KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

$\mathbb{R}_2^4$ YARI- ÖKLİDYEN UZAYINDA *W*- EĞRİLER

Cemal ÜNAL

HAZİRAN 2012

Matematik Anabilim Dalında Cemal ÜNAL tarafından hazırlanan $\mathbb{R}_2^4$ YARI ÖKLİDYEN UZAYINDA *W*- EĞRİLER Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN	________________
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	________________
Üye	: Doç. Dr. İshak ALTUN	________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

$\mathbb{R}_2^4$ YARI- ÖKLİDYEN UZAYINDA *W*- EĞRİLER

ÜNAL, Cemal
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Haziran 2012, 72 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde Minkowski 3-uzayı ve $\mathbb{R}_2^4$ yarı- Öklidyen uzayları tanıtılarak bu uzaylardaki bazı geometrik özellikler ile spacelike, timelike, null, pseudo null ve partially null eğriler ve bu eğrilerin Frenet denklemleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\mathbb{R}_2^4$ yarı- Öklidyen uzayında sırasıyla spacelike, timelike, null, pseudo null ve partially null *W*- eğriler incelenmiştir.

Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Öklid uzayı, Minkowski uzayı, yarı- Öklidyen uzay, *W*- eğri, spacelike eğri, timelike eğri, null eğri, pseudo null eğri, partially null eğri

ABSTRACT

W- CURVES IN SEMI- EUCLIDEAN SPACE $\mathbb{R}_2^4$

ÜNAL, Cemal

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

June 2012, 72 Pages

This thesis consist of four chapters. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, we introduce Minkowski 3-space and $\mathbb{R}_2^4$ semi- Euclidean space with their properties. Also we introduce spacelike, timelike, null, pseudo null, partially null curves and their Frenet frames in the same space.

In the third chapter, we study spacelike, timelike, null, pseudo null and partially null *W*- curves in *4*- dimensional semi- Euclidean space with index 2.

The fourth chapter is reserved for discussion and conclusion.

Key words: Euclidean space, Minkowski space, semi-Euclidean space, *W*- curves, spacelike curve, timelike curve, null curve, pseudo null curve, partially null curve.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN’a ve canım aileme çok teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n_\nu$	n-boyutlu yarı-Öklidyen uzay
$\mathbb{R}^n_1$	n-boyutlu Lorentz uzayı
$\mathbb{R}^3_1$	3-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{R}^4_2$	4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay
$\langle\ \rangle_L$	Lorentz anlamında iç çarpım
S^2_1	Lorentz birim küresi
H^2_0	Hiperbolik Uzay
$\langle\ \rangle$	Öklid iç çarpımı

1.GİRİŞ

Geometride, özellikle diferensiyel geometride eğriler teorisi önemli bir yere sahiptir. Eğriler Öklid ve Öklid olmayan uzaylarda da yoğun bir şekilde çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Eğriler geometrisinin çalışılmasında iki kavram çok önemlidir. Bunlar eğrinin Frenet denklemleri (bu denklemler Serret- Frenet denklemleri olarak da bilinmektedir) (Frenet 1852, Serret 1851) ve eğrinin eğrilikleridir. Bu kavramlar yardımıyla eğrinin geometrik özellikleri incelenmektedir. Örnek olarak 3- boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin k_1 eğriliği sıfır ise eğri bir doğrudur, $k_2 = 0$, $k_1 \neq 0$ bir sabit ise eğri bir çemberdir. Eğer k_1 ve k_2 sıfırdan farklı sabitler ise eğri bir dairesel helistir.

n- boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin tüm eğrilikleri sabit ise eğri *W*- eğri olarak adlandırılır (Klein ve Lie, 1871). *W*- eğriler Öklid uzaylarında yoğun bir şekilde çalışılmıştır. $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel *W*- eğri örneği olarak çemberler düzlemsel olmayan *W*- eğri örneği olarak helisler verilebilir.

Diğer taraftan $\mathbb{R}^n$ de *W*- eğriler sonlu tip eğriler için örnek oluşturmaktadır. Örneğin $\mathbb{R}^4$ de kapalı *W*- eğriler küresel 2- tipli eğrilerdir (Chen ve Dillen, 1986). Minkowski 3- uzayında tüm *W*- eğriler Walvare (1995) tarafından çalışılmıştır. Örneğin Minkowski 3- uzayında düzlemsel spacelike *W*- eğriler çemberler ve hiperbollerdir.

Minkowski uzay- zaman $\mathbb{R}^4_1$ de spacelike *W*- eğriler Petrovic- Torgasev ve Sucurovic (2002) tarafından çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında 4- boyutlu 2- indeksli yarı- Öklidyen uzay $\mathbb{R}^4_2$ de sırasıyla spacelike, timelike, null, pseudo null ve partially null *W*- eğriler çalışılmış ve bu eğriler için sabit katsayılı vektör değerli diferensiyel denklemler inşa edilmiş ve çözülmüştür.

1.2. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Hacısalihoğlu (2000) nun "Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II" kitabı, Sabuncuoğlu (2004) nun "Diferensiyel Geometri" kitabı, O'Neill (2006) in "Elementary Differential Geometry" kitabı, Kuhnel (2006) "Differential Geometry Curfes-Surfaces-Manifolds" kitabı ve Carmo (1976) adlı yazarın "Differential Geometry of Curves and Surfaces" adlı kitabı referanslarımız olmuştur. Ayrıca Minkowski 3-uzayı ve bu uzaydaki geometrik kavramlar için O' Neill (1983) adlı yazarın "Semi–Riemann Geometry with Applications to Relativity" kitabı ve Duggal ve Bejancu (1996) adlı yazarların ise "Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications " kitabından faydalanılmıştır.

Ayrıca $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzay- zamanda *W*- eğriler için Petrovic- Torgasev ve Sucurovic (2002) makalesinden faydalanılmıştır. $\mathbb{R}_2^4$ uzayında pseudo null ve partially null eğrilerin frenet çatıları ve *W*- eğriler için Petrovic- Torgasev, İlarslan ve Nesovic (2005) makalesinden faydalanılmıştır. $\mathbb{R}_2^4$ de spacelike ve timelike eğrilerin Frenet denklemleri için İlarslan (2002) den faydalanılmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı

4- boyutlu 2- indeksli yarı- Öklidyen uzay $\mathbb{R}_2^4$ de, pseudo null ve partially null W-eğriler Petrovic- Torgasev, İlarslan ve Nesovic (2005) tarafından çalışılmıştır. Bu tez çalışmasında 4- boyutlu 2- indeksli yarı- Öklidyen uzay $\mathbb{R}_2^4$ de spacelike, timelike ve null W- eğriler ve bu eğrilerin parametrik denklemlerinin elde edilmesiyle $\mathbb{R}_2^4$ deki W- eğrilerin sınıflandırılmasının tamamlanması tezimizin amacını oluşturmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde yarı- Ökliyen uzaylar (özel olarak Minkowski 3- uzayı, Minkowski uzay- zaman) ve bu uzaylarda eğriler ve Frenet denklemleri verilecektir.

2.1.Yarı – Öklidyen Uzaylar

Tanım 2.1.1. (Simetrik bilineer form)

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u,v,w \in V$ için,

i. $g(u,v) = g(v,u)$ (Simetri özelliği)

ii. $g(au+bv,w) = a\,g(u,w) + b\,g(v,w)$ (Bilineerlik özelliği)

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.1.2.

V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to \mathbb{R}$, V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

i. g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ ve bir $u \in V$ için $g(u,v) = 0$ iken $u = 0$,

ii. g nin dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ ve bir $u \in V$ için $g(u,v) = 0$ iken $u \neq 0$,

olmasıdır.

Tanım 2.1.3.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı ,

ii. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı ,

iii. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı pozitif tanımlı ,

iv. $\forall u \in V$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna yarı negatif tanımlı

denir.

Tanım 2.1.4. (Simetrik bilineer formun indeksi)

g, V üzerinde simetrik bilineer form ve W da V nin bir alt uzayı olsun. g nin W üzerinde kısıtlanışı $g_{|_W}$ olmak üzere

$$g_{|_W} : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir. ν , g nin indeksi olmak üzere $0 \leq \nu \leq boyV$ dir.

Tanım 2.1.5. (Metrik tensör)

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, bilineer non-dejenere ve sabit indeksli (0,2)- tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir.

Tanım 2.1.6. (yarı-Öklidyen metrik, yarı-Öklidyen uzay)

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı üzerinde $X=(x_1,\cdots,x_n), Y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ ve $0\le\nu\le n$ olmak üzere

$$\langle,\rangle_L : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$(X,Y)\to\langle X,Y\rangle_L=\sum_{i=1}^{n-\nu}x_iy_i-\sum_{i=n-\nu+1}^{n}x_iy_i$$

şeklinde tanımlanan ν- indeksli metrik tensöre yarı-Öklidyen metrik, bu metriğin tanımlanması ile elde edilen $\left(\mathbb{R}^n,\langle,\rangle_L\right)$ ikilisine yarı-Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir.

Özel olarak $\mathbb{R}^n_\nu$ yarı-Öklidyen uzayında $\nu=1$ ve $n\ge2$ ise $\mathbb{R}^n_1$, n-boyutlu Lorentz uzayı (Minkowski n-uzay) adını alır.

Özel olarak $n=3$ ve $\nu=1$olarak alınırsa $\mathbb{R}^3_1$, 3-boyutlu Lorentz uzayı (veya Minkowski 3-uzay) adını alır.

$n=4$ ve $\nu=1$ için $\mathbb{R}^4_1$, Minkowski uzay-zaman (space-time) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7. (Spacelike , timelike , lightlike (null) vektör)

$X=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_1^n$ olsun. Eğer

i. $\langle X,X\rangle_L>0$ veya $X=0$ ise X e spacelike vektör ,

ii. $\langle X,X\rangle_L<0$ ise X e timelike vektör ,

iii. $\langle X,X\rangle_L=0$ ve $X\neq 0$ ise X e lightlike (null) vektör denir.

Örnek 2.1.1.

$\mathbb{R}_1^3$ de $\langle,\rangle_L$ nin işareti $(+\ +\ -)$ olmak üzere; $x=(1,0,0)$, $y=(0,0,1)$ ve $z=(1,0,1)$ vektörlerini ele alalım.

$\langle x,x\rangle_L=\langle(1,0,0),(1,0,0)\rangle_L=1>0$ olduğundan x vektörü spacelike vektör,

$\langle y,y\rangle_L=\langle(0,0,1),(0,0,1)\rangle_L=-1<0$ olduğundan y vektörü timelike vektör ,

$\langle z,z\rangle_L=\langle(1,0,1),(1,0,1)\rangle_L=0$ olduğundan z vektörü null (lightlike) vektördür.

Tanım 2.1.8.

