KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ METRİK UZAYDA CARISTI TİP SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Özlem ACAR

HAZİRAN 2012

Matematik Anabilim Dalında Özlem Acar tarafından hazırlanan KISMİ METRİK UZAYDA CARISTI TİP SABİT NOKTA TEOREMLERİ Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. İshak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU	____________________
Üye (Danışman)	:Doç. Dr. İshak ALTUN	____________________
Üye	:Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	____________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. E. Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KISMİ METRİK UZAYDA CARISTI TİP SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ACAR, Özlem
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. İshak ALTUN
Haziran 2012, 68 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde bazı temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk alt başlığında kısmi metrik konusuna giriş yapılmış, kısmi metrik uzayda Caristi teoremi verilmiştir. İkinci alt başlıkta ise quasi metrik uzayda Caristi teoremi verilmiştir.

Dördüncü bölümde kısmi metrik uzayda Caristi dönüşümünün bazı genelleştirmeleri incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Kısmi Metrik Uzay, Caristi Dönüşümü.

ABSTRACT

CARISTI TYPE FIXED POINT THEOREMS ON PARTIAL METRIC SPACE

ACAR, Özlem
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İshak ALTUN

June 2012, 68 pages

This thesis consist of four chapters. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, some fundemental definitions, concepts and theorems are given.

In the first subsection of section three, we introduce to partial metric space, and Caristi theorem is given in there. In the second subsection, Caristi theorem is given in quasi metric space.

In the fourth chapter, we give some generalizations of Caristi theorem in partial metric space.

Key Words: Fixed Point, Partial Metric Space, Caristi Mapping.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; bilgi, ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Doç. Dr. İshak ALTUN’ a, çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili aileme ve eşim Tuncer ACAR’ a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1.GİRİŞ

X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $Tx_0 = x_0$ oluyorsa, x_0 noktasına T nin bir sabit noktası denir. Yani, T dönüşümü altında değişmeyen bir noktaya T nin bir sabit noktası denir. Örneğin;

$$X = [0, \infty), Tx = \frac{x}{2}, fx = x + 1$$

olarak tanımlanırsa $x_0 = 0$ noktası T nin sabit noktası olurken f nin sabit noktası yoktur. Yine $X = (0, \infty)$ alınırsa T nin de sabit noktasının olmadığı açıktır. O halde bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımlandığı kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Analiz ve Fonksiyonel Analizde, $Sx = 0$ ve $Tx = x$ tipindeki denklemlerle sıkça karşılaşırız. Bu tür denklemleri çözmek başlı başına bir problemdir. Kimi tam sonucu kimi de yaklaşık sonucu veren bazı metotlar vardır. Sabit nokta teoride bu metotlardan biridir. Örneğin, $x^2 - 7x + 12 = 0$ şeklinde bir denklemi göz önüne alalım. $x = 3$ ve $x = 4$ bu denklemin birer köküdür. Bu denklem $x = \frac{x^2+12}{7}$ olarak yazılabilir. O halde $Tx = \frac{x^2+12}{7}$ olmak üzere, bu denklem $x = Tx$ olarak yazılabilir. Şu halde $x = 3$ ve $x = 4$ noktaları T nin iki sabit noktasıdır. Bu yüzden, $Sx = 0$ şeklindeki bir denklemin çözümünün bulunması problemi $Sx = Tx - x$ ile verilen T fonksiyonunun sabit noktasının bulunması problemi ile aynıdır.

Genel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teoridir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları Brouwer ile başlamıştır. Brouwer 1912 de aşağıdaki önemli sonucu ispatlamıştır.

"C, $\mathbb{R}^n$ in kapalı birim yuvarı ve $T: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, C de bir sabit noktaya sahiptir".

Reel eksende bu teoremin özel bir durumu şu şekildedir: "T: $[0,1] \to [0,1]$ sürekli bir dönüşüm ise T nin bir sabit noktası vardır". Bu sonucun ispatı Ara Değer Teoremi yardımıyla kolayca yapılabilir. Yukarıda bahsedilen problemlerin çoğu fonksiyon uzaylarında ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle Brouwer' ın teoreminin fonksiyon uzaylarına genişletilmesi düşünülmüştür. Ancak, Kakutani sonsuz boyutlu uzaylara teoremin bu hali ile genişletilemeyeceğini gösteren aşağıdaki örneği vermiştir.

$C = \{x \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$, l^2 Hilbert uzayının kapalı birim yuvarı olsun. $T: C \to C$ dönüşümü, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \in C$ için

$$Tx = \left\{\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_{1,} x_2, \dots, x_n, \dots\right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda T sürekli ve $\|Tx\| = 1$ dir. Şimdi T nin sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim ve bu sabit nokta $x_0 = \left\{x_{1,} x_2, \dots, x_n, \dots\right\} \in C$ olsun. O halde $\|Tx_0\| = \|x_0\| = 1$ dir. Fakat

$$\begin{aligned} Tx_0 &= \left\{\sqrt{1 - \|x_0\|^2}, x_{1,} x_2, \dots, x_n, \dots\right\} \\ &= \left\{0, x_{1,} x_2, \dots, x_n, \dots\right\} \\ &= x_0 \end{aligned}$$

olduğundan bu $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots,\ x_n = 0,\ \dots$ veya $x_0 = \{0,0, \dots, 0, \dots\}$ olduğunu gösterir. Bu ise $\|x_0\| = 1$ olması ile çelişir. O halde T nin sabit noktası yoktur.

Brouwer'ın teoremi 1930 yılında Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

“X bir Banach uzayı, C, X in kompakt konveks bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ sürekli bir dönüşüm olsun. O zaman T nin C de en az bir sabit noktası vardır”.

Burada C üzerindeki kompaktlık şartı çok kuvvetlidir. Bu nedenle kompaktlık şartının hafifletilerek bu teoremin yenilenmesi düşünülmüştür. Böylece kompakt dönüşüm kavramı kullanılarak Schauder bu teoremi yenilenmiştir. Bu teoremi ifade etmeden önce kompakt dönüşüm kavramını hatırlayalım.

“$T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T sınırlı kümeleri prekompakt (kapanışı kompakt olan) kümelere dönüştüren sürekli bir dönüşüm ise T ye tamamen sürekli kompakt dönüşüm denir.

Bir kompakt dönüşüm daima süreklidir fakat bir sürekli dönüşüm kompakt olmayabilir.

Aşağıdaki teorem Schauder Sabit Nokta Teoremi (ikinci versiyon) olarak bilinir.

“X bir Banach uzayı, C, X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \rightarrow C$ kompakt bir dönüşüm ise, T nin C de en az bir sabit noktası vardır”.

Bu teorem, analizde denklemlerin nümerik işlemlerinde büyük öneme sahiptir.

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teori çalışmaları ise Banach ile başlamıştır. Banach, büzülme dönüşüm prensibi olarak da bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir

“(X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve bir $\alpha \in [0,1)$ için $d(fx, fy) \leq \alpha\, d(x, y)$ eşitsizliğini sağlıyorsa f dönüşümü bir tek sabit $z \in X$ noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $y_n = f^n x$ şeklinde tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi z noktasına yakınsar”.

Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de göstermektedir.

Sabit nokta teori çalışmaları sadece yukarıda bahsedilen tam metrik ve normlu uzaylarda sınırlı kalmayıp, sıralı Banach uzayları, düzgün uzaylar, fuzzy metrik uzaylar vb. uzaylarda da yapılmıştır.

Sabit nokta teori, diferansiyel denklemlerin, integral denklemlerin, kısmi diferansiyel denklemlerin ve diğer ilgili alanların varlık teorisinde çok kullanılmaktadır. Yine sabit nokta teori, sınır değer problemleri ve yaklaşım problemlerinde olduğu kadar özdeğer problemlerde de çok verimli uygulamalara sahiptir.

1.1. Kaynak özetleri

Metrik uzay, topolojik uzay ve fonksiyonel analiz ile ilgili temel kavramları için Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar" adlı kitabı ile Soykan'ın "Fonksiyonel Analiz" adlı kitabı kullanılmıştır (1,2). Kısmi sıralama bağıntısı ve temel özellikleri ile ilgili kavramlar için Özer, Çöker ve Taş'ın "Soyut Matematik" adlı kitabı temel kaynak olmuştur (3). Kısmi sıralı kümeler üzerinde verilen Knaster-Tarski ve Tarski sabit nokta teoremlerinin ispatı için Granas ve Dugundji nin "Fixed Point Theory" adlı kitabından yararlanılmıştır (4). Sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teorisi için temel iki kaynak olan Ran ve Reurings'in "A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations" adlı makalesi ile Nieto ve Rodriguez-Lopez'in "Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations" adlı makalesi kullanılmıştır (5,6). Daha sonra tezin asıl amacını oluşturan Caristi sabit nokta teoreminin direkt ispatı için Caristi'nin "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions" adlı makalesinin yanı sıra Singh, Watson ve Srivastava'nın "Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-Map Principle" adlı kitabı ile Agarwal, O'Regan ve Sahu'nun "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications" adlı kitapları temel alınmıştır (7,8,9). Ayrıca Caristi sabit nokta teoreminin kısmi sıralama yardımıyla yapılan ispatı için Granas ve Dugundji nin "Fixed Point Theory" adlı kitabı ile Khamsi'nin "Remarks on Caristi's fixed point theorem" adlı makalesi incelenmiştir (4,10). Son olarak Caristi sabit nokta teoreminin bazı genelleştirmeleri için Bae, Cho ve Yeom'un "A generalization of the Caristi-Kirk fixed point theorem and its applications to mapping theorems", Suzuki'nin "Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others", Kirk ve Caristi'nin "Mappings theorems in metric and Banach spaces", Kirk'in "Caristi's fixed point theorem and metric convexity", Brezis-Browder'ın "A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis", Bae'nin "Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps" adlı makaleleri incelenmiştir (11,12,13,14,15,16). Ayrıca bu teze temel teşkil eden "Acar,Ö., Altun, I., Romaguera,S., Caristi's type mappings on complete partial metric spaces, Fixed Point Theory, accepted." ile "Acar,Ö., Altun, I., Some generalizations of Caristi type fixed point theorem on partial metric space, Filomat 26:4 , 833–837, 2012.” adlı makalelerden de yararlanılmıştır (17,18).

1.2. Çalışmanın Amacı

James Caristi, 1976 yılında yayınladığı bir makalesinde aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

“(X, d) bir tam metrik uzay ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ ye tanımlı alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$ e tanımlı, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir.”

Daha sonra Caristi nin bu teoremi pek çok yazar tarafından genelleştirilmiş, uygulamaları yapılmış, farklı uzaylarda ispatları yapılmıştır. Bu tez çalışmasında ise Caristi sabit nokta teoreminin kısmi metrik uzay üzerinde ispatlanması ve bazı genelleştirmelerinin yapılması amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Metrik ve Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii) $d(x, y) = d(y, x)$
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.2. (X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. Bir $x_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.1.3. (X, d) bir metrik uzay ve U da X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine d-açıktır denir.

Tanım 2.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında bir A alt kümesi için $X \backslash A$ d-açık ise, A ya d-kapalı küme denir.

Önerme 2.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda

i) (X, d) içindeki her açık yuvar d-açıktır.
ii) (X, d) içindeki her kapalı yuvar d-kapalıdır.

Tanım 2.1.5. (X, d) bir metrik uzay, A ve B de X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

sayısına *A* ve *B* kümeleri arasındaki uzaklık denir. $x \in X$ olmak üzere

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

sayısına *x* noktasının *A* kümesine olan uzaklığı,

$$d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$$

sayısına *A* kümesinin çapı denir.

Eğer $d(A) < \infty$ ise A kümesine sınırlı küme, eğer $d(A) = \infty$ ise A kümesine sınırsız küme denir.

Tanım 2.1.6. Bir (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi *x* noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.2. Metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat. (X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin $x,y \in X$ gibi iki farklı noktaya yakınsadığını varsayalım. $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$ diyelim. Şimdi $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $z \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$ olsun. Bu durumda $d(x,z) < \varepsilon$ ve $d(y,z) < \varepsilon$ olur. Buradan

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

olur. Bu ise $2\varepsilon = d(x,y)$olmasıyla çelişir. O halde $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$ olur. $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ olacak biçimde vardır. Benzer şekilde $\{x_n\}$ dizisi y noktasına yakınsadığından bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_1$ için $x_n \in B(y,\varepsilon)$ olacak biçimde vardır. Bu durumda her $n \geq maks\{n_0, n_1\}$ için $x_n \in B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon)$ olur. Bu ise $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $\{x_n\}$ dizisi tek bir noktaya yakınsar.

