_0^{\infty} P_{n-c,k+1}(t)tdt$$

$$\int_0^\infty P_{n,k}(t)tdt = \frac{k+1}{n-c}\frac{1}{n-2c}$$

bulunabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
M_n(t)(x) &= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\int_0^\infty P_{n,k}(t)f(t)dt \\
&= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\frac{k+1}{(n-c)(n-2c)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\frac{k+1}{n-2c} \\
&= \frac{n}{n-2c}\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\frac{k}{n} + \frac{1}{n-2c}\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) \\
&= \frac{n}{n-2c}x + \frac{1}{n-2c}
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir.

3) $f(t) = t^2$ alındığında, $\phi_n(t)$ nin $t = x$ noktasındaki Taylor polinomundan faydalanarak,

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)^k}{k!}\phi_n^{(k)}(x)$$

yazılabilir. Bu ifadenin iki kez türevi alınırsa,

$$\phi_n{}'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(t-x)^{k-1}}{k!}\phi_n^{(k)}(x)$$

$$\phi_n{}''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(t-x)^{k-2}}{k!}\phi_n^{(k)}(x)$$

olup $t = 0$ alınırsa,

$$\phi_n{}''(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(-1)^{k-2}x^{k-2}}{k!}\phi_n^{(k)}(x)$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2\phi_n''(0)}{n^2}-\frac{x\phi_n'(0)}{n^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)(-1)^k x^k}{n^2 k!}\phi_n^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(-1)^k x^k}{n^2 k!}\phi_n^{(k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n^2}\frac{(-1)^k x^k \phi_n^{(k)}(x)}{k!}[(k-1)+1] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(-1)^k x^k \phi_n^{(k)}(x)}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}P_{n,k}(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\phi_n^{(k+1)}=-n\phi_{n+c}^{(k)}$ ve $\phi_n(0)=1$ olduğundan,

$$\phi_n''(x)=-n(\phi_{n+c})'(x)$$

olup, denklemde $x=0$ yazılırsa,

$$\phi_n''(0)=-n(\phi_{n+c})'(0)=n(n+c)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) özellikleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)t^2dt &= \frac{k+1}{n-c}\int_0^{\infty} P_{n-c,k+1}(t)tdt \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{(n-c)(n-2c)}\int_0^{\infty} P_{n-2c,k+2}(t)dt \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)}
\end{aligned}
$$

bulunabilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
M_n(t^2)(x) &= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)t^2dt \\
&= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\frac{(k+1)(k+2)}{(n-c)(n-2c)(n-3c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_n(t^2)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\frac{(k^2+3k+2)}{(n-2c)(n-3c)} \\
&= \frac{2}{(n-2c)(n-3c)}\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) + \frac{3n}{(n-2c)(n-3c)}\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\frac{k}{n} \\
&+ \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\frac{k^2}{n^2} \\
&= \frac{2}{(n-2c)(n-3c)} + \frac{3n}{(n-2c)(n-3c)}x \\
&+ \frac{n^2}{(n-2c)(n-3c)}\left[x^2\frac{n(n+c)}{n^2} - x\frac{(-n)}{n^2}\right] \\
&= \frac{2}{(n-2c)(n-3c)} + \frac{3n}{(n-2c)(n-3c)}x \\
&+ \frac{1}{(n-2c)(n-3c)}\left[x^2 n(n+c) + xn\right]
\end{aligned}
$$

olduğu görülebilir.

Lemma 3.5:

$m \in N_0, n \in N, n > 2cm, \varphi(x) = \sqrt{x(1+cx)}$ ve $x \in [0,\infty)$ için

$$W_{n,m}(x) = [M_n(x-t)^m](x)$$

olmak üzere,

1) $W_{n,0}(x) = 1\,, W_{n,1}(x) = -\dfrac{1+2cx}{n-2c}$

2)
$$(n-c(m+2))W_{n,m+1}(x) = \varphi(x)^2[2mW_{n,m-1}(x) - (W_{n,m})'(x)] - (m+1)(1+2cx)W_{n,m}(x) \tag{3.16}$$

3) $W_{n,2m}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} q_{i,2m}\left[\frac{\varphi(x)^2}{n}\right]^{m-i} n^{-2i}$

$$W_{n,2m+1}(x) = (1+2cx)\sum_{i=1}^{m} q_{i,2m+1}\left[\frac{\varphi(x)^2}{n}\right]^{m-i} n^{-2i-1} \tag{3.17}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

1) $W_{n,0}(x)$ ve $W_{n,1}(x)$ eşitlikleri tanımdan kolayca görülebilir.

2) Şimdi $W_{n,m}(x)$ in türevini alalım.

$$\begin{aligned}(W_{n,m})'(x) &= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty}(P_{n,k})'(x)\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)(x-t)^m\,dt \\ &+(n-c)\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)m\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)(x-t)^{m-1}\,dt \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}(P_{n,k})'(x)\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)(x-t)^m\,dt+mW_{n,m-1}(x)\end{aligned}$$

olur.

$$\varphi(x)^2\left[(W_{n,m})'(x)-mW_{n,m-1}(x)\right]=(n-c)\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(x)^2(P_{n,k})'(x)\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)(x-t)^m\,dt$$

olup (3.7) uygulanırsa,

$$\varphi(x)^2\left[(W_{n,m})'(x)-mW_{n,m-1}(x)\right]=(n-c)\sum_{k=0}^{\infty}(k-nx)P_{n,k}(x)\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)(x-t)^m\,dt$$

bulunur. Burada

$$k-nx=k-nx-nt+nt=(k-nt)-n(x-t)$$

yazılıp (3.7) uygulanırsa,

$$\varphi(x)^2\left[(W_{n,m})'(x)-mW_{n,m-1}(x)\right]$$

$$=(n-c)\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)\int_0^{\infty}(k-nt)P_{n,k}(t)(x-t)^m\,dt-n(n-c)\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)\int_0^{\infty}P_{n,k}(t)(x-t)^{m+1}\,dt$$

$$=(n-c)\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)\int_0^{\infty}(k-nt)P_{n,k}(t)(x-t)^m\,dt-nW_{n,m+1}(x)$$

$$\varphi(x)^2[(W_{n,m})'(x) - mW_{n,m-1}(x)]$$
$$= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\int_0^{\infty} \varphi(x)^2 (P_{n,k})'(x)(x-t)^m\, dt - nW_{n,m+1}(x)$$

elde edilir. Şimdi $(P_{n,k})'(t)dt = dv$ ve $\varphi(t)^2(x-t) = u$ alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\varphi(x)^2[(W_{n,m})'(x) - mW_{n,m-1}(x)]$$
$$= (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)\left[-(1+2ct)(x-t)^m + m\varphi(t)^2(x-t)^{m-1}\right]dt - nW_{n,m+1}(x)$$

olur. Burada,

$$-(1+2ct)(x-t) + m\varphi(t)^2 = m\varphi(x)^2 - (m+1)(1+2cx)(x-t) + c(m+2)(x-t)^2$$

olduğundan,

$$\varphi(x)^2\left[(W_{n,m})'(x) - mW_{n,m-1}(x)\right]$$
$$= m\varphi(x)^2 W_{n,m-1}(x) - (m+1)(1+2cx)W_{n,m}(x) + c(m+2)W_{n,m+1}(x) - nW_{n,m+1}(x)$$

elde edilir. Böylece (3.16) ifadesi ispatlanmış olur.

3) İspat için [4] de verilen indirgeme ile denklem,

$$(n - c(m+2))W_{n,m+1}(x) = \varphi(x)^2[2mW_{n,m-1}(x) - (W_{n,m})'(x)] - (m+1)(1+2cx)W_{n,m}(x)$$

olarak bulunur. Bu da (3.16) nın ispatıdır.