V yarı-Öklidyen uzay ve $\langle,\rangle_L$, yarı-Öklidyen metrik olmak üzere

i. $\Gamma_N=\{v\in(V-\{0\}):\langle v,v\rangle_L=0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V nin lightlike (null) konisi ,

ii. $\Gamma_S=\{v\in V:\langle v,v\rangle_L\geq 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V nin spacelike konisi ,

iii. $\Gamma_T = \{ v \in (V - \{0\}) : \langle v, v \rangle_L < 0 \}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine V nin timelike konisi denir.

Örnek 2.1.2.

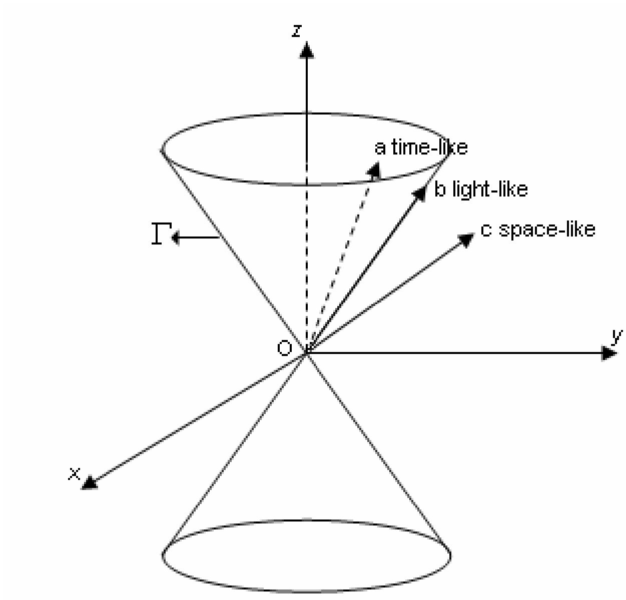
$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3- uzayında lightlike, spacelike ve null vektörleri elde edelim.

$\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x, x \rangle_L = 0 \}$ cümlesi $\mathbb{R}_1^3$ uzayının null konisi olarak adlandırılır.

Koninin denklemi $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle_L &= \langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle_L \\ &= x_1 x_1 + x_2 x_2 - x_3 x_3 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

olup $\langle x, x \rangle_L = 0$ olduğundan $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ olarak elde edilir. Koni yüzeyinde yatan vektörler lightlike (null) vektörler, koninin iç bölgesindeki vektörler timelike vektörler ve koninin dış bölgesindeki vektörler spacelike vektörlerdir.



Şekil 2.1 $\mathbb{R}_1^3$ de vektörler

Tanım 2.1.9.

$\mathbb{R}_1^n$, n- boyutlu Minkowski uzayı olsun. $\forall X,Y \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle X,Y \rangle_L = 0$$

ise X ve Y vektörleri Lorentz anlamda diktirler denir.

Örnek 2.1.3.

$n=2$ için $X=(1,-1)$ ve $Y=(1,1)$ vektörleri verilsin. Bu vektörler Öklid anlamında dik olmasına rağmen, Lorentz anlamında dik değildirler. Yine $X=(1,-1)$ ve $Y=(-1,1)$ vektörleri de Lorentz anlamında dik iken, Öklid anlamında dik değildirler.

Not 2.1. Null vektörlerin dikliği vektörlerin lineer bağımlılığı ile açıklanır.

Tanım 2.1.10.

$X=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_1^n$ için X vektörünün normu

$$\|X\|_L = \sqrt{\left|\langle X,X \rangle_L\right|}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.1.1.

$X=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_1^n$ olsun. Bu taktirde

i. $\|X\|_L>0$ dır,

ii. $\|X\|_L=0\Leftrightarrow X$ bir null vektördür,

iii. X bir timelike vektör ise, $\|X\|_L^{\,2}=-\langle X,X\rangle_L$ dir,

iv. X bir spacelike vektör ise, $\|X\|_L^{\,2}=\langle X,X\rangle_L$ dir.

Tanım 2.1.11.

$\alpha\in\mathbb{R}_1^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. Böylece α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere

i. $\langle\alpha',\alpha'\rangle_L>0$ ise α spacelike eğri ,

ii. $\langle\alpha',\alpha'\rangle_L<0$ ise α timelike eğri ,

iii. $\langle\alpha',\alpha'\rangle_L=0$ ise α null eğri

olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.4.

$\mathbb{R}_1^3$ de, $\langle,\rangle_L$ nin işareti $(+\ +\ -)$ olmak üzere; bir

$$\alpha(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s,\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s,\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s\right)$$

Eğrisini göz önüne alalım. α', α eğrisinin hız vektörü olmak üzere

$\alpha'(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s,\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s\right)$ bulunur. Buradan

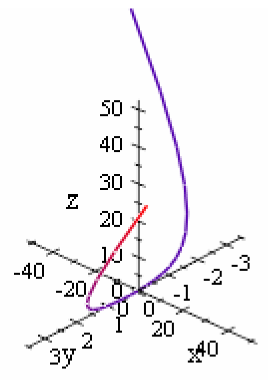
$$\langle \alpha', \alpha' \rangle_L = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh s \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh s \right) \right\rangle_L = 1 \text{ olup}$$

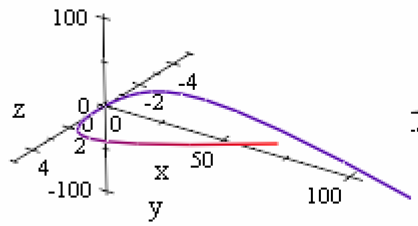
$\langle \alpha', \alpha' \rangle_L > 0$ olduğundan α eğrisi bir spacelike eğridir.

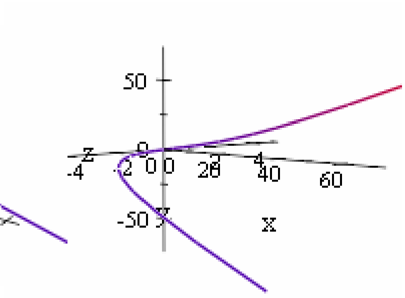
Yine $\mathbb{R}_1^3$ de $\beta(s) = \left(s, \sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s\right)$ ve $\gamma(s) = (\cosh s, s, \sinh s)$ eğrilerini göz önüne alalım. β' ve γ' sırasıyla β ve γ eğrilerinin hız vektörleri olsunlar. Bu durumda,

$\langle \beta', \beta' \rangle_L = \left\langle \left(s, \sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s\right), \left(s, \sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s\right) \right\rangle_L = -1 < 0$ olduğundan β eğrisi timelike eğri,

$\langle \gamma', \gamma' \rangle_L = \langle (\cosh s, s, \sinh s), (\cosh s, s, \sinh s) \rangle_L = 0$ olduğundan γ eğrisi null (lightlike) eğri olur. α, β ve γ eğrileri sırasıyla Şekil 2.1.2 de gösterilmiştir.







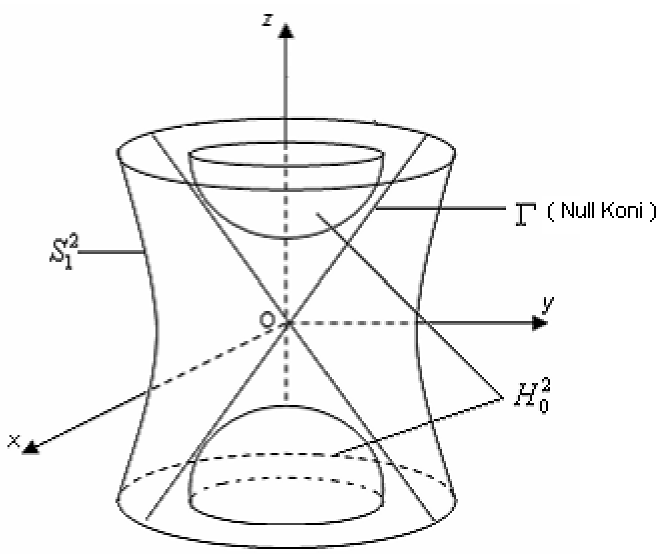
Şekil 2.2 $\mathbb{R}_1^3$ de spcelike, timelike ve null eğri

Tanım 2.1.12.

$\mathbb{R}_1^3$ uzayında sırasıyla

$$S_1^2=\left\{x\in\mathbb{R}_1^3:\langle x,x\rangle_L=1\right\} \text{ ve } H_0^2=\left\{x\in\mathbb{R}_1^3:\langle x,x\rangle_L=-1\right\}$$

cümlelerine Lorentz ve hiperbolik birim küreler denir.



Şekil 2.3 $\mathbb{R}_1^3$ de birim küreler

2.2. $\mathbb{R}_2^4$ Yarı – Öklidyen Uzayda Eğriler ve Frenet Denklemleri

Bu kısımda 4- boyutlu, 2- indeksli yarı- Öklidyen uzay $\mathbb{R}_2^4$ de eğriler ve eğrilerin Frenet denklemleri tanıtılacaktır. Burada non- dejenere metrik g ve g nin işareti $(- \ - \ + +)$ olarak alınacaktır.

2.2.1. $\mathbb{R}_2^4$ de Spacelike Eğriler ve Frenet Denklemleri

$\alpha(s):\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ diferensiyellenebilir birim hızlı bir spacelike eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri teğet, aslî normal, I. binormal ve II. binormal vektörlerinden oluşur ve sırasıyla *T, N, B_1, B_2* ile gösterilir. α eğrisinin eğrilik fonksiyonları da sırasıyla *$k_1(s)$, $k_2(s)$, $k_3(s)$* ile gösterilsin.

Frenet vektörlerinin türevleri ile kendileri arasındaki ilişkiyi veren Frenet denklemleri şu şekildedir (İlarslan 2002):

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2\varepsilon_3 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

olup; burada $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$, $g(T,T) = \varepsilon_0$, $g(N,N) = \varepsilon_1$, $g(B_1,B_1) = \varepsilon_2$, $g(B_2,B_2) = \varepsilon_3$ tür. Burada ε_1, ε_2 ve ε_3 den herhangi ikisi -1 dir. Ayrıca $\{T, N, B_1, B_2\}$ cümlesi ortogonaldir.

2.2.2. $\mathbb{R}_2^4$ de Timelike Eğriler ve Frenet Denklemleri

$\alpha(s):\ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ diferensiyellenebilir birim hızlı bir timelike eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri teğet, aslî normal, I. binormal ve II. binormal vektörlerinden oluşur ve sırasıyla *T, N, B_1, B_2* ile gösterilir. α eğrisinin eğrilik fonksiyonları da sırasıyla *$k_1(s)$, $k_2(s)$, $k_3(s)$* ile gösterilsin.

Frenet vektörlerinin türevleri ile kendileri arasındaki ilişkiyi veren Frenet denklemleri şu şekildedir (İlarslan 2002):

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2\varepsilon_3 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

olup; burada $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$, *g(T,T)*= ε_0, *g(N,N)*= ε_1, *g(B₁,B₁)*= ε_2, *g(B₂,B₂)*= ε_3 tür. Burada ε_1, ε_2 ve ε_3 den herhangi biri -1 dir. Ayrıca $\{T, N, B_1, B_2\}$ cümlesi ortogonaldir.

