

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

R_2^4 -YARI ÖKLİDYEN UZAYDA PSEUDO NULL VE PARTIALLY NULL REKTİFİYEN
EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Nihal KILIÇ

Haziran 2012

Matematik Anabilim Dalı Nihal KILIÇ tarafından hazırlanan R_2^4 -YARI ÖKLİDYEN UZAYDA PSEUDO NULL VE PARTIALLY NULL REKTİFİYEN EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM _____

Üye (Danışman) : Prof. Dr. Kazım İLARSLAN _____

Üye : Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK _____

...../...../.....

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

R_2^4 -YARI ÖKLİDYEN UZAYDA PSEUDO NULL VE PARTIALLY NULL REKTİFİYEN EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

KILIÇ , Nihal

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Haziran 2012, 56 sayfa

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde yarı-Öklidyen uzaylar tanıtılarak bu uzaylarda pseudo null ve partially null eğriler ve bu eğrilerin geometrik özellikleri tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde Minkowski uzay zamanda pseudo null ve partially null rektifiyen eğrilerin sınıflandırılması verilmiştir.

Dördüncü bölümde 4-boyutlu, 2- indeksli yarı-Öklidyen uzayda pseudo null ve partially null eğrilerin rektifiyen eğri olma şartları elde edilmiştir.

Beşinci bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Minkowski 3-uzayı, Minkowski uzay-zaman, yarı-Öklidyen uzay, pseudo null eğri, partially null eğri, rektifiyen eğri.

ABSTRACT

CHARACTERIZATIONS OF PSEUDO NULL AND PARTIALLY NULL RECTIFYING CURVES IN R_2^4 - SEMI-EUCLIDIAN SPACE

KILIÇ , Nihal

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

June 2012, Pages 56

This thesis consist of five chapter. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, the notion of semi-Euclidean space and its properties are given.

In the third chapter, Characterizations of pseudo null and partially null curves in Minkowski space time are given.

In the fourth chapter, we give some characterizations of pseudo null and partially null curves to be a rectifying curve in the semi-Euclidean space R_2^4 .

Key words: Minkowski space, Minkowski space-time, semi-Euclidean space, pseudo null curve, partially null curve, rectifying curve.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımını esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a ve canım aileme çok teşekkür ediyorum.

Bu tez çalışması TÜBİTAK, 1002-Hızlı Destek programı kapsamında 210T151 nolu proje ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Kaynak Özetleri.....	2
1.2. Tezin Amacı	3
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Yarı Öklidyen Uzaylar	4
3. R_1^4 MINKOWSKI UZAY ZAMANDA PSEUDO NULL VE PARTİALLY NULL REKTİFİYEN EĞRİLER	15
4. R_2^4'DE PSEUDO NULL VE PARTİALLY NULL REKTİFİYEN EĞRİLER	
4.1. R_2^4 'de Pseudo Null Eğriler ve Partially Null Eğriler	21
4.1.1. R_2^4 'de Partially Null Eğriler ve Frenet Denklemleri.....	21
4.1.2. R_2^4 'de Pseudo Null Eğriler ve Frenet Denklemleri	26
4.2. R_2^4 'de Partially Null ve Pseudo Null Rektifiyen Eğriler.....	44
4.2.1. R_2^4 'de Partially Null Rektifiyen Eğriler.....	44
4.2.2. R_2^4 'de Pseudo Null Rektifiyen Eğriler.....	46
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	54
KAYNAKLAR.....	55

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. R_1^3 de vektörlerin sınıflandırılması	10
2.2. R_1^3 de birim küreler	10
2.3. R_1^3 de spacelike, timelike ve null eğri	12
2.4. R_1^3 de bir pseudo null eğri	13
4.1. α eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü	23
4.2. α eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü	23
4.3. α eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü	24
4.4. α eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü	24
4.5. β eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü	25
4.6. β eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü	25
4.7. β eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü	26
4.8. β eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü	26
4.9. γ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü	30
4.10. γ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü	30
4.11. γ eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü	31
4.12. γ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü	31
4.13. δ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü	33
4.14. δ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü	33
4.15. δ eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü	34
4.16. δ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü	34
4.17. μ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü	37
4.18. μ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü	38
4.19. μ eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü	38
4.20. μ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü	39
4.21. ξ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü	42
4.22. ξ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü	43

4.23. ξ eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü	43
4.24. ξ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü	44
4.25. $\alpha_{x_1=0} = \left(0, s, \frac{s^2}{2}\right)$ eğrisi	52
4.26. $\alpha_{x_2=0} = \left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2}\right)$ eğrisi	52
4.27. $\alpha_{x_3=0} = \left(\frac{s^2}{2}, 0, \frac{s^2}{2}\right)$ eğrisi	53
4.28. $\alpha_{x_4=0} = \left(\frac{s^2}{2}, 0, s\right)$ eğrisi	53

SİMGELER DİZİNİ

R^n	n-boyutlu Öklid uzayı
R^3	3-boyutlu Öklid uzayı
R_v^n	n-boyutlu yarı-Öklidyen uzay
R_1^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
R_1^3	3-boyutlu Minkowski uzayı
H_0^2	Hiperbolik birim küre (Hiperbolik uzay)
\wedge_L (veya \times_L)	Lorentz anlamında vektörel çarpım
S_1^2	Lorentz birim küresi
g	Non-dejenere metrik

1. GİRİŞ

Geometride, özellikle diferensiyel geometride eğriler teorisi önemli bir çalışma alanıdır. Eğriler Öklid ve Öklid olmayan uzaylarda yoğun bir şekilde çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Eğrilerin karakterizasyonu problemi öne çıkan bir araştırma konusudur. Bu problemin çözümünde verilen eğrinin Frenet denklemleri (bu denklemler Serret-Frenet denklemleri olarak da bilinmektedir) (Frenet 1874, Serret 1851) ve eğrinin eğrilikleri önemli ve kullanışlı bir araçtır. Bu kavramlar yardımıyla eğrinin geometrik özellikleri incelenmektedir. Örnek olarak verilen bir regüler α eğrisi eğrilikleri yardımıyla şu şekilde karakterize edilebilir. Eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s) = 0$ ise eğri bir geodeziktir. Eğrinin birinci eğriliği $k_1(s) \neq 0$ bir sabit ve ikinci eğriliği $k_2(s) = 0$ ise eğri bir çember, eğrinin $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler ise eğri bir dairesel helis eğrisidir.

R^3 , 3- boyutlu Öklid uzayında verilen iki regüler eğri α ve β olsun. Bu eğrilerin Frenet vektörleri arasındaki ilişki yardımıyla eğriler şu şekilde karakterize edilebilir. Eğrilerin asli normal vektörleri lineer bağımlı ise α ve β bir Bertrand eğri çifti oluştururlar. α eğrisinin asli normal vektörü ile β eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise α ve β bir Mannheim eğri çifti oluştururlar.

B. Y. Chen (2003), tarafından “Ne zaman, bir eğrinin konum vektörü her zaman kendi rektifiyen düzleminde yatar?” sorusuna vermiş olduğu cevapla birlikte eğriler için yeni bir sınıf olan “rektifiyen eğriler” kavramı ortaya çıkmıştır. Bu kavramla birlikte bir eğrinin konum vektörü yardımıyla karakterize edilmesi problemi çok yoğun bir şekilde çalışılmaya başlanmıştır. Chen ve Dillen (2005) tarafından, rektifiyen eğrilerin kinematikte, mekanikte ve diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan centroid (centrode) kavramıyla ve extremal eğrilerle olan ilişkileri incelenmiştir. Rektifiyen eğri kavramı ilk olarak Minkowski 3- uzayında null olmayan bir eğri için İlarlan ve Nesovic (2003) tarafından tanımlanmış ve spacelike ve timelike eğrilerin rektifiyen eğri olma şartları elde edilmiştir. Minkowski 3- uzayında rektifiyen eğrilerin centroid (centrode) kavramı ve extremal eğrilerle olan ilişkileri yine İlarlan ve Nesovic (2007) tarafından incelenmiştir. Aynı yazarlar

rektifiyen eğri kavramını 4-boyutlu Öklid uzayına taşımışlardır (2008). Bunun için, ilk olarak 4-boyutta, rektifiyen uzay kavramını tanımlamışlar, $(N^\perp = Sp\{T, B_1, B_2\})$ daha sonra eğrinin konum vektörünün bu uzayda kalma koşullarını elde etmişlerdir. Daha açık söylemek gerekirse 4-boyutlu Öklid uzayında bir rektifiyen eğrinin konum vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s) + \gamma(s)B_2(s) \quad (1.1)$$

eşitliğini sağlar. Burada λ , μ ve γ s - yay parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (1) eşitliği kullanılarak bir eğrinin rektifiyen eğri olma şartları elde edilmiştir. Benzer bir çalışmayla, rektifiyen eğri kavramı Minkowski uzay-zaman da yine İlarıslan ve Nesovic (2008) tarafından tanımlanmıştır. Minkowski 3- uzayında bir eğrinin nedensel (causal) karakterine göre 3- farklı tipi vardır. Bunlar sırasıyla, null, spacelike ve timelike eğrilerdir. Bunların dışında spacelike eğrinin normallerinin null olma durumu vardır. Bu tip eğriler ilk defa Bonnor (1985) tarafından çalışılmıştır. Minkowski 3-uzayında ve Minkowski uzay zamanda bu tip eğrilerin diferensiyel geometrisi ve fizikteki uygulamaları yoğun bir şekilde çalışılmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tez çalışmamızda temel kavramlar için Hacısalihoğlu (2000)'nun "Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II" kitabı, Sabuncuoğlu (2004)'nun "Diferensiyel Geometri" kitabı, O'Neill (2006)'in "Elementary Differential Geometry" kitabı, Kuhnel (2006)'in "Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds" kitabı ve Carmo (1976)'nun "Differential Geometry of Curves and Surfaces" adlı kitabı referanslarımızı oluşturmuştur. Ayrıca Minkowski 3-uzayı ve bu uzaydaki geometrik kavramlar için O'Neill (1983) in "Semi-Riemann Geometry with applications to relativity" kitabı, Duggal ve Bejancu (1996) 'in "Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications " kitabından faydalanılmıştır.

Ayrıca R_1^4 Minkowski uzay- zamanda pseudo null ve partially null eğrilerin rektifiyen eğri olma özellikleri için İlarıslan ve Nesovic (2008) makalesinden, R_2^4 , 4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzayında pseudo null ve partially null eğrilerin Frenet çatıları ve W - eğri olma şartları için Petrovic Torgasev, İlarıslan ve Nesovic (2005) makalesinden faydalanılmıştır.

1.2. Tezin Amacı

4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay R_2^4 de eğrilerin sınıfı Minkowski 3- uzayı R_1^3 ve Minkowski uzay-zaman R_1^4 uzaylardan daha zengindir. Spacelike eğriler için 3, timelike eğriler için 3 farklı çatı mevcuttur. Pseudo null ve partially null eğriler içinde spacelike ve timelike eğri olma durumu sadece bu uzayda vardır. Bu zengin eğri çeşitliliğine rağmen, bu uzayda eğriler teorisi ile ilgili çalışmalar diğer uzaylara göre yoğun değildir. Bundan dolayı, yukarıda ifade ettiğimiz gibi bir çok eğri çeşidini muhteva eden 4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay R_2^4 'de rektifiyen eğri kavramının ve rektifiyen eğri olma şartlarının elde edilmesi tezimizin amacını oluşturmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yarı-Öklidyen uzayı ve bu uzay ile ilgili tanım ve kavramlar ile özel olarak 4-boyutlu, 2-indeksli yarı- Öklidyen uzay R_2^4 tanıtılacaktır.