Tanım 2.1.7. (X,d) bir metrik uzay ve (x_n) de X de bir dizi olsun. $n_k \leq n_{k+1}$ olmak üzere (x_{n_k}) dizisine (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

Önerme 2.1.3. (X,d) bir metrik uzay olsun. (x_n) dizisi yakınsak ise her (x_{n_k}) alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Önerme 2.1.4. (X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın d-kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\} \subseteq A$ olacak biçimdeki her $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \to x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 2.1.8. Bir (X,d) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m,n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X,d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X,d) ikilisine tam metrik uzay denir.

Önerme 2.1.5. Bir (X,d) metrik uzayında yakınsak olan bir (x_n) dizisi Cauchy dizisidir.

Önerme 2.1.6. (X,d) metrik uzayındaki her bir Cauchy dizisi sınırlıdır.

Önerme 2.1.7. (X,d) bir metrik uzay (x_n), X de bir dizi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

olsun. Bu durumda (x_n) bir Cauchy dizisidir.

İspat. $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

olur.

$$\sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1})$$

verilen serinin kalan terimi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir ki bu (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.9. (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar, $T: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. T fonksiyonunun x noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul X içinde herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak iken, Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisinin Tx e yakınsak olmasıdır.

Tanım 2.1.10. Bir (X, d) metrik uzayında açık kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i : i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer açık örtünün

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

olacak biçimde bir $\{G_{i_k} : k = 1,2, \dots, n\}$ alt ailesi var ise, bu aileye A kümesinin sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.11. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt bir küme ise (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir. Kompakt bir metrik uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Tanım 2.1.12. X boş olmayan bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt sınıfı olsun. Eğer τ sınıfı,

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti τ ya aittir

iii) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ya aittir

koşullarını sağlıyorsa τ ya X üzerinde topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.13. (X, τ) bir topolojik uzay ve X in bazı açık alt kümelerinin sınıfı β olsun. X in her açık alt kümesi β nın elemanlarının herhangi bir sayıdasının birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ için bir taban denir.

Tanım 2.1.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$ ailesi A üzerinde bir topolojidir. τ tarafından oluşturulan τ_A topolojisine τ dan indirgenen topoloji ve (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) topolojik uzayının alt uzayı denir.

Teorem 2.1.1. Bir (X, τ) kompakt topolojik uzayının her kapalı alt kümesi de kompakttır.

Tanım 2.1.15. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her nokta çiftini içeren ayrık komşulukları varsa (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff Uzay denir.

Teorem 2.1.2. Bir (X, τ) Hausdorff uzayında kompakt alt kümeler kapalıdır.

Teorem 2.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. A, X in boş olmayan bir kompakt alt kümesi olsun. Eğer $T: A \to \mathbb{R}$ sürekli ise $Ta = supT(A)$ ve $Tb = infT(A)$ olacak biçimde $a, b \in A$ vardır.

Tanım 2.1.16. (X, d) bir metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak biçimde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına T nin Lipschitz sabiti denir. T Lipschitz dönüşümü için $\alpha < 1$ ise T dönüşümüne büzülme dönüşümü, $\alpha = 1$ ise T Lipschitz dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm denir. $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

Her Lipschitz fonksiyonu süreklidir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ iken $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) < \alpha\delta = \varepsilon$ olup T Lipschitz fonksiyonu süreklidir.

Teorem 2.1.4. (Banach) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1} = T^nx_0$$

biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq Ld(x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq L^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= [L^n + L^{n+1} + \cdots + L^{m-1}] d(x_0, x_1) \\ &= \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $lim x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$z = lim x_{n+1} = lim Tx_n = T lim x_n = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir. Şimdi $w \in X$ noktası T nin bir başka sabit noktası ise

$$0 < d(z,w) = d(Tz,Tw) \leq Ld(z,w) < d(z,w)$$

olur ki bu $L < 1$ olduğundan bir çelişkidir. Yani T nin sabit noktası tekdir.

Teorem 2.1.5. (Cantor) (X,d) bir tam metrik uzay ve $\{A_n\}$ de X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_{n+1} \subseteq A_n$ ve $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$ ise bu durumda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

kümesi tek noktadan ibarettir.

İspat. Önce $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ seçelim. Bu durumda $m,n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için $x_m \in A_n$ olacağından $d(x_m,x_n) \leq d(A_n)$ olur. Yani $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. Yine $m,n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için $x_m \in A_n$ olduğundan $\lim_{m\to\infty} x_m = z \in \overline{A_n} = A_n$ olur. Bu durum Her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

dir. Şimdi $x,y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $x,y \in A_n$ olacağından

$d(x,y) \leq d(A_n)$

olur. Bu ise $d(x,y) = 0$ yani $x = y$ olduğunu gösterir ki sonuç olarak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$$

bulunur.

Tanım 2.1.17. X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip bir β bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve (X,β) ikilisine de kısmi sıralı küme denir.

i) β yansımalıdır, yani her $x \in X$ için $x\beta x$ dir,
ii) β ters simetriktir, yani her $x,y \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta x$ ise $x = y$ dir,
iii) β geçişlidir, yani her $x,y,z \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta z$ ise $x\beta z$ dir.

Bir kısmi sıralama bağıntısını göstermek için β simgesi yerine $\preccurlyeq$ gösterimini kullanacağız. Böylece $x\beta y$ yerine $x \preccurlyeq y$ yazıp bunu "x, y den önce gelir" ya da "x küçük eşit y" biçiminde okuyacağız. $x \preccurlyeq y$ ile $y \succcurlyeq x$ aynı anlama gelecektir. Ayrıca $x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ ise bu durumu $x \prec y$ biçiminde göstereceğiz.

Örnek 2.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.1.18. $(X,\preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $x,y \in X$ için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ oluyorsa x ile y elemanlarına karşılaştırılabilir elemanlar denir.

Tanım 2.1.19. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in bütün elemanları birbirleri ile karşılaştırılabiliyorsa $\preccurlyeq$ bağıntısına bir tam sıralama bağıntısı, $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine de tam sıralı küme denir.

Tanım 2.1.20. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. Eğer X kümesinin hiçbir elemanı a dan daha büyük değilse a ya X in maksimal elemanı denir. Buna göre a, X in bir maksimal elemanıdır ancak ve ancak $x \in X$ ve $a \preccurlyeq x$ ise $a = x$ dir. Benzer şekilde bir $b \in X$ için, X kümesinin hiçbir elemanı b den daha küçük değilse b ye X in minimal elemanı denir. Buna göre b, X in bir minimal elemanıdır ancak ve ancak $x \in X$ ve $x \preccurlyeq b$ ise $b = x$ dir.

Tanım 2.1.21. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in bütün elemanlarından daha büyük eşit olan $a \in X$ elemanına X in en büyük (maksimum) elemanı denir. Yani her $x \in X$ için $x \preccurlyeq a$ olacak biçimdeki $a \in X$ elemanına X in en büyük elemanı denir. Yine X in bütün elemanlarından daha küçük eşit olan $b \in X$ elemanına X in en küçük (minimum) elemanı denir. Yani her $x \in X$ için $b \preccurlyeq x$ olacak şekildeki $b \in X$ elemanına X in en küçük elemanı denir.

Tanım 2.1.22. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $x \preccurlyeq a$ olacak biçimde bir $a \in X$ varsa a elemanına A kümesinin bir üst sınırı denir. Yine her $x \in A$ için $b \preccurlyeq x$ olacak biçimde bir $b \in X$ varsa b elemanına A kümesinin bir alt sınırı denir.

Tanım 2.1.23. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $a \in X$ elemanına A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $a = supA$ ile gösterilir.

i) a, A nın bir üst sınırıdır, yani her $x \in A$ için $x \preccurlyeq a$ dır.

ii) a, A nın üst sınırları kümesinin en küçük elemanıdır, yani c, A nın bir üst sınırı ise $a \preccurlyeq c$ dir.

Benzer şekilde aşağıdaki şartları sağlayan $b \in X$ elemanına A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $b = infA$ ile gösterilir:

i) b, A nın bir alt sınırıdır, yani her $x \in A$ için $b \preccurlyeq x$ dır.

ii) b, A nın alt sınırları kümesinin en büyük elemanıdır, yani d, A nın bir alt sınırı ise $d \preccurlyeq b$ dir.

Tanım 2.1.24. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in boş olmayan her alt kümesinin en küçük elemanı varsa X e iyi sıralı küme ve bağıntıya da iyi sıralama bağıntısı denir.

Teorem 2.1.6. (Zorn Lemması) Boş olmayan ve her zinciri bir üst sınıra sahip olan kısmi sıralı bir kümenin maksimal elemanı vardır.

Tanım 2.1.25. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine bir latis (örgü) denir. Genellikle bir latiste $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ gösterimleri kullanılır. Eğer X in boş olmayan her A alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine bir tam latis denir.

Tam sayılar kümesi bilinen sıralamaya göre bir latistir fakat tam latis değildir.

Tanım 2.1.26. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x \preccurlyeq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $Tx \preccurlyeq Ty$ oluyorsa T fonksiyonuna azalmayan (artan, izoton, sıra korur) fonksiyon denir.

Teorem 2.1.7. (Knaster-Tarski) $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T: X \to X$ bir azalmayan bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki iki şartı sağlayan bir $x_0 \in X$ noktasının var olduğunu kabul edelim:

i) $x_0 \preccurlyeq Tx_0$,

ii) $\{x \in X: x_0 \preccurlyeq x\}$ kümesi içindeki her zincir bir üst sınıra sahip.

Bu durumda T bir maksimal sabit noktaya sahiptir.

İspat. X içinde

$$Q = \{x \in X : x \preccurlyeq Tx\} \cap \{x \in X : x_0 \preccurlyeq x\}$$

kümesini göz önüne alalım. $x_0 \in Q$ olduğundan Q kümesi boş değildir. Ayrıca Q içindeki her zincir bir supremuma sahiptir. C, Q da bir zincir olmak üzere $u = supC$ denirse her $c \in C$ için $c \preccurlyeq u$ olup T azalmayan olduğundan $Tc \preccurlyeq Tu$ olur. Yine $c \in C$ olduğundan $c \preccurlyeq Tc \preccurlyeq Tu$ olur. Bu ise Tu nun da C nin bir üst sınırı olduğunu gösterir. Fakat $u = supC$ olduğundan $u \preccurlyeq Tu$ olmalıdır. Bu ise $u \in Q$ olduğunu gösterir ki buradan Q nun her zincirinin Q da bir üst sınırının var olması demektir. O halde Zorn Lemması gereği Q nun z gibi bir maksimal elemanı vardır. $z \in Q$ olduğundan $z \preccurlyeq Tz$ ve T azalmayan olduğundan $Tz \preccurlyeq TTz$ olur ki bu $x_0 \preccurlyeq z$ ve $x_0 \preccurlyeq Tx_0 \preccurlyeq Tz$ olduğundan $Tz \in Q$ olmasını gerektirir. Fakat z, Q nun maximal elemanı olduğundan $z = Tz$ olmalıdır.

Teorem 2.1.8. (Tarski) $(X, \preccurlyeq)$ bir tam latis ve $T: X \to X$ bir azalmayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. X bir tam latis olduğundan X in kendisi bir supremuma ve infimuma sahiptir. Bu nedenle $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak biçimde $x_0 \in X$ vardır. Böylece

$$Q = \{x \in X : x \preccurlyeq Tx\}$$

kümesi boş değildir. Yine X tam latis olduğundan Q nun supremumu vardır. $u = supQ$ diyelim. O halde her $x \in Q$ için $x \preccurlyeq u$ olup T azalmayan olduğundan $Tx \preccurlyeq Tu$ ve üstelik $x \preccurlyeq Tu$ olur. Bu durumda $u = supQ$ olduğundan $u \preccurlyeq Tu$ dur. Diğer taraftan $Tu \preccurlyeq TTu$ olduğundan $Tu \in Q$ dur. Böylece $Tu \preccurlyeq u$ olup $u = Tu$ elde edilir.

Tanım 2.1.27. X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerinde hem bir $\preccurlyeq$ kısmi sıralama bağıntısı hem de bir d metriği varsa X e sıralı metrik uzay diyeceğiz ve bunu $(X, \preccurlyeq, d)$ üçlüsü ile göstereceğiz. Eğer X kümesi d metriğine göre tam ise bu uzaya sıralı tam metrik uzay adını vereceğiz.

Ran ve Reurings 2007 yılında, Banach sabit nokta teoremi ile Tarski sabit nokta teoremlerinden yaralanarak sıralı metrik uzaylarda ilk sabit nokta teoremini vermişlerdir. Daha sonra bu sabit nokta teoremi de çeşitli yollarla genelleştirilmiştir.

Uygunluğu sağlamak açısından "$\{x_n\}$, X içinde azalmayan ve $x_n \to z \in X$ olacak şekilde bir dizi ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z$" şartını Nieto şartı olarak isimlendireceğiz.