Sonuç 3.1:

$\varphi(x) = \sqrt{x(1+cx)}$ olsun. Her $m \in N_0$ ve her $x \in [0,\infty)$ için,

$$\left|W_{n,2m}(x)\right| \le Cn^{-m}(\varphi(x)^2 + n^{-1})^m$$

dir. C, n den bağımsız sabittir.

İspat: $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ için, $\varphi(x)^2 \leq \frac{n+c}{n^2}$ yazılabilir. Burada (3.17) kullanılırsa,

$$|W_{n,2m}(x)| \leq \sum_{i=0}^{m} |q_{i,2m}| \left[\frac{n+c}{n^3}\right]^{m-i} n^{-2i} \leq Cn^{-2m}$$

bulunur. $x \in \left[\frac{1}{n}, \infty\right)$ için, $\left[n\varphi(x)^2\right]^{-1} \leq \frac{n}{n+c} \leq 1$ eşitsizliği ve (3.17) kullanılırsa,

$$|W_{n,2m}(x)| n^{-m}\varphi(x)^{2m} \sum_{i=0}^{m} |q_{i,2m}| \left[n\varphi(x)^2\right]^{-i} \leq Cn^{-m}\varphi(x)^{2m}$$

elde edilir.

Tanım 3.2:

$n, m \in N, n > c, u \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$H_{n,m}(u) = m(n-c)\left\{\int_u^\infty \int_0^u - \int_0^u \int_u^\infty\right\}(u-t)^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(t) P_{n,k}(x)\,dt\,dx$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.6:

$n, m \in N, n > mc, \varphi(u) = \sqrt{u(1+cu)}$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

1) $H_{n,m}(u) = n\sum_{k=0}^{\infty} P_{n-c,k+1}(u) \int_0^\infty P_{n+c,k}(t)(u-t)^m\,dt + u^m P_{n-c,0}(u)$ (3.18)

2) $H_{n,1}(u) = 0, H_{n,2}(u) = \frac{2}{n-2c}\varphi(u)^2$, $m \geq 2$ için

$(n - c(m+1)H_{n,m+1}(u) = \varphi(u)^2[2mH_{n,m-1}(u) - (H_{n,m})'(u)] - m(1+2cu)H_{n,m}(u)$ (3.19) eşitliği sağlanır.

3) $m \in N$ için,

$$H_{n,2m}(u) = \sum_{i=0}^{m-1} \theta_{i,2m} \left[\frac{\varphi(u)^2}{n} \right]^{m-i} n^{-2i} \tag{3.20}$$

$$H_{n,2m-1}(u) = (1+2cu) \sum_{i=0}^{m-2} \theta_{i,2m-1} \left[\frac{\varphi(u)^2}{n} \right]^{m-i} n^{-2i-1}$$

doğrudur. $\theta_{i,2m}$ ve $\theta_{i,2m-1}$, u dan bağımsızdır [4].

İspat:

1) Öncelikle (3.18) i gösterelim. $H_{n,m}(u)$ ın tanımından

$$\begin{aligned}
H_{n,m}(u) &= m(n-c)\left\{ \int_u^\infty \int_0^u - \int_0^u \int_u^\infty \right\} (u-t)^{m-1} \sum_{k=0}^\infty P_{n,k}(t) P_{n,k}(x)\, dt dx \\
&= m(n-c)\left\{ \int_0^\infty \int_0^u - \int_0^u \int_0^u - \int_0^u \int_0^\infty + \int_0^u \int_0^u \right\} (u-t)^{m-1} \sum_{k=0}^\infty P_{n,k}(t) P_{n,k}(x)\, dt dx \\
&= m(n-c) \int_0^u (u-t)^{m-1} \sum_{k=0}^\infty P_{n,k}(t) \int_0^\infty P_{n,k}(x)\, dx dt \\
&\quad - m(n-c) \int_0^u \int_0^\infty (u-t)^{m-1} \sum_{k=0}^\infty P_{n,k}(t) P_{n,k}(x)\, dt dx
\end{aligned}$$

olup, (3.4) ve (3.5) kullanılırsa

$$H_{n,m}(u) = u^m - m(n-c) \sum_{k=0}^\infty \int_0^u P_{n,k}(x) \int_0^\infty (u-t)^{m-1} P_{n,k}(t)\, dt dx \tag{3.21}$$

elde edilir. $n > mc$ için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$m \int_0^\infty P_{n,k}(t)(u-t)^{m-1} dt = \int_0^\infty (u-t)^m (P_{n,k})'(t)\, dt + \begin{cases} u^m & , k=0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

bulunur. Ayrıca $P_{n-c,0}(0)=1$ olup (3.8) kullanılırsa

$$-(n-c)\int_0^u P_{n,0}(x)u^m dx = u^m \int_0^u (P_{n-c,0})'(x)dx \tag{3.23}$$

bulunur. Şimdi (3.22) ve (3.23), (3.21) de yerine yazılırsa

$$H_{n,m}(u) = u^m P_{n-c,0}(u) - (n-c)\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^u P_{n,k}(x)\int_0^{\infty}(u-t)^m n\left[P_{n+c,k-1}(t) - P_{n+c,k}(t)\right]dtdx$$

olur. Burada toplamın ilk kısmında k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} H_{n,m}(u) &= u^m P_{n-c,0}(u) - n(n-c)\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{n+c,k}(t)(u-t)^m \int_0^u P_{n,k+1}(x)dxdt \right. \\ &\left. -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{n+c,k}(t)(u-t)^m \int_0^u P_{n,k}(x)dxdt \right\} \\ &= u^m P_{n-c,0}(u) + n\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{n+c,k}(t)(u-t)^m \int_0^u (n-c)\left[P_{n,k}(x) - P_{n,k+1}(x)\right]dxdt \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde (3.8) kullanılırsa

$$H_{n,m}(u) = u^m P_{n-c,0}(u) + n\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{n+c,k}(t)(u-t)^m \int_0^u (P_{n-c,k+1})'(x)dxdt$$

$$H_{n,m}(u) = u^m P_{n-c,0}(u) + n\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} P_{n-c,k+1}(u)\int_0^{\infty} P_{n+c,k}(t)(u-t)^m dt$$

bulunur.

2) $H_{n,1}(u)$ ve $H_{n,2}(u)$, (3.18) den direkt olarak hesaplanabilir. Ayrıca (3.18) i kullanarak,

$$(H_{n,m})'(u) = u^m (P_{n-c,0})'(u) + mH_{n,m-1}(u) + n\sum_{k=0}^{\infty}(P_{n-c,k+1})'(u)\int_0^{\infty} P_{n+c,k}(t)(u-t)^m dt \tag{3.24}$$

elde edilebilir . Şimdi (3.18) ve (3.24) kullanılıp (3.7) uygulanırsa

$$\varphi(u)^2[(H_{n,m})'(u) - mH_{n,m-1}(u)]$$
$$= \varphi(u)^2 u^m (P_{n-c,0})'(u) + n\sum_{k=0}^{\infty} P_{n-c,k+1}(u)\int_0^{\infty}[(k+1)-(n-c)u]P_{n+c,k}(t)(u-t)^m\,dt \qquad (3.25)$$

bulunur. Ayrıca

$$(k+1)-(n-c)u = (k-(n+c)t)-(n+c)(u-t)+(1+2cu)$$

olup bu ifade (3.25) de yerine yazılırsa

$$\varphi(u)^2[(H_{n,m})'(u) - mH_{n,m-1}(u)] + (n+c)H_{n,m+1}(u) - (1+2cu)H_{n,m}(u)$$
$$= \varphi(u)^2 u^m (P_{n-c,0})'(u) + [(n+c)u^{m+1} - (1+2cu)u^m]P_{n-c,0}(u)$$
$$+ n\sum_{k=0}^{\infty} P_{n-c,k+1}(u)\int_0^{\infty}\varphi(t)^2(P_{n+c,k})'(t)(u-t)^m\,dt$$