2.1.Yarı- Öklidyen Uzaylar

Tanım 2.1.1. (Simetrik Bilineer Form)

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g: V \times V \rightarrow R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

- i. $g(u, v) = g(v, u)$
- ii. $g(au + bv, w) = a g(u, w) + b g(v, w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form denir.

Tanım 2.1.2.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun.

- i. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g 'ye pozitif tanımlı,
- ii. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g 'ye negatif tanımlı,
- iii. $g(v, v) > 0$ ve $g(w, w) < 0$ olacak şekilde $v, w \in V$ mevcut ise g 'ye indefinit denir.

Tanım 2.1.3.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall u \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0$$

ise g 'ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g 'ye non-dejeneredir denir.

Bu tanıma göre g 'nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$g(u, v) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır.

Tanım 2.1.4.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun. V 'nin

$$RadV = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına g 'ye göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir.

$RadV$ 'nin boyutuna g 'nin nullluk derecesi denir ve $nullV$ ile gösterilir.

Eğer $nullV > 0$ ise g dejeneredir, eğer $nullV = 0$ ise non-dejeneredir.

Tanım 2.1.5. (İndeks)

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun. Bu durumda,

$$g|_W : W \times W \rightarrow R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g 'nin indeksi denir ve q ile gösterilir.

Teorem 2.1.1.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g olsun. Bu durumda,

- i) $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0$, $i \neq j$
- ii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1$, $1 \leq i \leq \gamma$
- iii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = -1$, $\gamma + 1 \leq i \leq \gamma + q$
- iv) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 0$, $\gamma + q + 1 \leq i \leq \gamma + q + \mu = n$

olacak şekilde V 'nin bir $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ bazı vardır.

Tanım 2.1.6.

Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilinear g formuna, V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (yarı Öklid metriği) ve (V, g) ikilisine de skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) denir.

Tanım 2.1.7.

V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,

- i) g pozitif tanımlı ise g 'ye Öklid metriği, (V, g) 'ye de Öklid uzayı,
- ii) g 'nin indeksi $q = 1$ ise g 'ye Lorentz (Minkowski) metriği, (V, g) 'ye de Lorentz (Minkowski) uzayı,
- iii) g dejenere ise V vektör uzayına g ' ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.8.

V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,

- i. $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v 'ye spacelike,
- ii. $v \neq 0$ iken $g(v, v) < 0$ ise v 'ye timelike,
- iii. $v \neq 0$ iken $g(v, v) = 0$ ise v ' ye de lightlike (null veya isotropik) vektör denir.

denir. $v \in V$ vektörünün bu üç tipine v ' nin casual karakteri denir.

V yarı-Öklid uzayı üzerinde bir g skalar çarpımı için; $\|v\| = |g(v, v)|^{\frac{1}{2}}$ sayısına v vektörünün uzunluğu (boyu) denir. Uzunluğu bir birim olan (yani $g(v, v) = \pm 1$) vektöre, birim vektör denir. $v, w \in V$ için $g(v, w) = 0$ ise bu iki vektör ortogonaldır denir. $\vec{0}$ vektörü tüm vektörlere ortogonaldır. Eğer g indefinit ise herhangi bir null vektör kendisine ortogonaldır. V 'deki lineer bağımsız vektörlerin sayısına V 'nin boyutu adı verilir. Bu vektörlerin kümesi V için bir baz oluşturur. Sonlu boyutlu her vektör uzayı için bir baz mevcuttur ve bu baz ortonormal hale getirilebilir.

Tanım 2.1.9.

V bir reel vektör uzayı ve $W \subset V$ de bir alt uzay olsun. Bu durumda; $g|_W$, dejenere ise W 'ye lightlike (dejenere) alt uzay denir.

Genel olarak W 'nin dik'i

$$W^\perp = \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

olmak üzere,

$$W \cap W^\perp \neq \{0\}$$

dır.

Tanım 2.1.10.

V yarı-Öklid uzayının;

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, \dots, \mu\}$$

$$g(u_\alpha, f_j) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0, \quad g(u_\alpha, u_\beta) = \epsilon \delta_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}, \epsilon = \pm 1$$

olacak şekildeki

$$\{f_1, \dots, f_\mu, f_1^*, \dots, f_\mu^*, u_1, \dots, u_t\}$$

bazına V 'nin quasi-ortonormal bazı denir.

Teorem 2.1.2.

V bir yarı-Öklid uzay ve W da bu uzayın bir lightlike altuzayı olsun. Bu durumda, W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır.

Tanım 2.1.11.

q indeksli ve $m = p + q$ boyutlu V yarı-Öklid uzayının $\{e_1, \dots, e_q\}$ birim timelike ve $\{e_{q+1}, \dots, e_{q+p}\}$ birim spacelike vektörlerinden oluşan $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ bir ortonormal bazı ile;

$$q < p \Rightarrow i \in \{1, \dots, q\} \text{ ve } p < q \Rightarrow i \in \{1, \dots, p\}$$

için

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}$$

yi sağlayacak şekilde oluşturulan

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\}; \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\}$$

vektörleri yardımıyla lightlike vektörleri kapsayan V yarı- Öklid uzayının aşağıdaki bazları mevcuttur.

i) $q < p$ ise $2q$ tane lightlike vektör ve $(p - q)$ tane spacelike vektörden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{q+1}, \dots, e_p\}$$

kümesi,

ii) $p < q$ ise $2p$ tane lightlike vektör ve $(q - p)$ tane timelike vektörden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{p+1}, \dots, e_q\}$$

kümesi,

iii) $p = q$ ise $2p = 2q$ adet lightlike vektörden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*\}$$

kümesi V 'nin bir bazıdır.

Tanım 2.1.12. (Yarı-Öklid uzay)

R^n , R üzerinde n - boyutlu standart vektör uzayı olsun. R^n üzerinde $0 \leq q \leq n$ olmak üzere, q tamsayısı için

$$g(x, y) = - \sum_{i=1}^q x_i y_i + \sum_{i=q+1}^n x_i y_i, \quad \forall x, y \in R^n$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınarak elde edilen uzaya q -indeksli, n -boyutlu yarı-Öklid uzay denir ve R_q^n ile gösterilir.

Örnek 2.1.1.

Özel olarak Minkowski 3- uzayı R_1^3 de $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 0, 1)$ ve $z = (1, 0, 1)$ vektörlerini ele alalım. g nin işareti $(-, +, +)$ olmak üzere;

$g((1, 0, 0), (1, 0, 0)) = -1 < 0$ olduğundan x vektörü bir timelike vektör,

$g((0,0,1), (0,0,1)) = 1 > 0$ olduğundan y vektörü spacelike vektör ,

$g((1,0,1), (1,0,1)) = 0$ olduğundan z vektörü null (lightlike) vektördür.

Tanım 2.1.13.

$c \in R_q^n$ sabit bir nokta ve $r > 0$ sabiti için;

$$S_q^{n-1}(c, r) = \{x \in R_q^n : g(x - c, x - c) = r^2\}$$

kümesine yarı-Riemann küre,

$$H_{q-1}^{n-1}(c, r) = \{x \in R_q^n : g(x - c, x - c) = -r^2\}$$

kümesine yarı-Riemann hiperbolik uzay,

$$Q_q^{n-1}(c, r) = \{x \in R_q^n : g(x - c, x - c) = 0\}$$

kümesine de yarı-Riemann lightlike koni (veya null koni) denir.

Örnek 2.1.2.

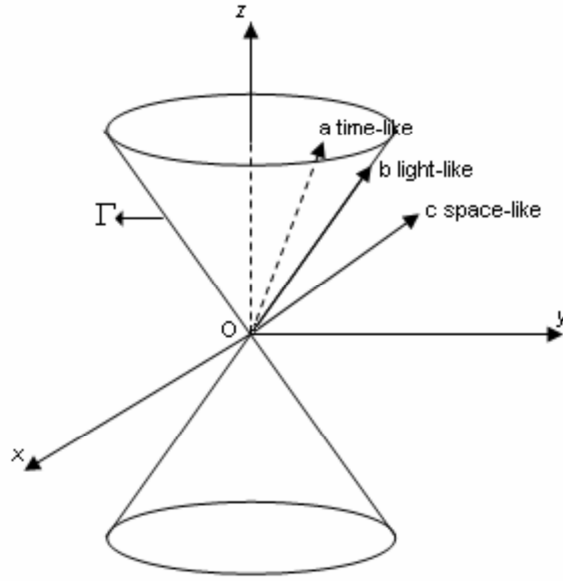
R_1^3 Minkowski 3-uzayında lightlike, spacelike ve null vektörleri elde edelim.

$\Gamma = \{x \in R_1^3 : g(x, x) = 0\}$ cümlesi R_1^3 uzayının null konisi olarak adlandırılır.

Koninin denklemi $x = (x_1, x_2, x_3) \in R_1^3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} g(x, x) &= g((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) \\ &= -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

olup $g(x, x) = 0$ olduğundan $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$ olarak elde edilir. Koni yüzeyinde yatan vektörler lightlike (null) vektörler, koninin iç bölgesindeki vektörler timelike vektörler ve koninin dış bölgesindeki vektörler spacelike vektörlerdir.



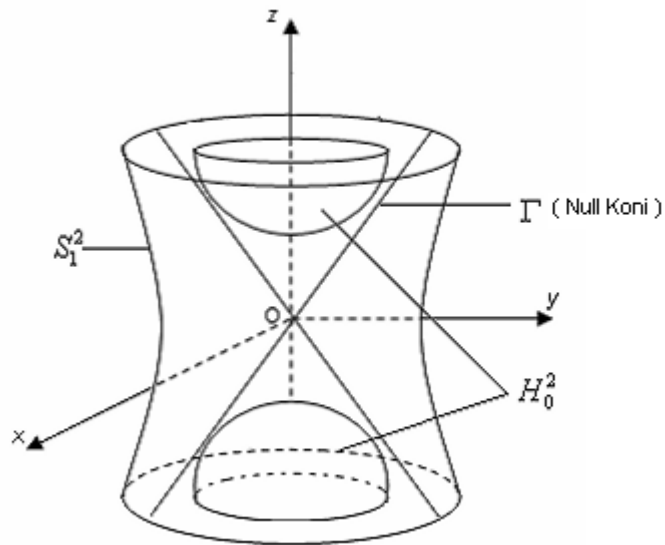
Şekil 2.1. R_1^3 de vektörler

Tanım 2.1.14.

R_1^3 uzayında sırasıyla

$$S_1^2 = \{x \in R_1^3 : g(x, x) = 1\} \text{ ve } H_0^2 = \{x \in R_1^3 : g(x, x) = -1\}$$

cümlelerine Lorentz ve hiperbolik birim küreler denir.



Şekil 2.2. R_1^3 de birim küreler

Tanım 2.1.15.

R_1^n , n-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $\forall X, Y \in R_1^n$ için

$$g(X, Y) = 0$$

ise X ve Y vektörleri Lorentz anlamında diktirler denir.

Örnek 2.1.3.

$n = 2$ için $X = (1, -1)$ ve $Y = (1, 1)$ vektörleri verilsin. Bu vektörler Öklid anlamında dik olmasına rağmen, Lorentz anlamında dik değildirler. Yine $X = (1, -1)$ ve $Y = (1, 1)$ vektörleri de Lorentz anlamında dik iken, Öklid anlamında dik değildirler.

Not 2.1.1. Null vektörlerin dikliği, vektörlerin lineer bağımlılığı ile açıklanır.

Tanım 2.1.16.

$X = (x_1, \dots, x_n) \in R_1^n$ için X vektörünün normu

$$\|X\|_L = \sqrt{|g(X, X)|}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.1.3.