Teorem 2.1.9. $(X, \preccurlyeq, d)$ bir sıralı tam metrik uzay ve $T: X \to X$ azalmayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca $x \preccurlyeq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$ şartını sağlayan $L < 1$ sayısı ve $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda T sürekli veya X kümesi Nieto şartını sağlarsa T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.1.28. X bir topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x_0 \in X$ için

$$f(x_0) \leq liminf_{x \to x_0} f(x) = sup_{V \in N_x} inf_{x \in V} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alttan yarı sürekli fonksiyon denir. Benzer şekilde $x_0 \in X$ için

$$f(x_0) \geq limsup_{x \to x_0} f(x) = inf_{V \in N_x} sup_{x \in V} f(x)$$

oluyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında üstten yarı sürekli fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında alttan (üstten) yarı sürekli ise f fonksiyonuna X de alttan (üstten) yarı sürekli fonksiyon denir.

Önerme 2.1.8 X bir topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$ kümesinin kapalı olmasıdır.

İspat. f alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek için $\{x \in X: f(x) > \alpha\}$ kümesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir. $x_0 \in \{x \in X: f(x) > \alpha\}$ olsun. Bu durumda $x_0 \in X$ ve $f(x_0) > \alpha$ dır. f alttan yarı sürekli olduğundan

$$\alpha < f(x_0) \leq sup_{V \in N_{x_0}} inf_{x \in V} f(x)$$

olur. O halde $inf_{x \in V_0} f(x) > \alpha$ olacak biçimde bir $V_0 \in N_{x_0}$ vardır. Böylece

$$V_0 \subseteq \{x \in X: f(x) > \alpha\}$$

olur. Yani $\{x \in X: f(x) > \alpha\}$ kümesi açık, dolayısıyla $\{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$ kümesi kapalıdır. Tersine $\{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$ kümesi kapalı olsun. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$V_\varepsilon = \{x \in X: f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$$

diyelim. Bu durumda V_ε kümesi açık, yani $V_\varepsilon \in N_{x_0}$ dır. Böylece

$$inf_{x \in V_\varepsilon} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

olduğundan

$$liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan

$$liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

bulunur. Yani f alttan yarı sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 2.1.10. X bir kompakt topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x_0) = inf\{f(x): x \in X\}$$

olacak biçimde $x_0 \in X$ vardır.

İspat. $\alpha \in \mathbb{R}$ için $G_\alpha = \{x \in X: f(x) > \alpha\}$ olmak üzere $x_0 \in G_\alpha$ olsun. f alttan yarı sürekli bir fonksiyon olduğundan $inf_{x \in V_0} f(x) > \alpha$ olacak biçimde bir $V_0 \in N_{x_0}$ vardır. O halde her $x \in V_0$ için $f(x) > \alpha$ olduğundan $x \in G_\alpha$ olur. Yani $V_0 \subseteq G_\alpha$ olup x_0 noktası G_α kümesinin bir iç noktası olur. x_0 noktası keyfi olduğundan G_α kümesi açıktır. Ayrıca

$$X = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} G_\alpha$$

olduğundan $\{G_\alpha: \alpha \in \mathbb{R}\}$ sınıfı X in bir açık örtüsüdür. X kompakt olduğundan bu açık örtünün $\{G_{\alpha_i}: i = 1,2, \dots n\}$ gibi bir sonlu alt örtüsü vardır. $\alpha_0 = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $f(x) > \alpha_0$ dır. Bu ise $\inf\{f(x): x \in X\}$ in varlığını garanti eder. $m = inf\{f(x): x \in X\}$ diyelim ve $\beta > m$ olsun. Bu durumda

$$F_\beta = \{x \in X: f(x) \leq \beta\}$$

kümesi X in boş olmayan kapalı bir alt kümesi olur. $\{F_\beta: \beta > m\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğu açıktır. X kompakt olduğundan

$$\bigcap_{\beta > m} F_\beta \neq \emptyset$$

olur. Böylece her $\beta > m$ için $x_0 \in F_\beta$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_0) \leq m + \frac{1}{n}$ olup $f(x_0) \leq m$ bulunur. Bu ise infimum tanımı gereği $f(x_0) = m$ demektir.

(X,d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kompakt, $\varphi: K \to \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $T: K \to K$, her $x \in K$ için

$$d(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\varphi(x_0) = \inf\{\varphi(x): x \in K\}$ olacak biçimde bir $x_0 \in K$ noktasının var olduğunu biliyoruz. $T: K \to K$ bir dönüşüm olduğundan $\varphi(Tx_0) \in K$ olup infimum tanımı gereği $\varphi(x_0) \leq \varphi(Tx_0)$ olur. Böylece

$$0 \leq d(x_0, Tx_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(Tx_0) \leq 0$$

olduğundan $x_0 = Tx_0$ bulunur. Yani T bir sabit noktaya sahiptir.

Lemma 2.1.1. (X,d) bir tam metrik uzay ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $\{x_n\}$, X içinde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

şartını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsar ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, z) \leq \varphi(x_n) - \varphi(z)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

eşitsizliği sağlandığından $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi azalandır. Ayrıca φ fonksiyonu alttan sınırlı olduğundan $\{\varphi(x_n)\}$ yakınsaktır. Diğer taraftan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m-1} d(x_n, x_{n+1}) &= d(x_0, x_1) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)\\ &\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_m)\\ &\leq \varphi(x_0) - \varphi(x_m)\\ &\leq \varphi(x_0) - inf_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)\end{aligned}$$

olduğundan $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_0) - inf_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)$$

bulunur ki bu, serinin yakınsak olduğunu gösterir. Ayrıca $m > n$ için

$$\begin{aligned}d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)\\ &= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})\\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} d(x_k, x_{k+1})\end{aligned}$$

olur ki yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfır olduğundan $lim_{n\to\infty}\, d(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. Yani $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan bu dizi bir $z \in X$ noktasına yakınsar. Ayrıca $m > n$ için

$$\begin{aligned}d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1})\\ &\leq \varphi(x_n) - \varphi(x_m)\end{aligned}$$

olduğundan $m \to \infty$ için limit alınır ve φ fonksiyonunun alttan yarı sürekli olduğu düşünülürse her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, z) \leq \varphi(x_n) - \varphi(z)$ bulunur.

Teorem 2.1.11. (X, d) bir tam metrik uzay ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $inf_{x \in X} \varphi(x) < \varphi(u)$ olacak biçimdeki her $u \in X$ için $u \neq v$ ve

$$d(u, v) \leq \varphi(u) - \varphi(v)$$

şartlarını sağlayan bir $v \in X$ var olsun. Bu durumda $\varphi(x_0) = inf_{x \in X} \varphi(x)$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır.

İspat. Her $y \in X$ için $inf_{x \in X} \varphi(x) < \varphi(y)$ olduğunu kabul edelim. $u_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$inf_{x \in X} \varphi(x) < \varphi(u_0)$$

olduğundan $u_0 \neq u_1$ ve $d(u_0, u_1) \leq \varphi(u_0) - \varphi(u_1)$ olacak biçimde $u_1 \in X$ vardır. Yine

$$inf_{x \in X} \varphi(x) < \varphi(u_1)$$

olduğundan $u_1 \neq u_2$ ve $d(u_1, u_2) \leq \varphi(u_1) - \varphi(u_2)$ olacak biçimde $u_2 \in X$ vardır. Bu biçimde devam ederek $u_{n-1} \in X$ noktasını seçelim. Şimdi

$$S_n = \{w \in X: d(u_{n-1}, w) \leq \varphi(u_{n-1}) - \varphi(w)\}$$

olsun. Yukarıdaki düşünce ile $S_n \neq \emptyset$ olduğu gösterilebilir. İnfimum tanımı göz önüne alınırsa her $\varepsilon > 0$ için $\varphi(z) < inf_{w \in S_n} \varphi(w) + \varepsilon$ olacak biçimde $z \in S_n$ vardır. O halde

$$\varphi(u_{n-1}) - inf_{w \in S_n} \varphi(w) > 0$$

olduğundan

$$\varphi(u_n) < inf_{w\in S_n}\varphi(w) + \frac{1}{2}\{\varphi(u_{n-1}) - inf_{w\in S_n}\varphi(w)\}$$

olacak biçimde $u_n \in S_n$ vardır. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(u_{n-1}, u_n) \leq \varphi(u_{n-1}) - \varphi(u_n)$$

olduğundan Lemma 2.1.1 gereği $\{u_n\}$ dizisi bir $u \in X$ noktasına yakınsar. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(u_{n-1}, u) \leq \varphi(u_{n-1}) - \varphi(u)$$

eşitsizliği sağlanır. Yine $inf_{x\in X}\varphi(x) < \varphi(u)$ olduğundan $u \neq v$ ve $d(u,v) \leq \varphi(u) - \varphi(v)$ olacak biçimde $v \in X$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}\varphi(v) &\leq \varphi(u) - d(u,v)\\ &\leq \varphi(u) - d(u,v) + \varphi(u_{n-1}) - \varphi(u) - d(u_{n-1},u)\\ &= \varphi(u_{n-1}) - [d(u,v) + d(u_{n-1},u)]\\ &\leq \varphi(u_{n-1}) - d(u_{n-1},v)\end{aligned}$$

olduğundan $v \in S_n$ olur. O halde

$$2\varphi(u_n) - \varphi(u_{n-1}) \leq inf_{w\in S_n}\varphi(w) \leq \varphi(v)$$

olup

$$\varphi(v) < \varphi(u) \leq \lim_{n\to\infty}\varphi(u_n) \leq \varphi(v)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece $\varphi(x_0) = inf_{x\in X}\varphi(x)$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ vardır.

Şimdi Caristi sabit nokta teoremini ifade ve ispat edebiliriz.

2. 2. Metrik Uzayda Caristi Tip Sabit Nokta Teoremi Ve Bazı Genelleştirmeleri

Teorem 2.2.1. (Caristi) (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Eğer T dönüşümü sürekli ise teoremin ispatı basittir. Gerçekten $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

olacağından Lemma 2.1.1 gereği $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla bu dizi bir $z \in X$ için noktasına yakınsar. T dönüşümü sürekli olduğundan $Tz = z$ bulunur.

Şimdi T dönüşümünün sürekli olmaması durumunda ispatı yapalım. Bunun için $u \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$C = \{x \in X: d(u, x) \leq \varphi(u) - \varphi(x)\}$$

kümesini göz önüne alalım. $Tu \in C$ olduğundan C boş değildir. Ayrıca C bir kapalı yuvar olduğundan bir kapalı kümedir. Şimdi $TC \subseteq C$ olduğunu gösterelim. $x \in C$ olsun. O halde $d(u, x) \leq \varphi(u) - \varphi(x)$ olup

$$\begin{aligned}
\varphi(Tx) &\leq \varphi(x) - d(x, Tx) \\
&\leq \varphi(x) - d(x, Tx) + \varphi(u) - \varphi(x) - d(u, x) \\
&= \varphi(u) - [d(x, Tx) + d(u, x)] \\
&\leq \varphi(u) - d(u, Tx)
\end{aligned}$$

olduğundan $Tx \in C$ dir.

Şimdi kabul edelim ki her $x \in C$ için $Tx \neq x$ olsun. O halde her $x \in C$ için $x \neq w$ ve $d(x,w) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$ olacak biçiminde $w \in C$ vardır. Dolayısıyla

$$\varphi(x_0) = inf_{x\in C}\varphi(x)$$

olacak biçiminde $x_0 \in C$ vardır. Böylece

$$0 < d(x_0, Tx_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(Tx_0) = 0$$

olup bu bir çelişkidir. O halde $Tz = z$ olacak biçimde bir $z \in C \subseteq X$ vardır.

Caristi nin teoremi sabit noktanın tekliğini garanti etmez.

Örnek 2.2.1. $X = [0, \infty)$ alışılmış metrik ile birlikte göz önüne alınsın. $T: X \to X$ dönüşümü $Tx = x$ ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi(x) = 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) = 0 \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

olduğundan Caristi sabit nokta teoreminin tüm şartları sağlanır. Ancak T dönüşümünün sabit noktası tek değildir.

Şimdi Caristi sabit nokta teoremi yardımıyla Banach sabit nokta teoreminin ispatını verelim.

Teorem 2.2.2. (Banach) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $\varphi: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $\varphi(x) = (1-L)^{-1}d(x, Tx)$ biçiminde tanımlayalım. φ fonksiyonunun alttan sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca T bir büzülme dönüşümü olduğundan sürekli ve dolayısıyla φ de süreklidir. O halde φ alttan yarı süreklidir.