2.2.3. $\mathbb{R}_2^4$ de Null Eğriler ve Frenet Denklemleri

$\alpha(s)\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2^4$ diferensiyellenebilir birim hızlı bir null eğri olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri teğet, aslî normal, I. binormal ve II. binormal vektörlerinden oluşur ve sırasıyla T, N, B_1, B_2 ile gösterilir. α eğrisinin eğrilik fonksiyonları da sırasıyla $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ ile gösterilsin.

Frenet vektörlerinin türevleri ile kendileri arasındaki ilişkiyi veren Frenet denklemleri şu şekildedir (Duggal ve Jin):

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 k_2 & 0 & -\varepsilon_1 k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ -\varepsilon_2 k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

olup; burada $g(T,T)=g(B_1,B_1)=0$, $g(N,N)=\varepsilon_1=\mp 1$, $g(B_2,B_2)=\varepsilon_2=\mp 1$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2=-1$ dir. Ayrıca T, N, B_1, B_2 vektörleri quasi ortogonal vektörler olup $g(T,B_1)=1$, $g(T,N)=g(B_1,N)=g(T,B_2)=g(B_1,B_2)=0$ dır.

2.2.4. $\mathbb{R}_2^4$ de Partially Null Eğriler ve Frenet Denklemleri

$\alpha(s): I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}_2^4$ diferensiyellenebilir birim hızlı spacelike ya da timelike eğri olsun. Buradan $g(\alpha^{''}(s),\alpha^{''}(s))<0$ veya $g(\alpha^{''}(s),\alpha^{''}(s))>0$ dır. Tanjant vektör ve aslî normal vektör sırasıyla $T(s)=\alpha^{'}(s)$, $N(s)=\dfrac{\alpha^{''}(s)}{\left\|\alpha^{''}(s)\right\|}$ olarak tanımlanır. Buradan

$\{T,N\}$ cümlesi $\mathbb{R}_2^4$ de 1- indeksli timelike düzlemdir.

$$C^{\perp}=\left\{X(s)\in\mathbb{R}_2^4 : g(X(s),T(s))=0, g(X(s),N(s))=0\right\}$$

alt uzayını tanımlarsak;

$C^{\perp}=\{T,N\}^{\perp}$ cümlesi de $\mathbb{R}_2^4$ de spacelike, timelike ve null vektörler içeren 1-indeksli timelike düzlemdir.

$$\mathbb{R}_2^4=C^{\perp}\oplus\{T,N\}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $N^{'}(s)$ vektörünü yeniden oluşturabiliriz öyle ki;

$$N^{'}(s)=aT(s)+bN(s)+cV(s)$$

şeklinde olup burada $a,b,c\in\mathbb{R}$, $V(s)\in C^{\perp}$ dir. Burada birinci binormal vektör $B_1(s)=V(s)$ olup α eğrisi partially null olduğundan B_1 null vektördür. Ayrıca $C^{\perp}$ de farklı bir null vektör B_2 bulunur ve

$$g(T,B_2)=g(N,B_2)=g(B_2,B_2)=0,\ g(B_1,B_2)=1$$

olup B_2 ikinci binormal vektör diye adlandırılır.

$g(T,T)=\varepsilon_1=\mp 1$, $g(N,N)=\varepsilon_2=\mp 1$ ve $\varepsilon_1\varepsilon_2=-1$ dir. Ayrıca $g(B_1,B_2)=1$,

$g(B_1,B_1)=g(B_2,B_2)=0,\ g(T,N)=g(T,B_1)=g(T,B_2)=g(N,B_1)=g(N,B_2)=0$

olmak üzere;

Frenet vektörlerinin türevleri ile kendileri arasındaki ilişkiyi veren Frenet denklemleri şu şekildedir (İlarslan ve Nesovic 2005):

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2.2.5. $\mathbb{R}_2^4$ de Pseudo Null Eğriler ve Frenet Denklemleri

$\alpha(s)\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}_2^4$ diferensiyellenebilir birim hızlı spacelike ya da timelike eğri olsun. Buradan $g(\alpha'(s),\alpha'(s))=\mp 1$ ve $g(\alpha''(s),\alpha''(s))=0$ olup $\alpha''(s)\neq 0$ dır. Tanjant vektör ve aslî normal vektör sırasıyla $T(s)=\alpha'(s)$, $N(s)=\alpha''(s)$ olarak tanımlanır.

$$g(\alpha'(s),\alpha'(s))=\mp 1$$

ifadesinde s ye göre türev alınırsa;

$$g(\alpha'(s),\alpha''(s))=0$$

bulunur. Bu denklemin de s ye göre türevi alınırsa;

$$g(\alpha'(s),\alpha'''(s))=0$$

elde edilir. Buradan $\alpha'''(s)$ vektörü $\alpha'(s)$ ve $\alpha''(s)$ vektörlerinin her ikisine de dik olur. Kabul edelim ki $g(\alpha'''(s),\alpha'''(s))\neq 0$ olsun. Buradan birinci binormal vektör B_1,

$$B_1(s) = \frac{\alpha'''(s)}{\|\alpha'''(s)\|}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\mathbb{R}_2^4$ de farklı bir null vektör vardır B_2 öyle ki;

$$g(T, B_2) = g(B_1, B_2) = g(B_2, B_2) = 0,\ g(N, B_2) = 1$$

olup B_2 ikinci binormal vektör diye adlandırılır.

$g(T,T) = \varepsilon_1 = \mp 1$, $g(B_1, B_1) = \varepsilon_2 = \mp 1$ ve $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ dir. Ayrıca $g(N, B_2) = 1$,

$g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0,\ g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0$

olmak üzere;

Frenet vektörlerinin türevleri ile kendileri arasındaki ilişkiyi veren Frenet denklemleri şu şekildedir (İlarslan ve Nesovic 2005):

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -\varepsilon_2 k_2 \\ -\varepsilon_1 & 0 & -\varepsilon_2 k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

3. $\mathbb{R}_2^4$ YARI – ÖKLİDYEN UZAYDA *W*- EĞRİLER

$\alpha(s): \ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ birim hızlı bir regüler eğrinin ardışık türevleri $\alpha^{'}(s), \alpha^{''}(s), ..., \alpha^{(n)}(s)$ vektörleridir, bu vektörler $\{V_1, V_2, V_3, ..., V_n\}$ ortonormal çatıyla ve (n-1) – tane $k_1, ..., k_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ Frenet eğrilik fonksiyonlarıyla ilişkilendirilebilir. Bu durumda bu vektörlerin türevleri ve kendileri arasındaki ilişkiyi veren Frenet denklemleri şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} V_1^{'} \\ V_2^{'} \\ V_3^{'} \\ . \\ . \\ . \\ V_{n-1}^{'} \\ V_n^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & . & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix}$$

Özellikle; birinci eğrilik k_1 aynı zamanda κ ve ikinci eğrilik k_2 de τ diye adlandırılır. Eğer bir eğrinin bütün Frenet eğrilikleri sabit ise bu eğriye ***W*-eğri** denir. $\mathbb{R}^n$ de *W*- eğriler yoğunca çalışılmıştır. En basit örnekleri düzlemsel *W*- eğriler olarak çemberler ve düzlemsel olmayan *W*- eğriler $\mathbb{R}^3$ de helislerdir. $\mathbb{R}^{2k+1}$ de birim hızlı bir *W*- eğrinin parametreye bağlı denklemi şu şekildedir:

$$\gamma(s) = \gamma_0 + ase_0 + \sum_{i=1}^{k} r_i(\cos(a_i s)e_{2i-1} + \sin(a_i s)e_{2i}) \qquad (3.1)$$

Burada $\{e_0, e_1, ..., e_{2k}\}$, $\mathbb{R}^{2k+1}$ in ortonormal bir bazıdır, $a \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2 < ... < a_k$ sayıları $a^2 + \sum_{i=1}^{k} (r_i a_i)^2 = 1$ denklemini sağlayan pozitif reel sayılardır. Eğer $a \neq 0$ ise γ eğrisi tamamen $\mathbb{R}^{2k+1}$ de yatar, aksi halde γ tamamen $\mathbb{R}^{2k}$ da ki hiperküre üzerinde yatar. Bir eğrinin kapalı *W*- eğri olması için gerek yeter şart $a = 0$ ve $a_i = \dfrac{p_i}{r}$, $p_i \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_0^+$dır. $\mathbb{R}^n$ de ki *W*- eğriler sonlu tipli eğriler için güzel örneklerdir (Chen 1996). Özel olarak $\mathbb{R}^4$ de kapalı *W*- eğriler küresel 2- tipli eğrilerdir (Chen 1986).

Minkowski 3- uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de ki bütün *W*- eğriler Walrave tarafından sınıflandırılmıştır (Walrave 1995). Örneğin, düzlemsel spacelike *W*- eğriler sadece çemberler ve hiperbollerdir.

Benzer şekilde $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzay- zamanda null *W*- eğrilerin örnekleri Bonnor (1969) tarafından verilmiştir. Aynı uzayda timelike *W*- eğriler Synge (1967) tarafından çalışılmıştır.

4- boyutlu 2- indeksli yarı- Öklidyen uzayda pseudo null ve partially null *W*- eğriler Petrovic-Torgasev, Nesovic ve İlarslan (2005) tarafından çalışılmıştır.

Bu bölümde $\mathbb{R}_2^4$ yarı – Öklidyen Uzayda bir *W*- eğrinin parametrik denklemleri elde edilecektir.

2. Bölümde verilen Frenet Denklemleri yardımıyla null olmayan (spacelike ve timelike) ve null *W*- eğrilerin diferensiyel denklemleri elde edilip bulunan denklemler çözülmüştür.

3.1. $\mathbb{R}_2^4$ de Spacelike *W*- Eğriler

$\mathbb{R}_2^4$ de diferensiyellenebilir birim hızlı bir spacelike eğrinin Frenet denklemleri (2.1) de verilmişti. Bu denklemlerde *k1(s), k2(s), k3(s)* sabit alınarak bir *W*- eğrinin Frenet denklemleri elde edilir.