$X = (x_1, \dots, x_n) \in R_1^n$ olsun. Bu takdirde

- i. $\|X\|_L > 0$ dir,
- ii. $\|X\|_L = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür,
- iii. X bir timelike vektör ise, $\|X\|_L^2 = -g(X, X)$ dir,
- iv. X bir spacelike vektör ise, $\|X\|_L^2 = g(X, X)$ dir.

Tanım 2.1.17.

$\alpha \in R_1^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. Böylece α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere

- i. $g(\alpha', \alpha') > 0$ ise α spacelike eğri ,
- ii. $g(\alpha', \alpha') < 0$ ise α timelike eğri ,
- iii. $g(\alpha', \alpha') = 0$ ise α null eğri

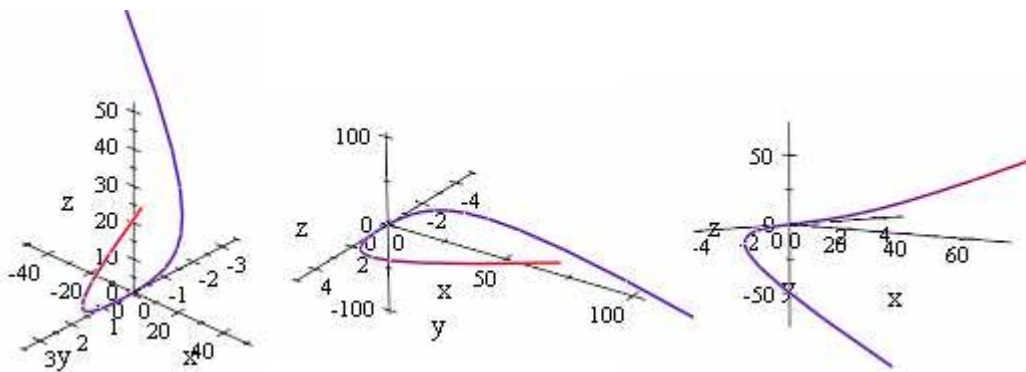
olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.4.

R_1^3 de g 'nin işareti $(+, +, -)$ olsun. $\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s\right)$ eğrisini alınsın. α' , α eğrisinin hız vektörü olmak üzere $\alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s\right)$ bulunur. Buradan $g(\alpha', \alpha') = 1$ olup α eğrisi bir spacelike eğridir.

Yine R_1^3 'de $\beta(s) = (s, \sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s)$ ve $\gamma(s) = (\cosh s, s, \sinh s)$ eğrilerini göz önüne alalım. β' ve γ' sırasıyla β ve γ eğrilerinin hız vektörleri olsunlar. Bu durumda, $g(\beta', \beta') = -1$ olduğundan β eğrisi timelike eğridir.

$g(\gamma', \gamma') = 0$ olduğundan γ eğrisi null (lightlike) eğri olur. α , β ve γ eğrileri sırasıyla Şekil 2.3. de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. R_1^3 de spacelike, timelike ve null eğri

R_1^3 'de g 'nin işareti $(-, +, +)$ olsun. Minkowski 3-uzayında

$\alpha(s) = (s^3 + s^2, s^3 + s^2, s)$ parametrik denkleminin verilen α eğrisini ele alınırsa;

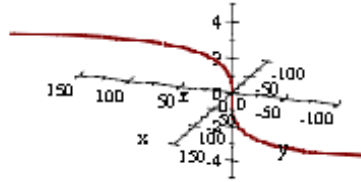
α' , α eğrisinin hız vektörü olmak üzere $\alpha'(s) = (3s^2 + 2s, 3s^2 + 2s, 1)$ bulunur.

Buradan Frenet çatısının vektörlerini şöyle elde ederiz:

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) = (3s^2 + 2s, 3s^2 + 2s, 1) \\ N(s) &= \alpha''(s) = (6s + 2, 6s + 2, 0) \\ B(s) &= \left(-\frac{(3s^2 + 2s)^2 + 1}{12s + 4}, \frac{1 - (3s^2 + 2s)^2}{12s + 4}, -\frac{3s^2 + 2s}{6s + 2} \right) \end{aligned}$$

Burada her s için $T(s)$ spacelike, $N(s)$ ve $B(s)$ null vektörlerdir. Bu eğrinin κ ve τ eğrilikleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \kappa &= 1 \\ \tau &= \frac{6}{6s + 1} \end{aligned}$$



Şekil 2.4. R_1^3 'de bir pseudo null eğri

Tanım 2.1.18.

n - boyutlu R_q^n yarı-Öklid uzayına;

- i. $q = 0$ ise Öklid uzay denir ve R^n ile,
- ii. $q = 1$, $n \geq 2$ ise Minkowski n - uzay denir ve R_1^n ile,
- iii. $q = 1$, $n = 4$ ise Minkowski uzay-zaman denir ve R_1^4 ile,
- iv. $q = 2$, $n = 4$ ise 4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay denir ve R_2^4 ile gösterilir.

Biz bu çalışmada 4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay R_2^4 için g metriğini,

$$g(x, y) = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 ; \quad \forall x, y \in R^4$$

şeklinde kullanacağız.

3. R_1^4 MINKOWSKI UZAY ZAMANDA PSEUDO NULL VE PARTİALLY NULL REKTİFİYEN EĞRİLER

Bu bölümde R_1^4 Minkowski uzay-zamanda pseudo null ve partially null eğrilerin rektifiyen eğri olma şartları incelenecektir. Bu bölüm için temel referansımız İlarşlan-Nesovic (2008) olacaktır.

İlk olarak R_1^4 uzay-zamanda pseudo null ve partially null eğrilerin Frenet denklemlerini verelim.

α eğrisi pseudo null eğri ise Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ile verilir. Burada α eğrisi doğru ise $k_1(s) = 0$, diğer durumlarda ise $k_1(s) = 1$ dir. Buradan; $k_2(s)$, $k_3(s)$ eğriliklerine sahip bir eğri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} g(T, T) = g(B_1, B_1) = 1, g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0, \\ g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0, g(N, B_2) = 1. \end{aligned}$$

Eğer α eğrisi partially null ise Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklindedir. Burada her s için üçüncü eğriliği $k_3(s) = 0$ dır. Bu şartları sağlayan $k_1(s)$, $k_2(s)$ eğriliklerine sahip eğri R_1^4 'in lightlike hiperdüzleminde yatar ve Frenet vektörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} g(T, T) = g(N, N) = 1, g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 0, \\ g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = 0, g(B_1, B_2) = 1 \end{aligned}$$

Şimdi rektifiyen eğri tanımını verelim.

α , R_1^4 'de herhangi bir eğri olsun. α nın rektifiyen uzayı, eğrinin asli normal vektör alanı N 'nin dik uzayı N^\perp olarak tanımlanır. Buna göre N^\perp rektifiyen uzayı

$$N^\perp = \{ w \in R_1^4 \mid g(w, N) = 0 \}$$

şeklindedir.

R_1^4 'de bir rektifiyen eğri; konum vektörü her zaman kendi rektifiyen uzayında kalan eğri olarak tanımlanır.

Özel olarak α , R_1^4 'de bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda N bir null vektör alanı olduğundan N^\perp , R_1^4 'in 3 boyutlu lightlike alt uzayıdır ve $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilir.

Özel olarak α , R_1^4 'de bir partially null eğri ise, R_1^4 'in $\{T, N, B_1\}$ tarafından gerilen lightlike hiperdüzleminde kalır. Bu durumda eğrinin rektifiyen uzayı N^\perp , R_1^4 'in $\{T, B_1\}$ tarafından gerilen lightlike alt uzayıdır.

Sonuç olarak bir pseudo null ve partially null eğrinin konum vektörleri sırasıyla aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$\alpha(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B_1(s) \quad (3.3)$$

$$\alpha(s) = d(s)T(s) + e(s)B_1(s) \quad (3.4)$$

Burada a , b , c , d ve e ; s nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır.

Teorem 3.1.

$\alpha(s)$, $k_1(s) = 1$ eğrilikli R_1^4 uzayında birim hızlı pseudo null rektifiyen eğri olsun. Bu durumda α bir düzlemsel eğridir.

İspat.

Kabul edelim ki α , R_1^4 uzayında $k_1(s) = 1$ eğrilikli ve birim hızlı pseudo null rektifiyen eğri olsun. O zaman eğrinin konum vektörü;

$$\alpha(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B_1(s) \quad (3.5)$$

denklemini sağlar. Burada $a(s), b(s), c(s)$, s nin diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. s ye göre diferensiyeli alınır ve (3.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T'(s) = & a'(s)T(s) + a(s)k_1(s)N(s) + b'(s)N(s) + b(s)k_2(s)B_1(s) \\ & + c'(s)B_1(s) + c(s)(k_3(s)N(s) - k_2(s)B_2(s)) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} T'(s) = & T(s)a'(s) + N(s)(a(s)k_1(s) + b'(s) + c(s)k_3(s)) + B_1(s)(b(s)k_2(s) + \\ & c'(s)) - c(s)k_2(s)B_2(s) \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir.

(3.6) eşitliğinden $g(T, T) = 1$ olduğundan $a'(s) = 1$, $g(T, B_1) = 0$ olduğundan $b(s)k_2(s) + c'(s) = 0$ ve $g(N, B_2) = 0$ eşitliğinden $c(s)k_2(s) = 0$ elde edilir. Ayrıca $a(s)k_1(s) + b'(s) + c(s)k_3(s) = 0$ ise $k_1(s) = 1$ olduğundan $a(s) + b'(s) + c(s)k_3(s) = 0$ bulunur. Böylece;

$$\left. \begin{aligned} a'(s) &= 1 \\ a(s) + b'(s) + c(s)k_3(s) &= 0 \\ b(s)k_2(s) + c'(s) &= 0 \\ c(s)k_2(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

denklem sistemini elde edilir. (3.7)'in son denklemi $k_2(s) = 0$ ya da $c(s) = 0$ olduğu anlamına gelir. Eğer her s için $k_2(s) = 0$ ise α düzlemsel bir eğridir ve $T'(s) = k_1(s)N(s), N'(s) = 0, B_1'(s) = k_3(s)N(s), B_2'(s) = -T(s) - k_3(s)B_1(s)$ dır.

Eğer $c(s) = 0$ ise $c'(s) = 0$ olup (3.7) denklem sistemi;

$$a'(s) = 1, \quad a(s) + b'(s) = 0, \quad b(s)k_2(s) = 0$$

halini alır. Buradan da $a(s) \neq 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Aynı zamanda $b'(s) = -a(s) \neq 0$ ise $b(s) \neq 0$ dır ve sonuç olarak $b(s)k_2(s) = 0$ olması için $k_2(s) = 0$ olur. Bu da teoremin ispatını tamamlar, yani α düzlemsel eğridir.

Teorem 3.2.

$\alpha(s)$, R_1^4 üzerinde $k_1(s) = 1$ eğrilikli birim hızlı pseudo null eğri olsun. Bu durumda α rektifiyen eğridir gerek ve yeter şart;

$$\alpha(s) = s^2Q + sP \quad (3.8)$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada $P, Q \in R_1^4$ üzerinde sabit vektörler olup $g(P, P) = 1$, $g(Q, Q) = 0$ ve $g(P, Q) = 0$ dir.

İspat.