elde edilir. Şimdi kısmi integrasyon uygulanıp benzer işlemler yapılırsa,

$$m\varphi(u)^2 - (1+2ct)(u-t) = m\varphi(u)^2 - (m+1)(1+2cu)(u-t) + c(m+2)(u-t)^2$$

olup,

$$\varphi(u)^2[(H_{n,m})'(u) - mH_{n,m-1}(u)] + (n+c)H_{n,m+1}(u) - (1+2cu)H_{n,m}(u)$$
$$= \varphi(u)^2 u^m (P_{n-c,0})'(u) + [(n+c)u^{m+1} - (1+2cu)u^m]P_{n-c,0}(u)$$
$$+ n\sum_{k=0}^{\infty} P_{n-c,k+1}(u)\int_0^{\infty}[m\varphi(t)^2 - (1+2ct)(u-t)]P_{n+c,k}(t)(u-t)^{m-1}\,dt$$
$$= c(m+2)H_{n,m+1}(u) - (m+1)(1+2cu)H_{n,m} + m\varphi(u)^2 H_{n,m-1}(u)$$
$$+ \varphi(u)^2 u^m (P_{n-c,0})'(u) + (n-c)u^{m-1}P_{n-c,0}(u)$$

bulunur. (3.7) uygulanırsa

$$\varphi(u)^2 u^m (P_{n-c,0})'(u) + (n-c)u^{m-1} P_{n-c,0}(u)$$
$$= u^m (0-(n-c)u) P_{n-c,0}(u) + (n-c)u^{m+1} P_{n-c,0}(u) = 0$$

olup yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$(n-c(m+1)H_{n,m+1}(u) = \varphi(u)^2 [2mH_{n,m-1}(u) - (H_{n,m})'(u)] - m(1+2cu)H_{n,m}(u)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2:

Her $n, m \in N, n > 2cm, u \in [0,\infty)$ için,

$$\left|H_{n,2m}(u)\right| \le Cn^{-m} [\varphi(u)^2 + n^{-1}]^m$$

sağlanır. n ve u, a dan bağımsız sabitlerdir.

Lemma 3.7:

Her $f(t) = (1+ct)^{-r}, t \in [0,\infty), n, r \in N$, $n > rc$ ve $x \in [0,\infty)$ için,

$$(M_n f)(x) \le C(1+cx)^{-r}$$

dir. Burada C, n den bağımsız sabittir [5].

Teorem 3.2:

$\varphi(x) = \sqrt{x(1+cx)}, n \in N, n > 2c$ ve $f \in L_p[0,\infty)$, $1 \le p < \infty$ için,

$$\left\|M_n f - f\right\|_p \le C\{w_\varphi^2\left(f, n^{-1/2}\right)_p + n^{-1}\left\|f\right\|_p\}$$

dir.

İspat:

İspat için $W_{\varphi}^{2}\left(f,n^{-1/2}\right)_{p}$ süreklilik modülü ile $\overline{K}_{\varphi}^{2}\left(f,n^{-1}\right)_{p}$ fonksiyonelinin denkliğini kullanacağız. Yani,

$$\left\|M_n f - f\right\|_p \leq C \cdot \overline{K}_{\varphi}^{2}\left(f, n^{-1}\right)_p$$

olduğunu göstereceğiz. Her $g \in \overline{W}_{p}^{2}(\varphi,[0,\infty))$ için,

$$\begin{aligned}\left\|M_n(f-g+g)-(f-g+g)\right\|_p &\leq \left\|M_n(f-g)+(f-g)+M_n g-g\right\|_p \\ &\leq \left\|M_n(f-g)\right\|_p + \left\|(f-g)\right\|_p + \left\|M_n g - g\right\|_p\end{aligned}$$

olup, $\left\|M_n\right\|_p \leq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\left\|M_n(f-g+g)-(f-g+g)\right\|_p &\leq \left\|M_n\right\|_p\left\|f-g\right\|_p + \left\|f-g\right\|_p + \left\|M_n g - g\right\|_p \\ &\leq 2\left\|f-g\right\|_p + \left\|M_n g - g\right\|_p \qquad (3.26)\end{aligned}$$

yazılabilir. $\left\|M_n g - g\right\|_p$ yi hesaplamak için,

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)du$$

ve

$$\left[M_n(t-x)\right](x) = -\frac{1+2cx}{n-2c}$$

eşitliklerini kullanacağız. İlk olarak (3.26) daki ifadenin sağ tarafındaki ikinci terimi hesaplayalım. Yani

$$\left\|M_n g - g\right\|_p \leq C \cdot n^{-1}\left\|(\varphi^2 + n^{-1})g''\right\|_p \qquad (3.27)$$

olduğunu göstereceğiz.

Taylor açılımından kalan terim,

$$R_2(g,t,x) = \int_x^t (t-u)g''(u)du$$

şeklinde ifade edilebilir. $M_n(1:x)=1$ ve $M_n((t-x),x)=0$ olduğundan,

$$(M_n g)(x) - g(x) = [M_n(R_2(g,t,x))](x) \tag{3.28}$$

ifadesi doğrudur. Bu durumda (3.27) deki ifadenin ispatı için,

$$\|M_n(R_2(g,t,x))\|_p \le C \cdot n^{-1}\|(\varphi^2 + n^{-1})g''\|_{\mathrm{p}} \tag{3.29}$$

göstermek yeterlidir.

İspat için $p=1$ ve $p=\infty$ durumlarını gösterip $1<p<\infty$ için Riesz Thorin Teoreminden faydalanacağız.

$p=\infty$ için kalan terim,

$$|R_2(g,t,x)| \le \int_x^t (t-u)|g''(u)|du$$

$$= \int_x^t \frac{(\varphi(u)^2 + n^{-1})}{(\varphi(u)^2 + n^{-1})}|g''(u)|(t-u)du$$

olup,

$$\sup(\varphi(u)^2 + n^{-1})|g''(u)| = \|(\varphi^2 + n^{-1})g''\|_\infty$$

olduğundan,

$$\left|R_2(g,t,x)\right| \le \left\|\left(\varphi^2 + n^{-1}\right)g''\right\|_{\infty} \left|\int_x^t \left|t-u\right|\left(\varphi(u)^2 + n^{-1}\right)^{-1} du\right| \tag{3.30}$$

dir. $x < t$ için,

$$\frac{\left|t-u\right|}{[\varphi(u)^2 + n^{-1}]} \le \frac{\left|t-u\right|}{\varphi(u)^2}$$

yazılabilir. Şimdi

$$g(u) = \frac{\left|t-u\right|}{\varphi(u)^2} = \frac{\left|t-u\right|}{u(1+cu)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun türevi alınırsa

$$g'(u) = \frac{cu^2 - t - 2ctu}{u + cu^2}$$

bulunur. Burada $x < u < t$ olduğundan u yerine t yazılırsa

$$g'(u) \le \frac{ct^2 - t - 2ct^2}{t + ct^2} \le 0$$

bulunur. Yani $g(u)$ fonksiyonu monoton azalan olup

$$\frac{\left|t-u\right|}{\left[\varphi(u)^2 + n^{-1}\right]} \le \frac{\left|t-x\right|}{\left[\varphi(x)^2 + n^{-1}\right]} \tag{3.31}$$

yazılabilir. $x > t$ için,

$$\left|t-u\right|x \le \left|t-x\right|u$$

sağlanır. Ayrıca

$$h(u)=\frac{u|t-u|}{\varphi(u)^2+n^{-1}}\leq\frac{u|t-u|}{\varphi(u)^2}$$

olup,

$$h(u)=\frac{u|t-u|}{\varphi(u)^2+n^{-1}}=\frac{u(u-t)}{\varphi(u)^2+n^{-1}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun türevi alınırsa,