Yine T bir büzülme dönüşümü olduğundan her $x \in X$ için $d(Tx, T^2x) \leq Ld(x, Tx)$ eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$d(x, Tx) - Ld(x, Tx) \leq d(x, Tx) - d(Tx, T^2x)$$

olup buradan

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq (1 - L)^{-1}[d(x, Tx) - d(Tx, T^2x)] \\ &= \varphi(x) - \varphi(Tx) \end{aligned}$$

elde edilir. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0$ biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})$$

olacağından Lemma 2.1.1 gereği $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla bu dizi bir $z \in X$ için noktasına yakınsar. T dönüşümü sürekli olduğundan $Tz = z$ bulunur.

Şimdi Caristi sabit nokta teoreminin kısmi sıralama bağıntısı yardımıyla yapılan ispatını vermek için aşağıdaki lemmayı göz önüne alalım.

Lemma 2.2.1. (X, d) bir metrik uzay ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $x, y \in X$ için

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

biçiminde tanımlanan $\preccurlyeq$ bağıntısı X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat. Her $x \in X$ için $d(x, x) = 0 \leq \varphi(x) - \varphi(x)$ olduğundan $x \preccurlyeq x$ dir. Yani $\preccurlyeq$ yansımalıdır. $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq x$ ise

$$d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y) \text{ ve } d(y, x) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$$

olacağından $2d(x,y) \leq 0$ veya $x = y$ olur. Yani $\preccurlyeq$ ters simetriktir. Son olarak $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z$ ise

$d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$ ve $d(y,z) \leq \varphi(y) - \varphi(z)$

olacağından

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq \varphi(x) - \varphi(z)$$

olur. O halde $x \preccurlyeq z$ olup $\preccurlyeq$ geçişmelidir.

Örnek 2.2.2. $X = \mathbb{R}$ ve d alışılmış metrik olsun. $\varphi: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\varphi(x) = -x$ olarak tanımlanırsa φ ve d yardımıyla elde edilen sıralama $\mathbb{R}$ üzerinde bilinen sıralama olur.

Teorem 2.2.3. (Bishop-Phelps) (X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her bir $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq z$ şartını sağlayan bir $z \in X$ vardır. Yani her bir $x_0 \in X$ için

$$\varphi(z) + d(x_0, z) \leq \varphi(x_0)$$

ve $x \neq z$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için

$$\varphi(z) < d(x,z) + \varphi(x)$$

olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

Şimdi Caristi nin sabit nokta teoreminin bu sıralama yardımıyla yapılan ispatına yer verelim.

İspat. X üzerinde φ ve d yardımıyla elde edilen sıralamayı göz önüne alırsak Bishop-Phelps teoreminin tüm şartları sağlanır. Bu durumda X in z gibi bir maksimal elemanı vardır. Böylece

$d(z, Tz) \leq \varphi(z) - \varphi(Tz)$

eşitsizliği sağlandığından $z \preccurlyeq Tz$ elde edilir. z maksimal olduğundan $Tz = z$ olmalıdır.

Teorem 2.2.4. X boş olmayan bir küme olmak üzere $\lhd$, X üzerinde yansımalı bir bağıntı ve $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca

i) $x \lhd y$ ve $x \neq y$ ise $\varphi(y) < \varphi(x)$,

ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \lhd x_{n+1}$ olacak biçimdeki her $\{x_n\}$ dizisi için, öyle bir $z \in X$ vardır ki her bir $k \in \mathbb{N}$ için $x_m \lhd z$ olacak biçimde $m \geq k$ vardır.

şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

a) $2 \leq i \leq n$ için $x_{i-1} \lhd x_i$ ve $x_n \lhd z$ olacak biçimde X in sonlu sayıda $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanı vardır.

b) $z \lhd x$ olması $z = x$ olmasını gerektirir.

Bu teoremde $\lhd$ bağıntısının sadece yansımalı olduğu kabul edilmiştir. Ancak (i) şartından bu bağıntının ters simetrik olduğu elde edilebilir. Yine de geçişme özelliği var olmadığından $\lhd$ bağıntısı bir sıralama bağıntısı olmayabilir. Burada $\ll$ bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğu kabul edilirse yukarıdaki teoremden Brezis-Browder ın sıralama prensibi olarak bilinen aşağıdaki teoremi bir özel hal olarak elde edebiliriz.

Teorem 2.2.5. (Brezis-Browder) $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme $\varphi: X \to \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca

i) $x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ ise $\varphi(y) < \varphi(x)$,

ii) X de azalmayan her dizi, X de bir üst sınıra sahip olsun.

şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda verilen her $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq z$ olacak biçimde maksimal bir $z \in X$ noktası vardır.

Şimdi Caristi teoreminin bazı genelleştirmelerine yer verelim.

Teorem 2.2.6. (X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x,Tx) \leq maks\{c(\varphi(x)), c(\varphi(Tx))\}\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. X üzerinde

$$x \lhd y \Leftrightarrow d(x,y) \leq maks\{c(\varphi(x)), c(\varphi(y))\}\{\varphi(x) - \varphi(y)\}$$

ile tanımlı $\lhd$ bağıntısını göz önüne alalım. Bu bağıntının yansımalı olduğu açıktır. Ayrıca $x \lhd y$ ve $x \neq y$ ise $d(x,y) > 0$ olduğundan $\varphi(y) < \varphi(x)$ olur. Şimdi $\{x_n\}$ dizisi X de her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \ll x_{n+1}$ şartını sağlayan bir dizi olsun. Böylece $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi reel sayıların artmayan ve alttan sınırlı bir dizisi olur. O halde $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = r$ olacak biçimde bir $r \geq 0$ vardır. c fonksiyonu üstten yarı sürekli olduğundan $limsup c(\varphi(x_n)) \leq c(r)$ olur. Böylece her $n \geq n_0$ için $c(\varphi(x_n)) \leq c(r) + 1$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz. Şimdi her $n \geq n_0$ için $x_n \lhd x_{n+1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq maks\{c(\varphi(x_n)), c(\varphi(x_{n+1}))\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\} \\ &\leq \{c(r)+1\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\} \end{aligned}$$

olup $m > n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \{c(r)+1\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. Şimdi her $k \in \mathbb{N}$ için $x_m \lhd z$ olacak şekilde $m \geq k$ sayısının var olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki üç durumu inceleyelim.

Durum 1. Kabul edelim ki

$$c\big(\varphi(x_m)\big) = \sup\{c(\varphi(x_n\ )\ ) : n \geq m\}$$

olacak biçimde bir $m \geq k$ var olsun. Bu durumda her $n \geq m$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

olur. Böylece $n \geq m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - \varphi(x_n)\} \end{aligned}$$

elde edilir ki $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_m, z) \leq c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - \varphi(z)\}$$

bulunur. Bu ise $x_m \lhd z$ olduğunu gösterir.

Durum 2. Kabul edelim ki $m \geq k$ için $c\big(\varphi(x_n)\big) > c\big(\varphi(x_m)\big)$ olacak biçimde bir $n > m$ var fakat $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = r = \varphi(z)$ olsun. Bu durumda c üstten yarı sürekli olduğundan

$$\sup\big\{c\big(\varphi(x_n)\big) : n \geq k\big\} = limsupc\big(\varphi(x_n)\big) \leq c\big(\varphi(z)\big)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece $n \geq k$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \text{maks}\{c(\varphi(x_n)), c(\varphi(x_{n+1}))\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$
$$\leq c(\varphi(z))\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

olacağından yukarıdaki düşünce ile

$$d(x_n, x_k) \leq c(\varphi(z))\{\varphi(x_k) - \varphi(x_n)\}$$

elde edilebilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_k, z) \leq c(\varphi(z))\{\varphi(x_k) - \varphi(z)\}$$

bulunur ki bu $x_m \lhd z$ olduğunu gösterir.

Durum 3. Kabul edelim ki $m \geq k$ için $c(\varphi(x_n)) > c(\varphi(x_m))$ olacak biçimde bir $n > m$ var fakat $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = r > \varphi(z)$ olsun. Bu durumda

$$\sup\{c(\varphi(x_n)) : n \geq k\} = limsupc(\varphi(x_n)) = \beta$$

olacak biçimde $\beta > 0$ sayısının var olduğunu biliyoruz. Böylece $c(\varphi(x_m)) \geq \frac{\beta}{2}$ ve $n \geq m$ için $\varphi(x_n) \leq 2r - \varphi(z)$ olacak biçimde $m > k$ tam sayısı bulabiliriz. Buradan $n \geq m$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \text{maks}\{c(\varphi(x_n)), c(\varphi(x_{n+1}))\}\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$
$$\leq \beta\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$
$$\leq 2c(\varphi(x_m))\{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1})\}$$

bulunur. O halde $n \geq m$ için

$$d(x_n, x_m) \leq 2c(\varphi(x_m))\{\varphi(x_m) - \varphi(x_n)\}$$

elde edilir ki $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_m, z) \leq 2c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - r\}$$

bulunur. Diğer taraftan $\varphi(x_m) \leq 2r - \varphi(z)$ olduğundan

$$2\{\varphi(x_m) - r\} = \varphi(x_m) - 2r + \varphi(x_m) \leq \varphi(x_m) - \varphi(z)$$

olur. O halde son olarak

$$d(x_m, z) \leq c\big(\varphi(x_m)\big)\{\varphi(x_m) - \varphi(z)\}$$

bulunur ki bu $x_m \lhd z$ olduğunu gösterir.

O halde Teorem 2.2.4 uygulanırsa $z \lhd y$ olması $z = y$ olmasını gerektirir. Bununla birlikte

$$d(z, Tz) \leq maks\big\{c\big(\varphi(z)\big), c\big(\varphi(Tz)\big)\big\}\{\varphi(z) - \varphi(Tz)\}$$

olduğundan $z \lhd Tz$ olur ki buradan $z = Tz$ bulunur.

Teorem 2.2.7. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artmayan bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq c\big(\varphi(x)\big)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa T dönüşümü bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x_0 \in X$ için

$$d(x_0, z) \leq \int_0^{\varphi(x_0)} c(t)dt$$

olur.

İspat. $\mu: X \to \mathbb{R}^+$, $\mu(x) = \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt$ biçiminde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. φ alttan yarı sürekli olduğundan $x_n \to x$ için $\varphi(x) \leq liminf\varphi(x_n)$ olup

$$liminf\mu(x_n) = liminf \int_0^{\varphi(x_n)} c(t)dt \geq liminf \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt = \mu(x)$$

bulunur. Yani μ fonksiyonu da alttan yarı süreklidir. Şimdi X üzerinde

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow d(x,y) \leq \mu(x) - \mu(y)$$

biçiminde tanımlı $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısını göz önüne alalım. Bu durumda Brezis-Browder sıralama prensibinin tüm şartlarının sağlandığını görmek kolaydır. O halde her $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq z$ olacak biçimde maksimal bir $z \in X$ noktası vardır. Buradan

$$d(z,Tz) \leq c\big(\varphi(z)\big)\{\varphi(z) - \varphi(Tz)\} \leq \int_{\varphi(Tz)}^{\varphi(z)} c(t)dt \ = \mu(z) - \mu(Tz)$$

elde edilir ki bu $z \preccurlyeq Tz$ olduğunu gösterir. z maksimal olduğundan $z = Tz$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$d(x_0, z) \leq \mu(x_0) - \mu(z) = \int_{\varphi(z)}^{\varphi(x_0)} c(t)dt \leq \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt$$

elde edilir.

Teorem 2.2.8. (X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x,Tx) \leq c\big(\varphi(Tx)\big)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa T dönüşümü bir $z \in X$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x_0 \in X$ için

$$d(x_0, z) \leq \int_0^{\varphi(x_0)} c(t)dt$$

olur.

İspat. $\mu: X \to \mathbb{R}^+$, $\mu(x) = \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt$ biçiminde tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. φ alttan yarı sürekli olduğundan μ fonksiyonu da alttan yarı süreklidir. Şimdi X üzerinde

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow d(x, y) \leq \mu(x) - \mu(y)$$

biçiminde tanımlı $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısını göz önüne alalım. Bu durumda Brezis-Browder sıralama prensibinin tüm şartlarının sağlanır. O halde her $x_0 \in X$ için $x_0 \preccurlyeq z$ olacak biçimde maksimal bir $z \in X$ noktası vardır. Buradan

$$d(z, Tz) \leq c\big(\varphi(Tz)\big)\{\varphi(z) - \varphi(Tz)\} \leq \int_{\varphi(Tz)}^{\varphi(z)} c(t)dt \ = \mu(z) - \mu(Tz)$$

elde edilir ki bu $z \preccurlyeq Tz$ olduğunu gösterir. z maksimal olduğundan $z = Tz$ olmalıdır. Diğer taraftan

$$d(x_0, z) \leq \mu(x_0) - \mu(z) = \int_{\varphi(z)}^{\varphi(x_0)} c(t)dt \leq \int_0^{\varphi(x)} c(t)dt$$

elde edilir.