$\alpha(s)$, $k_1(s) = 1$ eğrilikli R_1^4 üzerinde birim hızlı pseudo null rektifiyen eğri olsun. Teorem 3.1.'e göre α bir düzlemsel eğridir ve bu durumda her s için $k_2(s) = 0$ dir. Bu durumda (3.1) deki Frenet denklemlerinden $N'(s) = 0$ dir ve $N(s) = \alpha''(s) = \text{sabit}$ olduğu görülür.

$$\alpha''(s) = sQ_0 + P_0$$

nin integrali alınarak $P_0, Q_0, R_0 \in R_1^4$ sabit vektörler olmak üzere ,

$$\alpha(s) = \frac{s^2}{2}Q_0 + sP_0 + R_0$$

eşitliği elde edilir. Böylece $g(T, T) = 1$ olduğundan,

$$g(sQ_0 + P_0, sQ_0 + P_0) = 1$$

$$s^2g(Q_0, Q_0) + s g(Q_0, P_0) + s g(P_0, Q_0) + g(P_0, P_0) = 1$$

$$s^2g(Q_0, Q_0) + 2sg(Q_0, P_0) + g(P_0, P_0) = 1$$

dir. Buradan da $g(P_0, P_0) = 1$, $g(Q_0, Q_0) = 0$, $g(Q_0, P_0) = 0$ eşitlikleri elde edilir. R_1^4 'in ötelemelerine bağlı olarak $R_0 = (0,0,0,0)$ alabiliriz. $P = P_0$ ve $Q_0 = 2Q$ alırsak ve bu eşitlikleri

$$\alpha(s) = \frac{s^2}{2}Q_0 + sP_0 + R_0$$

denkleminde yerine yazarsak, (3.8) eşitiği ile verilen α nın denklemi elde edilir.

Tersine α eğrisi, R_1^4 üzerinde $k_1(s) = 1$ eğrilikli, (3.8) eşitliğiyle verilen birim hızlı pseudo null eğri olsun. O zaman,

$$T(s) = \alpha'(s) = 2sQ + P \text{ ve } N(s) = T'(s) = \alpha''(s) = 2Q$$

olup,

$$Q = \frac{N(s)}{2}$$

dır. Bu eşitlikler (3.8) de yerine yazılırsa kolaylıkla,

$$P = T \text{ ve } Q = \frac{N}{2}$$

elde edilir ve α' yı

$$\alpha(s) = sT(s) - \frac{s^2}{2}N(s)$$

olarak elde ederiz. Pseudo null eğrinin denklemi $N(s)$ ve $T(s)$ cinsinden yazılıyorsa eğri rektifiyendir. Bu durum α nın rektifiyen eğri olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.3.

$\alpha(s)$ eğrisi, R_1^4 üzerinde $k_3(s) = 0$ eğrilikli birim hızlı partially null eğri olsun. Bu durumda α nın bir rektifiyen eğri olması için gerek ve yeter şart bir doğru olmasıdır.

İspat.

$\alpha(s)$ eğrisi, $k_3(s) = 0$ eğrilikli birim hızlı partially null eğri olsun. Eğrinin konum vektörü $a(s)$ ve $b(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha(s) = a(s)T(s) + b(s)B_1(s) \quad (3.9)$$

denklemi elde edilir. (3.9) eşitliğinin s ye göre diferensiyeli alınır ve (3.2) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\alpha'(s) = T(s) = a'(s)T(s) + a(s)k_1(s)N(s) + b'(s)B_1(s) + b(s)k_3(s)B_1(s) \quad (3.10)$$

bulunur. Ayrıca (3.2) Frenet denklemlerinden $k_3(s) = 0$ için $B_1'(s) = 0$ ve $B_2'(s) = -k_2(s)N(s)$ olduğu görülür. (3.10) denkleminin sırasıyla T, N, B_1 ile çarpılmasıyla ve $k_3(s) = 0$ olduğu göz önüne alınarak

$$a'(s) = 1, \quad a(s)k_1(s) = 0, \quad b'(s) = 0 \quad (3.11)$$

denklem sistemini elde edilir. Buradan $a(s) \neq 0$ olduğu bulunur ve (3.11) nin ikinci eşitliğinden $k_1(s) = 0$ olur. Bu yüzden α eğrisi bir doğrudur.

Tersine, $\alpha(s)$ birim hızlı partially null doğru olsun. Bu durumda bu eğrinin konum vektörü α , tanjant vektörü olan $T(s)$ ile aynı doğru üzerinde bulunur. Bu durumda α eğrisi, $\{T, B_1\}$ tarafında gerilen düzlemde yatar. Sonuç olarak α eğrisi bir rektifiyen eğridir.

4. R_2^4 UZAYINDA PSEUDO NULL VE PARTİALLY NULL REKTİFİYEN EĞRİLER

Bu bölümde ilk olarak R_2^4 4-boyutlu, 2-indeksli yarı öklidyen uzayda partially null ve pseudo null eğriler tanıtılacak, daha sonra bu eğrilerin Frenet denklemleri ve W -pseudo null ve W - partially null eğri örnekleri ve bu eğrilerin 3-boyutlu alt uzaylara ortogonal projeksiyonları verilerek görselleştirilecektir. Bir sonraki adımda da adı geçen eğriler için rektifiyen eğri olma karakterizasyonları elde edilecektir.

4.1 R_2^4 'de Pseudo Null ve Partially Null Eğriler

4.1.1. R_2^4 'de Partially Null Eğriler ve Frenet Denklemleri

$\alpha(s) : I \subset R \rightarrow R_2^4$ ye diferensiyellenebilir bir spacelike ya da timelike eğri olsun. Buradan $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) < 0$ veya $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) > 0$ dır. Tanjant vektör ve aslı normal vektör sırasıyla $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ olarak tanımlanır. Buradan $\{T, N\}$ cümlesi R_2^4 'de 1- indeksli timelike düzlemdir.

$$C^\perp = \{X(s) \in R_2^4 : g(X(s), T(s)) = 0, g(X(s), N(s)) = 0\}$$

alt uzayını tanımlarsak; $C^\perp = \{T, N\}^\perp$

$C^\perp = \{T, N\}^\perp$ cümlesi de R_2^4 'de spacelike, timelike ve null vektörler içeren 1- indeksli timelike düzlemdir.

$$R_2^4 = C^\perp \oplus \{T, N\}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $N'(s)$ vektörünü yeniden oluşturabiliriz öyle ki;

$$N'(s) = a T(s) + b N(s) + c V(s)$$

şeklinde olup burada $a, b, c \in R$, $V(s) \in C^\perp$ dir. Burada birinci binormal vektör $B_1(s) = V(s)$ olup α eğrisi partially null olduğundan B_1 null vektördür. Ayrıca de farklı bir null vektör B_2 bulunur ve

$$g(T, B_2) = g(N, B_2) = g(B_2, B_2) = 0, g(B_1, B_1) = 1$$

olup B_2 ikinci binormal vektör diye adlandırılır.

$$\begin{aligned}
g(T, T) &= \varepsilon_1 = \pm 1, \quad g(N, N) = \varepsilon_2 = \pm 1 \quad \text{ve} \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1 \quad \text{dir. Ayrıca} \quad g(B_1, B_2) = 1 \\
g(B_1, B_1) &= g(B_2, B_2) = 0, \\
g(T, N) &= g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = 0
\end{aligned}$$

olmak üzere, Frenet vektörlerinin türevleri ile kendileri arasındaki ilişkiyi veren Frenet denklemleri şu şekildedir (İlarslan 2005):

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

R_2^4 ' de partially null W -eğriler Torgasev, Nesovic ve İlarslan (2005) tarafından çalışılmış ve aşağıdaki teorem ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.1.

α eğrisi, R_2^4 de birim hızlı bir partially null eğri ve $g(T, T) = \varepsilon = \mp 1$ olsun. Bu durumda α eğrisi, $k_1 = c_1, k_2 = c_2, k_3 = 0, c_1, c_2 \in R$ sabit eğriliklerine sahiptir gerek ve yeter şart; R_2^4 'nin izometrilerine bağlı olarak α eğrisi aşağıdaki gibi parametrelendirilebilir.

$$\alpha(s) = As + \frac{1}{c_1} (E \cosh(c_1 s) + F \sinh(c_1 s))$$

Burada A, E, F birbirlerine dik vektörler ve

$$g(A, A) = 0, \quad g(E, E) = -g(F, F) = -\varepsilon$$

dir.

Bu teoremi kullanarak aşağıdaki partially null W -eğri örnekleri elde edilebilir.

Örnek 4.1.1.

α , timelike partially null eğri olsun. Yani $g(T, T) = \varepsilon = -1$ dir.

Özel olarak, $k_1 = c_1 = 1$ ve A, E, F vektörlerini de şu şekilde seçelim.

$$A = (1, 0, 1, 0), \quad g(A, A) = 0$$

$$E = (0, 0, 0, 1), \quad g(E, E) = 1$$

$$F = (0, 1, 0, 0), \quad g(F, F) = -1$$

Bu durumda teorem 4.1.1. gereğince,

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (s, 0, s, 0) + ((0, 0, 0, 1)\cosh s + (0, 1, 0, 0)\sinh s) \\ &= (s, \sinh s, s, \cosh s) \end{aligned}$$

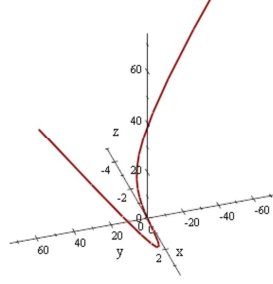
bulunur. Dikkat edilirse, $\alpha'(s) = (1, \cosh s, 1, \sinh s)$ olmak üzere

$g(\alpha', \alpha') = -1$ olduğundan α eğrisi, $k_1 = 1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = 0$, $c_2 \in R$ eğriliklerine sahip bir timelike partially null eğridir.

Bu eğrinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

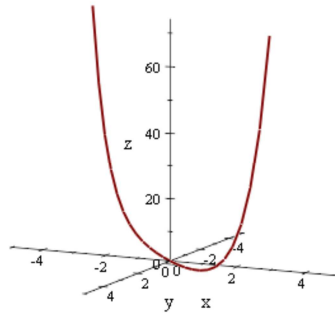
$$\alpha_{x_1=0} = (\sinh s, s, \cosh s)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



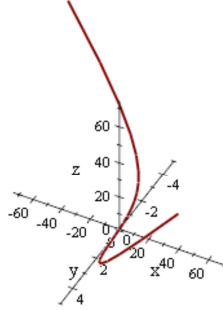
Şekil 4.1. α eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü

$x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri $\alpha_{x_2=0} = (s, s, \cosh s)$ dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



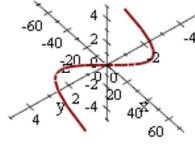
Şekil 4.2. α eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü

$x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri ise $\alpha_{x_3=0} = (s, \sinh s, \cosh s)$ dır ve bu eğrinin grafiği de aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.3. α eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü

$x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri ise $\alpha_{x_4=0} = (s, \sinh s, s)$ dır ve bu eğrinin grafiği de aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.4. α eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Örnek 4.1.2.

β eğrisi, spacelike partially null eğri olsun. $g(T, T) = \varepsilon = 1$ dir.

Özel olarak, $k_1 = c_1 = 1$ ve A, E, F vektörlerini de şu şekilde seçelim.

$$A = (1, 0, 1, 0) \text{ ve } g(A, A) = 0$$

$$E = (0, 1, 0, 0) \text{ ve } g(E, E) = -1$$

$$F = (0, 0, 0, 1) \text{ ve } g(F, F) = 1$$

Bu durumda teorem 4.1.1. gereğince;

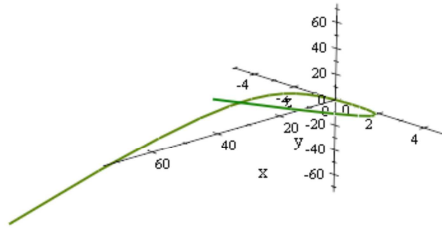
$$\begin{aligned}\beta(s) &= (s, 0, s, 0) + ((0, 1, 0, 0)\cosh s + (0, 0, 0, 1)\sinh s) \\ &= (s, \cosh s, s, \sinh s)\end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse $\beta'(s) = (1, \sinh s, 1, \cosh s)$ olduğundan $g(\beta', \beta') = 1$ olduğundan β eğrisi, $k_1 = 1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ eğriliklerine sahip bir spacelike partially null eğridir.