$$h'(u)=\frac{(2u-t)(u+cu^2)-(1+2cu)(u^2-ut)}{(u+cu^2)}$$

$$=\frac{(u^2+ctu^2)}{(u+cu^2)^2}>0$$

bulunur. Yani bu fonksiyon monoton artan bir fonksiyon olup $x>t$ için

$$\frac{u|t-u|}{\varphi(u)^2+n^{-1}}\leq\frac{x|t-x|}{\varphi(x)^2+n^{-1}}$$

sağlanır. Şimdi (3.31) den

$$\frac{|t-u|}{[\varphi(u)^2+n^{-1}]}\leq\frac{|t-x|}{x}\left\{\frac{x}{\varphi(x)^2+n^{-1}}+\frac{t}{\varphi(t)^2+n^{-1}}\right\} \tag{3.32}$$

yazılabilir. (3.32) kullanılıp (3.30) da integral alınırsa,

$$|R_2(g,t,x)|\leq\left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_\infty\times\frac{(t-x)^2}{x}\left\{\frac{x}{\varphi(x)^2+n^{-1}}+\frac{t}{\varphi(t)^2+n^{-1}}\right\} \tag{3.33}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\frac{|t-u|}{\left[\varphi(u)^2+n^{-1}\right]} \leq \frac{|t-u|}{n^{-1}} \tag{3.34}$$

yazılabilir. Şimdi (3.30) da (3.34) ve $|t-u| \leq |t-x|$ olduğu kullanılarak integral alınırsa,

$$|R_2(g,t,x)| \leq \left\|(\varphi^2+n^{-1})g''\right\|_\infty (t-x)^2 n \tag{3.35}$$

elde edilir.

$x \in [0,\frac{1}{n}]$ için $n[\varphi(x)^2+n^{-1}] \leq C_1$ dir. C_1, n den bağımsızdır. Sonuç (3.1) kullanılarak, (3.35) den,

$$\begin{aligned} |M_n(R_2(g,t,x))(x)| &\leq \left\|(\varphi^2+n^{-1})g''\right\|_\infty \left(M_n(t-x)^2\right)(x)n \\ &\leq \left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_\infty C_1\left[\varphi(x)^2+n^{-1}\right]^{-1} W_{n,2}(x) \\ &\leq Cn^{-1}\left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)^1 g''\right\|_\infty \end{aligned} \tag{3.36}$$

ifade gösterilmiş olur. Şimdi

x $\in [\frac{1}{n},\infty)$ için Sonuç (3.1) kullanılarak (3.33) ve

$$\frac{t}{\varphi(t)^2+n^{-1}} \leq \frac{1}{1+ct}$$

ifadesinden,

$$
\begin{aligned}
|M_n(R_2(g,t,x))(x)| &\le \|(\varphi^2+n^{-1})g''\|_\infty \Big(\frac{1}{[\varphi(x)^2+n^{-1}]}W_{n,2}(x) \\
&\quad + \frac{1}{x}[M_n[(t-x)^2\frac{t}{\varphi(t)^2+n^{-1}}]](x) \\
&\le \left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_\infty \left\{C_1 n^{-1} + \frac{1}{x}\left[M_n(t-x)^2\frac{1}{1+ct}\right](x)\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Lemma (3.7) ve Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
|M_n(R_2(g,t,x))(x)| &\le \left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_\infty \\
&\quad \times \left\{C_1 n^{-1} + \frac{1}{x}[[M_n(t-x)^{4r}](x)]^{1/2}[[M_n(1+ct)^{-2}](x)]^{1/2}\right\} \\
&\le \left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_\infty \\
&\quad \times \left\{C_1 n^{-1} + \frac{1}{x}[W_{n,4r}(x)]^{1/2}\cdot C_2\left(1+cx\right)^{-1}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

bulunur. $x \in [\frac{1}{n}, \infty)$ için,

$$
(1+cx)^{-1} \le 2\frac{x}{\varphi(x)^2+n^{-1}}
$$

yazılabilir. Buradan (3.37) de tekrar Sonuç (3.1) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
|M_n(R_2(g,t,x))(x)| &\le \left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_\infty \left\{C_1 n^{-1} + \frac{2C_2}{[\varphi(x)^2+n^{-1}]}\left[W_{n,4}(x)\right]^{1/2}\right\} \\
&\le Cn^{-1}\left\|\left(\varphi+n^{-1}\right)g''\right\|_\infty
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

elde edilir. Böylece (3.36) ve (3.38) den $p=\infty$ için teorem ispatlanmış olur.

$p=1$ için Sonuç(3.2), $H_{n,m}$ nin tanımı ve iki kez Fubini Teoremi uygulanıp, aşağıdaki integraller göz önüne alındığında,

$$\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)\int_x^t h(u)dudtdx$$

$$=\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)\int_0^t h(u)dudtdx$$

$$-\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)\int_0^x h(u)dudtdx$$

$$= A - B$$

olsun.

$$A=\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)\int_0^t h(u)dudtdx$$

$$=\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty h(u)\int_u^\infty g(t)dtdudx$$

$$=\int_0^\infty h(u)\int_0^\infty f(x)\int_u^\infty g(t)dtdxdu$$

$$=\int_0^\infty h(u)\int_u^\infty f(x)\int_u^\infty g(t)dtdxdu$$

$$+\int_0^\infty h(u)\int_0^u f(x)\int_u^\infty g(t)dtdxdu$$

ve

$$B=\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty h(u)\int_0^x g(t)dtdudx$$

$$=\int_0^\infty f(x)\int_0^x h(u)\int_0^\infty g(t)dtdudx$$

$$=\int_0^\infty h(u)\int_u^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)dtdxdu$$

$$=\int_0^\infty h(u)\int_u^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)dtdxdu$$

$$+\int_0^\infty h(u)\int_u^\infty f(x)\int_0^u g(t)dtdxdu$$

dir. Buradan

$$\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)\int_x^t h(u)dudtdx = \int_0^\infty h(u)[\int_u^\infty \int_0^u - \int_0^u \int_u^\infty \ ]f(x)g(t)dtdxdu$$

olduğu görülebilir. Böylece $p=1$ için,

$$\begin{aligned}
\left\|M_n\left(R_2(g,t,x)\right)\right\|_1 &\leq (n-c)\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty P_{n,k}(x)\int_0^\infty P_{n,k}(t)\left|\int_x^t (t-u)g''(u)du\right|dtdx \\
&\leq (n-c)\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty P_{n,k}(x)\int_0^x P_{n,k}(t)\int_t^x (u-t)\left|g''(u)\right|dudtdx \\
&+(n-c)\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty P_{n,k}(x)\int_x^\infty P_{n,k}(t)\left|\int_x^t (t-u)\right|\left|g''(u)\right|dudtdx \\
&=(n-c)\int_0^\infty \left|g''(u)\right|\left\{\int_u^\infty\int_0^u - \int_0^u\int_u^\infty\right\}(u-t)\sum_{k=0}^\infty P_{n,k}(x)P_{n,k}(t)dtdxdu \\
&=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left|g''(u)\right|\left|H_{n,2}(u)\right|du
\end{aligned}$$

olup Sonuç (3.2) den

$$\begin{aligned}
\left\|M_n\left(R_2(g,t,x)\right)\right\|_1 &\leq C\int_0^\infty \left|g''(u)\right|n^{-1}\left[\varphi(u)^2+n^{-1}\right]du \\
\left\|M_n\left(R_2(g,t,x)\right)\right\|_1 &= Cn^{-1}\left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_1
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (3.29) ispatlanmış oldu. Her $g \in \overline{W}_p^2(\varphi,[0,\infty))$ için $\left\|M_n g - g\right\|_p$

$$\begin{aligned}
\left\|M_n g - g\right\|_p &\leq C_2 n^{-1}\{\left\|g'\right\|_p^{[0,1]} + \left\|(1+2cx)g'\right\|_p^{[1,\infty)} + \left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_p\} \\
&\leq C_3 \cdot n^{-1}\{\left\|g\right\|_p + \left\|\varphi^2 g''\right\|_p + \left\|\left(\varphi^2+n^{-1}\right)g''\right\|_p\}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir [8] . Bu son eşitsizlik (3.26) da yerine yazılırsa

$$\|M_n f - f\|_p \leq 2\|f-g\|_p + C_3 n^{-1}\{\|f-g\|_p + \|f\|_p + \|\varphi^2 g''\|_p + n^{-2}\|g''\|_p\}$$
$$\leq C\cdot\{\|f-g\|_p + n^{-1}\|f\|_p + n^{-1}\|\varphi^2 g''\|_p + n^{-2}\|g''\|_p\}$$

bulunur. Her $g \in \overline{W}_p^2(\varphi,[0,\infty))$ için tüm denklemin inf i alındığında,

$$\|M_n f - f\|_p \leq C\cdot\{\overline{K}_\varphi^2\left(f,n^{-1}\right)_p + n^{-1}\|f\|_p\}$$

bulunur ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Aşağıdaki teoremde M_n genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörünün L_p anlamında sınırlılığını ve L_p normuna göre yakınsaklığını göreceğiz.