Buna göre (2.1) Frenet Denklemleri kullanılarak spacelike *W*- eğrinin vektörel diferensiyel denklemini şu şekilde elde ederiz:

$\alpha^{'}(s) = T(s)$ eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$T^{'}(s) = k_1 N(s)$$

Bu eşitlikten s ye göre 3 defa türev alınır ve (2.1) denklemleri kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned} T^{''} &= -\varepsilon_0\varepsilon_1 {k_1}^2 T + k_1 k_2 B_1 \\ T^{'''} &= -\varepsilon_0\varepsilon_1 {k_1}^3 N - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_1 {k_2}^2 N + k_1 k_2 k_3 B_2 \\ T^{(iv)} &= (-\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2^2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 k_3^2) T^{''} - (\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 k_1^2 k_3^2) T \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

elde edilir.

$$T^{(iv)} + (\varepsilon_0\varepsilon_1 k_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 k_2^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 k_3^2) T^{''} + (\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 k_1^2 k_3^2) T = 0$$

denkleminde ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 ün değerlerine göre aşağıdaki durumlar mevcuttur:

(A) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ ve $\varepsilon_3 = 1$ olsun. Bu durumda *N, B1* timelike vektörler ve *B2* spacelike vektördür. Bu durumda

$$T^{(iv)} + (-k_1^2 + k_2^2 - k_3^2) T^{''} + k_1^2 k_3^2 T = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde $K=(-k_1^2+k_2^2-k_3^2)$ denirse denklem şu hale gelir:

$$T^{(iv)}+KT^{''}+k_1^2k_3^2T=0$$

diferensiyel denklemi çözülürse; $\Delta=K^2-4k_1^2k_3^2\geq 0$ dır.

$$\lambda_1^2=\frac{-K+\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}\ ,\ \lambda_2^2=\frac{-K-\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}$$ dır.

i) $\Delta>0$ olsun. Bu durumda iki hâl oluşur:

a) $K=-k_1^2+k_2^2-k_3^2>0$ ise ;

$$\lambda_1^2=\frac{-K+\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}<0\ ,\ \lambda_2^2=\frac{-K-\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}<0$$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1\cos(\lambda_1 s)+V_2\sin(\lambda_1 s)+V_3\cos(\lambda_2 s)+V_4\sin(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ sabitler, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,...,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)+g(V_4,V_4)=1$ elde edilir. Ayrıca $g(T^{'},T^{'})=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=\dfrac{k_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=g(V_2,V_2)$ ve

$g(V_3,V_3)=-\dfrac{k_1^2+\lambda_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sin(\lambda_1 s)-V_2\cos(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sin(\lambda_2 s)-V_4\cos(\lambda_2 s))$$

Elde edilen bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

b) $K=-k_1^2+k_2^2-k_3^2<0$ ise ;

$\lambda_1^2=\dfrac{-K+\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$, $\lambda_2^2=\dfrac{-K-\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1\cosh(\lambda_1 s)+V_2\sinh(\lambda_1 s)+V_3\cosh(\lambda_2 s)+V_4\sinh(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ sabitler, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,...,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_1,V_1)=-g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=-g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)-g(V_4,V_4)=1$ elde edilir. Ayrıca $g(T',T')=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=\dfrac{\lambda_2^2-k_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_2,V_2)$ ve

$g(V_3,V_3)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sinh(\lambda_1 s)+V_2\cosh(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sinh(\lambda_2 s)+V_4\cosh(\lambda_2 s))$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.1. α, $\mathbb{R}_2^4$ de, $K=-k_1^2+k_2^2-k_3^2<0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sinh(\lambda_1 s)+V_2\cosh(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sinh(\lambda_2 s)+V_4\cosh(\lambda_2 s))$$

şeklinde yazılabilir.

Burada, $\lambda_1^2=\dfrac{-K+\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$, $\lambda_2^2=\dfrac{-K-\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$,

$V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1)=\dfrac{\lambda_2^2-k_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_2,V_2)$,

$g(V_3,V_3)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_4,V_4)$ eşitliklerini sağlayan kendi aralarında ikili ortogonal sabit vektörlerdir.

ii) $\Delta=0$ olsun. Bu durumda; $K=2k_1k_3$ ya da $K=-2k_1k_3$ ve

$\lambda_1^2=\lambda_2^2=-\dfrac{K}{2}$ dir.

a) $K=2k_1k_3$ ve $k_1k_3>0$ olsun. Bu durumda $\lambda_1^2=\lambda_2^2=-k_1k_3<0$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1\cos(\lambda_1 s)+V_2\sin(\lambda_1 s)+V_3 s\cos(\lambda_1 s)+V_4 s\sin(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1\in\mathbb{C}$ sabit, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$, $g(V_1,V_4)+g(V_2,V_3)=0$, $g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)=1$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0$ elde edilir.

Ayrıca $g(T',T')=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4)=\dfrac{k_1^2+\lambda_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1+\frac{1}{\lambda_1}V_4)\sin(\lambda_1 s)+(\frac{1}{\lambda_1}V_3-V_2)\cos(\lambda_1 s)+V_3 s\sin(\lambda_1 s)-V_4 s\cos(\lambda_1 s)\right]$$

Elde edilen bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

b) $K=2k_1k_3$ ve $k_1k_3<0$ olsun. Bu durumda $\lambda_1^2=\lambda_2^2=-k_1k_3>0$ dır. Buradan

$$T(s)=(V_1+V_2 s)\cosh(\lambda_1 s)+(V_3+V_4 s)\sinh(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1\in\mathbb{R}$ sabit, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$, $g(V_1,V_4)+g(V_2,V_3)=0$, $g(V_1,V_1)=1$, $g(V_3,V_3)=-1$, $g(V_2,V_2)=g(V_4,V_4)=0$ elde edilir. Ayrıca $g(T',T')=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2 s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4 s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.2. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1k_3<0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $K=2k_1k_3<0$, $\lambda_1^2=\lambda_2^2=-\dfrac{K}{2}>0$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1)=1$, $g(V_3,V_3)=-1$, $g(V_2,V_2)=g(V_4,V_4)=0$, $g(V_1,V_4)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$,

$g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$

eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

c) $K=2k_1k_3$ ve $k_1k_3=0$ olsun. Bu durumda ;

c-i) $k_1=0$ ve $k_3\neq 0$ olsun. Böylece ; $\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ ve $|k_2|=|k_3|$ tür.

c-ii) $k_1\neq 0$ ve $k_3=0$ olsun. Böylece ; $\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ ve $|k_1|=|k_2|$ dir.

c-iii) $k_1=k_3=0$ olsun. Böylece ; $\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ ve $k_2=0$ dır.

c-i), **c-ii)** ve **c-iii)** durumlarının herbirinde;

$$T(s)=V_1+V_2s+V_3s^2+V_4s^3$$

denklemi elde edilir. Burada $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ ve $g(T',T')=-k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak $g(V_1,V_1)=1, g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0$, $g(V_2,V_2)=-k_1^2=-2g(V_1,V_3)$ ve

$g(V_1,V_2)=g(V_1,V_4)=g(V_2,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2}V_2 s^2 + \frac{1}{3}V_3 s^3 + \frac{1}{4}V_4 s^4$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.3. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1 k_3 = 0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2}V_2 s^2 + \frac{1}{3}V_3 s^3 + \frac{1}{4}V_4 s^4$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $K = 2k_1k_3 = 0$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1) = 1$, $g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = 0$, $g(V_2,V_2) = -k_1^2 = -2g(V_1,V_3)$ ve $g(V_1,V_2) = g(V_1,V_4) = g(V_2,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$ eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

NOT: $K = -2k_1k_3$ olması durumunda da $K = 2k_1k_3$ durumuyla aynı sonuçlar elde edilir.

(B) $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1$ ve $\varepsilon_2 = 1$ olsun. Bu durumda *N*, *B₂* timelike vektörler ve *B₁* spacelike vektördür. Bu durumda

$$T^{(iv)} + (-k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)T'' + k_1^2 k_3^2 T = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde $K=(k_1^2+k_2^2+k_3^2)$ denirse denklem şu hale gelir:

$$T^{(iv)}-KT^{''}+k_1^2k_3^2T=0$$

diferensiyel denklemi çözülürse; $\Delta=K^2-4k_1^2k_3^2\geq 0$ dır.

$$\lambda_1^2=\frac{K+\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}\ ,\ \lambda_2^2=\frac{K-\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}$$

i) $\Delta>0$ olsun. Bu durumda $K>0$ dır . Böylece ;

$\lambda_1^2=\dfrac{K+\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$, $\lambda_2^2=\dfrac{K-\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1\cosh(\lambda_1 s)+V_2\sinh(\lambda_1 s)+V_3\cosh(\lambda_2 s)+V_4\sinh(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ sabitler, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,...,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_1,V_1)=-g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=-g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)-g(V_4,V_4)=1$ elde edilir. Ayrıca $g(T^{'},T^{'})=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=\dfrac{\lambda_2^2-k_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_2,V_2)$ ve

$g(V_3,V_3)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sinh(\lambda_1 s)+V_2\cosh(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sinh(\lambda_2 s)+V_4\cosh(\lambda_2 s))$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.4. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $K=(k_1^2+k_2^2+k_3^2)>0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sinh(\lambda_1 s)+V_2\cosh(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sinh(\lambda_2 s)+V_4\cosh(\lambda_2 s))$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2=\dfrac{K+\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$, $\lambda_2^2=\dfrac{K-\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1)=\dfrac{\lambda_2^2-k_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_4,V_4)$ eşitliklerini sağlayan kendi aralarında ikili ortogonal sabit vektörlerdir.

ii) $\Delta=0$ olsun. Bu durumda; $K=2k_1k_3$ ya da $K=-2k_1k_3$ ve $\lambda_1^2=\lambda_2^2=\dfrac{K}{2}$ dir.

a) $K=2k_1k_3$ ve $K>0$ olsun. Bu durumda $k_1k_3>0$ olur.

$K=-2k_1k_3$ ve $K>0$ olsun. Bu durumda $k_1k_3<0$ dır. Sonuç olarak her iki durumda da $\lambda_1^2=\lambda_2^2>0$ dır. Buradan;

$$T(s)=(V_1+V_2 s)\cosh(\lambda_1 s)+(V_3+V_4 s)\sinh(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1\in\mathbb{R}$ sabit, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$,

$g(V_1,V_4)+g(V_2,V_3)=0$, $g(V_1,V_1)=1$, $g(V_3,V_3)=-1$, $g(V_2,V_2)=g(V_4,V_4)=0$ elde edilir. Ayrıca $g(T',T')=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2 s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4 s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.5. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1k_3>0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2 s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4 s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $K=2k_1k_3>0$, $\lambda_1^2=\lambda_2^2=\dfrac{K}{2}$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1)=1$,

$g(V_3,V_3)=-1$, $g(V_2,V_2)=g(V_4,V_4)=0$, $g(V_1,V_4)=\dfrac{k_1^2-\lambda_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$

$g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$ eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

b) $K=2k_1k_3$ ya da $K=-2k_1k_3$ ve $K=0$ olsun.

Bu durumda; $k_1=k_2=k_3=\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ dır. Buradan;

$$T(s) = V_1 + V_2 s + V_3 s^2 + V_4 s^3$$

denklemi elde edilir. Burada $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 1$ ve $g(T', T') = -k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak $g(V_1, V_1) = 1$, $g(V_3, V_3) = g(V_4, V_4) = 0$, $g(V_2, V_2) = -k_1^2 = -2g(V_1, V_3)$ ve

$g(V_1, V_2) = g(V_1, V_4) = g(V_2, V_3) = g(V_2, V_4) = g(V_3, V_4) = 0$ elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2} V_2 s^2 + \frac{1}{3} V_3 s^3 + \frac{1}{4} V_4 s^4$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.6. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1 k_3 = 0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2} V_2 s^2 + \frac{1}{3} V_3 s^3 + \frac{1}{4} V_4 s^4$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $K = 2k_1 k_3 = 0$, $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 0$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1, V_1) = 1$, $g(V_3, V_3) = g(V_4, V_4) = 0$, $g(V_2, V_2) = -k_1^2 = -2g(V_1, V_3)$,

$g(V_1, V_2) = g(V_1, V_4) = g(V_2, V_3) = g(V_2, V_4) = g(V_3, V_4) = 0$ eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

(C) $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$ ve $\varepsilon_1 = 1$ olsun. Bu durumda *B₁*, *B₂* timelike vektörler ve *N* spacelike vektördür. Bu durumda

$$T^{(iv)} + (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2)T'' + k_1^2 k_3^2 T = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde $K = (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2)$ denirse denklem şu hale gelir:

$$T^{(iv)} + KT'' + k_1^2 k_3^2 T = 0$$

diferensiyel denklemi çözülürse; $\Delta = K^2 - 4k_1^2 k_3^2 \geq 0$ dır.