Bu eğrinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

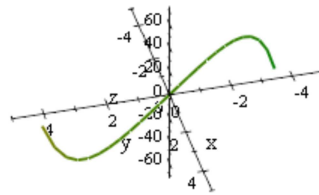
$$\beta_{x_1=0} = (\cosh s, s, \sinh s)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.5. β eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri $\beta_{x_2=0} = (s, s, \sinh s)$ dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

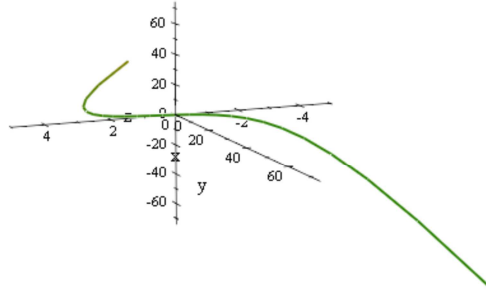


Şekil 4.6. β eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri

$$\beta_{x_3=0} = (s, \cosh s, \sinh s)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

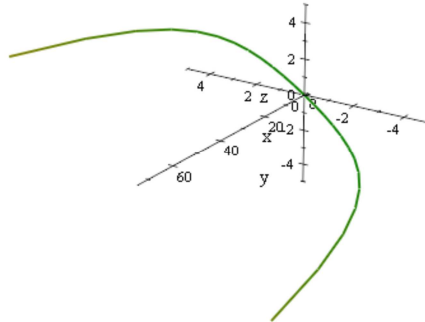


Şekil 4.7. β eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü

$x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri ise

$$\beta_{x_4=0} = (s, \cosh s, s)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.8. β eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

4.1.2. R_2^4 de Pseudo Null Eğriler ve Frenet Denklemleri

$\alpha(s) : I \subset R \rightarrow R_2^4$ diferensiyellenebilir bir spacelike ya da timelike eğri olsun. Buradan $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$ ve $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 0$ olup $\alpha''(s) \neq 0$ dır. Tanjant vektör ve aslî normal vektör sırasıyla $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) = \alpha''(s)$ olarak tanımlanır.

$$g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$$

ifadesinde s ye göre türev alınırsa;

$$g(\alpha'(s), \alpha''(s)) = 0$$

bulunur. Bu denklemin de s ye göre türevi alınır;

$$g(\alpha'(s), \alpha'''(s)) = 0$$

elde edilir. Buradan $\alpha'''(s)$ vektörü $\alpha'(s)$ ve $\alpha''(s)$ vektörlerinin her ikisine de dik olur. Kabul edelim ki $g(\alpha'''(s), \alpha'''(s)) \neq 0$ olsun. Buradan birinci binormal vektör B_1 ,

$$B_1 = \frac{\alpha'''(s)}{\|\alpha'''(s)\|}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca R_2^4 de farklı bir null vektör vardır B_2 öyle ki;

$$g(T, B_2) = g(B_1, B_2) = g(B_2, B_2) = 0, \quad g(N, B_2) = 1$$

olup B_2 ikinci binormal vektör diye adlandırılır.

$g(T, T) = \varepsilon_1 = \pm 1$, $g(B_1, B_1) = \varepsilon_2 = \pm 1$ ve $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ dir. Ayrıca $g(N, B_2) = 1$,

$$g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0,$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0$$

olmak üzere, Frenet vektörlerinin türevleri ile kendileri arasındaki ilişkiyi veren Frenet denklemleri şu şekildedir (İlarslan 2005)

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -\varepsilon_2 k_2 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -\varepsilon_2 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Benzer şekilde, R_2^4 de pseudo null W -eğriler Torgasev, Nesovic ve İlarslan (2005) tarafından çalışılmış ve aşağıdaki teorem ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.2.

α eğrisi, R_2^4 de birim hızlı bir pseudo null eğri ve $g(T, T) = \varepsilon = \mp 1$ olsun. Bu durumda α eğrisi, $k_1 = 1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = c_3$, $c_2, c_3 \in R_0$ sabit eğriliklerine sahiptir gerek ve yeter şart R_2^4 nin izometrilere bağlı olarak α aşağıdaki gibi parametrelendirilebilir.

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1} (E \cosh(\lambda_1 s) + F \sinh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2} (G \cosh(\lambda_2 s) + H \sinh(\lambda_2 s))$$

burada $\lambda_1^2 = K + \sqrt{K^2 - c_2^2}$ ve $\lambda_2^2 = K - \sqrt{K^2 - c_2^2}$, $K = c_2 c_3 > 0$, $K^2 - c_2^2 > 0$ olup E, F, G, H ortogonal vektörler ve

$$g(E, E) = -g(F, F) = \varepsilon \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad g(H, H) = -g(G, G) = \varepsilon \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

dir.

Bu teoremi kullanarak aşağıdaki pseudo null W -eğri örnekleri elde edilebilir.

Örnek 4.1.3.

γ eğrisi, spacelike pseudo null eğri olsun. Bu durumda $g(T, T) = \varepsilon = 1$ dir.

Kabul edelimki γ nın eğrilikleri $k_2 = c_2 = 1$ ve $k_3 = c_3 = 2$ olsun.

$K = 2$ ve $K^2 - c_2^2 = 3$ olup buradan,

$$\lambda_1^2 = 2 + \sqrt{3}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda_2^2 = 2 - \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$g(E, E) = -g(F, F) = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = B \quad \text{ve} \quad g(H, H) = -g(G, G) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = A$$

bulunur. E, F, G, H vektörlerini şu şekilde seçelim.

$$E = (0, 0, 0, \sqrt{B}), \quad g(E, E) = B$$

$$F = (0, \sqrt{B}, 0, 0), \quad g(F, F) = -B$$

$$G = (\sqrt{A}, 0, 0, 0), \quad g(G, G) = -A$$

$$H = (0, 0, \sqrt{A}, 0), \quad g(H, H) = A$$

Bu durumda teorem 4.1.2. gereğince,

$$\begin{aligned} \gamma(s) = & \frac{1}{\lambda_1} ((0, 0, 0, \sqrt{B}) \cosh(\lambda_1 s) + (0, \sqrt{B}, 0, 0) \sinh(\lambda_1 s)) \\ & + \frac{1}{\lambda_2} ((\sqrt{A}, 0, 0, 0) \cosh(\lambda_2 s) + (0, 0, \sqrt{A}, 0) \sinh(\lambda_2 s)) \end{aligned}$$

$$\gamma(s) = \left(\frac{\sqrt{A}}{\lambda_2} \cosh(\lambda_2 s), \frac{\sqrt{B}}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 s), \frac{\sqrt{A}}{\lambda_2} \sinh(\lambda_2 s), \frac{\sqrt{B}}{\lambda_1} \cosh(\lambda_1 s) \right)$$

Dikkat edilirse,

$$\gamma'(s) = (\sqrt{A} \sinh(\lambda_2 s), \sqrt{B} \cosh(\lambda_1 s), \sqrt{A} \cosh(\lambda_2 s), \sqrt{B} \sinh(\lambda_1 s))$$

ve

$$g(\gamma', \gamma') = -A \sinh^2(\lambda_2 s) - B \cosh^2(\lambda_1 s) + A \cosh^2(\lambda_2 s) + B \sinh^2(\lambda_1 s)$$

$$= A - B$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$$

olduğundan γ eğrisi, $k_1 = 1$, $k_2 = c_2 = 1$ ve $k_3 = c_3 = 2$ eğriliklerine sahip bir spacelike pseudo null eğridir. Burada,

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \quad \text{ve} \quad B = \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}},$$

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

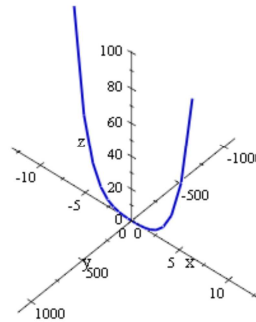
$$g(F, F) + g(H, H) = \mp 1 \quad \text{ise} \quad \frac{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \quad \text{sağlanır.}$$

$$\gamma(s) = \left(\frac{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} s\right) \right)$$

Bu eğrinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\gamma_{x_1=0} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} s\right) \right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

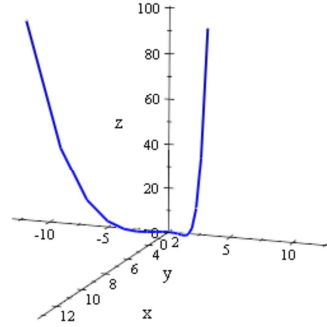


Şekil 4.9. γ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri

$$\gamma_{x_2=0} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s\right) \right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

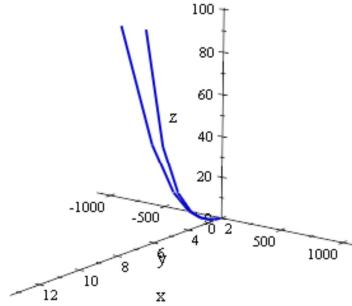


Şekil 4.10. γ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri,

$$\gamma_{x_3=0} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s\right) \right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

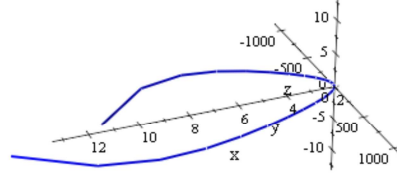


Şekil 4.11. γ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri ise;

$$\gamma_{x_4=0} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right) \right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.12. γ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Örnek 4.1.4.

δ eğrisi, timelike pseudo null eğri olsun. Bu durumda $g(T, T) = \varepsilon = -1$ dir.

Kabul edelim ki δ nin eğrilikleri $k_1 = 1$, $k_2 = c_2 = 1$ ve $k_3 = c_3 = 2$ olsun.

$K = 2$ ve $K^2 - c_2^2 = 3$ olup, teorem 4.1.2. den

$$\lambda_1^2 = 2 + \sqrt{3} \quad , \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda_2^2 = 2 - \sqrt{3} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

ve

$$-g(F, F) = g(E, E) = -\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = -B = \frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

Bu durumda E ve F vektörleri

$$E = (\sqrt{B}, 0, 0, 0) \quad \text{ve} \quad F = (0, 0, \sqrt{B}, 0)$$

şeklinde alınabilir.

