KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STANCU TİPLİ OPERATÖRLER

Enver TOPSAKAL

HAZİRAN 2012

Matematik Anabilim Dalında Enver TOPSAKAL tarafından hazırlanan STANCU TİPLİ OPERATÖRLER adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Sevgi ESEN ALMALI

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Doç. Dr. Ali ARAL	____________
Üye (Danışman)	: Yrd. Doç. Dr. Sevgi ESEN ALMALI	__________
Üye	: Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	___________

05/06/2012

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

STANCU TİPLİ OPERATÖRLER

TOPSAKAL, ENVER

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Sevgi ESEN ALMALI

Haziran 2012, 47 Sayfa

Bu tez, ikisi açıklama ikisi de temel bölüm olmak üzere toplam dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde temel kavramlar ve yaklaşım teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümde de Bernstein polinomunu esas alan Bernstein-Stancu ve Schurer-Stancu tip operatörler ile bazı yaklaşım özellikleri incelenmiş olup, bu operatörlerin süreklilik modülü yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşım hızı üzerine teoremler ispatlanmıştır. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç bölümüdür.

Anahtar kelimeler: Lineer Operatörler, P.P.Korovkin Teoremi, Bernstein-Stancu ve Schurer-Stancu tip operatörler, süreklilik modülü, yaklaşım teoremleri ve hızı.

ABSTRACT

STANCU TYPE OPERATORS

TOPSAKAL, Enver

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M.S. Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sevgi ESEN ALMALI

June 2012, 47 pages

This thesis is constituted of four chapters: two of which are introductory and the other two are on the main issues discussed. The first chapter offers an introduction. The second chapter exposes the basic concepts, theorems and approaches taken for granted in the application of this work. In the third part, Bernstein- Stancu and Schurer-Stancu type operators that are based on Bernstein polynomials are used to analyse some convergences. Furthermore, the theorems on these operators rate of convergence to continuous functions through modulus of continuity are proven. The last chapter is on conclusion.

Key Words: P.P.Korovkin Theorem, Bernstein-Stancu and Schurer-Stancu type operators, modulus of continuity, rate of convergance.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, bilimsel deney imkanlarını sonuna kadar bizlerin hizmetine veren, tez yöneticisi hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Sevgi Esen'e, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm hocam Sayın Doç. Dr. Ali Aral'a , tezimin birçok aşamasında yardım gördüğüm Gülşat Topsakal'a ve son olarak bana birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımlarını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$C\,[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\Vert f \Vert$	f fonksiyonunun normu
$L_n(f;x)$	Lineer pozitif operatörlerin fonksiyon dizisi
$\binom{n}{k}$	n nin k lı kombinasyonu
$P_{n,k}(x)$	Bernstein polinomu
$B_n(f;x)$	Bernstein operatörü
$B_{n,\alpha,\beta}(f;x)$	Bernstein-Stancu operatörü
$(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}f\,)(x)$	Schurer-Stancu operatörü
$\left\{\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}f\right\}_{n\in\mathbb{N}}$	Schurer-Stancu Tipli fonksiyon dizileri
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü

1.GİRİŞ

Yaklaşım teorisi sonlu kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatör dizileri ile yaklaşım problemini ele almaktadır. K.Weierstrass, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli her fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinom karşılık geleceğini ispatlamıştır. Yani,

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, P(x)\text{vardır } \exists\, \forall x \in [a,b] \text{ için} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

dur [1]. Birçok matematikçi bu teoremi gerçekleyen uygun diziler tanımlamıştır. Bu dizilerin tanımlanma tekniği lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisini ortaya çıkarmıştır. S.N.Bernstein, [0,1] aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar için,

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\, f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{1.1}$$

toplamsal operatörler dizisini tanımlamış ve [0,1] aralığında düzgün olarak f fonksiyonuna yakınsadığını göstermiştir [2]. 1962 yılında F.Schurer'de,
$p \in \mathbb{Z}$, herhangi $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 0$ ve $f \in C([0,1+p])$ için $\tilde{B}_{n,p}: C([0,1+p]) \rightarrow C([0,1])$'de tanımlı,

$$\tilde{P}_{n,k}(x) = \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k}$$

olmak üzere,

$$\left(\widetilde{B}_{n,p}f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n+p}\tilde{P}_{n,k}(x)\,f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{1.2}$$

lineer pozitif operatörünü tanımlamıştır [3]. 1968 yılında D.D. Stancu'da *f*, [0,1] aralığında sürekli ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ şartını sağlayan her α, β reel sayısı için,

$$P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}\,x^k(1-x)^{n-k}$$

olmak üzere;

$$B_{n,\alpha,\beta}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)\,f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \tag{1.3}$$

polinomunu tanımlayarak [0,1] aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini incelemiştir [2]. Yukarıdaki bu polinoma Bernstein –Stancu Polinomu denir. Bernstein ve Bernstein-Stancu polinomları matematiğin birçok dalında ve bilgisayar biliminde kullanılmaktadır.

Tanımlanan bu operatörlere dikkat edilirse *p=0* için,

$$\left(\widetilde{B}_{n,0}f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n+0}\tilde{P}_{n,k}(x)\,f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\tilde{P}_{n,k}(x)\,f\left(\frac{k}{n}\right)$$

operatörü klasik Bernstein operatörüdür. Aynı şekilde (1.3) operatörü, $\alpha=\beta=0$ için,

$$B_{n,0,0}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)\,f\left(\frac{k}{n}\right)$$

yine klasik Bernstein operatörüdür [4]. Bu sebepten bu operatörler genel olarak Bernstein operatörleri şeklinde adlandırılırlar. Bu tezde Bernstein-Stancu ve Schurer-Stancu operatörlerinin yaklaşım özellikleri ve bu operatörlerle ilgili çeşitli teoremler incelenecektir. Bu tez giriş bölümü birinci bölüm olmak üzere toplam dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde temel kavramlar ve teoremler tanıtılmıştır. Buna bağlı olarak fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörler ile ilgili tanım ve teoremler verilmiş olup $C[a,b]$ uzayında düzgün yakınsama tanımı, süreklilik modülü tanımı, P.P.Korovkin teoremi ifadesi ve ispatı yapılmıştır. Üçüncü bölümde Bernstein-Stancu tipli operatörler ve özellikleri ile ilgili teoremler verilmiş olup Schurer–Stancu tipli operatör tanımı ve özellikleri ile ilgili teoremler incelenmiştir. Dördüncü bölüm sonuç ve tartışma bölümüdür.

1.1. Kaynak özetleri

Bu tez hazırlanırken, materyal ve yöntem kısmında 'Lineer Pozitif Operatörler Dizisi' adlı lisansüstü ders notları temel alınarak, P.P.Korovkin'in 'Linear Positive Operators' [5], Akif Hacıyev ve H.Hilmi Hacısalihoğlu'nun 'Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı' kitaplarından yararlanılmıştır [6]. Araştırma bulguları kısmında da P.P.Korovkin'in 'Linear Operators and Approximation Theory' kitabı ile A.D.Gadjiyev ve A.M.Ghorbanalizadeh'in 'Approximation properties of a new type Bernstein-Stancu polynomials of one and two variables' [7] ve Dan Barbosu'nun 'Schurer –Stancu Type Operators' [8] makalelerinden yararlanılarak Bernstein-Stancu ve Schurer –Stancu tipli operatörlerin yakınsaklığı incelenmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1.Temel Kavram ve Teoremler:

Bu bölümde, lineer pozitif operatörlerin tanımı yapılacak ve yaklaşım özelliklerine ilişkin bazı teoremler verilecektir [1,5-6].

Tanım 2.1.1 (Operatör): X ve Y iki fonksiyon uzayı (lineer uzaylar) olsun.

$L:X \to Y\,,\ f \to L(f) = g$

dönüşümüne *operatör* denir. $L(f) = g$ yerine $L(f(t)\,;\,x) = g(x)$ gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2 (Lineer operatör): Her a,b reel sayısı ve her $f, g \in X$ için

$L(af + bg) = a\,L(f) + b\,L(g)$

eşitliği sağlanıyorsa L ye *Lineer Operatör* denir.