Teorem 2.2.9. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq c\big(\varphi(x)\big)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. X üzerinde

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow d(x, y) \leq c\big(\varphi(x)\big)\{\varphi(x) - \varphi(y)\}$$

biçiminde tanımlı $\preccurlyeq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Buna göre $x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ ise $\varphi(x) > \varphi(y)$ olduğu açıktır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisi X de azalmayan bir dizi olsun. Bu durumda $m > n$ için $x_n \preccurlyeq x_m$ olduğundan

$$d(x_n, x_m) \leq c\big(\varphi(x_n)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\}$$

olur. $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi artmayan olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $c\big(\varphi(x_n)\big) \leq c\big(\varphi(x_1)\big)$ dir. Böylece

$$d(x_n, x_m) \leq c\big(\varphi(x_1)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\}$$

olur ki bu $\{\varphi(x_n)\}$ dizisi yakınsak olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. φ alttan yarı sürekli olduğundan $\varphi(z) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ olur ki yukarıdaki eşitsizlikten $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_n, z) \leq c\big(\varphi(x_n)\big)\{\varphi(x_n) - \varphi(z)\}$$

bulunur. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z$ olur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin z gibi bir üst sınıra sahip olduğunu gösterir. Böylece Brezis-Browder sıralama prensibi gereği X in u gibi bir maksimal elemanı vardır. Bu u elemanı için

$d(u, Tu) \le c\big(\varphi(u)\big)\{\varphi(u) - \varphi(Tu)\}$

olduğundan $u \preccurlyeq Tu$ olur ki u maksimal olduğundan $u = Tu$ elde edilir.

Teorem 2.2.10. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$d(x, Tx) \le \varphi(x)$ ve $d(x, Tx) \le \psi(d(x, Tx))\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$

eşitsizliklerini sağlarsa, T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $c(t) = \sup\{\psi(s): 0 \le s \le t\}$ ifadesini göz önüne alalım. Bu durumda ψ fonksiyonu üstten yarı sürekli olduğundan $c: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ iyi tanımlı ve azalmayandır. Böylece her $x \in X$ için $d(x, Tx) \le \varphi(x)$ olduğundan $c(d(x, Tx)) \le c(\varphi(x))$ olur ki hipotezdeki eşitsizlikten her $x \in X$ için

$d(x, Tx) \le c(\varphi(x))\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$

elde edilir. Böylece Teorem 2.2.9 dan ispat tamamlanır.

Sonuç 2.2.1. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ ve $\gamma: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli fonksiyonlar olmak üzere her $t > 0$ için

$\gamma(t) > 0$ ve $limsup_{t \to 0^+} \frac{t}{\gamma(t)} < \infty$

olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$d(x, Tx) \le \varphi(x)$ ve $\gamma(d(x, Tx)) \le \varphi(x) - \varphi(Tx)$

eşitsizliklerini sağlarsa T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.2.11. (X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to \mathbb{R}^+$ alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $\psi: X \to \mathbb{R}^+$ en az bir $\delta > 0$ için

$$\sup\{\psi(x): \varphi(x) \leq \delta + \inf\{\varphi(w): w \in X\}\} < \infty$$

olacak biçimde bir fonksiyon olsun. $T: X \to X$, her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \psi(x)\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliğini sağlarsa, T dönüşümü X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\psi(x) > 0$ olması durumunda $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ dir. Yine $\psi(x) = 0$ ise $d(x, Tx) = 0$ olacağından $\varphi(Tx) = \varphi(x)$ olur. O halde her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olur. Şimdi

$$Y = \{x \in X: \varphi(x) \leq \delta + \inf\{\varphi(w): w \in X\}\}$$

ve $\rho = \sup\{\psi(x): x \in Y\}$ olsun. $\rho < \infty$ olduğu hipotezde verilmiştir. φ alttan yarı sürekli olduğundan Y kümesi kapalıdır. Dolayısıyla X tam olduğundan Y de tamdır. Ayrıca infimum tanımı göz önüne alınırsa Y kümesi boş değildir. Yine her $x \in X$ için $\varphi(Tx) \leq \varphi(x)$ olduğundan $TY \subseteq Y$ olur. Diğer taraftan her $x \in Y$ için

$$d(x, Tx) \leq \rho\{\varphi(x) - \varphi(Tx)\}$$

eşitsizliği de sağlanır. Şimdi $\varphi_1: Y \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi_1(x) = \rho\varphi(x)$ olarak tanımlanırsa φ_1 fonksiyonu da alttan yarı sürekli olur. Sonuç olarak Y üzerinde Caristi teoreminin tüm şartları sağlandığından T dönüşümü Y de ve dolayısıyla X de bir sabit noktaya sahiptir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1.Kısmi Metrik Uzay

Kısmi metrik kavramı boş olmayan bir X kümesi üzerinde Matthews tarafından tanımlanmıştır. Kısmi metrik uzayın en önemli özelliklerinden biri noktanın kendine olan uzaklığının sıfır olmayabileceğidir. Şimdi kısmi metrik uzayın tanımını ve bu uzayın özelliklerini verelim.

Tanım 3.1.1. X boş olmayan bir küme ve $p: X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$p_1)$ $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$
$p_2)$ $p(x,x) \leq p(x,y)$
$p_3)$ $p(x,y) = p(y,x)$
$p_4)$ $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

şartları sağlanırsa (X, p) ikilisine kısmi metrik uzay denir.

Eğer $p(x,y) = 0$ ise (p_1) ve (p_2) özeliklerinden $x = y$ olduğu görülür. Fakat $x = y$ ise $p(x,y)$ sıfır olmayabilir.

Örnek 3.1.1. Her metrik uzay bir kısmi metrik uzaydır.

Örnek 3.1.2. $p: [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, $p(x,y) = maks\{x,y\}$ ile tanımlı fonksiyon bir kısmi metriktir. Gerçekten; $x = y$ ise

$$p(x,x) = x = y = p(y,y) = p(x,y)$$

dir.

$$p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$$

ise $x = y$ bulunur. Böylece (p_1) sağlanır.

$$p(x,x) = x \leq maks\{x,y\} = p(x,y)$$

olup (p_2) sağlanır.

$$p(x,y) = maks\{x,y\} = maks\{y,x\} = p(y,x)$$

yani simetri özelliği (p_3) de sağlanır. Son olarak

$$p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olduğunu gösterelim. Eğer $z < x < y$ ise

$$p(x,y) = y \leq y + x - z = p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olup (p_4) sağlanır. Eğer $x < z < y$ ise

$$p(x,y) = y \leq z + y - z = p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olup (p_4) sağlanır. Eğer $x < y < z$ ise

$$p(x,y) = y \leq y + z - z = p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olup (p_4) sağlanır. Böylece p, X üzerinde bir kısmi metriktir.

Örnek 3.1.3. $a \leq b$ olmak üzere I tüm $[a,b]$ aralıklarının bir kümesi olsun. $p: I \times I \to [0,\infty)$, $p([a,b],[c,d]) = maks\{b,d\} - min\{a,c\}$ ile tanımlanan fonksiyon I üzerinde bir kısmi metriktir.

Örnek 3.1.4. $X = \mathbb{R}$ ve $p(x,y) = e^{maks\{x,y\}}$ biçiminde tanımlanırsa (X,p) ikilisi bir kısmi metrik uzaydır.

Tanım 3.1.2. (X,p) herhangi bir kısmi metrik uzay olsun. Bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X: p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$$

kümesine x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B_p}(x,\varepsilon) = \{y \in X: p(x,y) \leq p(x,x) + \varepsilon\}$$

kümesine ise x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir.

NOT: (X,p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $x \in X$ için $\{B_p(x,\varepsilon): x \in X, \varepsilon > 0\}$ açık yuvarlar ailesini taban kabul ederek X üzerinde bir τ_p topolojisi oluştururuz. Bu topoloji T_0 topolojisidir.

Örnek 3.1.4. $X = [0,\infty)$ ve $p(x,y) = maks\{x,y\}$ olarak alınırsa biliyoruz ki (X,p) bir kısmi metrik uzaydır. Şimdi p metriğine göre X in elemanlarının herhangi bir $\varepsilon > 0$ için açık komşuluklarını bulalım.

$$\begin{aligned} B_p(x,\varepsilon) &= \{y \in X: p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\} \\ &= \{y \in X: maks\{x,y\} < x + \varepsilon\} \\ &= [0, x + \varepsilon) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece bu açık yuvarlardan elde edilen taban

$$\beta = \{[0,a): a \in (0,\infty)\}$$

biçimindedir. O halde

$$\tau_p = \{\emptyset, X\} \cup \{[0,a): a \in (0,\infty)\}$$

olarak elde edilir.

Önerme 3.1.1. p, X üzerinde bir kısmi metrik ise $p^s: X \times X \to [0,\infty)$

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

biçiminde tanımlı fonksiyon X de bir metriktir.

İspat. Her $x, y \in X$ için

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \geq 0$$

dir. Çünkü $p(x,y) \geq p(x,x)$ ve $p(x,y) \geq p(y,y)$ dir.

$$\begin{aligned} x = y \Rightarrow p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(x,x) - 2p(x,x) = 0 \end{aligned}$$

ve $p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0$ ise $x = y$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} 2p(x,y) &= p(x,x) + p(y,y) \\ &\leq p(x,y) + p(y,y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2p(x,y) &= p(x,x) + p(y,y) \\ &\leq p(x,x) + p(x,y) \end{aligned}$$

olup bu $p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$ olduğunu gösterir ki buradan $x = y$ elde edilir.

$$\begin{aligned} p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(y,x) - p(y,y) - p(x,x) = p^s(y,x) \end{aligned}$$

yani simetri özelliği de sağlanır. Son olarak $p^s(x,y) \leq p^s(x,z) + p^s(z,y)$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
p^s(x,y) &\leq 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\
&\leq 2[p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)] - p(x,x) - p(y,y) \\
&= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) + 2p(z,y) \ - \ p(z,z) - p(y,y) \\
&= p^s(x,z) + p^s(z,y)
\end{aligned}
$$

olup p^s, X üzerinde bir metriktir.

Ayrıca p, X üzerinde bir kısmi metrik ise $p^w\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$,

$$p^w(x,y) = p(x,y) - min\{p(x,x), p(y,y)\}$$

ile tanımlı fonksiyon da X üzerinde bir metriktir.

Önerme 3.1.2. (X,p) bir kısmi metrik uzay olsun. Bu takdirde p^s ile p^w metrikleri denk metriklerdir.

İspat. p^s metriğinin tanımı gereği

$$
\begin{aligned}
p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\
&= p(x,y) - p(x,x) + p(x,y) - p(y,y) \\
&\leq 2p^w(x,y) \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

yazılır. Ayrıca p^w nın tanımından

$$
\begin{aligned}
p^w(x,y) &= p(x,y) - min\{p(x,x), p(y,y)\} \\
&\leq p(x,y) - min\{p(x,x), p(y,y)\} \\
&\quad + p(x,y) - maks\{p(x,x), p(y,y)\} \\
&= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\
&= p^s(x,y) \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

yazılır. Böylece (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{2}p^s(x,y) \leq p^w(x,y) \leq p^s(x,y)$$

elde edilir.

Önerme 3.1.3. (X,p) bir kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n)$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $x_n \to x$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \geq 1$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq N$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ dır.

$$0 \leq p(x_n,x) - p(x,x) < \varepsilon$$

bulunur. Her $\varepsilon > 0$ için bu eşitsizlik doğru olduğu için

$$\lim_{n\to+\infty} p(x_n,x) = p(x,x)$$

dır. Tersine;

$$\lim_{n\to+\infty} p(x_n,x) = p(x,x)$$

ise her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \geq 1$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq N$ için

$$p(x_n,x) < p(x,x) + \varepsilon$$

olur. Böylece her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \geq 1$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq N$ için $x_n \in B(x,\varepsilon)$ olur. Bu da $x_n \to x$ demektir.

Tanım 3.1.3. (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun.

i) $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere, eğer $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ limiti var ve sonlu ise $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

ii) X deki her Cauchy dizisi X de yakınsak ise yani $x \in X$ için $p(x, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ oluyorsa X e tamdır denir.

Not: Kısmi metrik uzaylarda yakınsak bir dizinin Cauchy dizisi olması gerekmez.