Benzer şekilde;

$$g(H, H) = -g(G, G) = -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = -A = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

olup, H ve G vektörleri;

$$H = (0, \sqrt{A}, 0, 0) \quad \text{ve} \quad G = (0, 0, 0, \sqrt{A})$$

şeklinde alınabilir. Bu durumda δ eğrisi;

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \frac{1}{\lambda_1} ((\sqrt{B}, 0, 0, 0) \cosh(\lambda_1 s) + (0, 0, \sqrt{B}, 0) \sinh(\lambda_1 s)) \\ &+ \frac{1}{\lambda_2} ((0, 0, 0, \sqrt{A}) \cosh(\lambda_2 s) + (0, \sqrt{A}, 0, 0) \sinh(\lambda_2 s)) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\delta(s) = \left(\frac{\sqrt{B}}{\lambda_1} \cosh(\lambda_1 s), \frac{\sqrt{A}}{\lambda_2} \sinh(\lambda_2 s), \frac{\sqrt{B}}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 s), \frac{\sqrt{A}}{\lambda_2} \cosh(\lambda_2 s) \right)$$

bulunur.

$$\delta'(s) = (\sqrt{B} \sinh(\lambda_1 s), \sqrt{A} \cosh(\lambda_2 s), \sqrt{B} \cosh(\lambda_1 s), \sqrt{A} \sinh(\lambda_2 s))$$

ve

$$\begin{aligned} g(\delta', \delta') &= -B \sinh^2(\lambda_1 s) - A \cosh^2(\lambda_2 s) + B \cosh^2(\lambda_1 s) + A \sinh^2(\lambda_2 s) \\ &= B - A \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1 \end{aligned}$$

olduğundan δ timelike pseudo null eğridir.

$$A = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad B = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

değerleri eğri denkleminde yerlerine yazılırsa;

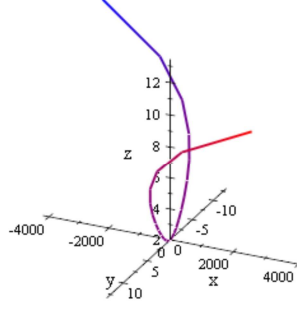
$$\delta(s) = \left(\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} s\right) \right)$$

olarak bulunur.

Bu eğrinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\delta_{x_1=0} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} s\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} s\right) \right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

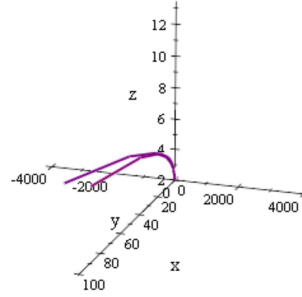


Şekil 4.13. δ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\delta_{x_2=0} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right) \right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

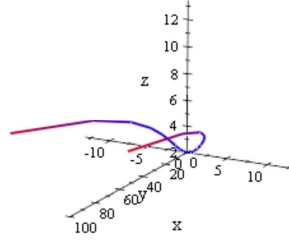


Şekil 4.14. δ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\delta_{x_3=0} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right) \right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

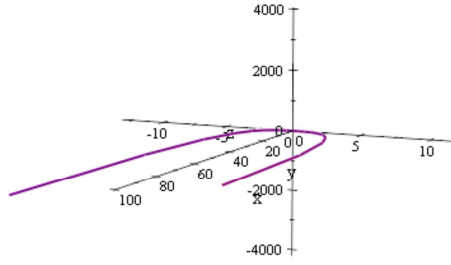


Şekil 4.15. δ eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Eğrinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri ise;

$$\delta_{x_4=0} = \left(\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \cosh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}s\right), \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}s\right) \right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.16. δ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Teorem 4.1.3.

α eğrisi, R_2^4 de birim hızlı bir pseudo null eğri ve $g(T, T) = \varepsilon = \mp 1$ olsun. Bu durumda α eğrisi $k_1 = 1, k_2 = c_2, k_3 = c_3, c_2, c_3 \in R_0$ sabit eğriliklerine sahiptir gerek ve yeter şart R_2^4 'nin izometrilere bağlı olarak α aşağıdaki gibi parametrelendirilebilir.

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} ((\lambda_1 E - \lambda_2 H) \cos(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s) + (\lambda_1 H + \lambda_2 E) \sin(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s) + (\lambda_1 F - \lambda_2 G) \cos(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s) + (\lambda_1 G + \lambda_2 F) \sin(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s))$$

Burada

$$\lambda_1^2 = \frac{c_2+K}{2} \quad \text{ve} \quad \lambda_2^2 = \frac{c_2-K}{2}, \quad K = c_2c_3, \quad K^2 - c_2^2 < 0$$

olup E, F, C, H ve G vektörleri birbirlerine ortogonal vektörler ve

$$g(E, E) = -g(F, F) = g(G, G) = -g(H, H) = \varepsilon$$

dir.

Bu teoremi kullanarak aşağıdaki pseudo null W -eğri örnekleri elde edilebilir.

Örnek 4.1.5.

μ eğrisi, spacelike pseudo null eğri olsun. Bu durumda $g(T, T) = \varepsilon = 1$ dir.

Kabul edelim ki μ nın eğrilikleri $k_1 = 1$, $k_2 = c_2 = 2$ ve $k_3 = c_3 = \frac{1}{2}$ olsun.

$K = 1 > 0$ ve $K^2 - c_2^2 = -3 < 0$ olup, teorem 4.1.3. den

$$\lambda_1^2 = \frac{c_2+K}{2} = \frac{3}{2}, \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{c_2-K}{2} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ve

$$g(E, E) = -g(F, F) = g(G, G) = -g(H, H) = \varepsilon = 1$$

dir.

Bu durumda E, F, G, H vektörleri

$$E = (0, 0, 0, 1)$$

$$F = (0, 1, 0, 0)$$

$$G = (0, 0, 1, 0)$$

$$H = (1, 0, 0, 0)$$

şeklinde alınabilir.

$$\begin{aligned} \mu(s) = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} & ((\lambda_1 E - \lambda_2 H) \cos \lambda_2 s \sinh \lambda_1 s + (\lambda_1 H + \lambda_2 E) \sinh \lambda_2 s \cosh \lambda_1 s \\ & + (\lambda_1 F - \lambda_2 G) \cos \lambda_2 s \cosh \lambda_1 s + (\lambda_1 G + \lambda_2 F) \sin \lambda_2 s \sinh \lambda_1 s) \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 E - \lambda_2 H) = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

$$(\lambda_1 H + \lambda_2 E) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0, \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

$$(\lambda_1 F - \lambda_2 G) = \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 0 \right)$$

$$(\lambda_1 G + \lambda_2 F) = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0 \right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mu(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left(-\cos\lambda_2 s \sinh\lambda_1 s + \sqrt{3}\sinh\lambda_2 s \cosh\lambda_1 s, \sqrt{3}\cos\lambda_2 s \cosh\lambda_1 s \right. \\ & \left. + \sin\lambda_2 s \sinh\lambda_1 s, -\cos\lambda_2 s \cosh\lambda_1 s + \sqrt{3}\sinh\lambda_2 s \sinh\lambda_1 s, \right. \\ & \left. \sqrt{3}\cos\lambda_2 s \sinh\lambda_1 s + \sin\lambda_2 s \cosh\lambda_1 s \right) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\mu'(s) = (\sin\lambda_2 s \sinh\lambda_1 s, \cos\lambda_2 s \sinh\lambda_1 s, \sin\lambda_2 s \cosh\lambda_1 s, \cos\lambda_2 s \cosh\lambda_1 s)$$

$$g(\mu', \mu') = 1$$

$\lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ eşitlikleri $\mu(s)$ denkleminde yerine yazılırsa

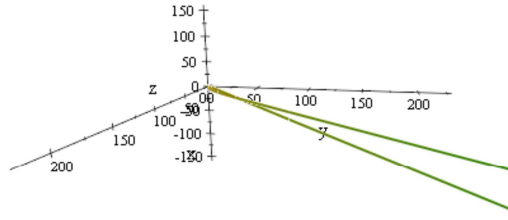
$$\begin{aligned} \mu(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left(-\cos\sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh\sqrt{\frac{3}{2}}s + \sqrt{3}\sinh\sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh\sqrt{\frac{3}{2}}s, \sqrt{3}\cos\sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh\sqrt{\frac{3}{2}}s \right. \\ & \left. + \sin\sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh\sqrt{\frac{3}{2}}s, -\cos\sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh\sqrt{\frac{3}{2}}s + \sqrt{3}\sinh\sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh\sqrt{\frac{3}{2}}s, \right. \\ & \left. \sqrt{3}\cos\sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh\sqrt{\frac{3}{2}}s + \sin\sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh\sqrt{\frac{3}{2}}s \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eğrinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\begin{aligned} \mu_{x_1=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} \cos \sqrt{\frac{1}{2}} s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}} s + \sin \sqrt{\frac{1}{2}} s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}} s, -\cos \sqrt{\frac{1}{2}} s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}} s \right. \\ \left. + \sqrt{3} \sinh \sqrt{\frac{1}{2}} s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}} s, \sqrt{3} \cos \sqrt{\frac{1}{2}} s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}} s + \sin \sqrt{\frac{1}{2}} s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \end{aligned}$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

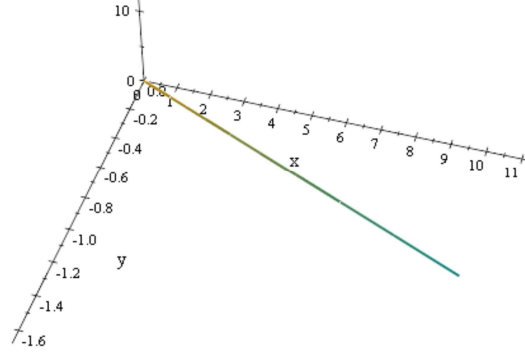


Şekil 4.17. μ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\begin{aligned} \mu_{x_2=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\cos \sqrt{\frac{1}{2}} s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}} s + \sqrt{3} \sinh \sqrt{\frac{1}{2}} s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}} s, -\cos \sqrt{\frac{1}{2}} s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}} s \right. \\ \left. + \sqrt{3} \sinh \sqrt{\frac{1}{2}} s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}} s, \sqrt{3} \cos \sqrt{\frac{1}{2}} s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}} s + \sin \sqrt{\frac{1}{2}} s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \end{aligned}$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

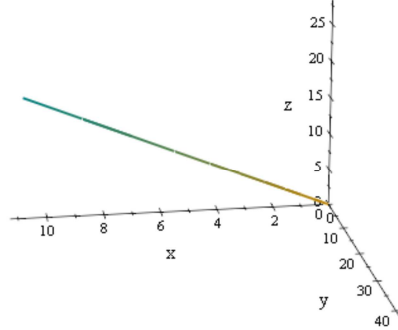


Şekil 4.18. μ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\begin{aligned} \mu_{x_3=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left(-\cos \sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}}s + \sqrt{3} \sinh \sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}}s, \sqrt{3} \cos \sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}}s \right. \\ & \left. + \sin \sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}}s, \sqrt{3} \cos \sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}}s + \sin \sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}}s \right) \end{aligned}$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

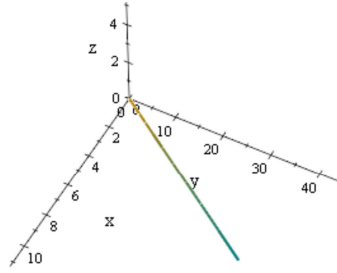


Şekil 4.19. μ eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\begin{aligned} \mu_{x_4=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left(-\cos \sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}}s + \sqrt{3} \sinh \sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}}s, \sqrt{3} \cos \sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}}s \right. \\ & \left. + \sin \sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}}s, -\cos \sqrt{\frac{1}{2}}s \cosh \sqrt{\frac{3}{2}}s + \sqrt{3} \sinh \sqrt{\frac{1}{2}}s \sinh \sqrt{\frac{3}{2}}s \right) \end{aligned}$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.20. μ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Örnek 4.1.6.

ξ eğrisi, timelike pseudo null eğri olsun. Bu durumda $g(T, T) = \varepsilon = -1$ dir.

Kabul edelim ki ξ nin eğrilikleri $k_1 = 1$, $k_2 = c_2 = 2$ ve $k_3 = c_3 = \frac{1}{2}$ olsun.