$\lambda_1^2 = \dfrac{-K + \sqrt{K^2 - 4k_1^2 k_3^2}}{2}$, $\lambda_2^2 = \dfrac{-K - \sqrt{K^2 - 4k_1^2 k_3^2}}{2}$ dır.

i) $\Delta > 0$ olsun. Bu durumda iki hâl oluşur:

a) $K = k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 > 0$ ise ;

$\lambda_1^2 = \dfrac{-K + \sqrt{K^2 - 4k_1^2 k_3^2}}{2} < 0$, $\lambda_2^2 = \dfrac{-K - \sqrt{K^2 - 4k_1^2 k_3^2}}{2} < 0$ dır. Buradan

$$T(s) = V_1 \cos(\lambda_1 s) + V_2 \sin(\lambda_1 s) + V_3 \cos(\lambda_2 s) + V_4 \sin(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sabitler, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 1$ eşitliği kullanılarak $i, j = 1,...,4$ ve $\forall\ i \neq j$ için $g(V_i, V_j) = 0$, $g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1) + g(V_4,V_4) = 1$ elde edilir. Ayrıca $g(T', T') = k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1) = \dfrac{-k_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = g(V_2,V_2)$ ve

$g(V_3,V_3) = \dfrac{k_1^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sin(\lambda_1 s)-V_2\cos(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sin(\lambda_2 s)-V_4\cos(\lambda_2 s))$$

Elde edilen bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

b) $K=k_1^2-k_2^2+k_3^2<0$ ise ;

$\lambda_1^2=\dfrac{-K+\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$, $\lambda_2^2=\dfrac{-K-\sqrt{K^2-4k_1^2k_3^2}}{2}>0$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1\cosh(\lambda_1 s)+V_2\sinh(\lambda_1 s)+V_3\cosh(\lambda_2 s)+V_4\sinh(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ sabitler, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,...,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_1,V_1)=-g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=-g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)-g(V_4,V_4)=1$ elde edilir. Ayrıca $g(T',T')=k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=\dfrac{\lambda_2^2+k_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_2,V_2)$ ve

$g(V_3,V_3)=-\dfrac{k_1^2+\lambda_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sinh(\lambda_1 s)+V_2\cosh(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sinh(\lambda_2 s)+V_4\cosh(\lambda_2 s))$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.7. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 < 0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1 \sinh(\lambda_1 s) + V_2 \cosh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \sinh(\lambda_2 s) + V_4 \cosh(\lambda_2 s))$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $K = k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 < 0$, $\lambda_1^2 = \dfrac{-K + \sqrt{K^2 - 4k_1^2 k_3^2}}{2} > 0$,

$\lambda_2^2 = \dfrac{-K - \sqrt{K^2 - 4k_1^2 k_3^2}}{2} > 0$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1, V_1) = \dfrac{\lambda_2^2 + k_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = -g(V_2, V_2)$

$g(V_3, V_3) = -\dfrac{k_1^2 + \lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = -g(V_4, V_4)$ eşitliklerini sağlayan kendi aralarında ikili ortogonal sabit vektörlerdir.

ii) $\Delta = 0$ olsun. Bu durumda; $K = 2k_1k_3$ ya da $K = -2k_1k_3$ ve

$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -\dfrac{K}{2}$ dir.

a) $K = 2k_1k_3$ ve $k_1k_3 > 0$ olsun. Bu durumda

$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -k_1k_3 < 0$ dır. Buradan;

$$T(s) = V_1 \cos(\lambda_1 s) + V_2 \sin(\lambda_1 s) + V_3 s \cos(\lambda_1 s) + V_4 s \sin(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ sabit, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 1$ eşitliği kullanılarak $g(V_1, V_2) = g(V_1, V_3) = g(V_2, V_4) = g(V_3, V_4) = 0$,

$g(V_1,V_4)+g(V_2,V_3)=0$, $g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)=1$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0$ elde edilir.

Ayrıca $g(T^{'},T^{'})=k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4)=\dfrac{-k_1^2+\lambda_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1+\frac{1}{\lambda_1}V_4)\sin(\lambda_1 s)+(\frac{1}{\lambda_1}V_3-V_2)\cos(\lambda_1 s)+V_3 s\sin(\lambda_1 s)-V_4 s\cos(\lambda_1 s)\right]$$

Elde edilen bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

b) $K=2k_1k_3$ ve $k_1k_3<0$ olsun. Bu durumda

$\lambda_1^2=\lambda_2^2=-k_1k_3>0$ dır. Buradan;

$$T(s)=(V_1+V_2 s)\cosh(\lambda_1 s)+(V_3+V_4 s)\sinh(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1\in\mathbb{R}$ sabit $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$, $g(V_1,V_4)+g(V_2,V_3)=0$, $g(V_1,V_1)=1$, $g(V_3,V_3)=-1$, $g(V_2,V_2)=g(V_4,V_4)=0$ elde edilir. Ayrıca $g(T^{'},T^{'})=k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4)=-\dfrac{k_1^2+\lambda_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.8. α , $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1k_3<0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $K=2k_1k_3<0$, $\lambda_1^2=\lambda_2^2=-\dfrac{K}{2}>0$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1)=1$, $g(V_3,V_3)=-1$, $g(V_2,V_2)=g(V_4,V_4)=0$, $g(V_1,V_4)=-\dfrac{k_1^2+\lambda_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$ $g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$ eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

c) $K=2k_1k_3$ ve $k_1k_3=0$ olsun. Bu durumda ;

c-i) $k_1=0$ ve $k_3\neq 0$ olsun. Böylece ; $\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ ve $|k_2|=|k_3|$ tür.

c-ii) $k_1\neq 0$ ve $k_3=0$ olsun. Böylece ; $\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ ve $|k_1|=|k_2|$ dir.

c-iii) $k_1=k_3=0$ olsun. Böylece ; $\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$ ve $k_2=0$ dır.

c-i), **c-ii)** ve **c-iii)** durumlarının herbirinde;

$$T(s)=V_1+V_2s+V_3s^2+V_4s^3$$

denklemi elde edilir. Burada $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=1$ ve $g(T^{'},T^{'})=k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak $g(V_1,V_1)=1$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0$, $g(V_2,V_2)=k_1^2=-2g(V_1,V_3)$ ve

$g(V_1,V_2)=g(V_1,V_4)=g(V_2,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$ elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=V_1 s+\frac{1}{2}V_2 s^2+\frac{1}{3}V_3 s^3+\frac{1}{4}V_4 s^4$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.1.9. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1 k_3 < 0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir spacelike eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=V_1 s+\frac{1}{2}V_2 s^2+\frac{1}{3}V_3 s^3+\frac{1}{4}V_4 s^4$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $K=2k_1k_3=0$, $\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1)=1$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0$, $g(V_2,V_2)=k_1^2=-2g(V_1,V_3)$,

$g(V_1,V_2)=g(V_1,V_4)=g(V_2,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$ eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

NOT: $K=-2k_1k_3$ olması durumunda da $K=2k_1k_3$ durumuyla aynı sonuçlar elde edilir.

3.2. $\mathbb{R}_2^4$ de Timelike *W*- Eğriler

$\mathbb{R}_2^4$ de diferensiyellenebilir birim hızlı bir timelike eğrinin Frenet denklemleri (2.2) de verilmişti. Bu denklemlerde $k_1(s)$, $k_2(s)$, $k_3(s)$ sabit alınarak bir *W*- eğrinin Frenet denklemleri elde edilir.

Buna göre (2.2) Frenet Denklemleri kullanılarak timelike *W*- eğrinin vektörel diferensiyel denklemini şu şekilde elde ederiz:

$\alpha^{'}(s)=T(s)$ eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$T^{'}(s)=k_1N(s)$$

Bu eşitlikten s ye göre 3 defa türev alınır ve (2.2) denklemleri kullanılırsa (3.2) elde edilir.

$$T^{(iv)}+(\varepsilon_0\varepsilon_1k_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2k_2^2+\varepsilon_2\varepsilon_3k_3^2)T^{"}+(\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3k_1^2k_3^2)T=0$$

denkleminde ε_0, ε_1, ε_2, ε_3 ün değerlerine göre aşağıdaki durumlar mevcuttur:

(A) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$ ve $\varepsilon_3=-1$ olsun. Bu durumda *N*, B_1 spacelike vektörler ve B_2 timelike vektördür. Bu durumda;

$$T^{(iv)}+(-k_1^2+k_2^2-k_3^2)T^{"}+k_1^2k_3^2T=0$$

diferensiyel denklemi elde edilir ki çözümü ve α eğrisinin genel denklemi spacelike eğrinin (A) durumu ile aynıdır.

(B) $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ ve $\varepsilon_2 = -1$ olsun. Bu durumda *N*, B_2 spacelike vektörler ve B_1 timelike vektördür. Bu durumda;

$$T^{(iv)} + (-k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)T'' + k_1^2 k_3^2 T = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir ki çözümü ve α eğrisinin genel denklemi spacelike eğrinin (B) durumu ile aynıdır.

(C) $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ ve $\varepsilon_1 = -1$ olsun. Bu durumda B_1, B_2 spacelike vektörler ve *N* timelike vektördür. Bu durumda;

$$T^{(iv)} + (k_1^2 - k_2^2 + k_3^2)T'' + k_1^2 k_3^2 T = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir ki çözümü ve α eğrisinin genel denklemi spacelike eğrinin (C) durumu ile aynıdır.

3.3. $\mathbb{R}_2^4$ de Null *W*- Eğriler

$\mathbb{R}_2^4$ de diferensiyellenebilir birim hızlı bir null eğrinin Frenet denklemleri (2.3) de verilmişti. Bu denklemlerde $k_1(s)$, $k_2(s)$, $k_3(s)$ sabit alınarak bir *W*- eğrinin Frenet denklemleri elde edilir.