ÖRNEK 2.1.1 :

$$\varphi(f) = A_1\, f(x_1) + A_2\, f(x_2) + \cdots + A_n\, f(x_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_k\, f(x_k)$$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ noktalarında tanımlı f fonksiyonlarının kümesi F olsun. F kümesi üzerinde tanımlı $\varphi(f)$ fonksiyoneli lineerdir. Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
\varphi(a\, f + b\, g) &= \sum_{k=1}^{n} A_k \left[a\, f(x_k) + b\, g(x_k)\right] \\
&= a \sum_{k=1}^{n} A_k\, f(x_k) + b \sum_{k=1}^{n} A_k\, g(x_k) \\
&= a\, \varphi(f) + b\, \varphi(g)
\end{aligned}
$$

dir.

Tanım 2.1.3 (Pozitif Operatör): Eğer $\forall f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ oluyorsa L operatörüne *pozitif operatör* denir.

Hem pozitiflik hem de lineerlik özelliğini sağlayan operatöre kısaca *lineer pozitif operatör* denir.

ÖRNEK 2.1.2 :

$$L\,(f;x) = \int_a^b f(t)\, K(t;x)dt$$

şeklinde tanımlanan L operatörü lineer ve pozitiftir $<=>$ $K(t;x) \geq 0$ dır.

İspat: Lineerlik:

$$
\begin{aligned}
L\,(a\, f + b\, g;x) &= \int_a^b (a\, f + b\, g;t)\, K(t;x)dt \\
&= \int_a^b a\, f(t)\, K(t;x)dt + \int_a^b b\, g(t)\, K(t;x)dt \\
&= a\, L(f;x) + b\, L(g;x)
\end{aligned}
$$

dir. L pozitif operatör ve $t = t_0$ noktasında $K(t_0;x) < 0$ olsun. $[a,b]$ nin öyle küçük bir $[\alpha, \beta]$ alt aralığı bulunabilir ki; bu aralıkta $K(t;x)$ işaretini korusun.

$$f(t) = \begin{cases} 0\,, & t \in [a,b] - [\alpha,\beta] \\ 1, & t \in [\alpha,\beta] \end{cases}$$

test fonksiyonu için,

$$L\,(f;x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(t;x)dt \leq 0$$

Bu ise L operatörünün pozitif olması ile çelişir, bu durumda $K(t;x)$ her zaman pozitif olmalıdır. $K(t;x) \geq 0$ ve $f(t) \geq 0$ ise

$$L\,(f;x) = \int_{a}^{b} f(t)\,K(t;x)dt \geq 0$$

dır.

Sonuç 2.1.1: Lineer pozitif operatörler negatif değerli fonksiyonları negatif değerli fonksiyonlara dönüştürürler.

Sonuç 2.1.2: Lineer pozitif operatörler monoton artandır.

Sonuç 2.1.3: L bir lineer pozitif operatör olmak üzere;

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

koşulu sağlanır.

Tanım 2.1.4: $L: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer,$\forall f \in X$ için,

$$\|L(f)\|_Y \leq M\|f\|_X$$

olacak biçimde bir $M > 0$sayısı varsa L operatörüne *sınırlı operatör* denir.

Tanım 2.1.5 : f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.

$$d = \underset{a \leq x \leq b}{maks} |f(x) - g(x)|$$

şartını sağlayan *d* sayısına *f ile g fonksiyonlarının uzaklığı* denir.

Tanım 2.1.6 (Bir Fonksiyonun Normu) :
$maks_{\,a \leq x \leq b}|f(x)|$ sayısı f fonksiyonunun $g = 0$ fonksiyonuna uzaklığı olup bu değer f fonksiyonunun *normu* olarak adlandırılır ve

$$\|f\| = \underset{a \leq x \leq b}{maks} |f(x)|$$

eşitliği ile gösterilir.

Tanım 2.1.7: $A = [a, b]$ için $f \in C\,(A)$ olmak üzere $C(A)$ üzerinde tanımlanan *norm*;

$$\| f \|_{C[a,b]} = \underset{a \leq x \leq b}{maks} |f(x)|$$

biçimindedir.

Lemma 2.1.1 (Norm özellikleri) :
Bir f fonksiyonunun normu aşağıdaki özellikleri sağlar;

i) $\|cf\| = |c|\|f\|$
ii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
iii) $\|f - g\| \geq |\|f\| - \|g\||$

dir.

İspat:

i) Sürekli $|f(x)|$ fonksiyonu en büyük değerini x_0 noktasında alsın, $|f(x_0)| \geq |f(x)|$ dir. Öyleyse $|c\, f(x)| \leq |c\, f(x_0)|$ olup

$$\underset{a \leq x \leq b}{maks} |c\, f(x)| = |c\, f(x_0)| = |c||f(x_0)|$$
$$= |c| \underset{a \leq x \leq b}{maks} |\, f(x)| = |c| \|\, f \,\|$$

dir.

ii) $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$
$|f(x) + g(x)| \leq \|\, f \,\| + \|\, g \,\|$

dir. x üzerinde maksimumu alınırsa,

$$\|f + g\| = \underset{a \leq x \leq b}{maks} |f(x) + g(x)|$$
$$\leq \|f\| + \|g\|$$

dir.

iii) $\|f\| = \|f - g + g\| \leq \|f - g\| + \|g\|$ ise

$$\|f - g\| \geq |\|f\| - \|g\||$$

dir.

Tanım 2.1.8: *$\{f_n\}$, $C(A)$* üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. *$\{f_n(x)\}$* fonksiyonlar dizisinin bir *f* fonksiyonuna düzgün yakınsak olması; tanım kümesindeki $\forall x \in A$ için

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{C(A)} = 0$$

olması demektir. Düzgün yakınsama *$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$* biçiminde gösterilir.

2.2.Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yaklaşım Özellikleri

Teorem 2.2.1 (P.P.Korovkin Teoremi): $L_n(f;x)$ lineer pozitif operatörlerin bir fonksiyon dizisi $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığında düzgün olarak sıfıra yakınsayan fonksiyonlar olmak üzere, $\forall\, x \in [a,b]$ için,

$$L(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$$
$$L(t;x) = x + \beta_n(x)$$
$$L(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

şartlarını sağlıyorsa $L_n(f;x)$, $[a,b]$ üzerinde düzgün olarak $f \in C[a,b]$ fonksiyonuna yakınsar. Başka bir biçimde ifade edilirse,

$$\|L_n f - f\|_{C\,[a,b]} \to 0$$

yada buna eşdeğer olan;

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

dır .

İspat:

Teoremin hipotezini şu şekilde verebiliriz.

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t;x) - x\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2;x) - x^2\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

dir. f, $[a,b]$ aralığında sürekli ise sınırlıdır ve $|f(t) - f(x)| \leq 2M$ biçiminde yazılabilir. Aynı zamanda

$\forall\, \varepsilon > 0$ için $|t - x| < \sigma$ şartını sağlayan $x\,, t$ ler için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

olur. $|t - x| \geq \sigma$ olduğunda ise $\dfrac{|t - x|}{\sigma} \geq 1$ ve $\dfrac{(t - x)^2}{\sigma^2} \geq 1$ dir.
Yukarıdaki durumlar birleştirilirse,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M < \varepsilon + 2M\frac{(t - x)^2}{\sigma^2}$$

olur. L lineer pozitif operatör olduğundan monotonluk özelliğine sahiptir. Yani

$$|\, L_n(f; x)| \leq L_n(|\, f\,|\,; x)$$

dir. Bu takdirde lineerlikten

$$\begin{aligned}
&\|L_n(f(t); x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\
&\qquad = \|L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)\|_{C[a,b]} \\
&\qquad = \|L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\
&\qquad = \|L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)\|_{C[a,b]}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&\|L_n(f(t); x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\
&\qquad \leq \|L_n(f(t) - f(x); x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)(L_n(1; x) - 1)\|_{C[a,b]} \\
&\qquad \leq \|L_n(f(t) - f(x); x)\|_{C[a,b]} + \operatorname*{maks}_{x \epsilon [a,b]}|f(x)|\|(L_n(1; x) - 1)\|_{C[a,b]}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ifadenin limiti hipotezden dolayı sıfır olduğundan $\|L_n(f(t) - f(x); x)\|_{C[a,b]}$ limitinin sıfıra gittiğini göstermek yeterlidir.