Teorem 3.2:

$f \in L_p[0,\infty)$, $n \in N$, $n > c$ için, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

1) $\|M_n f\|_p \leq \|f\|_p$, (3.39)

2) $f \geq 0 \Rightarrow (M_n f) \geq 0$, (3.40)

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\|M_n f - f\|_p = 0$, (3.41)

dir.

İspat:

1) İspatı $p=1$ ve $p=\infty$ için gösterip, $1 < p < \infty$ aralığı için Riesz Thorin Teoreminden faydalanacağız.

$p=1$ için (3.4) ve (3.5) özellikleri kullanırsa,

$$\|M_n f\|_1 \le (n-c)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} P_{n,k}(x)dx\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)|f(t)|dt$$
$$\le \int_0^{\infty} |f(t)|\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(t)dt = \|f\|_1$$

olduğu görülebilir.

$p=\infty$ için tekrar (3.4) ve (3.5) özellikleri uygulanırsa,

$$\|M_n f\|_\infty \le \|f\|_\infty \left\|(n-c)\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)dt\right\|_\infty = \|f\|_\infty$$

bulunur. Yani operatör L_p den L_p ye dönüşüm yapan sınırlı bir operatördür.

2) ϕ_n in tam monoton özelliğinden ispat açıktır.

3) İspat için Teorem 3.2 deki

$$\|M_n f - f\|_p \le c[K_\varphi^2(f,n^{-1})_p + n^{-1}\|f\|_p] \tag{3.42}$$

eşitsizliğini kullanacağız. (3.42) de her $f \in W_p^2(\varphi[0,\infty))$ için K fonksiyonelinin tanımı uygulanırsa,

$$\|M_n f - f\|_p \le c[n^{-1}\|\varphi^2 f''\|_p + n^{-1}\|f\|_p]$$

bulunur. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|M_n f - f\right\|_p = 0$$

olduğu görülebilir.

4. BERNSTEİN DURRMEYER OPERATÖRÜ VE TÜREVLERİ

Tanım 4.1:

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere,

$$M_n(f{:}x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\int_0^1 P_{n,k}(t) f(t)\,dt \tag{4.1}$$

olarak tanımlanan operatöre Bernstein Durrmeyer tipli integral operatörü denir.

Tanım 4.2:

Yaklaşım hızını verilirken $L_p[0,1]$ uzayında tanımlı süreklilik modülünü,

$$w_\varphi^r(f,t)_p = \sup_{0<h\le t} \left\| \Delta_{h\varphi}^r f \right\|_{L_{p[0,1]}} , \quad \varphi(x) = \sqrt{(x(1-x))}\,,$$

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k f\left(x + \left(\frac{r}{2} - k \right) h \right) \quad , \quad \left[x - \frac{rh}{2}, x + \frac{rh}{2} \right] \subset [0,1]$$

şeklinde tanımlayacağız. Diğer durumlarda $\Delta_h^r f(x) = 0$ alacağız. Burada $g^{(r-1)} \in AC_{loc}$ olmak üzere,

$$K_r(f,t^r)_p = \inf_{g\in w_p^r(\varphi[0,1])} \left\{ \left\| f-g \right\|_p + t^r \left\| \varphi^r g^{(r)}{}_p \right\| \right\} \tag{4.2}$$

$$\overline{K}_r(f,t^r)_p = \inf_{g^{(r-1)}\in AC_{loc}} \left(\left\| f-g \right\|_p + t^r \left\| \varphi^r g^{(r)} \right\|_p \right) + t^{2r} \left\| g^{(r)} \right\|_{\mathrm{p}} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlı K-fonksiyoneli $W_{\varphi}^{r}(f,t)_p$ ile verilen süreklilik modülüne denktir [8] .

Şimdi $P_{n,k}$ ağırlık fonksiyonunun sağladığı bazı özellikleri verelim. (ϕ_n), fonksiyonlar dizisinin sağladığı özellikler dikkate alınırsa aşağıdaki eşitlikler kolayca elde edilir:

Lemma 4.1:

Her $n \in N$, $n > c$, $k \in N_0$, $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ ve $x \in [0,\infty)$ için,

1) $\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) = 1$, (4.5)

2) $\int_0^{\infty} P_{n,k}(t)dt = \frac{1}{n+1}$, (4.6)

3) $\frac{k}{n} P_{n,k}(x) = xP_{n-1,k-1}(x)$, (4.7)

4) $\varphi(x)^2 \frac{d}{dx} P_{n,k}(x) = (k-nx)P_{n,k}(x)$, (4.8)

5) $n\left[P_{n-1,k-1}(x) - P_{n-1,k}(x)\right] = \frac{d}{dx} P_{n,k}(x)$ (4.9)

yazabiliriz. Eğer $k < 0$ ise $P_{n,k}(x) = 0$ olarak alınır.

İspat:

1)

$$\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) = 1$$

olduğunu gösterelim.

Binom formülü göz önüne alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (x+1-x)^n$$
$$= 1$$

elde edilir.

2)

$$\int_0^1 P_{n,k}(x)dx = \frac{1}{n+1}$$

olduğunu gösterelim. Burada $x^k = u$ ve $(1-x)^{n-k}\, dx = dv$ olmak üzere, $\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx$ integraline k kez kısmi integrasyon uygalarsak,

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = -\frac{x^k}{n-k+1}(1-x)^{n-k+1}\Big|_0^1 + \frac{k}{n-k+1}\int_0^1 (1-x)^{n-k+1} x^{k-1} dx$$

$$= \frac{k}{n-k+1}\left[\frac{k-1}{n-k+2}\int_0^1 (1-x)^{n-k+2} x^{k-2} dx\right]$$

$$\vdots$$

$$= \frac{k!}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}\int_0^1 (1-x)^n\, dx$$

$$= -\frac{k!}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1\right]$$

$$= -\frac{k!}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}\frac{1}{n+1}$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_0^1 P_{n,k}\,(x)\, dx = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, dx$$

$$= \binom{n}{k}\frac{k!}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}\frac{1}{n+1}$$

$$\int_0^1 P_{n,k}(x)\,dx = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{k!}{(n-k+1)\ldots n}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

bulunur.

3)

$$\frac{k}{n}P_{n,k}(x) = xP_{n-1,k-1}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} xP_{n-1,k-1}(x) &= x\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} \\ &= \binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{kn!}{nk!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \frac{k}{n}P_{n,k}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

4)

$$\varphi^2(x)\frac{d}{dx}P_{n,k}(x) = (k-nx)P_{n,k}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$P_{n,k}(x)$ in türevi alınıp denklem $\varphi(x)^2 = x(1-x)$ ile çarpılırsa,

$$\frac{d}{dx}P_{n,k}(x) = \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]$$

$$\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}[kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}]$$

$$\varphi(x)^2\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)=x(1-x)\binom{n}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$-\binom{n}{k}(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}x(1-x)$$

$$=k\binom{n}{k}(1-x)x^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\binom{n}{k}(n-k)x\cdot x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=k(1-x)P_{n,k}(x)-(n-k)xP_{n,k}(x)$$

$$=P_{n,k}(x)(k-kx-nx+kx)$$

$$=P_{n,k}(x)(k-nx)$$

elde edilir.