Örnek 3.1.5. $X = \mathbb{R}^-$ kümesi üzerinde $p(x, y) = -min\{x, y\}$ kısmi metriğini alalım. Biliyoruz ki (X, p) ikilisi bir kısmi metrik uzaydır. $x_n = \{0, -1,0, -1,0, -1, \dots\}$ bu uzayda bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, -1) = \lim_{n\to\infty} (-min\{x_n, -1\}) = 1 = p(-1, -1)$$

olup $\{x_n\}$ dizisi -1 e yakınsar. Fakat $\lim_{n,k\to\infty} p(x_n, x_k)$ limiti yoktur. Buradan $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olmadığı görülür.

Aşağıdaki lemma p^s ile p arasındaki ilişkiyi vermekte olup sabit nokta çalışmaları için sonuç elde etmekte önemli bir rol oynar.

Lemma 3.1.1. (X, p) kısmi metrik uzay olsun.

i) $\{x_n\}$ dizisinin (X, p) de bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul $\{x_n\}$ nin (X, p^s) de bir Cauchy dizisi olmasıdır.

ii) (X, p) nin tam olması için gerek ve yeter koşul (X, p^s) nin tam olmasıdır.

İspat. p^s ile p^w metrikleri birbirine denk olduğundan ispatı p^w için verelim.

i) $\{x_n\}$ dizisi (X, p) de bir Cauchy dizisi olsun. Böylece her $\varepsilon > 0$için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $n, m \geq n_0$ iken $|p(x_n, x_m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde $a \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan her $n, m \geq n_0$ için

$$
\begin{aligned}
p^w(x_n,x_m) &= p(x_n,x_m) - min\{p(x_n,x_n),p(x_m,x_m)\} \\
&= p(x_n,x_m) - a + a - min\{p(x_n,x_n),p(x_m,x_m)\} \\
&\leq |p(x_n,x_m) - a| + |a - min\{p(x_n,x_n),p(x_m,x_m)\}| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir ki buradan $\{x_n\}$ nin (X,p^w) de bir Cauchy dizisi olduğu görülür. Şimdi $\{x_n\}$, (X,p^w) da bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olsun. Her $m \geq n_0$ için $p^w(x_n,x_m) < \frac{1}{2}$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$
\begin{aligned}
p(x_n,x_n) &\leq \left|p(x_n,x_n) - p\left(x_{n_0},x_{n_0}\right)\right| + p\left(x_{n_0},x_{n_0}\right) \\
&\leq 2p^w\left(x_n,x_{n_0}\right) + p\left(x_{n_0},x_{n_0}\right) \\
&< 1 + p\left(x_{n_0},x_{n_0}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu $\{p(x_n,x_n)\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ de sınırlı olduğunu gösterir. Böylece $a \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\left\{p\left(x_{n_k},x_{n_k}\right)\right\}$ alt dizisi a ya yakınsar. Diğer taraftan $\{x_n\}$, (X,p^w) da bir Cauchy dizisi olduğundan $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $n,m \geq n_\varepsilon$ iken $p^w(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Buradan

$$
|p(x_n,x_n) - p(x_m,x_m)| \leq 2p^w(x_n,x_m) < \varepsilon
$$

elde edilir ki bu $\{p(x_n,x_n)\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) = a$ olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
|p(x_n,x_n) - a| &\leq p(x_n,x_m) - min\{p(x_n,x_n),p(x_m,x_m)\} \\
&\quad + |min\{p(x_n,x_n),p(x_m,x_m)\} - a| \\
&= p^w(x_n,x_m) + |min\{p(x_n,x_n),p(x_m,x_m)\} - a|
\end{aligned}
$$

olduğu kullanılırsa $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = a$ bulunur ki bu $\{x_n\}$ nin (X,p) de bir Cauchy dizisi olduğu gösterir.

ii) (X,p^w) tam metrik uzay olsun. $\{x_n\}$, (X,p) de bir Cauchy dizisi ise (X,p^w) da bir Cauchy dizisidir. (X,p^w) tam olduğundan $x\in X$ vardır öyle ki $\lim_{n\to\infty} p^w(x_n,x)=0$ dır. $\{x_n\}$, (X,p) de bir Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n)=p(x,x)$ olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda $n_0\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $n\geq n_0$ iken $p^w(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$ olur. Böylece

$$
\begin{aligned}
|p(x_n,x_n)-p(x,x)| &= maks\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}-min\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}\\
&= 2\left\{\frac{1}{2}\{maks\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}+min\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}\}\right\}\\
&\quad -2min\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}\\
&= 2[\tfrac{p(x_n,x_n)+p(x,x)}{2}-min\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}]\\
&\leq 2[p(x_n,x)-min\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}]\\
&= 2p^w(x_n,x)<\varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu (X,p)nin tam olduğunu gösterir.

Tersine (X,p) tam iken (X,p^w) tam metrik uzay olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$, (X,p^w) da bir Cauchy dizisi ise (X,p) de bir Cauchy dizisidir. (X,p) tam olduğundan $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)=\lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n)=p(x,x)$ olacak biçimde $x\in X$ vardır. Böylece $\varepsilon>0$ ve her $n>n_\varepsilon$ için

$$maks\{|p(x_n,x)-p(x_n,x_n)|,|p(x_n,x)-p(x,x)|\}<\varepsilon$$

olacak biçimde $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ vardır. Sonuç olarak her $n>n_\varepsilon$ için

$$
\begin{aligned}
p^w(x_n,x) &= p(x_n,x)-min\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}\\
&= |p(x_n,x)-min\{p(x_n,x_n),p(x,x)\}|\\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur ki bu (X,p^w) nın tam metrik uzay olduğunu gösterir.

Lemma 3.1.2. (X,p) kısmi metrik uzay olsun. Her $x \in X$ için $p_x: X \to [0,\infty)$, $p_x(y) = p(x,y)$ ile tanımlı fonksiyon (X,p^s) metrik uzayında alttan yarısüreklidir.

İspat: Kabul edelim ki, $\lim_{n\to\infty} p^s(y,y_n) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} p_x(y) &\leq p_x(y_n) + p(y_n,y) - p(y_n,y_n) \\ &= p_x(y_n) + p^s(y_n,y) - p(y_n,y) + p(y,y) \end{aligned}$$

yazılır. $p(y,y) \leq p(y,y_n)$ olduğundan $liminf_n p_x(y_n) \geq p_x(y)$ elde edilir.

Bilindiği gibi metrik uzay üzerinde Caristi sabit nokta teoreminin literatürde birçok genelleştirmesi vardır. Bunlardan biri Kirk tarafından ispatlanmış ve bu teoremle metrik uzayın tamlığı karakterize edilmiştir. Daha sonra Romaguera bu teoremi kısmi metrik uzaya taşımak istemiştir. Bunun için Caristi dönüşümünü aşağıdaki gibi iki farklı biçimde tanımlamıştır.

Tanım 3.1.4. (X,p) kısmi metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\phi: X \to [0,\infty)$, (X,p) de alttan yarısürekli ve her $x \in X$ için

$$p(x,Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$$

şartı sağlanıyorsa T ye p-Caristi dönüşümü denir.

Tanım 3.1.5. (X,p) kısmi metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\phi: X \to [0,\infty)$, (X,p^s) de alttan yarısürekli ve her $x \in X$ için

$$p(x,Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$$

şartı sağlanıyorsa T ye p^s-Caristi dönüşümü denir.

Açıktır ki, her p-Caristi dönüşümü p^s-Caristi dönüşümüdür, fakat tersi genelde doğru değildir.

Ayrıca; Romaguera, Kirk' in Caristi tip sabit nokta teoreminden yola çıkarak kısmi metrik uzayda Caristi teoremini "(X,p) kısmi metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul X de tanımlı her p-Caristi dönüşümünün sabit noktaya sahip olmasıdır." biçiminde olabileceğini düşünmüştür. Fakat bunun yanlış olduğunu aşağıdaki örnekle görmüştür.

Örnek 3.1.6. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde p kısmi metriği $p(n,m) = maks\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$ biçiminde verilsin. $(\mathbb{N}, p)$ kısmi metrik uzayı tam değildir. Çünkü p ile elde edilen metrik p^s, $\mathbb{N}$ üzerinde ayrık topolojiyi oluşturur ve $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $(\mathbb{N}, p^s)$ de bir Cauchy dizisidir. Fakat $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı bir p-Caristi dönüşümü yoktur. Gerçekten $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tanımlı ve $\phi: (\mathbb{N}, \tau_p) \to [0, \infty)$ alttan yarısürekli ve her $n \in \mathbb{N}$ için $p(n, fn) \leq \phi(n) - \phi(fn)$ olsun. Eğer $1 < f1$ ise $p(1, f1) = 1 = p(1,1)$ olur ki bu $\epsilon > 0$ için $f1 \in B_p(1, \varepsilon)$ demektir. Böylece ϕ alttan yarısürekli olduğundan $\phi(1) \leq \phi(f1)$ olur ki bu $p(1, f1) \leq \phi(1) - \phi(f1)$ olmasıyla çelişir. O halde $1 = f1$ olur ki bu da $p(1, f1) \leq \phi(1) - \phi(f1)$ ile çelişir. Yani $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir p-Caristi dönüşümü yoktur.

Yine aynı makalede Romaguera 0- tam kısmi metrik uzay kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 3.1.6. (X,p) bir kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisine X de bir 0- Cauchy dizisidir denir. X deki her 0- Cauchy dizisi yine X de yakınsak ise (X,p) ye 0- tamdır denir. Böylece her tam kısmi metrik uzay 0- tamdır. Fakat tersi genelde doğru değildir.

Örneğin; $X = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ ve $p(x,y) = maks\{x, y\}$ olarak alınırsa (X,p) bir 0- tam kısmi metrik uzaydır fakat tam değildir.

Şimdi Romaguera tarafından kısmi metrik uzayda ispatlanan Caristi sabit nokta teoremini ve ispatını verelim.

Teorem 3.1.1. (X, p) kısmi metrik uzayının 0- tam olması için gerek ve yeter şart her p^s-Caristi dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (X, p) kısmi metrik uzayı 0- tam ve T, X de p^s-Caristi dönüşümü olsun. Böylece $\varphi: X \to [0, \infty)$ alttan yarısürekli fonksiyonu var ve her $x \in X$ için

$$p(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

şartı sağlanır. Şimdi her $x \in X$ için

$$A_x = \{y \in X: p(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)\}$$

kümesini tanımlayalım. $Tx \in A_x$ olduğundan $A_x \neq \emptyset$ ve A_x kapalıdır. $x_0 \in X$ alalım. $x_1 \in A_{x_0}$ elemanını $\varphi(x_1) \leq inf_{y \in A_{x_0}} \varphi(y) + 2^{-1}$ olacak biçimde seçelim. Açıktır ki $A_{x_1} \subseteq A_{x_0}$ dır. Böylece her $x \in A_{x_1}$ için

$$\begin{aligned} p(x_1, x) \leq \varphi(x_1) - \varphi(x) &\leq inf_{y \in A_{x_0}} \varphi(y) + 2^{-1} - \varphi(x) \\ &\leq \varphi(x) + 2^{-1} - \varphi(x) \\ &\leq 2^{-1} \end{aligned}$$

olur. Bu işleme devam edilerek X de bir $\{x_n\}$ dizisi oluştururuz öyle ki

i) Her $n \in N^+$ ve $x_{n+1} \in A_{x_n}$ için $A_{x_{n+1}} \subseteq A_{x_n}$

ii) Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in A_{x_n}$ için $p(x_n, x) \leq 2^{-n}$

şartları sağlanır. $p(x_n, x_n) \leq p(x_n, x_{n+1})$ ve yukarıdaki i. ve ii. şartlarıyla birlikte $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$ olup $\{x_n\}$ bir 0-Cauchy dizisidir. Hipotezimiz gereği

$$\lim_{n\to\infty} p(z, x_n) = p(z, z) = 0$$

olacak biçimde bir $z \in X$ vardır ve $\lim_{n\to\infty} p^s(z, x_n) = 0$ dır. O halde

$$z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x_n}$$

dır. Son olarak $z = Tz$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$p(x_n, Tz) \leq p(x_n, z) + p(z, Tz)$$
$$\leq \varphi(x_n) - \varphi(z) + \varphi(z) - \varphi(Tz)$$

olur ki bu

$$Tz \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{x_n}$$

olduğunu gösterir. Böylece ii. den $p(x_n, Tz) \leq 2^{-n}$ elde edilir.