$$(\, L_n(|f(t) - f(x)|)\,) \leq L_n\left(\varepsilon + 2M\frac{(t - x)^2}{\sigma^2}; x\right)$$

$$(L_n(|f(t)-f(x)|)) = \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\sigma^2} L_n((t-x)^2;x)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\sigma^2} L_n((t^2-2tx+x^2);x)$$

yazılabilir. Operatörün lineerliğinden,

$$(L_n(|f(t)-f(x)|)) \leq$$

$$\leq \varepsilon\, |L_n(1;x)| + \frac{2M}{\sigma^2} |L_n((t)^2;x) - 2x(L_n(t;x)) + x^2(L_n(1;x))|$$

$$= \varepsilon\, |L_n(1;x)| + \frac{2M}{\sigma^2} |L_n(t^2;x) - x^2 - 2x.(L_n(t;x)-x) + x^2.(L_n(1;x)-1)|$$

dir. Üçgen eşitsizliğinden

$$(L_n(|f(t)-f(x)|)) \leq$$

$$\leq \varepsilon\, |L_n(1;x)| + \frac{2M}{\sigma^2} [|L_n(t^2;x)-x^2| + 2x|(L_n(t;x)-x)| + x^2|(L_n(1;x)-1)|]$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanının maksimumu alınırsa,

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon\, |L_n(1;x)| + \frac{2M}{\sigma^2} \underset{x\in[a,b]}{maks} |L_n(t^2;x)-x^2|$$

$$+\frac{2M}{\sigma^2} 2x \underset{x\in[a,b]}{maks} |(L_n(t;x)-x)| + \frac{2M}{\sigma^2}\, x^2 \underset{x\in[a,b]}{maks} |(L_n(1;x)-1)|$$

sağlanır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n(f;x) - f \|_{C[a,b]} = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.2.1 (Süreklilik Modülü):

f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{t,x\,\in[a,b],|t-x|<\delta} |f(t)-f(x)|$$

ifadesine f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir. Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $m \geq 1$ doğal sayısı için

$\omega(f;m\sigma) \leq m\,\omega(f;\sigma)$.

ii) $\delta > 0$ reel sayısı için
$\omega(f;\delta\sigma) \leq (1+\delta)\,\omega(f;\sigma)$.

iii) $|f(t)-f(x)| \leq (1+\frac{|t-x|}{\sigma})\,\omega(f;\sigma)$.

iv) Süreklilik modülü monoton artan bir fonksiyondur.

İspat:
i) $\omega(f;m\sigma) = \sup\limits_{\substack{t,x\in[a,b] \\ |t-x|<m\sigma}} |f(t)-f(x)|$

ve $t = x + mh$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
\omega(f;m\sigma) &= \sup_{x\in[a,b],|h|<\sigma} |f(x+mh)-f(x)| \\
&= \sup_{x\in[a,b],|h|<\sigma} \left|\sum_{k=0}^{m-1} f(x+(k+1)h)-f(x+kh)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} |f(x+(k+1)h)-f(x+kh)| \\
&= m\,\omega(f;\sigma)
\end{aligned}$$

dır.

ii) $\delta > 0$ reel sayısı için;

$$\omega(f;\delta\sigma) \le \omega(f;(1+[\![\delta]\!])\sigma)$$
$$\le (1+[\![\delta]\!])\,\omega(f;\sigma)$$
$$\le (1+\delta)\,\omega(f;\sigma)$$

dır.

iii) $|f(t)-f(x)| \le \omega(f;|t-x|)$
$$= \omega\left(f;\frac{|t-x|}{\sigma}\sigma\right) \le \left(1+\frac{|t-x|}{\sigma}\right)\omega(f;\sigma)\,.$$

iv) $\delta < \delta_1$ için $\omega(f;\delta) < \omega(f;\delta_1)$ olduğundan süreklilik modülümonoton artan bir fonksiyondur.

Lemma 2.2.1: f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{\sigma\to 0}\omega(f;\sigma) = 0$$

dır.

İspat: f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\,\sigma > 0$ $\ni$ $|t-x| < \sigma$ şartını sağlayan *x, t* değerleri için $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ dur.

$$0 \le \omega(f;\sigma) = \sup_{|t-x|<\sigma}|f(t)-f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği $\forall\varepsilon > 0$ için doğru olduğundan süreklilik modülünün limiti sıfırdır.

$$\lim_{\sigma\to 0}\omega(f;\sigma) = 0$$

dır.

Teorem 2.2.2 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği):
$(a_{\mathbf{1}}, a_{\mathbf{2}}, \dots \dots, a_{\mathbf{n}})$ ve $(b_{\mathbf{1}}, b_{\mathbf{2}}, \dots \dots, b_{\mathbf{n}})$ reel sayı dizileri, $k \in \{1,2, \dots ., n\}$ ve $\delta > 0$ için $a_k = \delta b_k$ olmak üzere,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 .$$

İspat:
a bir reel sayı olmak üzere $a^2 \geq 0$ dır. Öyleyse,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 \geq 0$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_i{}^2 \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} b_j{}^2 + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} a_j{}^2 \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} b_i{}^2 - 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_i b_i \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} b_j a_j$$

$$= 2\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_i{}^2\right)\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} b_i{}^2\right) - 2\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_i b_i\right)^2 \geq 0$$

dır. Sonuç olarak

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

eşitsizliği elde edilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. BERNSTEİN-STANCU TİPLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde öncelikle Bernstein ve Bernstein–Stancu operatörlerinin bazı özelliklerini içeren yakınsaklık ve yakınsaklık hızıyla ilgili teoremler verilecektir [9-11]. Sonrada 2010 yılında A.D.Gadjiev, A.M.Ghorbanalizadeh tarafından 'Applied Mathematics and Computation' dergisinde yayımlanan 'Approximation properties of a new type Bernstein-Stancu polynomials of one and two variables' makalesinden yararlanarak yeni tanımlanan lineer pozitif operatörün yakınsaklık ve yakınsaklık hızıyla ilgili teoremler incelenecektir [7].

3.1.1. Bernstein Operatörü ve Özellikleri

$B_n: C[0,1] \to C[0,1]$, $0 \leq x \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için (1.1) Bernstein operatörünün yakınsaklık ve yaklaşım hızıyla ilgili aşağıdaki teoremleri verelim [1,5,12-13].

Teorem 3.1.1.1: Her sürekli f fonksiyonu için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

polinomu $0 \leq x \leq 1$ aralığında *f(x)* fonksiyonuna yakınsar.

İspat:

P.P.Korovkin teoremi yardımıyla üç adımda ispatlanır;

i)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

binom açılımından,

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= (x+1-x)^n \; = 1$$

dir.

ii) Operatörde $f(t) = t$ alınırsa;

$$B_n(f;x) = B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} \, x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \, x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$$

olur. k yerine $k+1$ yazıldığında eşitlik aynı kalacaktır. Bu durumda

$$B_n(f;x) = B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k}$$

$$= \; x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \, x^k (1-x)^{n-1-k}$$

$$= x\,(x+1-x)^{n-1}$$

$$= x$$

elde edilir.

iii) $B_n(t^2;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k}$

$k^2=k(k-1)+k$ eşitliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
B_n(t^2;x)\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{n^2}\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{n^2}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ x^k(1-x)^{n-k}+\frac{1}{n}B_n(t;x)\\
&=\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!}\ x^k(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\\
&=\frac{(n-1)}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\ x^k(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}
\end{aligned}$$

k yerine *k + 2* yazıldığında eşitlik,

$$\begin{aligned}
B_n(t^2;x)&=\frac{(n-1)}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\ x^k\,x^2(1-x)^{(n-2)-k}+\frac{x}{n}\\
&=\left(\frac{n-1}{n}\right)x^2(x+1-x)^{n-2}+\frac{x}{n}\\
&=x^2+\frac{x(1-x)}{\mathrm{n}}
\end{aligned}$$

olur. Yani $B_n(t^2;x)\rightarrow x^2$ dir. Böylelikle P.P.Korovkin teoremi şartlarını sağladığı gösterilmiştir. O halde operatör kendisini oluşturan *f* fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar, yani $\forall\, x\in[0,1]$ için,

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x)=f(x)$$

dir. Şimdi $B_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızını veren teoremi inceleyelim.

Teorem 3.1.1.2 :
$f \in C[0,1]$ olmak üzere,

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

ve $f' \in C[0,1]$ olmak üzere,

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq 2\frac{x(1-x)}{n}\omega\left(f'; \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)$$

dir.