$K = 1$ ve $K^2 - c_2^2 = -3 < 0$ olup, teorem 4.1.3.'den

$$\lambda_1^2 = \frac{c_2 + K}{2}, \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{2+1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{c_2 - K}{2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2$$

ve

$$g(E, E) = -g(F, F) = g(G, G) = -g(H, H) = \varepsilon$$

dır ve bu durumda E, F, G ve H vektörleri;

$$E = (1, 0, 0, 0)$$

$$F = (0, 0, 1, 0)$$

$$G = (0, 1, 0, 0)$$

$$H = (0, 0, 0, 1)$$

şeklinde alınabilir.

$$\xi(s) = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} ((\lambda_1 E - \lambda_2 H) \cos(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s) + (\lambda_1 H + \lambda_2 E) \sin(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s))$$

$$+(\lambda_1 F - \lambda_2 G) \cos(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s) + (\lambda_1 G + \lambda_2 F) \sin(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s))$$

olmak üzere

$$\lambda_1 E - \lambda_2 H = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0, 0 \right) - \left(0, 0, 0, \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\lambda_1 H + \lambda_2 E = \left(0, 0, 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, 0, 0 \right) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\lambda_1 F - \lambda_2 G = \left(0, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0 \right) - \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0, 0 \right) = \left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0 \right)$$

$$\lambda_1 G + \lambda_2 F = \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0 \right) + \left(0, 0, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0 \right) = \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0 \right)$$

eşitlikleri $\xi(s)$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \xi(s) = \frac{1}{2} & \left(\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \cos(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s) + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \sin(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s) \right. \\ & + \left(0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 0 \right) \cos(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s) \\ & \left. + \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0 \right) \sin(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned} \xi(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left(\sqrt{3} \cos(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s) + \sin(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s), -\cos(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s) \right. \\ & + \sqrt{3} \sin(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s), \sqrt{3} \cos(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s) \\ & + \sin(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s), -\cos(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s) \\ & \left. + \sqrt{3} \sin(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s) \right) \end{aligned}$$

bulunur.

Bu durumda;

$$\begin{aligned} \xi'(s) = & (\cos(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s), \sin(\lambda_2 s) \cosh(\lambda_1 s), \cos(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s), \\ & \sin(\lambda_2 s) \sinh(\lambda_1 s)) \end{aligned}$$

ve $g(\xi', \xi') = -1$ dir.

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ve } \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

eşitlikleri $\xi(s)$ denkleminde yerine yazılırsa;

$\xi(s) =$

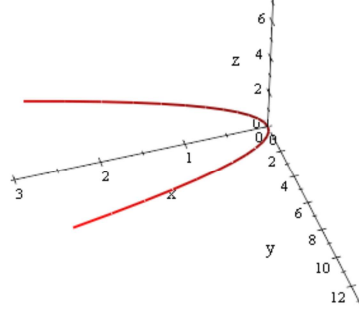
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) + \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), - \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \right. \\ & \quad + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), \sqrt{3} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \\ & \quad + \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), - \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \\ & \quad \left. + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \right) \end{aligned}$$

bulunur.

Bu eğrinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\begin{aligned} \xi_{x_1=0} = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(- \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), \right. \\ & \quad \sqrt{3} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) + \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), - \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \\ & \quad \left. + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \right) \end{aligned}$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

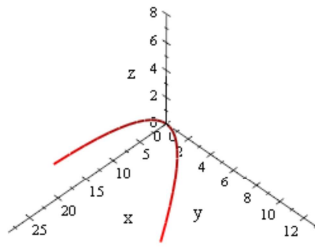


Şekil 4.21. ξ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\begin{aligned} \xi_{x_2=0} = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) + \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), \sqrt{3} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \right. \\ & + \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), - \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \\ & \left. + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \right) \end{aligned}$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



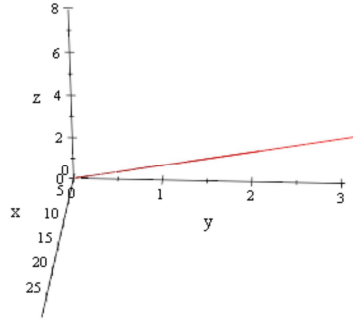
Şekil 4.22. ξ eğrisinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\xi_{x_3=0} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) + \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), -\cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \right) \\ & + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), -\cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \\ & + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \end{aligned}$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.

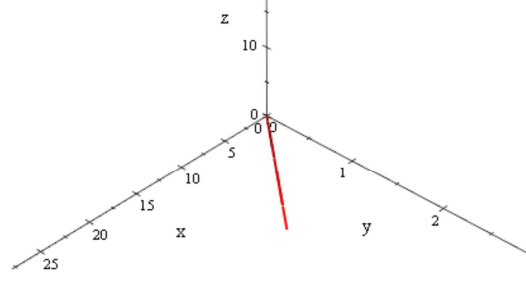


Şekil 4.23. ξ eğrisinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Bu eğrinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri ise;

$$\begin{aligned} \xi_{x_4=0} = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{3} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) + \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), -\cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \right) \\ & + \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right), \sqrt{3} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \cosh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \\ & + \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} s \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{3}{2}} s \right) \end{aligned}$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 4.24. ξ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

4.2. R_2^4 de Partially Null ve Pseudo Null Rektifiyen Eğriler

4.2.1. R_2^4 de Partially Null Rektifiyen Eğriler

α eğrisi, R_2^4 'de bir partially null eğri olsun. $k_3 = 0$ olduğundan α eğrisi tamamıyla R_2^4 nin $\{T, N, B_1\}$ vektörleri tarafından gerilen lightlike hiperdüzleminde yatar. Eğrinin rektifiyen uzayı asli normal vektör alanı N nin dik uzayı N^\perp olarak tanımlanır. Buna göre Frenet denklemleri göz önüne alındığında

$$N^\perp = Sp\{T, B_1\}$$

olup, R_2^4 nin 2-boyutlu lightlike altuzayıdır. α eğrisinin konum vektörü her zaman kendi rektifiyen uzayında kalıyorsa, α ya bir rektifiyen eğridir demiştik.

Bu durumda α eğrisinin konum vektörü,

$$\alpha(s) = a(s)T(s) + b(s)B_1(s) \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. a ve b , s nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır.

(4.3) eşitliğinden türev alınır ve Frenet denklemlerinin yerlerine yazılmasıyla;

$$T = a'T + a k_1 N + b'B_1 + b k_3 B_1$$

elde ederiz. Buradan,

$$T = a'T + a k_1 N + (b' + b k_3)B_1$$

bulunur. Bu denklemi sırasıyla T , N , ve B_1 ile çarparsak,

$$\left. \begin{array}{l} a' = 1 \\ ak_1 = 0 \\ b' + bk_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

(4.4) eşitliklerin birincisinden,

$$a = s + c_0, \quad c_0 \in R$$

ikincisinden, $k_1 = 0$ ve üçüncüsünden $b = 0$ veya $b = c_1$, $c_1 \in R_0$ bulunur. Buna göre α ,

$$\alpha(s) = (s + c_0)T(s)$$

veya

$$\alpha(s) = (s + c_0)T(s) + c_1B_1(s)$$

konum vektörlerine sahip bir doğrudur.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.2.1.

α eğrisi, $k_3 = 0$ eğriliğine sahip bir birim hızlı partially null eğri olsun. Bu durumda α , bir rektifiyen eğridir gerek ve yeter şart α bir doğrudur.

Buna göre göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.2.1. R_2^4 'de $k_1 \neq 0$, k_2 ve $k_3 = 0$ eğriliklerine sahip bir partially null eğri rektifiyen eğri olamaz.

Sonuç 4.2.2. R_2^4 'de $k_1 = 0$, $k_2 = \text{sabit}$ ve $k_3 = 0$ eğriliklerine sahip her partially null W -eğri bir rektifiyen eğridir.

Sonuç 4.2.3. 4-boyutlu yarı-Öklidyen uzaylarında rektifiyen eğri olma karakterizasyonu g metriğinin indeksinden bağımsızdır.

4.2.2. R_2^4 de Pseudo Null Rektifiyen Eğriler

α eğrisi, R_2^4 'de birim hızlı bir pseudo null eğri olsun. α eğrisinin rektifiyen uzayı asli normal vektör alanı N 'nin dik uzayı N^\perp olarak tanımlanır. Buna göre;

$$N^\perp = \{ w \in R_2^4 \mid g(w, N) = 0 \}$$

dır. Bu durumda, (4.2)' de verilen Frenet denklemleri göz önüne alındığında, birpseudonull α eğrisinin rektifiyen uzayı $N^\perp = Sp\{T, N, B_1\}$ dir. O halde α eğrisinin rektifiyen olması demek, eğrinin konum vektörünün her zaman kendi rektifiyen uzayında kalması demektir. O halde α bir rektifiyen eğri ise eğrinin konum vektörü

$$\alpha(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B_1(s) \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a, b ve c, s nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (4.5) eşitliğinden türev alınıp (4.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$T = a'T + (a + b' + ck_3)N + (bk_2 + c')B_1 - (c\varepsilon_2 k_2)B_2$$

bulunur. Bu denklemi sırasıyla T, N, B_1 ve B_2 ile çarpılırsa;

$$\left. \begin{array}{l} a' = 1 \\ -c\varepsilon_2 k_2 = 0 \\ a + b' + ck_3 = 0 \\ bk_2 + c' = 0 \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

eşitlikleri bulunur. (4.6) eşitliklerinin birincisinden $a = s + d_0$, $d_0 \in R$ elde edilir. $c\varepsilon_2 k_2 = 0$ eşitliği için üç farklı durum söz konusudur.

A. $c = 0$ ve $k_2 \neq 0$ ise; diğer eşitlikler de kullanılarak $a = 0$ bulunur. Bu ise $a = s + d_0$ ile çelişir.

B. $c \neq 0$ ve $k_2 = 0$ ise, (4.6) eşitliklerinin dördüncüsünden,

$c = c_0$, $c_0 \in R_0$ ve üçüncü eşitlikten

$$b = -c_0 \int k_3(s)ds - \frac{s^2}{2} - d_0s + d_1 \quad , \quad d_1 \in R$$

elde edilir. Bu durumda α eğrisinin konum vektörü

$$\alpha(s) = (s + d_0)T + \left(-c_0 \int k_3(s)ds - \frac{s^2}{2} - d_0s + d_1 \right) + c_0B_1 \quad (4.7)$$

olarak bulunur.

C. $c = 0$ ve $k_2 = 0$ ise;

$$b = -\frac{s^2}{2} - d_0s + d_2 \quad , \quad d_2 \in R$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bu durumda α eğrisinin konum vektörü

$$\alpha(s) = (s + d_0)T + \left(-\frac{s^2}{2} - d_0s + d_2 \right)N \quad (4.8)$$

Buna göre $k_1 = 1$ ve $k_3 \neq 0$ eğriliklerine sahip bir pseudo null eğrinin rektifiyen olması için iki durum vardır.

1. Durum : $k_2 = 0$ ve $g(\alpha, B_1) \neq 0$
2. Durum : $k_2 = 0$ ve $c = g(\alpha, B_1) = 0$

dır.

Buna göre aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4.2.2.

α eğrisi, R_2^4 de $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ ve $k_3 \neq 0$ eğriliklerine sahip bir pseudo null eğri olsun. Eğer α , birinci binormal bileşeni sıfırdan farklı olan ($g(\alpha, B_1) \neq 0$) bir rektifiyen eğri ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. Eğrinin konum vektörüne ait teğetsel bileşen

$$g(\alpha, T) = (s + d_0)\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad d_0 \in R_0$$

dir.

ii. Eğrinin birinci binormal bileşeni ve ikinci binormal bileşeni sırasıyla

$$g(\alpha, B_1) = c_0\varepsilon_1, \quad c_0 \in R_0$$

$$g(\alpha, B_2) = -c_0 \int k_3(s)ds - \frac{s^2}{2} - d_0s + d_1, \quad d_0, d_1 \in R$$

Tersine α , R_2^4 'de $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ ve $k_3 \neq 0$ eğrilikli bir pseudo null eğri olsun. i. ve ii. den biri sağlanırsa α eğrisi bir rektifiyen eğridir.