5)

$$n\left[P_{n-1,k-1}(x)-P_{n-1,k}(x)\right]=\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$$\frac{d}{dx}P_{n,k}(x)=\frac{d}{dx}\left[\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]$$
$$=k\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\binom{n}{k}$$

olup,

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$
$$=n\binom{k-1}{n-1}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(n-k)\binom{n}{k} &= (n-k)\frac{n!}{(n-k)!k!} = n\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= n\binom{n-1}{k}
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}P_{n,k}(x) &= k\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1} \\
&= n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
&\quad - n\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} \\
&= n\left[P_{n-1,k-1} - p_{n-1,k}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lemma 4.2:

$$
M_n(f{:}x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\int_0^1 P_{n,k}(t)f(t)dt
$$

olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1) $f(t) = 1$ olarak alınıp, (4.5) ve (4.6) özellikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
(M_n 1)(x) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\int_0^1 P_{n,k}(t)dt \\
&= 1
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2) $f(t) = t$ olmak üzere,

$$M_n(t)(x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\int_0^1 P_{n,k}(t)tdt$$

ifadesinin eşitini bulalım. $\int_0^1 P_{n,k}(t)tdt$ ifadesine (4.7) özelliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_{n,k}(t)tdt &= \int_0^1 \frac{k+1}{n+1}P_{n+1,k+1}(t)dt\\ &=\frac{k+1}{n+1}\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

olup, $k\to k+1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n} &= x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}\\ &=x(x+1-x)^{n-1}\\ &=x\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler operatörde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}M_n(t)(x) &= (n+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\int_0^1 P_{n,k}(t)tdt\\ &=(n+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\frac{k+1}{n+1}\frac{1}{n+2}\\ &=\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)(k+1)\end{aligned}$$

olup, ilk toplam düzenlenirse,

$$M_n(t)(x) = \frac{n}{n+2}\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\frac{k}{n} + \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)$$

bulunur. Burada yukarıda bulunan ifadeler ve (4.5) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} M_n(t)(x) &= \frac{n}{n+2}\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\frac{k}{n} + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{n}{n+2}x + \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

gösterilmiş olur.

$f(t) = t^2$ olarak alındığında,

$$M_n(t^2)(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\int_0^1 P_{n,k}(t)t^2 dt$$

ifadesinin eşitini bulalım.

$\int_0^1 P_{n,k}(t)t^2 dt$ ifadesinde (4.6) ve (4.7) özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{n,k}(t)t^2 dt &= \int_0^1 \frac{k+1}{n+1} P_{n+1,k+1}(t)tdt \\ &= \frac{k+1}{n+1}\int_0^1 \frac{k+2}{n+2} P_{n+2,k+2}(t)dt \\ &= \frac{k+1}{n+1}\frac{k+2}{n+2}\frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

elde dilir. Ayrıca,

$k^2 = k(k-1)+k$ için,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{n^2}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}P_{n,k}(x)$$
$$=\sum_{k-2}^{n}\frac{n-1}{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}$$
$$=\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}$$

olup, $k\to k+2$ yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k}+\frac{x}{n}$$
$$=\frac{n-1}{n}x^2(x+1-x)^{n-2}+\frac{x}{n}$$
$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$$

elde edilir. Bulunan ifadeler operatörde yerine yazılırsa,

$$M_n(t^2)(x)=\frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)(k^2+3k+2)$$
$$=\frac{2}{(n+2)(n+3)}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)+\frac{3n}{(n+2)(n+3)}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)\frac{k}{n}$$
$$+\frac{n^2}{(n+2)(n+3)}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)\frac{k^2}{n^2}$$
$$=\frac{2}{(n+2)(n+3)}+\frac{3n}{(n+2)(n+3)}x+\frac{n^2}{(n+2)(n+3)}\left[x^2+\frac{x(1-x)}{n}\right]$$

bulunur.

Lemma 4.3: $m>0$ ve $\varphi(x)^2=x(1-x)$ için,

$$H_{n,m}(u)\equiv(n+1)m\left\{\int_u^1\int_0^u-\int_0^u\int_u^1\right\}(u-t)^{m-1}\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(t)P_{n,k}(x)dtdx \tag{4.10}$$

özdeşliği ve

$$\left|H_{n,2s}(x)\right| \le C \cdot n^{-s}\left(\varphi(x)^2 + \frac{1}{n}\right)^s \tag{4.11}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 4.4:

$H_{n,m}(u)$, (4.10) daki gibi olmak üzere,

1) $H_{n,m}(u) = n\sum_{k=1}^{n} P_{n+1,k}(u)\int_0^1 (u-t)^m P_{n-1,k-1}(t)dt + u^{n+1}(u-1)^m + (1-u)^{n+1}u^m$ (4.12)

2) $(n+m+1)H_{n,m+1}(u) = u(1-u)\left[2mH_{n,m-1}(u) - (H_{n,m})'(u)\right] - (1-2u)mH_{n,m}(u)$ (4.13)

3) $H_{n,2s}(u) = \sum_{i=0}^{s-1} P_{i,s,n}(x)\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{s-i} n^{-2i}, s > 0$ (4.14)

4) $H_{n,2s-1}(u) = \sum_{i=0}^{s-1} \theta_{i,s,n}(x)\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{s-i-1} n^{-2i+1}, s > 0$ (4.15)

eşitlikleri geçerlidir.

İspat:

1) (4.10) dan,

$$H_{n,m}(u) = (n+1)m\left\{\int_u^1 \int_0^u - \int_0^u \int_u^1\right\}(u-t)^{m-1}\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)P_{n,k}(t)dtdx$$

$$H_{n,m}(u) = m\int_0^u (u-t)^m \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(t)dt - (n+1)m\int_0^u \int_0^u (u-t)^{m-1}\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(t)P_{n,k}(x)dtdx$$

$$-(n+1)m\int_o^u \int_0^1 (u-t)^{m-1}\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(t)P_{n,k}(x)dtdx$$

$$+(n+1)m\int_o^u \int_0^u (u-t)^{m-1}\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(t)P_{n,k}(x)dtdx$$

$$H_{n,m}(u) = u^m - (n+1)m\int_o^u \int_0^1 (u-t)^{m-1} \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(t)P_{n,k}(x)dtdx \tag{4.16}$$

yazılabilir.

$$H_{m,1}(u) = 0 \text{ ve } H_{m,2}(u) = \frac{2}{n+2}u(1-u) \tag{4.17}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi (4.9) kullanılıp kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &m\int_0^1 (u-t)^{m-1} P_{n,k}(t)dt \\ &= -(u-1)^m P_{n,k}(1) + u^m P_{n,k}(0) + n\int_0^1 (u-t)^m \left[P_{n-1,k-1}(t) - P_{n-1,k}(t)\right]dt \end{aligned} \tag{4.18}$$

bulunur. Burada, $P_{n,k}(1) = \delta_{n,k}$ ve $P_{n,k}(0) = \delta_{0,k}$ dır. (4.18) de bulunan ifade (4.16) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} H_{n,m}(u) &= u^m + (u-1)^m (n+1)\int_0^u x^n dx - u^m (n+1)\int_0^u (1-x)^n dx - n(n+1)\int_0^u \int_0^1 (u-t)^m \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\left[P_{n-1,k-1}(t) - P_{n-1,k}(t)\right]dtdx \\ &= (u-1)^m u^{n+1} + u^m (1-u)^{n+1} - n(n+1)\int_0^1 (u-t)^m \\ &\quad \times \int_0^u \sum_{k=0}^{n-1} \left[P_{n,k+1}(x) - P_{n,k}(x)\right]P_{n-1,k}(t)dxdt \\ &= (u-1)^m u^{n+1} + u^m (1-u)^{n+1} + n\int_0^1 (u-t)^m \sum_{k=0}^{n-1} P_{n+1,k+1}(u)P_{n-1,k}(t)dt \end{aligned}$$

elde edilir.