$p(z, Tz) \leq p(z, x_n) + p(x_n, Tz)$ ve $\lim_{n\to\infty} p(z, x_n) = 0$

olduğu göz önüne alınırsa $p(z, Tz) = 0$ bulunur. Böylece $z = Tz$ elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $\{x_n\}$ 0-Cauchy dizisi (X, p^s) de yakınsak olmasın. $\{x_n\}$ nin $\{y_n\}$ altdizisini

$$p(y_n, y_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$$

olacak biçimde oluşturalım. $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesini alalım. $T: X \to X$ dönüşümü $x \in X \backslash A$ için $Tx = y_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $Ty_n = y_{n+1}$ olsun. A kümesinin kapalılığı kolayca görülebilir. Şimdi $\phi: X \to [0, \infty)$ dönüşümünü $x \in X \backslash A$ için $\phi(x) = p(x, y_0) + 1$ biçiminde tanımlayalım ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi(y_n) = 2^{-n}$ olsun. Böylece

$$\phi(y_{n+1}) = 2^{-(n+1)} < 2^{-n} = \phi(y_n)$$

ve her $x \in X \backslash A$ için

$$\phi(y_0) = 1 < p(x, y_0) + 1 = \phi(x)$$

olur. Bu durumda ϕ alttan yarısüreklidir. Ayrıca her $x \in X \backslash A$ için

$$p(x, Tx) = p(x, y_0) = \phi(x) - \phi(y_0) = \phi(x) - \phi(Tx)$$

ve her $y_n \in A$ için

$$\begin{aligned} p(y_n, Ty_n) &= p(y_n, y_{n+1}) \\ &< 2^{-(n+1)} \\ &= \phi(y_n) - \phi(y_{n+1}) \\ &= \phi(y_n) - \phi(Ty_n) \end{aligned}$$

olur. Böylece T, X üzerinde sabit noktaya sahip olamayan bir p^s Caristi dönüşümü olur ki bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2.Kısmi Metrik Uzayda Caristi Dönüşümü

Bilindiği gibi Romaguera Caristi sabit nokta teoremini kısmi metrik uzaya taşımak için Caristi dönüşüm tanımını iki farklı biçimde vermişti. Fakat dikkat edilmelidir ki, X üzerinde aldığımız birim dönüşüm metrik uzayda Caristi dönüşümü olduğu halde kısmi metrik uzayda ne p-Caristi dönüşümüdür ne de p^s-Caristi dönüşümüdür. Biz bu bölümde Caristi dönüşümünü farklı bir biçimde tanımlayacak ve bu dezavantajı ortadan kaldıracağız.

Tanım 3.2.1. (X, p) kısmi metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer (X, p^s) de $\phi: X \to [0, \infty)$ alttan yarısürekli fonksiyonu var ve her $x \in X$ için

$$p(x, Tx) \leq p(x, x) + \phi(x) - \phi(Tx)$$

sağlanırsa T ye Caristi dönüşümü denir.

Açıktır ki, (X,p) deki her birim dönüşüm bir Caristi dönüşümüdür. Dahası (X,p) deki her p^s-Caristi dönüşümü bir Caristi dönüşümüdür, fakat tersi genelde doğru değildir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.2.1. $X=[1,\infty)$ ve her $x,y\in X$ için $p(x,y)=maks\{x,y\}$ olsun. Böylece (X,p) tam kısmi metrik uzay olup 0-tamdır. Kabul edelim ki T, p^s-Caristi dönüşümü olsun. Bu durumda Teorem 3.1.1 gereğince T, z gibi bir sabit noktaya sahiptir. T, p^s-Caristi dönüşümü olduğundan (X,p^s) de $\varphi: X\to[0,\infty)$ alttan yarısürekli bir fonksiyon vardır ve her $x\in X$ için

$$p(x,Tx)\le\varphi(x)-\varphi(Tx)$$

sağlanır. z, T nin bir sabit noktası olduğundan

$$p(z,z)=p(z,Tz)\le\varphi(z)-\varphi(Tz)=\varphi(z)-\varphi(z)=0$$

olur. p nin tanımı gereği $z=0$ olmalıdır. Fakat $0\notin X$ dir. Böylece X üzerinde hiçbir p^s-Caristi dönüşümü yoktur. Fakat $T: X\to X$, $Tx=\frac{x+1}{2}$ ve her $x\in X$ için $\varphi: X\to[0,\infty)$, $\varphi(x)=1$ olarak alınırsa φ, (X,p^s) de alttan yarısürekli olup, her $x\in X$ için

$$p(x,Tx)=maks\left\{x,\frac{x+1}{2}\right\}=x=p(x,x)+\varphi(x)-\varphi(Tx)$$

olur. Böylece T, X üzerinde bir Caristi dönüşümü olup $z=1$ sabit noktasına sahiptir.

Şimdi kısmi metrik uzayda Caristi dönüşümü yardımıyla sabit nokta teoremini verelim.

Teorem 3.2.1. (X,p) kısmi metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde tanımlı her Caristi dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki (X,p) tam ve T, X üzerinde bir Caristi dönüşümü olsun. Bu durumda, (X,p^s) de $\phi: X \to [0,\infty)$ alttan yarısürekli bir fonksiyon vardır ve her $x \in X$ için

$$p(x,Tx) \leq p(x,x) + \phi(x) - \phi(Tx)$$

sağlanır. Böylece

$$2p(x,Tx) - p(Tx,Tx) \leq 2p(x,x) + 2\phi(x) - 2\phi(Tx) - p(Tx,Tx) \tag{3.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi her $x \in X$ için $\beta: X \to [0,\infty)$, $\beta(x) = p(x,x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece β, (X,p^s) de alttan yarısürekli olup $\varphi = \beta + 2\phi$ fonksiyonu da (X,p^s) de alttan yarısüreklidir. Böylece (3.3) eşitsizliği

$$2p(x,Tx) - p(x,x) - p(Tx,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

biçiminde yazılır. $2p(x,Tx) - p(x,x) - p(Tx,Tx) = p^s(x,Tx)$ olduğu kullanılırsa

$$p^s(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

elde edilir. Böylece Lemma 3.1.1 den (X,p^s) tam metrik uzay ve φ alttan yarısürekli olduğundan Caristi sabit nokta teoreminden T bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi T, Caristi dönüşümü bir sabit noktaya sahip ise X in tam olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki, X tam kısmi metrik uzayında T bir sabit noktaya sahip olmasın ve $\{x_n\}$, (X,p) nin aykırı noktalarının oluşturduğu bir Cauchy dizisi olup (X,p^s) de yakınsak olmasın. $\{y_n\}$, $\{x_n\}$ dizisinin

$$p(y_{n,}, y_{n+1}) - p(y_{n,}, y_{n,}) \leq 2^{-(n+1)}$$

şartını sağlayan bir alt dizisi olsun. $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ kapalı kümesini ele alalım. T ve ϕ dönüşümlerini $x \in X \backslash A$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $T: X \to X$, $Tx = y_0$ ve $Ty_n = y_{n+1}$ ve

$\phi: X \to [0, \infty)$, $\phi(x) = p(y_0, x) + 1$ ve $\phi(y_n) = 2^{-n}$ biçiminde tanımlayalım. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi(y_{n+1}) < \phi(y_n)$ ve her $x \in X \setminus A$ için $\phi(y_0) \leq \phi(x)$ olur. Lemma 3.1.2 göz önüne alınırsa ϕ nin (X, p^s) de alttan yarısürekli olduğu görülür. Ayrıca, her $x \in X \setminus A$ için

$$\begin{aligned} p(x, Tx) &= p(x, y_0) \\ &= \phi(x) - \phi(y_0) \\ &= \phi(x) - \phi(Tx) \\ &\leq p(x, x) + \phi(x) - \phi(Tx) \end{aligned}$$

ve her $y_n \in A$ için

$$\begin{aligned} p(y_n, Ty_n) &= p(y_n, y_{n+1}) \\ &\leq p(y_n, y_n) + 2^{-(n+1)} \\ &= p(y_n, y_n) + \phi(y_n) - \phi(Ty_n) \end{aligned}$$

olur. Bu ise T nin sabit noktasının olmaması ile bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup X tam kısmi metrik uzayında T bir sabit noktaya sahiptir.

Örnek 3.2.2. $X = [0,1]$ ve her $x, y \in X$ için $p(x, y) = maks\{x, y\}$ olsun. Böylece (X, p) tam kısmi metrik uzaydır ve dolayısıyla 0- tamdır. $T: X \to X$, $Tx = \sqrt{x}$ ve $\phi: X \to [0, \infty)$, $\phi(x) = 1 - x$ biçimde tanımlanırsa ϕ, (X, p^s) de sürekli olup alttan yarısüreklidir. Ayrıca her $x \in X$ için

$$p(x, Tx) = \sqrt{x} \leq p(x, x) + \phi(x) - \phi(Tx)$$

olup, T, X de bir Caristi dönüşümüdür. Böylece Teorem 3.2.1 den T bir sabit noktaya sahiptir. Ancak dikkat edilmelidir ki Teorem 3.1.1 bu örnek için sağlanmaz. Çünkü;

$$p(1, T1) = 1 \nleq 0 = \phi(1) - \phi(T1)$$

olacak biçimde bir $\phi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonu bulunamaz.

3.3. Quasi Metrik Uzay Üzerinde Caristi Tip Sabit Nokta Teoremi

Tanım 3.3.1. X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için

i) $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = d(y,x) = 0$

ii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir quasi metrik, (X,d) ikilisine de bir quasi metrik uzay denir.

Örnek 3.3.1. $X = \mathbb{R}^+$ kümesi üzerinde $d: X \times X \to X$, $d(x,y) = maks\{0, x-y\}$ biçiminde tanımlı fonksiyon bir quasi metriktir.

Önerme 3.3.1. d, X üzerinde bir quasi metrik ise

$$d^s: X \times X \to [0,\infty),\ d^s(x,y) = maks\{d(x,y), d(y,x)\}$$

biçiminde tanımlı d^s fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

İspat.
$x = y \Leftrightarrow d^s(x,y) = maks\{d(x,y), d(y,x)\} = d(x,y) = 0$

ve $d^s(x,y) = maks\{d(x,y), d(y,x)\} \geq 0$ dır. Böylece metriğin birinci şartı sağlanır. Ayrıca

$$d^s(x,y) = maks\{d(x,y), d(y,x)\} = maks\{d(y,x), d(x,y)\} = d^s(y,x)$$

olup simetri özelliği sağlanır. Son olarak her $x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} d^s(x,y) &= maks\{d(x,y), d(y,x)\} \\ &\leq maks\{d(x,z) + d(z,y), d(y,z) + d(z,x)\} \\ &\leq maks\{d(x,z), d(z,x)\} + maks\{d(z,y), d(y,z)\} \end{aligned}$$

ve buradan

$$d^s(x,y) \leq d^s(x,z) + d^s(z,y)$$

olup metriğin son şartı da sağlanır. Böylece (X, d^s) bir metrik uzaydır.

Tanım 3.3.2. (X, d) bir quasi metrik uzay olsun. Eğer her $x, y, \in X$ için

$$\omega: X \to [0, \infty),\ d(x,y) + \omega(x) = d(y,x) + \omega(y)$$

olacak biçimde bir ω fonksiyonu varsa (X, d) ye ağırlıklı quasi metrik uzayı denir. Burada ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Teorem 3.3.1. (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun.
(a) Her $x, y \in X$ için

$$d_p: X \times X \to [0, \infty),\ d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$$

fonksiyonu her $x \in X$ için $\omega(x) = p(x,x)$ biçiminde tanımlı ağırlık fonksiyonu ile X üzerinde bir ağırlıklı quasi metriktir.

(b) Tersine, eğer (X, d) ağırlık fonksiyonu ω ile ağırlıklı quasi metrik uzay ise, her $x, y \in X$ için

$$d_p: X \times X \to [0, \infty),\ d_p(x,y) = d(x,y) + \omega(x)$$

fonksiyonu X üzerinde bir kısmi metriktir.

İspat. (a) Her $x, y \in X$ için $d_p(x,y) + \omega(x) = d_p(y,x) + \omega(y)$ olduğunu gösterelim. $d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
d_p(x,y) + \omega(x) &= p(x,y) - p(x,x) + \omega(x) \\
&= p(x,y) - p(x,x) + p(x,x) \\
&= p(x,y) = p(y,x) \\
&= p(y,x) - p(y,y) + p(y,y) \\
&= d_p(y,x) + \omega(y)
\end{aligned}
$$

olup d_p ağırlıklı quasi metriktir.