İspat: Süreklilik modülü tanımı gereği,

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t-x|)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\omega(f; |t-x|) = \omega\left(f; \frac{|t-x|}{\sigma}\sigma\right) \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\sigma}\right)\omega(f;\sigma)$$

olduğundan

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\sigma}\right)\omega(f;\sigma) \tag{3.1}$$

elde edilir. (1.1) operatöründen *f(x)* eklenip çıkartılırsa lineerlikten

$$\begin{aligned} B_n(f(t);x) - f(x) &= B_n(f(t);x) - B_n(f(x);x) + B_n(f(x);x) - f(x) \\ &= B_n(f(t) - f(x);x) + f(x)(B_n(1;x) - 1) \end{aligned}$$

yazılır. Üçgen eşitsizliği ve lineer pozitif operatörlerin monotonluğundan,

$$
\begin{aligned}
|B_n(f(t);x) - f(x)| &\leq |B_n(f(t) - f(x);x)| + |f(x)(B_n(1;x) - 1)| \\
&\leq B_n(|f(t) - f(x)|;x) \\
&\leq \omega(f;\sigma)\left[B_n(1;x) + \frac{1}{\sigma}B_n(|t-x|;x)\right]
\end{aligned}
$$

dir. Cauchy- Schwarz eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
B_n(|t-x|;x) &\leq [B_n(|t-x|^2;x)]^{\frac{1}{2}}[B_n(1;x)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{B_n(|t-x|^2;x)} \\
&\leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}
\end{aligned}
$$

elde edilip yukarıdaki eşitsizlikte uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
|B_n(f;x) - f(x)| &\leq \omega(f;\sigma)\left[1 + \frac{1}{\sigma}\sqrt{B_n(|t-x|^2;x)}\right] \qquad (3.2) \\
&\leq \omega(f;\sigma)\left[1 + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right]
\end{aligned}
$$

dir ve $\sigma = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ seçilirse

$$
|B_n(f;x) - f(x)| \leq 2\,\omega\left(f;\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)
$$

sağlanır. Diğer taraftan $f' \epsilon\, C[a,b]$ olsun,

$$
f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \big(f(t) - f(x)\big) - f'(x)(t-x)
$$

eşitliği $B_n(f;x)$ operatörüne uygulanırsa,

$$B_n(f(t);x)-f(x)=f^{'}(x)B_n\big((t-x);x\big)+B_n(f(t)-f(x)-f^{'}(x)(t-x);x)$$

dir. Operatörün monotonluğundan ve (3.1) den,

$$|B_n(f(t);x)-f(x)|\leq B_n\big(\left|f(t)-f(x)-f^{'}(x)(t-x)\right|;x\big)$$

$$\begin{aligned}|B_n(f(t);x)-f(x)| &= B_n\left(|t-x|\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f^{'}(x)\right|;x\right)\\ &= B_n\big(|t-x|\left|f^{'}(\mu)-f^{'}(x)\right|;x\big) \quad ;t<\mu<x\\ &\leq B_n(|t-x|\ \omega(f^{'};|\mu-x|);x)\ ;\ \ t-x<\mu-x\\ &\leq B_n\left(|t-x|\ \omega\left(f^{'};\frac{|t-x|}{\sigma}\sigma\right);x\right)\\ &\leq \omega(f';\sigma)B_n\left(|t-x|\left(1+\frac{|t-x|}{\sigma}\right);x\right)\\ &= \omega(f';\sigma)\left(B_n(|t-x|;x)+\frac{1}{\sigma}B_n(|t-x|^2;x)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) eşitsizliğinden,

$$|B_n(f(t);x)-f(x)|\leq\ \omega(f';\sigma)\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}+\frac{1}{\sigma}\frac{x(1-x)}{n}\right)$$

bulunur. $\sigma=\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$ seçilirse

$$|B_n(f(t);x)-f(x)|\leq 2\ \omega\left(f';\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right)\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.2 Bernstein-Stancu Tipli Operatörler ve Özellikleri

f, [0,1] aralığında sürekli ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ şartını sağlayan her α, β reel sayısı için, (1.3) $B_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ Bernstein −Stancu operatörünün $0 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli *f* fonksiyonuna yakınsadığı [11] referansında gösterilmiştir. 2010 yılında A.D.Gadjiyev ve A.M.Ghorbanalizadeh, bir ve iki değişkenli Bernstein-Stancu tipli polinomların yeni bir genellemesi olan

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}\right) \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-r} \quad (3.3)$$

operatörünü tanımlamışlardır. $S_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ operatöründe $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ değerleri için

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}\right) \binom{n}{r} (x)^r (1-x)^{n-r}$$

(1.3) Bernstein-Stancu polinomu $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ değerleri için

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \binom{n}{r} (x)^r (1-x)^{n-r}$$

(1.1) klasik Bernstein polinomu elde edilir. A.D.Gadjiyev ve A.M.Ghorbanalizadeh'in tanımladığı bu yeni operatör Bernstein-Stancu operatörüne göre daha hızlı yaklaşım özelliği göstermektedir [7]. Biz bu makaledeki tek değişkenli $S_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinomunun yakınsaklık ve yakınsaklık hızıyla ilgili teoremlere yer vereceğiz.

Teorem 3.1.2.1: *f*, [0,1] aralığında sürekli fonksiyon,

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\sum_{r=0}^{n}f(\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1})\binom{n}{r}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r},$$

$\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}$ olmak üzere, α_k , β_k lar $k=1,2$ için $0\leq \alpha_1\leq\alpha_2\leq\beta_1\leq\beta_2$ şartını sağlayan reel sayılar ise,

$$\lim_{n\to\infty}\ \underset{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}}{maks}\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|=0$$

dır.

İspat: P.P.Korovkin teoremi ile ispatı yapılır.

i) *f(t)* = 1 için,

$$\begin{aligned}S_{n,\alpha,\beta}(1;x)&=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^r(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x)^{n-r} \qquad (3.4)\\&=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}+\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^n\\&=1\end{aligned}$$

dir.

ii) *f(t)=t* için,

$$\begin{aligned}S_{n,\alpha,\beta}(f(t);x)&=S_{n,\alpha,\beta}(t;x)\\&=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\sum_{r=0}^{n}(\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1})\binom{n}{r}(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^r(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x)^{n-r}\\&=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\sum_{r=0}^{n}(\frac{r}{n+\beta_1}+\frac{\alpha_1}{n+\beta_1})\binom{n}{r}(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^r(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x)^{n-r}\end{aligned}$$

$$S_{n,\alpha,\beta}(t;x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)\left[\sum_{r=0}^{n}\frac{r}{n}\binom{n}{r}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r}\right.$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{n}\frac{\alpha_1}{n}\binom{n}{r}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r}\right]$$

elde edilir. i ifadesinden,

$$S_{n,\alpha,\beta}(t;x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{n}\binom{n}{r}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_1}{n}\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^n\right]$$

elde edilir. Toplam sıfırdan başlatılırsa

$$S_{n,\alpha,\beta}(t;x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)\left[\sum_{r=0}^{n-1}\frac{r}{n}\binom{n-1}{r}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r+1}\right.$$
$$\left.\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r-1}+\frac{\alpha_1}{n}\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^n\right]$$

olur. Buradanda

$$S_{n,\alpha,\beta}(t;x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)\left[\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}+x)^{n-1}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_1}{n}\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^n\right]$$
$$=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)\left[\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^{n-1}+\frac{\alpha_1}{n}\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^n\right]$$

eşitliği bulunur. $\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)$ ifadesi parantez içine dağıtılırsa,

$$S_{n,\alpha,\beta}(t;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)\left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^{n-1} +$$

$$\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \left(\frac{n}{n+\beta_1}\right)\frac{\alpha_1}{n}\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)x - \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right) \tag{3.5}$$

dir. Limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,\alpha,\beta}(t;x) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)x - \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right)\right] = x$$

olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,\alpha,\beta}(t;x) = x.$$

iii) *f(t)= t^2* için,

$$S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{r=0}^{n} (\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1})^2 \binom{n}{r}(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^r (\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x)^{n-r}$$

$$= \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\sum_{r=0}^{n}(r+\alpha_1)^2 \binom{n}{r}(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^r (\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x)^{n-r}$$

eldeedilir. $(r+\alpha_1)^2 = r^2 + 2r\alpha_1 + {\alpha_1}^2$eşitliği yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa;

$$S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left[\sum_{r=0}^{n} r^2 \binom{n}{r}\left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-r}\right.$$

$$+2\alpha_1 \sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r}\left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} {\alpha_1}^2 \binom{n}{r}\left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r$$