Buna göre (2.3) Frenet Denklemleri kullanılarak null *W*- eğrinin vektörel diferensiyel denklemini şu şekilde elde ederiz:

$\alpha'(s) = T(s)$ eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$T'(s) = k_1 N(s)$$

Bu eşitlikten s ye göre 3 defa türev alınır ve (2.3) denklemleri kullanılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left.\begin{aligned} T'' &= -\varepsilon_1 k_1 k_2 T - \varepsilon_1 k_1{}^2 B_1 \\ T''' &= -2\varepsilon_1 k_1{}^2 k_2 N - \varepsilon_1 k_1{}^2 k_3 B_2 \\ T^{(iv)} &= -2\varepsilon_1 k_1 k_2 T'' + \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1{}^2 k_3{}^2 T \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

elde edilir.

$$T^{(iv)} + 2\varepsilon_1 k_1 k_2 T'' - \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_1^2 k_3^2 T = 0$$

diferensiyel denkleminde ε_1, ε_2 nin değerlerine göre aşağıdaki durumlar mevcuttur:

(A) $\varepsilon_1 = 1$ ve $\varepsilon_2 = -1$ olsun. Bu durumda N spacelike vektör ve B_2 timelike vektördür. Bu durumda;

$$T^{(iv)} + 2k_1 k_2 T'' + k_1^2 k_3^2 T = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse; $\Delta = 4k_1^2(k_2^2 - k_3^2)$

$\lambda_1^2 = -k_1 k_2 + \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)}$, $\lambda_2^2 = -k_1 k_2 - \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)}$ dir.

(I) $\Delta = 4k_1^2(k_2^2 - k_3^2) > 0$ olsun. Bu durumda iki hâl oluşur:

a-i) $k_1 k_2 > 0$ ve $k_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2 = -k_1 k_2 + \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)} < 0$, $\lambda_2^2 = -k_1 k_2 - \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)} < 0$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1\cos(\lambda_1 s)+V_2\sin(\lambda_1 s)+V_3\cos(\lambda_2 s)+V_4\sin(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ sabitler, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=0$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,...,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)+g(V_4,V_4)=0$ elde edilir. Ayrıca $g(T^{'},T^{'})=k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}=g(V_2,V_2)$ ve $g(V_3,V_3)=-\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}=g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sin(\lambda_1 s)-V_2\cos(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sin(\lambda_2 s)-V_4\cos(\lambda_2 s))$$

Bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

a-ii) $k_1k_2>0$ ve $k_3=0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2=-k_1k_2+\sqrt{k_1^2k_2^2}=0$, $\lambda_2^2=-2k_1k_2<0$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1+V_2 s+V_3\cos(\lambda_2 s)+V_4\sin(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_2\in\mathbb{C}$ sabit, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=0$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,...,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_2,V_2)=0$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)+g(V_4,V_4)=0$ elde edilir. Ayrıca

$g(T^{'},T^{'}) = k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1) = -\dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2}$ ve $g(V_3,V_3) = \dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2} = g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2}V_2 s^2 + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \sin(\lambda_2 s) - V_4 \cos(\lambda_2 s))$$

Bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

b-i) $k_1 k_2 < 0$ ve $k_3 \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2 = -k_1 k_2 + \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)} > 0$, $\lambda_2^2 = -k_1 k_2 - \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)} > 0$ dır. Buradan

$$T = V_1 \cosh(\lambda_1 s) + V_2 \sinh(\lambda_1 s) + V_3 \cosh(\lambda_2 s) + V_4 \sinh(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sabitler, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ eşitliği kullanılarak $i, j = 1,...,4$ ve $\forall\ i \neq j$ için $g(V_i,V_j) = 0$, $g(V_1,V_1) = -g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3) = -g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1) - g(V_4,V_4) = 0$ elde edilir.

Ayrıca $g(T^{'},T^{'}) = k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1) = \dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = -g(V_2,V_2)$ ve

$-g(V_3,V_3) = \dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1 \sinh(\lambda_1 s) + V_2 \cosh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \sinh(\lambda_2 s) + V_4 \cosh(\lambda_2 s))$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.1. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1k_2 < 0$ ve $k_3 \neq 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1 \sinh(\lambda_1 s) + V_2 \cosh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \sinh(\lambda_2 s) + V_4 \cosh(\lambda_2 s))$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2 = -k_1k_2 + \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)} > 0$, $\lambda_2^2 = -k_1k_2 - \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)} > 0$,

$V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1, V_1) = \dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = -g(V_2, V_2)$ ve

$-g(V_3, V_3) = \dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = g(V_4, V_4)$ eşitliklerini sağlayan kendi aralarında ikili ortogonal sabit vektörlerdir.

b-ii) $k_1k_2 < 0$ ve $k_3 = 0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_2^2 = -k_1k_2 - \sqrt{k_1^2k_2^2} = 0$, $\lambda_1^2 = -2k_1k_2 > 0$ dır. Buradan

$$T(s) = V_1 + V_2 s + V_3 \cosh(\lambda_1 s) + V_4 \sinh(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ sabit, $V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T, T) = 0$ eşitliği kullanılarak $i, j = 1, ..., 4$ ve $\forall\ i \neq j$ için $g(V_i, V_j) = 0$, $g(V_2, V_2) = 0$, $g(V_3, V_3) = -g(V_4, V_4)$ ve $g(V_1, V_1) - g(V_4, V_4) = 0$ elde edilir. Ayrıca

$g(T^{'},T^{'})=k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2}$ ve $g(V_3,V_3)=-\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2}=-g(V_4,V_4)$

bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=V_1s+\frac{1}{2}V_2s^2+\frac{1}{\lambda_1}(V_3\sinh(\lambda_1 s)+V_4\cosh(\lambda_1 s))$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.2. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1k_2<0$ ve $k_3=0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=V_1s+\frac{1}{2}V_2s^2+\frac{1}{\lambda_1}(V_3\sinh(\lambda_1 s)+V_4\cosh(\lambda_1 s))$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_2^2=-k_1k_2-\sqrt{k_1^2k_2^2}=0$, $\lambda_1^2=-2k_1k_2>0$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup

$g(V_2,V_2)=0$, $g(V_1,V_1)=\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2}$, $g(V_3,V_3)=-\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2}=-g(V_4,V_4)$ eşitliklerini sağlayan

kendi aralarında ikili ortogonal sabit vektörlerdir.

II) $\Delta=4k_1^2(k_2^2-k_3^2)=0$ olsun. Bu durumda iki hâl oluşur:

$k_1=0$ ya da $k_2^2-k_3^2=0$ ve $\lambda_1^2=\lambda_2^2=-k_1k_2$ dir.

a) $k_2^2 - k_3^2 = 0$ ve $k_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda $|k_2| = |k_3|$ tür.

a-i) $k_2 \neq 0$ ve $k_1 k_2 > 0$ ise;

$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -k_1 k_2 < 0$ olup

$$T(s) = V_1 \cos(\lambda_1 s) + V_2 \sin(\lambda_1 s) + V_3 s \cos(\lambda_1 s) + V_4 s \sin(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ sabit, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$, $g(V_1,V_4) + g(V_2,V_3) = 0$, $g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = 0$ elde edilir. Ayrıca $g(T', T') = k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4) = -\dfrac{k_1^2}{2\lambda_1} = -g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1 + \frac{1}{\lambda_1} V_4) \sin(\lambda_1 s) + (\frac{1}{\lambda_1} V_3 - V_2) \cos(\lambda_1 s) + V_3 s \sin(\lambda_1 s) - V_4 s \cos(\lambda_1 s) \right]$$

Bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

a-ii) $k_2 \neq 0$ ve $k_1 k_2 < 0$ ise;

$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -k_1 k_2 > 0$ olup

$$T(s) = (V_1 + V_2 s) \cosh(\lambda_1 s) + (V_3 + V_4 s) \sinh(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ sabit, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$,

$g(V_1,V_4)+g(V_2,V_3)=0$, $g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)=g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0$ elde edilir.

Ayrıca $g(T^{'},T^{'})=k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4)=-\dfrac{k_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.3. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_2^2-k_3^2=0$, $k_1k_2<0$ ve $k_2\neq 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2=\lambda_2^2=-k_1k_2>0$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_4)=-\dfrac{k_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$

$g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)=g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0$,

$g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$, eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

a-iii) $k_2=0$ ise; $k_1=k_3=0$ dır.

b) $k_1=0$ ve $k_2^2-k_3^2\neq 0$ olsun.

c) $k_1=k_2^2-k_3^2=0$ olsun. Böylece $|k_2|=|k_3|$ tür. Bu durumda;

$|k_2| = |k_3| = 0$ ya da $|k_2| = |k_3| \neq 0$ olsun.

(a-iii), **(b)** ve **(c)** durumlarının herbirinde; $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 0$ olup

$$T(s) = V_1 + V_2 s + V_3 s^2 + V_4 s^3$$

denklemi elde edilir. Burada $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ ve $g(T', T') = k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak $g(V_1,V_1) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = 0$,

$g(V_2,V_2) = k_1^2 = -2g(V_1,V_3)$ ve

$g(V_1,V_2) = g(V_1,V_4) = g(V_2,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2}V_2 s^2 + \frac{1}{3}V_3 s^3 + \frac{1}{4}V_4 s^4$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.4. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1 = 0$ veya $k_2 = 0$ veya $k_2^2 - k_3^2 = 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2}V_2 s^2 + \frac{1}{3}V_3 s^3 + \frac{1}{4}V_4 s^4$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 0$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = 0$,

$g(V_2,V_2) = k_1^2 = -2g(V_1,V_3)$,

$g(V_1,V_2) = g(V_1,V_4) = g(V_2,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$ eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

III) $\Delta = 4k_1^2(k_2^2 - k_3^2) < 0$ olsun.

$\lambda_1^2 = -k_1k_2 + i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$, $\lambda_2^2 = -k_1k_2 - i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$ dir.

III-A) $k_2 = 0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2 = i\sqrt{k_1^2k_3^2}$, $\lambda_2^2 = -i\sqrt{k_1^2k_3^2}$; $\lambda_1, \lambda_1 \in \mathbb{C}$ dir.

(∗) $\lambda_1 = a + ib$ olsun. ($a,b \in \mathbb{R}$)

$\lambda_1^2 = a^2 - b^2 + 2abi = i\sqrt{k_1^2k_3^2}$ olup $a^2 - b^2 = 0$ ve $2ab = \sqrt{k_1^2k_3^2}$ dir.

(i) $a = b$ olsun. Bu durumda;

$a = \mp\sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2k_3^2}}{2}}$ elde edilir. $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2k_3^2}}{2}}$ denirse;

$\lambda_1 = \omega + i\omega$ veya $\lambda_1 = -\omega - i\omega$ elde edilir.

(ii) $a = -b$ olsun. Bu durumda;

$a^2 = -\dfrac{\sqrt{k_1^2k_3^2}}{2} < 0$ elde edilir. Bu ise $a \in \mathbb{R}$ olması ile çelişir.

(**) $\lambda_2 = a + ib$ olsun. ($a,b \in \mathbb{R}$)

$a^2 - b^2 = 0$ ve $2ab = -\sqrt{k_1^2 k_3^2}$ dir.

(i) $a = b$ olsun. Bu durumda;

$a^2 = -\dfrac{\sqrt{k_1^2 k_3^2}}{2} < 0$ elde edilir. Bu ise $a \in \mathbb{R}$ olması ile çelişir.