(b) Her $x, y \in X$ için $d_p: X \times X \to [0, \infty)$, $d_p(x,y) = p(x,y) + \omega(x)$ fonksiyonunun X üzerinde bir kısmi metrik olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
x = y \Rightarrow d_p(x,y) &= d(x,y) + \omega(x) \\
&= d(x,x) + \omega(x) = d_p(x,x) \\
&= d(y,y) + \omega(y) = d_p(y,y)
\end{aligned}
$$

ve $d_p(x,y) = d_p(x,x) = d_p(y,y)$ ise

$$d(x,y) + \omega(x) = d(x,x) + \omega(x)$$

olup $d(x,x) = 0$ olduğundan $d(x,y) = 0$ olur. Ayrıca

$$d(y,x) + \omega(y) = d(y,y) + \omega(y)$$

olup $d(y,y) = 0$ olduğundan $d(y,x) = 0$ olur. Buradan

$$d(y,x) = 0 = d(x,y) \Longrightarrow x = y$$

elde edilir. Yani (p_1) sağlanır.

$$d_p(x,x) = d(x,x) + \omega(x) = \omega(x) \leq d(x,y) + \omega(x)$$

olup (p_2) sağlanır. X ağırlıklı quasi metrik uzay olduğundan

$$d_p(x,y) = d(x,y) + \omega(x) = d(y,x) + \omega(y) = d_p(y,x)$$

olup (p_3) sağlanır. Son olarak

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= d(x,y) + \omega(x) \\ &\leq d(x,z) + d(z,y) + \omega(x) \\ &\leq d(x,z) + \omega(x) + d(z,y) + \omega(z) - \omega(z) \\ &\leq d(x,z) + \omega(x) + d(z,y) + \omega(z) - \omega(z) - d(z,z) \\ &= d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z) \end{aligned}$$

olup (p_4) sağlanır. O halde $d_p: X \times X \to [0,\infty)$, $d_p(x,y) = p(x,y) + \omega(x)$ fonksiyonu X üzerinde bir kısmi metriktir.

Tanım 3.3.3. (X,d) ağırlıklı quasi metrik uzay olsun. (X,d^s) metrik uzayı tam ise (X,d) ağırlıklı quasi metrik uzayı bitamdır denir.

Lemma 3.3.1. (X,d) ağırlıklı quasi metrik uzayının bitam olması için gerek ve yeter koşul (X,d_p) kısmi metrik uzayının tam olmasıdır.

Tanım 3.3.4. (X,d) quasi metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\phi: X \to [0,\infty)$ alttan yarısürekli fonksiyonu var ve her $x \in X$ için

$$d(x,Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$$

sağlanırsa, T ye Caristi dönüşümü denir.

Teorem 3.3.2. (X,d) ağırlıklı quasi metrik uzayının bitam olması için gerek ve yeter koşul X deki her Caristi dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

Son olarak yukarıdaki teoremde ağırlıklanabilirliğin kaldırılamaz olduğunu aşağıda bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.3.2. $X = (0, \infty)$ olsun. $d: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonunu

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y; x \geq y \\ 1 \quad\ ; x < y \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece (X, d) ikilisi bir quasi metrik uzaydır. Ayrıca

$$d^s(x, y) = \begin{cases} maks\{1, |x - y|\}; x \neq y \\ 0 \qquad\qquad\qquad ; x = y \end{cases}$$

olur. Bu takdirde (X, d^s) tam metrik uzay ve (X, d) bitamdır. Şimdi $T: X \to X$, $Tx = \frac{x}{2}$ ve $\phi: X \to [0, \infty)$, $\phi(x) = x$ olarak tanımlayalım. ϕ alttan yarısürekli ve her $x \in X$ için

$$d(x, Tx) = d\left(x, \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} = \phi(x) - \phi(Tx)$$

olur. Sonuç olarak T, X üzerinde bir Caristi dönüşümü olur. Fakat T nin sabit noktası yoktur.

3.4. Kısmi Metrik Uzayda Caristi Tip Sabit Nokta Teoreminin Bazı Genelleştirmeleri

Bu bölümde kısmi metrik uzay üzerinde verdiğimiz Caristi tip sabit nokta teoreminin bazı genelleştirmelerini vereceğiz.

Teorem 3.4.1. (X, p) tam kısmi metrik uzay olsun. $\phi: X \to [0, \infty)$,

$$p(x, x) = p(x, y) \text{ iken } \phi(y) \leq \phi(x) \tag{3.4}$$

şartını sağlayan alttan yarısürekli bir fonksiyon ve $\varphi: X \to [0, \infty)$, $\mu > 0$ olmak üzere

$$sup\{\varphi(x): x \in X, \phi(x) \leq inf_{w \in X} \phi(w) + \mu\} \tag{3.5}$$

olacak biçimde bir fonksiyon olsun. Eğer $T: X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için

$$p(x, Tx) \leq p(x, x) + \varphi(x)\{\phi(x) - \phi(Tx)\} \tag{3.6}$$

şartını sağlarsa, T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\varphi(x) > 0$ olması durumunda (3.6) eşitsizliğinden $\phi(Tx) \leq \phi(x)$ olur. $\varphi(x) = 0$ ise $p(x, Tx) = p(x, x)$ olup (3.4) eşitsizliğinden $\phi(Tx) \leq \phi(x)$ elde edilir. Yani her $x \in X$ için $\phi(Tx) \leq \phi(x)$ dır. Şimdi

$$Y = \{x \in X: \phi(x) \leq inf_{w \in X}\phi(w) + \mu\}$$

ve $\gamma = sup_{w \in Y}\varphi(w) < \infty$ olarak alalım. (X, p) tam olduğundan, (X, p^s) de tamdır ve ϕ, (X, p^s) de alttan yarısürekli olduğundan Y kümesi kapalıdır. Böylece (Y, p^s) tam olup (Y, p) tamdır. Y boştan farklı olup her $x \in X$ için $\phi(Tx) \leq \phi(x)$ olduğundan $TY \subseteq Y$ dır. Ayrıca her $x \in Y$ için

$$p(x, Tx) \leq p(x, x) + \gamma\{\phi(x) - \phi(Tx)\}$$

elde edilir. $\varphi: Y \to [0, \infty)$, $\varphi(x) = \gamma\phi(x)$ olarak tanımlanırsa, φ fonksiyonu (Y, p^s) de alttan yarısürekli olur. Böylece Teorem 3.2.1 gereğince T bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.4.2. (X, p) tam kısmi metrik uzay, $\phi: X \to [0, \infty)$, (3.4) koşulunu sağlayan alttan yarısürekli ve $c: [0, \infty) \to [0, \infty)$ üstten yarısürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$p(x, Tx) \leq p(x, x) + maks\{c(\phi(x)), c(\phi(Tx))\}\{\phi(x) - \phi(Tx)\} \tag{3.7}$$

eşitsizliğini sağlarsa, T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\gamma > c(inf_{w\in X}\phi(w))$ olsun. c üstten yarısürekli olduğundan,

$t \in [inf_{w\in X}\phi(w), inf_{w\in X}\phi(w) + \mu$ iken $c(t) \leq inf_{w\in X}\phi(w) + \mu$

olacak biçimde $\mu > 0$ vardır. $\varphi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonunu her $x \in X$ için

$$\varphi(x) = maks\{c(\phi(x)), c(\phi(Tx))\}$$

biçiminde tanımlayalım. Teorem 3.4.1 de olduğu gibi her $x \in X$ için $\phi(Tx) \leq \phi(x)$ olduğunu gösterebiliriz. O halde $x \in X$ için

$$\phi(x) \leq inf_{w\in X}\phi(w) + \mu$$

olduğu kullanılarak

$$\phi(Tx) \leq inf_{w\in X}\phi(w) + \mu$$

bulunur. Böylece $\varphi(x) \leq \gamma$ elde edilir. Buradan

$$sup\{\varphi(x): x \in X, \phi(x) \leq inf_{w\in X}\phi(w) + \mu\} \leq \gamma < \infty$$

olup Teorem 3.4.1 den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.3. (X,p) tam kısmi metrik uzay, $\phi: X \to [0,\infty)$, (3.4) koşulunu sağlayan alttan yarısürekli ve $c: [0,\infty) \to [0,\infty)$ azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$p(x,Tx) \leq p(x,x) + c(\phi(x))\{\phi(x) - \phi(Tx)\} \tag{3.8}$$

veya

$$p(x,Tx) \leq p(x,x) + c(\phi(Tx))\{\phi(x) - \phi(Tx)\} \tag{3.9}$$

şartlarından birini sağlarsa, T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.4.1 de olduğu gibi her $x \in X$ için $\phi(Tx) \leq \phi(x)$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece, c azalmayan olduğundan

$$c(\phi(Tx)) \leq c(\phi(x))$$

elde edilir. O halde (3.9) şartı (3.8) i gerektirip ispatı sadece (3.8) için yapmamız yeterlidir. $\varphi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonunu $x \in X$ için $\varphi(x) = c(\phi(x))$ biçiminde tanımlarsak

$$sup\{\varphi(x): x \in X, \phi(x) \leq inf_{w\in X}\phi(w) + 1\}$$
$$\leq c(inf_{w\in X}\phi(w) + 1\ ) < \infty$$

olup, Teorem 3.4.1 den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.4. (X, p) tam kısmi metrik uzay, $\phi: X \to [0,\infty)$, (3.4) koşulunu sağlayan alttan yarısürekli ve $c: [0,\infty) \to [0,\infty)$ üstten yarısürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$p(x, Tx) \leq \phi(x) \tag{3.10}$$

ve

$$p(x, Tx) \leq p(x, x) + c(p(x, Tx))\{\phi(x) - \phi(Tx)\} \tag{3.11}$$

şartlarını sağlarsa,T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\varphi: X \to [0,\infty)$, $\varphi(x) = \ c(p(x, Tx))$ biçiminde tanımlayalım. $x \in X$ için

$$\phi(x) \leq inf_{w\in X}\phi(w) + 1$$

olduğu kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &\leq sup\{c(t): 0 \leq t \leq p(x, Tx)\} \\
&\leq sup\{c(t): 0 \leq t \leq \phi(x)\} \\
&\leq sup\{c(t): 0 \leq t \leq inf_{w \in X}\phi(w) + 1 \ \}
\end{aligned}
$$

ve böylece c üstten yarısürekli olduğundan

$$
\begin{aligned}
&sup\{\varphi(x): x \in X, \phi(x) \leq inf_{w \in X}\phi(w) + 1 \} \\
&\leq maks\{c(t): 0 \leq t \leq inf_{w \in X}\phi(w) + 1\} < \infty
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.4.1 den istenen sonuç elde edilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Son yıllarda sabit nokta teori çalışmaları metrik uzaylardan daha geniş olan kısmi metrik uzay üzerine taşınmış ve metrik uzayda elde edilen sonuçlardan daha güzel sonuçlar elde edilmiştir.

Bu teze temel teşkil eden “Acar, Ö., Altun, I., Romaguera, S., Caristi’s type mappings on complete partial metric spaces, Fixed Point Theory, accepted.”adlı makalede de Caristi tip sabit nokta teoremi elde edilmiş ve metrik uzaydaki Caristi teoreminden farklı olarak bu teoremle kısmi metrik uzayın tamlığı da karakterize edilmiştir.

Ayrıca tezin son bölümüne temel teşkil eden “Acar, Ö., Altun, I., Some generalizations of Caristi type fixed point theorem on partial metric space, Filomat 26:4 , 833–837, 2012.” adlı makalede de Caristi tip sabit nokta teoreminin bazı genelleştirmeleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Koçak. M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

2. Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2008.

3. Özer, O., Çöker, D., Taş, K., Soyut Matematik, İzgi Yayınları, Ankara, 1996.

4. Granas, A., Dugundji, J., Fixed Point Theory, Sprinter, New York, 2003.

5. Ran, A. C. M., Reurings, M. C. B., A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Prof. Amer. Mata. Sof., 132, 1435-1443, 2004.

6. Nieto, J. J., Rodriguez-Lopez, R., Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order, 22, 223-239, 2005.

7. Caristi, J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amar. Math. Soc., 215, 241-251, 1976.

8. Singh, S., Watson, B., Srivastava, P., Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-Map Principle, Kluwer Academic Publishers, 1997.

9. Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sahu, D. R., Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer, New York, 2009.

10. Khamsi, M. A., Remarks on Caristi's fixed point theorem, Nonlinear Anal., 71, 227-231, 2009.

11. Bae, J. S., Cho, E. W., Yeom, S. H., A generalization of the Caristi-Kirk fixed point theorem and its applications to mapping theorems, J. Korean. Math. Soc., 31, 29-48, 1994.

12. Suzuki, T., Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others, J. Math. Anal. Appl., 302, 502-508, 2005.

13. Kirk, W. A., Caristi, J., Mappings theorems in metric and Banach spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 23, 891-894, 1975.

14. Kirk, W. A., Caristi's fixed point theorem and metric convexity, Colloquium Mathematicum, 36, 81-86, 1976.

15. Bae, J. S., Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps, J. Math. Anal. Appl., 284, 690-697, 2003.

16. Brezis, H., Browder, F. E., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, Advances in Math., 21, 355-364, 1976.

17. Acar, Ö., Altun, I., Romaguera, S., Caristi's type mappings on complete partial metric spaces, Fixed Point Theory, accepted.

18. Acar, Ö., Altun, I., Some generalizations of Caristi type fixed point theorem on partial metric space, Filomat 26:4 , 833–837, 2012.