$$\left.(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x)^{n-r}\right]$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\Bigg[n(n-1)\sum_{r=2}^{n}\binom{n-2}{r-2}r^2\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r$$

$$\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)+(2\alpha_1+1)\,n\sum_{r=1}^{n}r\,\binom{n-1}{r-1}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r^{\,n-r}}$$

$$+{\alpha_1}^2\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^n\Bigg]$$

bulunur. Buda

$$S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^2-\frac{1}{n}\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^2$$

$$+\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\frac{1}{n+\beta_1}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)+\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\frac{2\alpha_1}{n+\beta_1}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)$$

$$+\frac{{\alpha_1}^2}{(n+\beta_1)^2} \qquad (3.6)$$

ifadesine eşittir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x)=x^2$$

olduğu görülür. Yukarıda elde edilen bu formüllerden $v=0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\ \underset{x\in\left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2},\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right]}{maks}\left|S_{n,\alpha,\beta}(t^v;x)-x^v\right|=0 \qquad (3.7)$$

dır. Burada

$$S_n(f;x)=\begin{cases} S_{n,\alpha,\beta}(f(x);x)\text{eğer } \ x\in\left[\dfrac{\alpha_2}{n+\beta_2},\dfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right] \\ \\ f(x)\text{eğer } \ x\in\left[0,\dfrac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right]\cup\left[\dfrac{n+\alpha_2}{n+\beta_2},1\right] \end{cases}$$

operatörünü tanımlayalım.

$$\|S_n f-f\|_{C[0,1]}=\underset{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\le x\le\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}}{maks}\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \tag{3.8}$$

ve (3.7) kullanılarak, $v=0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\underset{x\in\left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2},\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right]}{maks}\left|S_{n,\alpha,\beta}(t^v;x)-x^v\right|=0$$

elde edilir. $v=0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_{n,\alpha,\beta}(t^v;x)-x^v\right\|_{C[0,1]}=0$$

olur. P.P.Korovkin teoremi gereği lineer pozitif operatör dizisi S_n, her sürekli f fonksiyonu için,

$$\lim_{n\to\infty}\| S_n f-f\|_{C[0,1]}=0$$

dır. Böylelikle (3.8)

$$\lim_{n\to\infty}\underset{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\le x\le\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}}{maks}\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|=0$$

ifadesini verir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2.2:

f fonksiyonu [0,1] aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere aşağıda verilen eşitsizlikler sağlanır.

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \leq \begin{cases} \frac{3}{2}\omega\left(f;\sqrt{\frac{4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+n}{(n+\beta_1)^2}}\right), \text{eğer}(\beta_2-\beta_1)\geq(\alpha_2-\alpha_1) \\ \\ \frac{3}{2}\omega\left(f;\sqrt{\frac{4(\alpha_2-\alpha_1)^2+n}{(n+\beta_1)^2}}\right), \text{eğer}(\beta_2-\beta_1)<(\alpha_2-\alpha_1) \end{cases}$$

İspat: Bu teoremin ispatında sürekli fonksiyonlarınmodülünü kullanacağız. Bilindiği gibi *f*, [a,b] aralığında sürekli $\delta > 0$ için,

$$\omega(f;\delta) = \sup_{x,y\in[0,1]}\{|f(x)-f(y)|:|x-y|\leq\delta\}$$

dır. Süreklilik modülü tanımı ve (3.1) den;

$$|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$$
$$= \omega\left(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta\right)$$
$$|f(t)-f(x)| \leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

yazılabilir.

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq \omega(f;\delta_n)\left(1+\frac{|x_1-x_2|}{\delta_n}\right)$$

olduğunda Cauchy-Schwarz eşitsizliği, (3.2) ve yukarıdaki modül tanımından

$t=\dfrac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}$ için,

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq\omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{S_n((t-x)^2;x)}\right] \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.4) - (3.5) ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$S_n((t-x)^2;x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}-x\right)^2\binom{n}{r}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r}$$

$$=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\sum_{r=0}^{n}\left((r+\alpha_1)-(n+\beta_1)x\right)^2\binom{n}{r}$$

$$\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r}$$

olduğu görülür. $S_n((t-x)^2;x)$ de

$$((r+\alpha_1)-(n+\beta_1)x)^2=(r+\alpha_1)^2-2(r+\alpha_1)(n+\beta_1)x+((n+\beta_1)x)^2$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$S_n((t-x)^2;x)\ =\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\sum_{r=0}^{n}(r+\alpha_1)^2\binom{n}{r}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r$$

$$\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r}-2\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\sum_{r=0}^{n}(r+\alpha_1)(n+\beta_1)\,x\binom{n}{r}$$

$$\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r}+\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\sum_{r=0}^{n}((n+\beta_1)x)^2\binom{n}{r}$$

$$\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)^{n-r}$$

$$S_n((t-x)^2;x)\ =S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x)-2x\,S_{n,\alpha,\beta}(t;x)+x^2S_{n,\alpha,\beta}(1;x)$$

olduğundan $S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x)$, $S_{n,\alpha,\beta}(t;x)$, $S_{n,\alpha,\beta}(1;x)$ ifadelerinin eşitleri $S_n((t-x)^2;x)$ de yerine yazılırsa,

$$S_n((t-x)^2;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2 (x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^2 - \frac{1}{n}\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2 (x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2})^2$$
$$+\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\frac{1}{n+\beta_1}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)+\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\frac{2\alpha_1}{n+\beta_1}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)+\frac{{\alpha_1}^2}{(n+\beta_1)^2}$$
$$-2x\left[\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)x-\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right)\right]+x^2$$

elde edilir. Rasyonel ifadelerin paydaları eşitlenip gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$S_n((t-x)^2;x) = \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left[\big(x(\beta_2-\beta_1)-(\alpha_2-\alpha_1)\big)^2+\frac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\right.$$
$$\left.\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)\right]$$

olur. Hipotezden $x\in\left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2},\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right]$ ve $(\beta_2-\beta_1)\geq(\alpha_2-\alpha_1), \alpha_2-\alpha_1\geq 0$ ise x en büyük değerini uç noktada alır. $S_n((t-x)^2;x)$ ifadesinde $x=\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}$ yerine yazılır ve $(\alpha_2-\alpha_1)\geq 0$ olduğundan $(\alpha_2-\alpha_1)$ ihmal edilirse

$$\big(x(\beta_2-\beta_1)-(\alpha_2-\alpha_1)\big)^2 \leq (\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2$$

olur. Ayrıca, $\frac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)$ ifadesinin en büyük değerini bulmak için $\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)$ birinci türevi alınıp sıfıra eşitlenir ve x yerine yazılırsa;

$$\left[\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)\right]' = \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)-\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)=0$$

$$x=\frac{n+2\alpha_2}{n+\beta_2}$$

dir. $x=\frac{n+2\alpha_2}{n+\beta_2}$ noktasında $\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)$ maksimuma sahip olur ve bu değer ifadede yerine yazılırsa,

$$\frac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)\leq\frac{(n+\beta_2)^2}{n}\frac{n}{2(n+\beta_2)}\frac{n}{2(n+\beta_2)}$$
$$=\frac{n}{4}$$

yani $\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)$ ifadesinin en büyük değeri $\frac{n}{4}$ tür.