İspat.

İspatın ilk kısmı (4.7) eşitliği kullanılarak rahatlıkla görülebilir.

Tersine kabul edelim ki ii. sağlansın. α eğrisinin ikinci binormal bileşeni

$$g(\alpha, B_2) = -c_0 \int k_3(s)ds - \frac{s^2}{2} - d_0s + d_1$$

ve birinci binormal bileşeni

$$g(\alpha, B_1) = c_0\varepsilon_1$$

olsun.

$$g(\alpha, B_2) = -c_0 \int k_3(s)ds - \frac{s^2}{2} - d_0s + d_1$$

eşitliğinin türevi alınır ve $g(\alpha, B_1) = c_0\varepsilon_1$ olduğu kullanılırsa;

$$g(T, B_2) + g(\alpha, B_2') = -c_0k_3(s) - s - d_0$$

$g(\alpha, T) = \varepsilon_1(s + d_0)$ elde edilir. Bu eşitlikten tekrar türev alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa $g(\alpha, N) = 0$ bulunur. Bu da α eğrisinin rektifiyen olduğunu gösterir.

Benzer şekilde kabul edelim ki i. sağlansın.

$$g(\alpha, T) = \varepsilon_1(s + d_0)$$

eşitliğinden türev alınırsa $g(\alpha, N) = 0$ bulunur. Bu ise α eğrisinin rektifiyen olmasıdır.

Teorem 4.2.3.

α eğrisi, R_2^4 'de $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ ve $k_3 \neq 0$ eğriliklerine sahip bir pseudo null eğri olsun. Eğer α , birinci binormal bileşeni sıfır olan ($g(\alpha, B_1) = 0$) bir rektifiyen eğri ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. Eğrinin konum vektörüne ait teğetsel bileşen

$$g(\alpha, T) = (s + d_0)\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad d_0 \in R_0$$

dir.

ii. Eğrinin ikinci binormal bileşeni

$$g(\alpha, B_2) = -\frac{s^2}{2} - d_0s + d_1, \quad d_0 \in R_0, \quad d_1 \in R$$

dir.

Tersine α , R_2^4 'de $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ ve $k_3 \neq 0$ eğrilikli bir pseudo null eğri olsun. i. ve ii. den biri sağlanırsa α eğrisi bir rektifiyen eğridir.

İspat.

İspatın ilk kısmı (4.8) eşitliği kullanılarak rahatlıkla görülebilir.

Tersine kabul edelim ki ii. sağlansın. α eğrisinin ikinci binormal bileşeni

$$g(\alpha, B_2) = -\frac{s^2}{2} - d_0s + d_1$$

eşitliğinden türev alınırsa $g(\alpha, T) = \varepsilon_1(s + d_0)$ elde edilir. Bu eşitlikten tekrar türev alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa $g(\alpha, N) = 0$ bulunur. Bu da α eğrisinin rektifiyen olduğunu gösterir.

Benzer şekilde kabul edelim ki i. sağlansın.

$$g(\alpha, T) = \varepsilon_1(s + d_0)$$

eşitliğinden türev alınırsa $g(\alpha, N) = 0$ bulunur. Bu ise α eğrisinin rektifiyen olmasıdır.

Özel olarak, bir spacelike pseudo null sabit eğrilikli bir eğriyi yani, bir W - eğri göz önüne alalım. Bu eğrinin rektifiyen eğri olabilmesi için teorem 4.2.3. den eğrinin ikinci eğriliği $k_2 = 0$ olmalıdır. Buna göre spacelike pseudo null rektifiyen W - eğrinin eğrilikleri $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$ olsun. Şimdi bu eğrinin parametrik denklemini elde edelim. (14) Frenet denklemleri bu eğriliklere göre tekrar yazılırsa, buradan $T'' = 0$ ve

$$T' = A \quad , \quad T = As + B \quad (4.9)$$

bulunur.

Burada A ve B ; R_2^4 de sabit vektörler olsun. $g(T, T) = 1$ olduğundan,

$$g(A, A) = 0,$$

$$g(A, B) = 0$$

$$g(B, B) = 1$$

bulunur. Bu şartları sağlayan A ve B vektörleri,

$$A = (1, 0, 0, 1) \text{ ve } B = (0, 0, 1, 0)$$

seçilirse (4.9) eşitliğinden bir kez integral alınarak α rektifiyen W - eğrinin parametrik denklemi ,

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2}, 0, s, \frac{s^2}{2} \right)$$

bulunur.

Elde edilen bu eğrinin Frenet vektörleri;

$$\alpha' = T = (s, 0, 1, s),$$

$$\alpha'' = N = (1, 0, 0, 1),$$

α''' ve $\alpha^{(iv)}$ sıfır vektörleri olduğundan $\{T, N\}$ cümlesini R_2^4 nin bir bazına tamamlamak için, (14) Frenet vektörlerini ve

$$g(T, T) = +1, g(B_1, B_1) = -1, g(N, B_2) = 1, g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0, \\ g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0$$

sağlayacak şekilde B_1 ve B_2 vektörleri;

$$B_1 = (s, 1, 0, s)$$

$$B_2 = \left(-\frac{1}{2}, s, -s, \frac{1}{2}\right)$$

seçilir. Böylece R_2^4 de $\{T, N, B_1, B_2\}$ çatısı elde edilmiş olur. Bu çatıya göre α eğrisinin konum vektörü belirlenirse,

$$\alpha(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B_1(s)$$

eşitliğinde T, N, B_1 yerlerine yazılırsa;

$$a = s,$$

$$b = -\frac{s^2}{2},$$

$$c = 0$$

olduğu görülür. Bu sonuçlar teorem 4.2.3.'e uygun sonuçlar olup

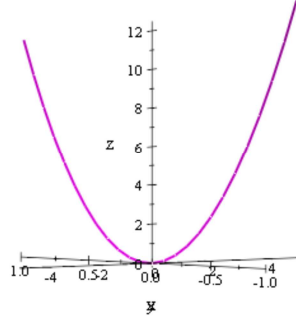
$$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2}, 0, s, \frac{s^2}{2}\right)$$

eğrisi R_2^4 de bir spacelike pseudo null rektifiyen eğridir.

$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2}, 0, s, \frac{s^2}{2}\right)$ eğrisinin $x_1 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\alpha_{x_1=0} = \left(0, s, \frac{s^2}{2}\right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibidir.

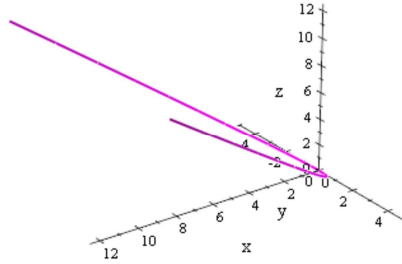


Şekil 4.25. $\alpha_{x_1=0} = \left(0, s, \frac{s^2}{2}\right)$ eğrisi

Bu eğrinin $x_2 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\alpha_{x_2=0} = \left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2}\right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibidir.

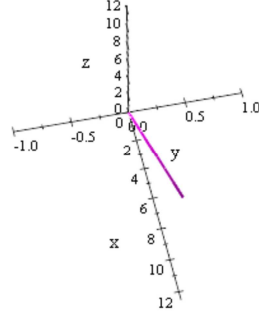


Şekil 4.26. $\alpha_{x_2=0} = \left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2}\right)$ eğrisi

Bu eğrinin $x_3 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\alpha_{x_3=0} = \left(\frac{s^2}{2}, 0, \frac{s^2}{2}\right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibidir.

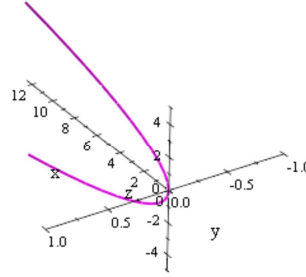


Şekil 4.27. $\alpha_{x_3=0} = \left(\frac{s^2}{2}, 0, \frac{s^2}{2}\right)$ eğrisi

Eğrinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü olan eğri;

$$\alpha_{x_4=0} = \left(\frac{s^2}{2}, 0, s\right)$$

dır ve bu eğrinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.28. $\alpha_{x_4=0} = \left(\frac{s^2}{2}, 0, s\right)$ eğrisi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

2003 yılında B.Y.Chen tarafından tanımlanan rektifiyen eğri kavramı daha sonra Minkowski 3- uzayında İlarıslan v.d. (2003) tarafından çalışılmıştır. İlarıslan ve Nesovic (2008) rektifiyen eğri kavramı 4-boyutlu Öklid uzayında ve 4- boyutlu Minkowski uzay-zamanda tanımlanmış ve detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Yapılan bu tez çalışmasında yukarıda adı geçen yazarların çalışmalarına paralel olarak rektifiyen eğri kavramı 4-boyutlu 2-indeksli yarı- Öklidyen uzayda tekrar tanımlanarak bir pseudo null ve partially null eğrinin rektifiyen eğri olma şartları elde edilmiştir. Elde edilen çalışmalar 13-16 Haziran 2012 tarihinde Balıkesir Üniversitesi tarafından düzenlenen X. Geometri Sempozyumunda bir poster olarak sunulacak ve daha sonra yayınlanmak üzere hakemli bir dergiye sunulacaktır.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların R_2^4 4-boyutlu 2-indeksli yarı- Öklidyen uzayda eğriler ve yüzeyler üzerine yapılacak çalışmalar için önemli bir kaynak eser oluşturacağını ümit etmekteyiz.

KAYNAKLAR

- Bonnor, W.B., Null curves in a Minkowski space-time, Tensor 20 (1969), 29-242.
- Bonnor, W.B., Curves with null normals in Minkowski space-time, random talk in relativity and cosmology, Wiley Easten Limited, (1985),33-47.
- Carmo, Perdigao do, M. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-HallInc., Brazil, 1976.
- Chen, B.Y.,When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane? , Amer. Math. Monthly, 2003.
- Chen, B.Y., Dillen F., Rectifying curves as centrodes and extremal curves, Bull. Inst. Math. AcademiaSinica, 2005.
- Duggal, K.L. and Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of SemiRiemann Manifolds and Applications, Klower Academic Publishers, London ,1996.
- İlarslan, K., Nesovic, E., Torgasev, Petrovic., Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space, Novi Sad J. Math, 2003
- İlarslan, K.,Nesovic, E., Some characterizations of Null, Pseudo Null and Partially Null Rectifying Curves in Minkowski Space-Time, Taiwanese Journal of Math., Vol.12, N0.5,pp.1035-1044, August 2008

- Hacısalıhoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 2000.
- Kuhnel, W., Differential Geometry Curves – Surfaces - Manifolds, Student Mathematical Library Volume 16, American Mathematical Society , 2006.
- Lipschutz, M. M., Theory and problems of Differential Geometry, Schaum's Outline Series , New York, 1969.
- Milman, R. S., Elements of Differential Geometry, California State University, Prentice-HallInc. , California, 1977.
- O'Neill, B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press , New York, 1983.
- O'Neill, B., Elementary Differential Geometry , Elsevier Inc., New York 2006.
- Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri , Nobel yayın dağıtım , Ankara, 2004.
- Petrovic-Torgasev, İlarıslan and Nesovic, On partially null and pseudo null curves in the semi-euclidean space R_2^4 , J. Geom. 84 (2005) 106-116, 2005.
- Walrave, J., Curves and surfaces in Minkowski space, Doctoral thesis, K. U. Leuven, Fac. Of Science, Leuven, (1965).