2)

$$L_{n,m}(u) \equiv u^{n+1}(u-1)^m + (1-u)^{n+1}u^m$$

olmak üzere, $H_{n,m}(u)$ nun yerine $L_{n,m}(u)$ yu yazalım. Yani,

$$
\begin{aligned}
&u(1-u)\left[2mu^{n+1}(u-1)^{m-1}+2m(1-u)^{n+1}u^{m-1}-\frac{d}{du}\left\{u^{n+1}(u-1)^{m}+(1-u)^{n+1}u^{m}\right\}\right] \\
&-(1-2u)m[u^{n+1}(u-1)^{m}+(1-u)^{n+1}u^{m}] \\
&=m[-u^{n+2}(u-1)^{m}+(1-u)^{n+2}u^{m}] \\
&+(n+1)[u^{n+1}(u-1)^{m+1}+(1-u)^{n+1}u^{m+1}] \\
&m[u^{n+1}(u-1)^{m+1}+u^{n+2}(u-1)^{m}-(1-u)^{n+2}u^{m}+(1-u)^{n+1}u^{m+1}] \\
&=(n+m+1)[u^{n+1}(u-1)^{m+1}+(1-u)^{n+1}u^{m+1}]
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi,

$$H_{n,m}(u)-L_{n,m}(u)\equiv A_{n,m}(u)$$

ifadesini elde edelim.

$$u(1-u)(P_{n,k})'(u)=(k-nu)P_{n,k}(u)$$

formülünü kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
&u(1-u)\left[\frac{d}{du}A_{n,m}(u)-mA_{n,m-1}(u)\right] \\
&=nu(1-u)\sum_{k=1}^{n}(P_{n+1,k})'(u)\int_{0}^{1}(u-t)^{m}P_{n-1,k-1}(t)dt \\
&=n\sum_{k=1}^{n}P_{n+1,k}(u)\int_{0}^{1}(u-t)^{m}(k-(n+1)u)P_{n-1,k-1}(t)dt \\
&=n\sum_{k=1}^{n}P_{n+1,k}(u)\int_{0}^{1}(u-t)^{m}\left[((k-1)-(n-1)t)-(n-1)(u-t)+(1-2u)\right]P_{n-1,k-1}(t)dt \\
&=n\sum_{k=1}^{n}P_{n+1,k}(u)\int_{0}^{1}(u-t)^{m}t(1-t)P'_{n-1,k-1}(t)dt-(n-1)A_{n,m+1}(u)+(1-2u)A_{n,m}(u) \\
&n\sum_{k=1}^{n}P_{n+1,k}(u)\int_{0}^{1}\left\{m(u-t)^{m-1}t(1-t)-(1-2t)(u-t)^{m}\right\}P_{n-1,k-1}(t)dt \\
&-(n-1)A_{n,m+1}(u)+(1-2u)A_{n,m}(u)
\end{aligned}
$$

$$u(1-u)\left[\frac{d}{du}A_{n,m}(u)-mA_{n,m-1}(u)\right]$$
$$=n\sum_{k=1}^{n}P_{n+1,k}(u)\int_0^1\left\{-(m+2)(u-t)^2-(m+1)(1-2u)(u-t)+mu(1-u)\right\}$$
$$\times(u-t)^{m-1}P_{n-1,k-1}(t)dt-(n-1)A_{n,m+1}(u)+(1-2u)A_{n,m}(u)$$
$$=(n+m+1)A_{n,m+1}(u)-m(1-2u)A_{n,m}(u)+mu(1-u)A_{n,m-1}(u)$$

elde edilir. Buradan $A_{n,m+1}(u), A_{n,m}(u), A_{n,m-1}(u)$ ifadeleri yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Lemma 4.5 : $\varphi(x)^2=x(1-x)$ için,

$$T_{n,m}(x)\equiv M_n\left((x-t)^m,x\right)$$

olmak üzere,

$$\left|T_{n,2s}(x)\right|\le C\cdot n^{-s}\left(\varphi(x)^2+\frac{1}{n}\right)^s$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 4.6: $\phi\in L_1$, $0\le t\le 1$, $0\le x\le 1$, $\alpha>0$ ve $\varphi(x)^2=x(1-x)$ için,

$$\left|\int_x^t(t-u)^{2r-1}\phi(u)du\right|\le\left|\frac{(t-x)^{2r-1}}{\left(\varphi(x)^2+\alpha\right)^r}\int_x^t\left(\varphi(u)^2+\alpha\right)^r|\phi(u)|du\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $x=0$ ve $x=1$ için ispat açıktır.

$0<x<u<t<1$ için $u>x$ alındığında,

$$\frac{\alpha}{1-u}>\frac{\alpha}{1-x}$$

ve

$$\frac{1}{u+\dfrac{\alpha}{1-u}}<\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{1-x}}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Şimdi,

$$h(u)=\frac{t-u}{1-u}$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonun türevi alındığında,

$$\begin{aligned} h'(u) &= \frac{-(1-u)+(t-u)}{(1-u)^2} \\ &= \frac{-1+u+t-u}{(1-u)^2} \\ &= \frac{t-1}{(1-u)^2}<0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $h(u)$ fonksiyonunun azalan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Yani $u>x$ olduğunda,

$$\frac{t-u}{1-u}<\frac{t-x}{1-x}$$

ve

$$t-u\leq t-x$$

eşitsizlikleri doğrudur. Buradan,

$$(t-u)^{2r-1}\leq\left(\frac{t-x}{1-x}\right)^{r}\left[\frac{t-u}{\left(x+\dfrac{\alpha}{1-x}\right)}\right]^{r-1}\frac{1}{x+\dfrac{\alpha}{1-x}}\left(\varphi(u)^2+\alpha\right)^{\mathrm{r}}$$

$$(t-u)^{2r-1} = \frac{(t-x)^{2r-1}}{\left(\varphi(x)^2+\alpha\right)^r}\left(\varphi(u)^2+\alpha\right)^r \tag{4.19}$$

elde edilir. Şimdi aynı sonucu $0 \le t < u < x < 1$ için elde edelim.

$$h(u) = \frac{u-t}{u}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} h'(u) &= \frac{u-(u-t)}{u^2} \\ &= \frac{t}{u^2} > 0 \end{aligned}$$

olur. Bu da $h(u)$ fonksiyonunun artan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Yani $u < x$ için,

$$\frac{(u-t)}{u} < \frac{(x-t)}{x}$$

eşitsizliği sağlanır. Aynı şekilde,

$$g(u) = \frac{1}{1-u+\left(\frac{\alpha}{u}\right)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $g(u)$ fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$g'(u) = \frac{-\left(-1-\frac{\alpha}{u^2}\right)}{\left(1-u+\frac{\alpha}{u}\right)^2} = \frac{1+\frac{\alpha}{u^2}}{\left(1-u+\frac{\alpha}{u}\right)^2} > 0$$

elde edilir. Bu da $g(u)$ fonksiyonunun artan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Yani $u < x$ için,

$$\frac{1}{1-u+\left(\frac{\alpha}{u}\right)} < \frac{1}{1-x+\left(\frac{\alpha}{x}\right)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu ifadeler kullanılarak (4.19) daki sonuç elde edilebilir.

Teorem 4.1 : $1 \le p \le \infty$ ve $\alpha < 1$ için,

$$\|M_n f - f\|_p \le C \cdot \left(W_\varphi^2 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_p + n^{-1} \|f\|_p \right)$$

dir.