Bunun sonucu olarak, eğer $(\beta_2-\beta_1)\geq(\alpha_2-\alpha_1)$ için

$$S_n((t-x)^2;x)\leq\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left[(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+\frac{n}{4}\right]\tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10), (3.9) da yerine yazılırsa

$$1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{S_n((t-x)^2;x)}\leq1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left[(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+\frac{n}{4}\right]}$$

olacağından,

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq\omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{1}{2\delta_n(n+\beta_1)}\sqrt{4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+n}\right]$$

elde edilir.

$$\delta_n=\frac{\sqrt{4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+n}}{(n+\beta_1)}$$ seçilirse

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \leq \omega\left(f;\frac{\sqrt{4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+n}}{(n+\beta_1)}\right)$$

$$\left[1+\frac{1}{2\frac{\sqrt{4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+n}}{(n+\beta_1)}(n+\beta_1)}\sqrt{4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+n}\right]$$

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \leq \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{\sqrt{4(\beta_2-\beta_1)^2\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2+n}}{(n+\beta_1)}\right)$$

olur. Eğer $(\beta_2-\beta_1)<(\alpha_2-\alpha_1)$ ise

$$S_n((t-x)^2;x)=\frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left[\left(x(\beta_2-\beta_1)-(\alpha_2-\alpha_1)\right)^2+\frac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right)\right]$$

eşitliği için $\left((\beta_2-\beta_1)-(\alpha_2-\alpha_1)\right)^2 \leq (\alpha_2-\alpha_1)^2$ ve $\frac{(n+\beta_2)^2}{n}\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-x\right) \leq \frac{n}{4}$ eşitsizlikleri uygulanırsa

$$S_n((t-x)^2;x) \leq \frac{1}{(n+\beta_1)^2}\left[(\alpha_2-\alpha_1)^2+\frac{n}{4}\right]=\frac{1}{4(n+\beta_1)^2}\left[4(\alpha_2-\alpha_1)^2+n\right]$$

elde edilir. (3.9) daki

$$1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{S_n((t-x)^2;x)}$$

ifadesinde $S_n((t-x)^2;x)$ için elde edilen eşitsizlik yazılırsa,

$$1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{S_n((t-x)^2;x)}\ \leq 1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{1}{4(n+\beta_1)^2}[4(\alpha_2-\alpha_1)^2+n]}$$

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq \omega(f;\delta_n)\left[1+\ \frac{1}{2\delta_n(n+\beta_1)}\sqrt{4(\alpha_2-\alpha_1)^2+n}\right]$$

elde edilir.

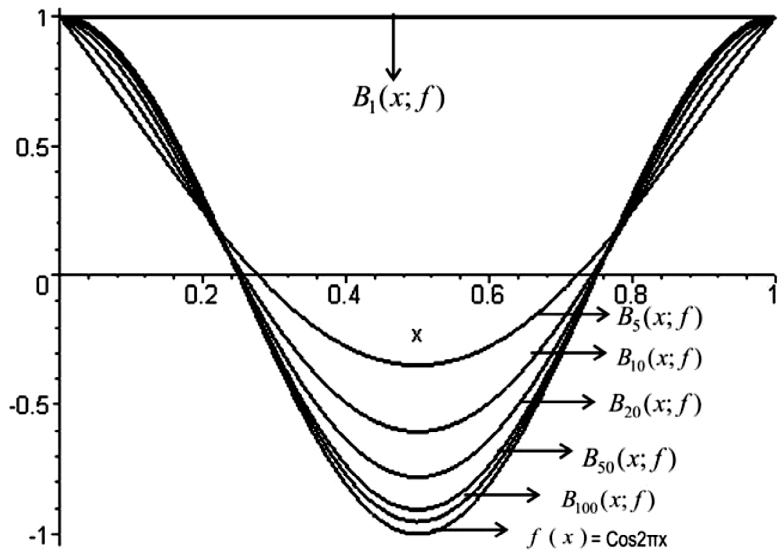
$\delta_n = \dfrac{\sqrt{4(\alpha_2-\alpha_1)^2+n}}{(n+\beta_1)}$ seçilirse

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq \omega(f;\delta_n)\left[1+\ \frac{1}{2\frac{\sqrt{4(\alpha_2-\alpha_1)^2+n}}{(n+\beta_1)}(n+\beta_1)}\right.$$
$$\left.\sqrt{4(\alpha_2-\alpha_1)^2+n}\right]$$

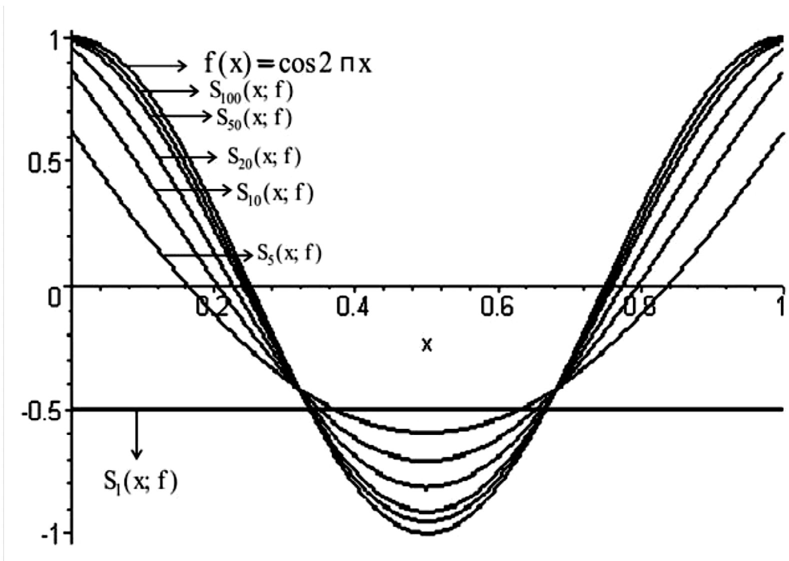
$$\left|S_{n,\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq \frac{3}{2}\omega\left(f;\frac{\sqrt{4(\alpha_2-\alpha_1)^2+n}}{(n+\beta_1)}\right) \tag{3.11}$$

dir. İspat tamamlanır.

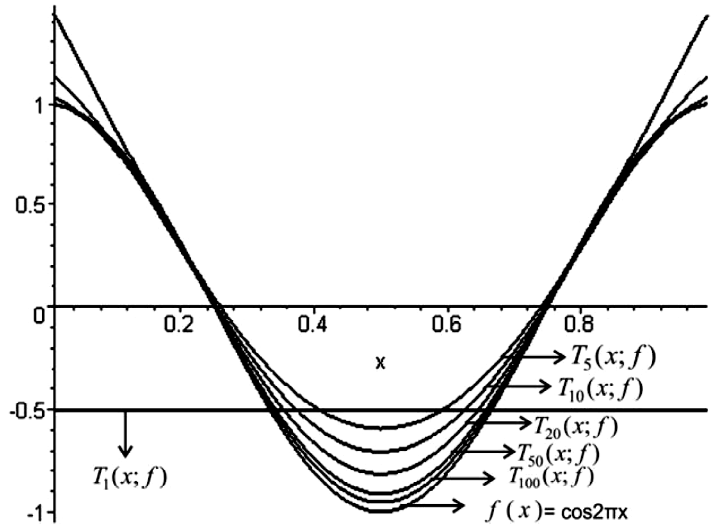
3.1.3. Bazı Trigonometrik Fonksiyonların Yaklaşım Hızı:



Şekil 3.1. $f(x) = cos2\pi x$ fonksiyonunun Bernstein polinomuna yaklaşım hızı.



Şekil 3.2. $f(x) = cos2\pi x$ fonksiyonunun Stancu polinomuna yaklaşım hızı.



Şekil 3.3. $f\left(x\right)=cos2\pi x$ fonksiyonunun A.D.Gadjiyev ve A.M.Ghorbanalizadeh'in tanımladığı yeni polinoma yaklaşım hızı.

Yukarıdaki grafiklerden ve ispatlanan yukarıdaki teoremler sonucu yeni tanımlanan polinomun Bernstein–Stancu ve Bernstein polinomundan f fonksiyonuna daha hızlı yakınsadığı görülmüştür.

3.2. SCHURER-STANCU TİPLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde Eylül 2003 yılında Dan Barbasu'nun Studia Üniversitesi 'Babeş-Bolyai', Matematica dergisinde yayımlanan 'Schurer-Stancu Type Operators' makalesinden yararlanarak Schurer-Stancu tipli operatörler ile ilgili yaklaşım ve yaklaşım hızlarını veren teorem ve lemmalar incelenecektir [8,14-15].

3.2.1.Schurer-Stancu Operatörü ve Özellikleri

1962 yılında F.Schurer, $\tilde{B}_{n,p}:C\left[0,1+p\right]\rightarrow\left[0,1\right]$, $p\in\mathbb{Z}^{+}\cup\left\{0\right\}$, $f\in C\left[0,1+p\right]$ $n\in\mathbb{N}$ için, (1.2) lineer pozitif operatörünü tanımlamıştır. 1968 yılında D.D.Stancu da, $f \in C[0,1]$ aralığında sürekli ve $0 \le \alpha \le \beta$ şartını sağlayan her α, β reel sayısı ve $n \in \mathbb{N}$ için, (1.3) lineer pozitif operatörünü tanımlamıştır. Buna göre; $\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)} : C[0,1+p] \to [0,1]$ ve $p \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$, $f \in C[0,1+p]$, $n \in \mathbb{N}$ *için*

$$\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x)\, f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \tag{3.12}$$

operatörüne Schurer − Stancu tipli lineer pozitif operatör denir [8]. (3.12) ile tanımlanan Schurer-Stancu operatörleri lineer ve pozitiftir. Bu operatörde $\alpha = \beta = 0$ alınırsa,

$$(\tilde{S}_{n,p}{}^{(0,0)} f\ )(x) = \sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x)\, f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(1.2) Schurer operatörü, $p = 0$ alınırsa,

$$(\tilde{S}_{n,0}{}^{(\alpha,\beta)} f\ )(x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x)\, f(\frac{k+\alpha}{n+\beta})$$

(1.3) Stancu operatörü elde edilir.