(ii) $a = -b$ olsun. Bu durumda;

$a = \mp\sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2 k_3^2}}{2}}$ elde edilir. $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2 k_3^2}}{2}}$ denirse;

$\lambda_2 = \omega - i\omega$ veya $\lambda_2 = -\omega + i\omega$ elde edilir.

(∗)-(i) ve **(∗∗)-(ii)** den ;

$$T(s) = \cos(\omega s)(V_1 \cosh(\omega s) + V_2 \sinh(\omega s)) + \sin(\omega s)(V_3 \cosh(\omega s) + V_4 \sinh(\omega s))$$

denklemi elde edilir. Burada $\omega \in \mathbb{R}$ sabit, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup

$g(T,T) = 0$ ve $g(T', T') = k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak;

$$g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$$

ve $g(V_1,V_4) = -\dfrac{k_1^2}{2\omega^2} = -g(V_2,V_3)$ elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{1}{2\omega}\begin{bmatrix} (V_1 - V_4)\cos(\omega s)\sinh(\omega s) + (V_2 - V_3)\cos(\omega s)\cosh(\omega s) + \\ (V_1 + V_4)\sin(\omega s)\cosh(\omega s) + (V_2 + V_3)\sin(\omega s)\sinh(\omega s) \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.5. α , $\mathbb{R}_2^4$ de $k_2 = 0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \frac{1}{2\omega}\begin{bmatrix} (V_1 - V_4)\cos(\omega s)\sinh(\omega s) + (V_2 - V_3)\cos(\omega s)\cosh(\omega s) + \\ (V_1 + V_4)\sin(\omega s)\cosh(\omega s) + (V_2 + V_3)\sin(\omega s)\sinh(\omega s) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2 = i\sqrt{k_1^2 k_3^2}$, $\lambda_2^2 = -i\sqrt{k_1^2 k_3^2}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2 k_3^2}}{2}}$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup

$$g(V_1, V_4) = -\frac{k_1^2}{2\omega^2} = -g(V_2, V_3)$$
$$g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$$

eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

III-B) $k_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2 = -k_1 k_2 + i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$, $\lambda_2^2 = -k_1 k_2 - i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ dir.

(∗) $\lambda_1 = a + ib$ olsun. ($a, b \in \mathbb{R}$)

$\lambda_1^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -k_1 k_2 + i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$ olup

$a^2 - b^2 = -k_1k_2$ ve $2ab = \sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$ dir. Buradan $a^2 = t$ denirse;

$4t^2 + 4k_1k_2t - k_1^2(k_3^2 - k_2^2) = 0$ denklemi elde edilir ve $\Delta = 16k_1^2k_3^2 > 0$ dır. Bu denklem çözülürse;

$a^2 = \dfrac{-k_1k_2 + |k_1k_3|}{2}$ veya $a^2 = \dfrac{-k_1k_2 - |k_1k_3|}{2}$ elde edilir. Buradan;

$a_1 = \mp\sqrt{\dfrac{-k_1k_2 + |k_1k_3|}{2}}$ iken $b_1 = \mp\sqrt{\dfrac{k_1k_2 + |k_1k_3|}{2}}$

ve

$a_2 = \mp\sqrt{\dfrac{-k_1k_2 - |k_1k_3|}{2}}$ iken $b_2 = \mp\sqrt{\dfrac{k_1k_2 - |k_1k_3|}{2}}$

elde edilir. $\omega = \sqrt{\dfrac{-k_1k_2 + |k_1k_3|}{2}}$ ve $\gamma = \sqrt{\dfrac{k_1k_2 + |k_1k_3|}{2}}$ denirse;

(i) $k_1k_2 < 0$ ve $-k_1k_2 > |k_1k_3|$ ise; $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ve $b_1, b_2 \notin \mathbb{R}$ elde edilir. Bu durum $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ olması ile çelişir.

(ii) $k_1k_2 < 0$ ve $-k_1k_2 < |k_1k_3|$ ise; $\lambda_1 = \omega + i\gamma$ veya $\lambda_1 = -\omega - i\gamma$ elde edilir.

(iii) $k_1k_2 > 0$ ve $k_1k_2 > |k_1k_3|$ ise; $a_1, a_2 \notin \mathbb{R}$ ve $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ elde edilir. Bu durum $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ olması ile çelişir.

(iv) $k_1k_2 > 0$ ve $k_1k_2 < |k_1k_3|$ ise; $\lambda_1 = \omega + i\gamma$ veya $\lambda_1 = -\omega - i\gamma$ elde edilir.

(∗∗) $\lambda_2 = a + ib$; ($a, b \in \mathbb{R}$) olsun. Bu durumda;

$a^2 - b^2 = -k_1k_2$ ve $2ab = -\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$ dir. Böylece **(∗)** daki durumlar elde edilir

.**(∗)-(ii)** ve **(∗)-(iv)** durumları için; $\lambda_2 = \omega - i\gamma$ veya $\lambda_2 = -\omega + i\gamma$ elde edilir.

Sonuç olarak **(∗)** ve **(∗∗)** dan her iki durumda da λ_1 ve λ_2 birbirinin eşleniği iki kök elde edilir. Buradan;

$$T(s)=\cos(\gamma s)(V_1\cosh(\omega s)+V_2\sinh(\omega s))+\sin(\gamma s)(V_3\cosh(\omega s)+V_4\sinh(\omega s))$$

denklemi elde edilir. Burada $\gamma,\omega\in\mathbb{R}$ sabitler, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=0$ ve $g(T',T')=k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak;

$$g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)=g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$$

ve $g(V_1,V_4)=-\dfrac{k_1^2}{2\omega\gamma}=-g(V_2,V_3)$ elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{\omega}{\omega^2+\gamma^2}\begin{bmatrix}(V_1-\frac{\gamma}{\omega}V_4)\cos(\gamma s)\sinh(\omega s)+(V_2-\frac{\gamma}{\omega}V_3)\cos(\gamma s)\cosh(\omega s)+\\(\frac{\gamma}{\omega}V_1+V_4)\sin(\gamma s)\cosh(\omega s)+(\frac{\gamma}{\omega}V_2+V_3)\sin(\gamma s)\sinh(\omega s)\end{bmatrix}$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.6. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_2\neq 0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=\frac{\omega}{\omega^2+\gamma^2}\begin{bmatrix}(V_1-\frac{\gamma}{\omega}V_4)\cos(\gamma s)\sinh(\omega s)+(V_2-\frac{\gamma}{\omega}V_3)\cos(\gamma s)\cosh(\omega s)+\\(\frac{\gamma}{\omega}V_1+V_4)\sin(\gamma s)\cosh(\omega s)+(\frac{\gamma}{\omega}V_2+V_3)\sin(\gamma s)\sinh(\omega s)\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2=-k_1k_2+i\sqrt{k_1^2(k_3^2-k_2^2)}$, $\lambda_2^2=-k_1k_2-i\sqrt{k_1^2(k_3^2-k_2^2)}$, $\omega=\sqrt{\frac{-k_1k_2+|k_1k_3|}{2}}$

ve $\gamma=\sqrt{\frac{k_1k_2+|k_1k_3|}{2}}$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_4)=-\frac{k_1^2}{2\omega\gamma}=-g(V_2,V_3)$

$$g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)=g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$$

eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

(B) $\varepsilon_1=-1$ ve $\varepsilon_2=1$ olsun. Bu durumda N timelike vektör ve *B*$_2$ spacelike vektördür. Bu durumda

$$T^{(iv)}-2k_1k_2T''+k_1^2k_3^2T=0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse; $\Delta=4k_1^2(k_2^2-k_3^2)$

$\lambda_1^2=k_1k_2+\sqrt{k_1^2(k_2^2-k_3^2)}$, $\lambda_2^2=k_1k_2-\sqrt{k_1^2(k_2^2-k_3^2)}$ dir.

(I) $\Delta=4k_1^2(k_2^2-k_3^2)>0$ olsun. Bu durumda iki hâl oluşur:

a-i) $k_1k_2<0$ ve $k_3\neq 0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2=k_1k_2+\sqrt{k_1^2(k_2^2-k_3^2)}<0$, $\lambda_2^2=k_1k_2-\sqrt{k_1^2(k_2^2-k_3^2)}<0$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1\cos(\lambda_1 s)+V_2\sin(\lambda_1 s)+V_3\cos(\lambda_2 s)+V_4\sin(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ sabitler, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=0$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,...,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)+g(V_4,V_4)=0$ elde edilir. Ayrıca $g(T^{'},T^{'})=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=-\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}=g(V_2,V_2)$ ve $g(V_3,V_3)=\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}=g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sin(\lambda_1 s)-V_2\cos(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sin(\lambda_2 s)-V_4\cos(\lambda_2 s))$$

Bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

a-ii) $k_1k_2<0$ ve $k_3=0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2=k_1k_2+\sqrt{k_1^2k_2^2}=0$, $\lambda_2^2=2k_1k_2<0$ dır. Buradan

$$T(s)=V_1+V_2 s+V_3\cos(\lambda_2 s)+V_4\sin(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_2\in\mathbb{C}$ sabit, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=0$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,...,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_2,V_2)=0$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)+g(V_4,V_4)=0$ elde edilir. Ayrıca

$g(T^{'},T^{'})=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=\dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2}$ ve $g(V_3,V_3)=-\dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2}=g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=V_1 s+\frac{1}{2}V_2 s^2+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sin(\lambda_2 s)-V_4\cos(\lambda_2 s))$$

Bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

b-i) $k_1k_2>0$ ve $k_3\neq 0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2=k_1k_2+\sqrt{k_1^2(k_2^2-k_3^2)}>0$, $\lambda_2^2=k_1k_2-\sqrt{k_1^2(k_2^2-k_3^2)}>0$ dır. Buradan

$$T=V_1\cosh(\lambda_1 s)+V_2\sinh(\lambda_1 s)+V_3\cosh(\lambda_2 s)+V_4\sinh(\lambda_2 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ sabitler, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T)=0$ eşitliği kullanılarak $i,j=1,\dots,4$ ve $\forall\ i\neq j$ için $g(V_i,V_j)=0$, $g(V_1,V_1)=-g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=-g(V_4,V_4)$ ve $g(V_1,V_1)-g(V_4,V_4)=0$ elde edilir. Ayrıca $g(T^{'},T^{'})=-k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1)=-\dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=-g(V_2,V_2)$ ve $-g(V_3,V_3)=-\dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}=g(V_4,V_4)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sinh(\lambda_1 s)+V_2\cosh(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sinh(\lambda_2 s)+V_4\cosh(\lambda_2 s))$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.7. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1k_2 > 0$ ve $k_3 \neq 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1 \sinh(\lambda_1 s) + V_2 \cosh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \sinh(\lambda_2 s) + V_4 \cosh(\lambda_2 s))$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2 = k_1k_2 + \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)} > 0$, $\lambda_2^2 = k_1k_2 - \sqrt{k_1^2(k_2^2 - k_3^2)} > 0$,