İspat :

$\overline{K}_\varphi^{2r}\left(f,n^{-r}\right)_p$ ve $W_\varphi^{2r}\left(f,n^{-1/2}\right)_p$ ifadelerinin denk olduğunu biliyoruz [8] . Burada $g \in AC$ ve $g' \in L_p$ için,

$$\begin{aligned} \|M_n g - g\|_p &\le L_1 n^{-1} \left\| \left(\varphi^2 + \frac{1}{n} \right) g'' \right\|_p \\ &\le L_2 (n^{-1} \|\varphi^2 g''\|_p + n^{-2} \|g''\|_p) \end{aligned} \tag{4.20}$$

olduğunu gösterelim.

Taylor açılımından,

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + R_2(g,t,x)$$

olup kalan terim,

$$R_2(g,t,x) = \int_x^t (t-u)g''(u)du$$

şeklindedir. Ayrıca, $M_n(1:x) = 1$ ve $M_n((t-x),x) = 0$ olduğundan,

$$(M_n g)(x) - g(x) = [M_n(R_2(g,t,x))](x)$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\left\| \mathrm{M_n}(R_2(g,t,x),x) \right\|_p \leq L_3 \left(n^{-1} \left\| \left(\varphi^2 + \frac{1}{n} \right) g'' \right\|_p \right) \tag{4.21}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İspat için $p = 1$ ve $p = \infty$ daki durumları incelemek yeterlidir. $1 < p < \infty$ için Riesz-Thorin teoreminden faydalanacağız.

Maximal fonksiyonu,

$$\mu(\psi,x) = \sup_t \left| \frac{1}{t-x} \int_x^t |\psi(u)| du \right|$$

olarak tanımlayalım. $\psi(u)$ fonksiyonunu ise, $u \in [0,1]$ için,

$$\psi(u) = \left(\varphi(u)^2 + \frac{1}{n} \right)^r g^{(2r)}(u)$$

şeklinde, diğer durumlarda ise $\psi(u) = 0$ olarak tanımlayalım.

$$\mu(\psi,x) \equiv G(x)$$

olmak üzere, Lemma (4.6) da $\alpha = \frac{1}{n}$ alınırsa,

$$\left|M_n(R_2(g,t,x))\right| \leq \left|M_n\left(\frac{(t-x)^2}{\left(\varphi(x)^2+\frac{1}{n}\right)}G(x),x\right)\right|$$

olur ve böylece,

$$\left\|M_n(R_2(g,t,x),x)\right\|_p \leq \|G\|_p \left\|M_n\left((t-x)^2,x\right)\left(\varphi(x)^2+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\|_\infty \tag{4.22}$$

yazılabilir.

$1 < p \leq \infty$ için Lemma (4.5) kullanılırsa,

$$\left\|M_n\left((t-x)^2,x\right)\left(\varphi(x)^2+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right\|_\infty \leq Cn^{-1} \tag{4.23}$$

elde edilir. Maximal fonksiyonun sonucundan,

$$\|G\|_p \leq C_p \left\|\left(\varphi^2+\frac{1}{n}\right)g''\right\|_{\mathrm{p}} \tag{4.24}$$

bulunur. Böylece (4.23) ve (4.24), (4.22) de yerine yazılırsa (4.20) deki ifade gösterilmiş olur.

Şimdi $p=1$ için (4.20) in ispatını yapalım. İspat için öncelikle aşağıdaki integralleri göz önüne alalım.

$$\int_0^1 f(x)\int_0^1 g(t)\int_x^t h(u)dudtdx$$

$$=\int_0^1 f(x)\int_0^1 g(t)\int_0^t h(u)dudtdx$$

$$-\int_0^1 f(x)\int_0^1 g(t)\int_0^x h(u)dudtdx$$

$$=A-B$$

dersek,

$$A=\int_0^1 f(x)\int_0^1 g(t)\int_0^t h(u)dudtdx$$

$$=\int_0^1 f(x)\int_0^1 h(u)\int_u^1 g(t)dtdudx$$

$$=\int_0^1 h(u)\int_0^1 f(x)\int_u^1 g(t)dtdxdu$$

$$=\int_0^1 h(u)\int_u^1 f(x)\int_u^1 g(t)dtdxdu$$

$$+\int_0^1 h(u)\int_0^u f(x)\int_u^1 g(t)dtdxdu$$

ve

$$B=\int_0^1 f(x)\int_0^1 g(t)\int_0^x h(u)dudtdx$$

$$=\int_0^1 f(x)\int_0^x h(u)\int_0^1 g(t)dtdudx$$

$$=\int_0^1 h(u)\int_u^1 f(x)\int_0^1 g(t)dtdxdu$$

$$=\int_0^1 h(u)\int_u^1 f(x)\int_0^1 g(t)dtdxdu+\int_0^1 h(u)\int_u^1 f(x)\int_0^u g(t)dtdxdu$$

olur. Buradan,

$$\int_0^1 f(x)\int_0^1 g(t)\int_x^t h(u)dudtdx = \int_0^1 h(u)\left\{\int_u^1 \int_0^u - \int_0^u \int_u^1\right\} g(t)h(u)dtdxdu$$

eşitliği hesaplanmış olur.

Bu integraller , Fubini teoremi ve Lemma (4.3) kullanılarak,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|M_n\left(R_2\left(g,t,x\right),x\right)\right|dx &\le (n+1)\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\int_0^1 P_{n,k}(t)\left|\int_x^t \left(t-u\right)\left|g''(u)\right|du\right|dtdx \\ &= (n+1)\int_0^1 \left|g''(u)\right|\left\{\int_u^1 \int_0^u - \int_0^u \int_u^1\right\} \\ &\times \left(u-t\right)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(t)P_{n,k}(x)dtdxdu \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left|g''(u)\right|\left|H_{n,2}(u)\right|du\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $f'' \in L_p\left[0,1\right]$ olmak üzere,

$$\left\|M_n f - f\right\| \le A\left[\frac{1}{n}\left\|f'\right\|_p + \frac{1}{n}\left\|\phi^2 f''\right\|_p + \frac{1}{n^2}\left\|f''\right\|_p\right]$$

yazılabilir. $1 \le p < \infty$ için,

$$\left\|f'\right\|_p \le B\left[\left\|f\right\|_p + \left\|\varphi^2 f''\right\|_p\right]$$

olduğu görülebilir [8] .

$$\left\|M_n f - f\right\|_p \le 2\left\|f\right\|_p$$

olup,

$$\left\|M_n f - f\right\|_p \le C_1\left(\overline{K}_2(f,t)_p + n^{-1}\left\|f\right\|\right)$$

$$\|M_n f - f\|_p \leq C\left(K_2(f,t)_p + n^{-1}\|f\|\right)$$

elde edilir. $p = \infty$ için [7] den direkt sonuç bulunabilir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

L_P uzayında integrallenebilen fonksiyonlar için Baskakov Durrmeyer ve Bernstein Durrmeyer tipli operatörlerin düzgün yaklaşım problemi ve bu operatörlerin K fonksiyoneli kullanılarak yaklaşım hızları bulunmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Balcı M., Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 1997.

[2] Bayraktar M., Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ekim, 2006.

[3] Bergh, J., Löfström, J., Interpolation Spaces, An Introduction, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[4] Derrıennıc, M. M., Sur I'approximation de fonctions integrable sur $[0,1]$ par des polynomes de Bernstein modifies, Approx. Theory 31 (1981), 325-343.

[5] Heilmann, M., Dırect and Converse Results for Operators of Baskakov Durrmeyer Type, To Appear in J. Approx. Theory.

[6] Ditzian, Z., A-global inverse theorem for combinations of Bersnstein polynomials, J. Approx. Theory 26 (1979), 277-292.

[7] Ditzian, Z., Rate of approximation of linear processes, Acta Sci. Math. (Szeged) 48 (1985), 103-128.

[8] Ditzian, Z., Totik, V., Moduli of Smoothness, Springer Series in Computational Mathematics 9, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Newyork, 1987.

[9] Ditzian, Z., Ivanov, K., Bernstein-type Operators and Their Derivatives , To Appear in J. Approx. Theory.