Lemma 3.2.1.1:

$e_k(s) = s^k, \quad k \in \mathbb{N}$ test fonksiyonu olsun. $x \in [0,1+p]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için Schurer − Stancu operatörü aşağıdaki durumları sağlar:

i) $$\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)} e_0\right)(x) = \tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x) = 1 \tag{3.13}$$

ii) $$\begin{aligned}\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)} e_1\right)(x) &= \tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x) \\ &= \frac{n+p}{n+\beta}x + \frac{\alpha}{n+\beta}\end{aligned} \tag{3.14}$$

iii) $\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)} e_2\right)(x) = \tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2; x)$

$$= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left\{(n+p)^2 x^2 + (n+p)\, x\,(1-x) + 2\frac{\alpha\, n\,(n+p)}{n+\beta} x + \frac{\alpha^2(3n+\beta)}{n+\beta}\right\} \qquad (3.15)$$

dır.

İspat: i) (3.12) tanımı kullanılırsa,

$$\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}\right)(1; x) = \sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x) = \tilde{B}_{n,k}(x) = \tilde{B}_{n,k}(1; x) = 1$$

Burada $\tilde{B}_{n,p}$ nin özelliği kullanılmıştır yani

$$\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)} e_0\right)(x) = \tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1; x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} = (x+1-x)^2 = 1$$

dir.

ii) $\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)} e_1\right)(x) = \tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s; x)$

$$= \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k\, (1-x)^{n+p-k} \frac{k+\alpha}{n+\beta}$$

$\frac{k+\alpha}{n+\beta} = \frac{k}{n+\beta} + \frac{\alpha}{n+\beta} = \frac{n}{n+\beta}\frac{k}{n} + \frac{\alpha}{n+\beta}$ eşiti yerine yazılırsa

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s; x) = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{n}{n+\beta}\frac{k}{n} + \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x) = \frac{n}{n+\beta}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k}{n} + \frac{\alpha}{n+\beta}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}$$

$$x^k(1-x)^{n+p-k}$$

$$= \frac{n}{n+\beta}\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x) + \frac{\alpha}{n+\beta}\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x)$$

elde edilir. Fakat

$$\tilde{B}_{n,p}(s;x) = \left(1+\frac{p}{n}\right)x\ ,\tilde{B}_{n,p}(1;x) = 1$$

olduğu görülmelidir. $\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x)$ ifadesinde $\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}$ bulunup yerine yazılırsa,

$$\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x) = \sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+p}\binom{n+p}{k}\ x^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k}{n}$$

k yerine *k+1* yazılırsa toplam sembolü sıfırdan başlamış olur, değişkenler uygun biçimde değiştirilirse,

$$\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x) = \sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p}{k+1}x^{k+1}(1-x)^{n+p-k-1}\frac{k+1}{n}$$

$$= \left(\frac{n+p}{n}\right)x\ \sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k-1}x^k(1-x)^{n+p-1-k}$$

dır. Binom açılımı gereği $\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k-1}x^k(1-x)^{n+p-1-k} = 1$ olduğundan,

$$\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x)\ = \left(\frac{n+p}{n}\right)x = \left(1+\frac{p}{n}\right)x$$

olur. $\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x) = 1$ için,

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x) = \frac{n}{n+\beta}\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x) + \frac{\alpha}{n+\beta}\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x)$$

$$= \frac{n}{n+\beta}\left(1+\frac{p}{n}\right)x + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$= \frac{n}{n+\beta}\left(\frac{n+p}{n}\right)x + \frac{\alpha}{n+\beta} = \left(\frac{n+p}{n+\beta}\right)x + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}e_1\right)(x) = \tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x) = \left(\frac{n+p}{n+\beta}\right)x + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

elde edilir. Yani (3.14) sağlanır. Aynı yolla

iii) $\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}e_2\right)(x) = \tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)$

$$= \sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{n+\beta}\right)^2\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}(k+\alpha)^2$$

eşitliğinde $(k+\alpha)^2 = k^2 + 2\,kx + x^2$ özdeşliği toplam sembolünde uygulanırsa,

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x) = \frac{1}{(n+\beta)^2}\left[\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}n^2\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \right.$$

$$\left.\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}2\alpha n\frac{k}{n} + \sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}\alpha^2\right]$$

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x) = \frac{1}{(n+\beta)^2}\left[n^2\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x) + 2\,\alpha\,n\,\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x)\right.$$

$$\left. + \alpha^2\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x)\right]$$

ifadesielde edilir. Fakat

$$\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)=\frac{n+p}{m^2}\{(n+p)x^2+x(1-x)\}$$

olduğu bulunmalıdır. Şimdi $\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)$ eşitliğindeki $\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)$ ifadesinin eşitini bulalım,

$$\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)=\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}(\frac{k}{n})^2$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}k^2$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k(1-x)^{n+p-k}k^2$$

k yerine *k+1* dönüşümü için toplam sembolü sıfırdan başlar ve polinomda gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p}{k+1}x^{k+1}(1-x)^{n+p-k-1}(k+1)^2$$

$$=\frac{n+p}{n^2}\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k+1}x^{k+1}(1-x)^{n+p-k-1}(k^2+2k+1)$$

$$=\frac{n+p}{n^2}\left[\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k+1}x^k(1-x)^{n+p-k-1}\,x\,k^2\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k+1}x^{k+1}(1-x)^{n+p-k-1}2\,x\,k+\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k+1}$$

$$x^{k+1}(1-x)^{n+p-k-1}x]$$

olur. Eşitlikteki toplam sembolleri için gerekli işlemler yapılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k+1}x^k(1-x)^{n+p-k-1}\,x\,k^2=(n+p)x^2$$

$$\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k+1}x^{k+1}(1-x)^{n+p-k-1}2\,x\,k=-x^2$$

$$\sum_{k=0}^{n+p-1}\binom{n+p-1}{k+1}x^{k+1}(1-x)^{n+p-k-1}x=x$$

bulunur. Bu eşitlikler $\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x) &= \frac{n+p}{n^2}[(n+p)x^2-x^2+x]\\ &= \frac{n+p}{n^2}[(n+p)x^2+x(1-x)]\end{aligned}$$

olur. $\widetilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x)=\dfrac{n}{n+\beta}\left(1+\dfrac{p}{n}\right)x+\dfrac{\alpha}{n+\beta}$ ve $\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x)=1$

olduğundan elde edilen bu sonuçlar $\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x) = \frac{1}{(n+\beta)^2}\Big[&n^2\tilde{B}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)+2\alpha n\,\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x)\\ &+\alpha^2\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x)\Big]\end{aligned}$$

için,

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x) &= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left[n^2\frac{n+p}{n^2}\big((n+p)x^2+x(1-x)\big)\right.\\ &\quad\left.+2\alpha n\left(\frac{n}{n+\beta}\left(1+\frac{p}{n}\right)x+\frac{\alpha}{n+\beta}\right)+\alpha^2\right]\\ &= \frac{1}{(n+\beta)^2}\left[(n+p)^2x^2+(n+p)x(1-x)+2\frac{\alpha n(n+p)}{n+\beta}x\right.\\ &\quad\left.+\frac{\alpha^2(3n+\beta)}{n+\beta}\right]\end{aligned}$$

olur. (3.15) sağlanır ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.1.2: (3.12) $(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)} f\,)(x)$ operatörü için

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)=\frac{(p-\beta)^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+p}{(n+\beta)^2}x(1-x)$$
$$+\frac{2\alpha(np-2n\beta-\beta^2)}{(n+\beta)^3}x+\frac{\alpha^2(3n+\beta)}{(n+\beta)^3} \tag{3.16}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)} f\,\right)(x)$ operatörünün lineerliğinden

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)=\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)-2x\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x)+x^2\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x)$$

dir. Lemma 3.2.1.1 den elde edilen sonuçlar uygulanırsa (3.16) elde edilir yani

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(1;x)=1$$
$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s;x)=\frac{n+p}{n+\beta}x+\frac{\alpha}{n+\beta}$$
$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}(s^2;x)=\frac{1}{(n+\beta)^2}\Big[(n+p)^2x^2+(n+p)x(1-x)+$$
$$2\frac{\alpha n(n+p)}{n+\beta}x+\frac{\alpha^2(3n+\beta)}{n+\beta}\Big]$$

sonuçları $\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)$ ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)=\frac{1}{(n+\beta)^2}\Big[(n+p)^2x^2+(n+p)x(1-x)$$
$$+2\frac{\alpha n(n+p)}{n+\beta}x+\frac{\alpha^2(3n+\beta)}{n+\beta}\Big]-2x\left[\frac{n+p}{n+\beta}x+\frac{\alpha}{n+\beta}\right]+x^2$$

$$\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)=\frac{(n+p)^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+p}{(n+\beta)^2}x(1-x)+\frac{2\alpha n(n+p)}{(n+\beta)^3}x$$
$$+\frac{\alpha^2(3n+p)}{(n+\beta)^3}-\frac{2(n+p)}{n+\beta}x^2-\frac{2\alpha x}{n+\beta}+x^2$$

olur. Elde edilen $\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)$ ifadesinde paydalar eşitlenip gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra ortak çarpanlar paranteze alınırsa,

$$\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)=\left(\frac{(n+p)^2}{(n+\beta)^2}-\frac{2(n+p)(n+\beta)}{(n+\beta)^2}+\frac{(n+\beta)^2}{(n+\beta)^2}\right)x^2$$
$$+\frac{n+p}{(n+\beta)^2}x(1-x)+\left(\frac{2\alpha n(n+p)}{(n+\beta)^3}-\frac{2\alpha(n+\beta)^2}{(n+\beta)^3}\right)x+\frac{\alpha^2(3n+p)}{(n+\beta)^3}$$
$$\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)=\frac{(p-\beta)^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+p}{(n+\beta)^2}x(1-x)+$$
$$\frac{2\alpha(np-2n\beta-\beta^2)}{(n+\beta)^3}x+\frac{\alpha^2(3n+\beta)}{(n+\beta)^3}$$

elde edilir. İspat tamamlanır. Lemma 3.2.1.1 ve Lemma 3.2.1.2 sonucu $\left\{\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}f\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin yakınsama özelliğini oluşturabiliriz.

Teorem 3.2.1.1:

$f\in C[0,1+p]$ olmak üzere, $\left\{\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}f\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna yakınsar.

İspat: Lemma 3.2.1.3 sonucunda elde edilen $\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}((e_1-x)^2;x)=0$$

Yani

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(p-\beta)^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+p}{(n+\beta)^2}x(1-x)+\frac{2\alpha(np-2n\beta-\beta^2)}{(n+\beta)^3}x+\frac{\alpha^2(3n+\beta)}{(n+\beta)^3}\right\}$$
$$=0$$

olduğundan $\left\{\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}f\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to f$ dir.

Teorem 3.2.1.2: $f\in C[0,1+p]$, $x\in[0,1]$, $\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}f\right)(x)$ (3.12) Schurer-Stancu operatörü için,

$$\delta_{n,p,\alpha,\beta,x}=\frac{(p-\beta)^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+p}{(n+\beta)^2}x(1-x)+\frac{2\alpha(np-2n\beta-\beta^2)}{(n+\beta)^3}x$$
$$+\frac{\alpha^2(3n+\beta)}{(n+\beta)^3} \tag{3.17}$$

$$\beta\in\left[0,\sqrt{n^2+np}\right] \tag{3.18}$$

olmak üzere;

$$\left|\left(\tilde{S}_{n,p}{}^{(\alpha,\beta)}f\right)(x)-f(x)\right|\le 2\omega\left(\sqrt{\delta_{n,p,\alpha,\beta,x}}\right) \tag{3.19}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem 3.1.1.3 den (3.1) süreklilik modülü tanımı gereği;

$$|f(t)-f(x)|\le\left(1+\frac{|t-x|}{\sigma}\right)\omega(f;\sigma)$$

ve $L_n f$ lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere, (3.2) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$L_n(|t-x|1;x)\le\ [L_n(|t-x|^2;x)]^{\frac{1}{2}}[L_n(1;x)]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{L_n(|t-x|^2;x)}\sqrt{L_n(1;x)}$$

yazabiliriz. Elde edilen bu sonuçlar $(\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)} f\,)(x)$ operatörüne uygulanırsa,

$$\left|\left(\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)} f\,\right)(x) - f(x)\right| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(|e_1 - x|^2; x)}\right)\omega(f;\sigma) \qquad (3.20)$$

olur. Lemma3.2.1.2 den

$$\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)}((e_1 - x)^2; x) = \left(\frac{(n+p)^2}{(n+\beta)^2} - \frac{2(n+p)(n+\beta)}{(n+\beta)^2} + \frac{(n+\beta)^2}{(n+\beta)^2}\right)x^2$$
$$+\frac{n+p}{(n+\beta)^2}x(1-x) + \left(\frac{2\alpha n(n+p)}{(n+\beta)^3} - \frac{2\alpha(n+\beta)^2}{(n+\beta)^3}\right)x + \frac{\alpha^2(3n+p)}{(n+\beta)^3}$$

eşitliği (3.20) de yerine yazılırsa,

$$\left|\left(\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)} f\,\right)(x) - f(x)\right| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\delta_{n,p,\alpha,\beta,x}}\right)\omega(f;\sigma)$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta = \sqrt{\delta_{n,p,\alpha,\beta,x}}$ seçilirse

$$\left|\left(\tilde{S}_{n,p}^{(\alpha,\beta)} f\,\right)(x) - f(x)\right| \leq 2\omega\left(\sqrt{\delta_{n,p,\alpha,\beta,x}}\right)$$

dir. Böylece Schurer-Stancu operatörünün yaklaşım hızını veren teoremin ispatı tamamlanmıştır.

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında P.P.Korovkin Teoreminin yaklaşım özelliği kullanılarak Bernstein-Stancu ile Schurer-Stancu tipli lineer pozitif operatörler dizisinin özellikleri ve yaklaşım teoremleri incelenmiştir. Ayrıca bu teoremlerden elde edilen sonuçlar ve lemmalar verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Korovkin P.P., On approximation of continuous and analitic functions, Ark. Mat., 2(1952), 43-56.

[2] Stancu D.D., A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables, Am. Math. Mon.70 (1963) 260-264.

[3] Schurer F., On Linear Positive Operators İn ApproximationTheory.

[4] Lorentz G.G., Bernstein polynomials (1953), Universty of Toronto Press, Toronto.

[5] Korovkin P.P., Linear Operators and Approximation Theory, U.S.S.R.1960.

[6] Hacıyev A., Hacısalihoğlu H.H., Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara 1995, 10-32.

[7] Gadjiev A.D., Ghorbanalizadeh A.M., Approximation properties of a new type Bernstein-Stancu polynomials of one and two variables, Applied Mathematics and Computation 216 (2010) 890-901.

[8] Barbosu D., Schurer-Stancu Type Operators, Studia Unıv. 'Babeş-Bolyai', Mathematica, Volume XLVIII, Number 3, September 2003.

[9] Shisha O., Mond B., The degree of convergence of linear positive operators, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 60 (1968), 1196-1200.

[10] Bohman H., On approximation of continuous and analitic functions, Ark. Mat., 2(1952), 43-56.

[11] Stancu D.D., Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, Rev. Roum. Math.Pure Appl. 13(1968) 1173-1194.

[12] Büyükyazıcı İ., İbikli E., The approximation properties of generalized Bernstein polynomials of twovariables, Appl.Math.Comput. 2004.

[13] Altomare F., CampitiM., Korovkin-type approximation theory and its applications, de Gruyter Studies in Mathematics, vol.17, Walter de Gruyterand Co., Berlin, 1994.

[14] SchurerF., Linear positive operators in approximation theory, Math. Inst. Techn. Univ. Delft: Report, 1962.

[15] Barbosu D., The Voronovskaja theorem for Bernstein-Schurer operators, (to appear in Procced of 'icam 3', International Conference on Applied Mathematics, 3-th Edition, Baia Mare – Borşa, October 10-13, 2002).