$V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1, V_1) = -\dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = -g(V_2, V_2)$ ve

$-g(V_3, V_3) = -\dfrac{k_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = g(V_4, V_4)$ eşitliklerini sağlayan kendi aralarında ikili ortogonal sabit vektörlerdir.

b-ii) $k_1k_2 > 0$ ve $k_3 = 0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_2^2 = k_1k_2 - \sqrt{k_1^2k_2^2} = 0$, $\lambda_1^2 = 2k_1k_2 > 0$ dır. Buradan

$$T(s) = V_1 + V_2 s + V_3 \cosh(\lambda_1 s) + V_4 \sinh(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ sabit, $V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ eşitliği kullanılarak $i, j = 1,...,4$ ve $\forall\ i \neq j$ için $g(V_i, V_j) = 0$, $g(V_2, V_2) = 0$, $g(V_3, V_3) = -g(V_4, V_4)$ ve $g(V_1, V_1) - g(V_4, V_4) = 0$ elde edilir. Ayrıca

$g(T',T') = -k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_1) = -\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2}$ ve $g(V_3,V_3) = \dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2} = -g(V_4,V_4)$

bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2} V_2 s^2 + \frac{1}{\lambda_1}(V_3 \sinh(\lambda_1 s) + V_4 \cosh(\lambda_1 s))$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.8. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1 k_2 > 0$ ve $k_3 = 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2} V_2 s^2 + \frac{1}{\lambda_1}(V_3 \sinh(\lambda_1 s) + V_4 \cosh(\lambda_1 s))$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_2^2 = k_1 k_2 - \sqrt{k_1^2 k_2^2} = 0$, $\lambda_1^2 = 2k_1 k_2 > 0$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_2,V_2) = 0$,

$g(V_1,V_1) = -\dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2}$ ve $g(V_3,V_3) = \dfrac{k_1^2}{\lambda_1^2} = -g(V_4,V_4)$ eşitliklerini sağlayan kendi

aralarında ikili ortogonal sabit vektörlerdir.

II) $\Delta = 4k_1^2(k_2^2 - k_3^2) = 0$ olsun. Bu durumda iki hâl oluşur:

$k_1 = 0$ ya da $k_2^2 - k_3^2 = 0$ ve $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = k_1 k_2$ dir.

a) $k_2^2 - k_3^2 = 0$ ve $k_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda $|k_2| = |k_3|$ tür.

a-i) $k_2 \neq 0$ ve $k_1 k_2 < 0$ ise;

$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = k_1 k_2 < 0$

$$T(s) = V_1 \cos(\lambda_1 s) + V_2 \sin(\lambda_1 s) + V_3 s \cos(\lambda_1 s) + V_4 s \sin(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ sabit, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$, $g(V_1,V_4) + g(V_2,V_3) = 0$, $g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = 0$ elde edilir. Ayrıca $g(T^{'},T^{'}) = -k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4) = \dfrac{k_1^2}{2\lambda_1} = -g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1 + \frac{1}{\lambda_1} V_4)\sin(\lambda_1 s) + (\frac{1}{\lambda_1} V_3 - V_2)\cos(\lambda_1 s) + V_3 s \sin(\lambda_1 s) - V_4 s \cos(\lambda_1 s) \right]$$

Bu eğri kompleks değerli bir eğri olduğundan dikkate alınmayacaktır.

a-ii) $k_2 \neq 0$ ve $k_1 k_2 > 0$ ise;

$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = k_1 k_2 > 0$ olup

$$T(s) = (V_1 + V_2 s)\cosh(\lambda_1 s) + (V_3 + V_4 s)\sinh(\lambda_1 s)$$

denklemi elde edilir. Burada $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ sabit, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$, $g(V_1,V_4) + g(V_2,V_3) = 0$, $g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = 0$ elde edilir. Ayrıca $g(T^{'},T^{'}) = -k_1^2$ eşitliği kullanılarak $g(V_1,V_4) = \dfrac{k_1^2}{2\lambda_1} = -g(V_2,V_3)$ bulunur.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.9. α , $\mathbb{R}_2^4$ de $k_2^2-k_3^2=0$ ve $k_1k_2>0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}\left[(V_1-\frac{1}{\lambda_1}V_4+V_2s)\sinh(\lambda_1 s)+(V_3-\frac{1}{\lambda_1}V_2+V_4s)\cosh(\lambda_1 s)\right]$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2=\lambda_2^2=k_1k_2>0$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup

$$g(V_1,V_1)=g(V_2,V_2)=g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0,$$

$$g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0,\ \ g(V_1,V_4)=\frac{k_1^2}{2\lambda_1}=-g(V_2,V_3)$$

eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

a-iii) $k_2=0$ ise; $k_1=k_3=0$ dır.

b) $k_1=0$ ve $k_2^2-k_3^2\neq 0$ olsun.

c) $k_1=k_2^2-k_3^2=0$ olsun. Böylece $|k_2|=|k_3|$ tür. Bu durumda;

$|k_2| = |k_3| = 0$ ya da $|k_2| = |k_3| \neq 0$ olsun.

(a-iii) , **(b)** ve **(c)** durumlarının herbirinde; $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 0$ olup

$$T(s) = V_1 + V_2 s + V_3 s^2 + V_4 s^3$$

denklemi elde edilir. Burada $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ ve $g(T', T') = -k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak $g(V_1,V_1) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = 0$, $g(V_2,V_2) = -k_1^2 = -2g(V_1,V_3)$ ve

$g(V_1,V_2) = g(V_1,V_4) = g(V_2,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2}V_2 s^2 + \frac{1}{3}V_3 s^3 + \frac{1}{4}V_4 s^4$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.10. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_1 = 0$ veya $k_2 = 0$ veya $k_2^2 - k_3^2 = 0$ şartlarını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = V_1 s + \frac{1}{2}V_2 s^2 + \frac{1}{3}V_3 s^3 + \frac{1}{4}V_4 s^4$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2=\lambda_2^2=0$, $V_1,V_2,V_3,V_4\in\mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1,V_1)=g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=0$,

$g(V_2,V_2)=-k_1^2=-2g(V_1,V_3)$,

$g(V_1,V_2)=g(V_1,V_4)=g(V_2,V_3)=g(V_2,V_4)=g(V_3,V_4)=0$ eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

III) $\Delta=4k_1^2(k_2^2-k_3^2)<0$ olsun.

$\lambda_1^2=k_1k_2+i\sqrt{k_1^2(k_3^2-k_2^2)}$, $\lambda_2^2=k_1k_2-i\sqrt{k_1^2(k_3^2-k_2^2)}$ dir.

III-A) $k_2=0$ olsun. Bu durumda;

$\lambda_1^2=i\sqrt{k_1^2k_3^2}$, $\lambda_2^2=-i\sqrt{k_1^2k_3^2}$; $\lambda_1,\lambda_1\in\mathbb{C}$ dir.

($*$) $\lambda_1=a+ib$ olsun. ($a,b\in\mathbb{R}$)

$\lambda_1^2=a^2-b^2+2abi=i\sqrt{k_1^2k_3^2}$ olup $a^2-b^2=0$ ve $2ab=\sqrt{k_1^2k_3^2}$ dir.

(i) $a=b$ olsun. Bu durumda;

$a=\mp\sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2k_3^2}}{2}}$ elde edilir. $\omega=\sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2k_3^2}}{2}}$ denirse;

$\lambda_1=\omega+i\omega$ veya $\lambda_1=-\omega-i\omega$ elde edilir.

(ii) $a=-b$ olsun. Bu durumda;

$a^2=-\dfrac{\sqrt{k_1^2k_3^2}}{2}<0$ elde edilir. Bu ise $a\in\mathbb{R}$ olması ile çelişir.

($**$) $\lambda_2=a+ib$ olsun. ($a,b\in\mathbb{R}$)

$a^2 - b^2 = 0$ ve $2ab = -\sqrt{k_1^2 k_3^2}$ dir.

(i) $a = b$ olsun. Bu durumda;

$a^2 = -\dfrac{\sqrt{k_1^2 k_3^2}}{2} < 0$ elde edilir. Bu ise $a \in \mathbb{R}$ olması ile çelişir.

(ii) $a = -b$ olsun. Bu durumda;

$a = \mp\sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2 k_3^2}}{2}}$ elde edilir. $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2 k_3^2}}{2}}$ denirse;

$\lambda_2 = \omega - i\omega$ veya $\lambda_2 = -\omega + i\omega$ elde edilir.

($*$)-(i) ve **($**$)-(ii)** den ;

$$T(s) = \cos(\omega s)(V_1 \cosh(\omega s) + V_2 \sinh(\omega s)) + \sin(\omega s)(V_3 \cosh(\omega s) + V_4 \sinh(\omega s))$$

denklemi elde edilir. Burada $\omega \in \mathbb{R}$ sabit, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup

$g(T,T) = 0$ ve $g(T', T') = -k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak;

$$g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$$

ve $g(V_1,V_4) = \dfrac{k_1^2}{2\omega^2} = -g(V_2,V_3)$ elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{1}{2\omega}\begin{bmatrix} (V_1 - V_4)\cos(\omega s)\sinh(\omega s) + (V_2 - V_3)\cos(\omega s)\cosh(\omega s) + \\ (V_1 + V_4)\sin(\omega s)\cosh(\omega s) + (V_2 + V_3)\sin(\omega s)\sinh(\omega s) \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.11. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_2 = 0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \frac{1}{2\omega}\begin{bmatrix} (V_1 - V_4)\cos(\omega s)\sinh(\omega s) + (V_2 - V_3)\cos(\omega s)\cosh(\omega s) + \\ (V_1 + V_4)\sin(\omega s)\cosh(\omega s) + (V_2 + V_3)\sin(\omega s)\sinh(\omega s) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2 = i\sqrt{k_1^2 k_3^2}$, $\lambda_2^2 = -i\sqrt{k_1^2 k_3^2}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{k_1^2 k_3^2}}{2}}$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup

$$g(V_1, V_4) = \frac{k_1^2}{2\omega^2} = -g(V_2, V_3)$$
$$g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$$

eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

III-B) $k_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda;

$$\lambda_1^2 = k_1 k_2 + i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)} \ , \quad \lambda_2^2 = k_1 k_2 - i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)} \ ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \text{ dir.}$$

(∗) $\lambda_1 = a + ib$ olsun. ($a, b \in \mathbb{R}$)

$\lambda_1^2 = a^2 - b^2 + 2abi = k_1 k_2 + i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$ olup

$a^2 - b^2 = k_1 k_2$ ve $2ab = \sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$ dir. Buradan $a^2 = t$ denirse;

$4t^2+4k_1k_2t-k_1^2(k_3^2-k_2^2)=0$ denklemi elde edilir ve $\Delta=16k_1^2k_3^2>0$ dır. Bu denklem çözülürse;

$a^2=\dfrac{k_1k_2+|k_1k_3|}{2}$ veya $a^2=\dfrac{k_1k_2-|k_1k_3|}{2}$ elde edilir. Buradan;

$a_1=\mp\sqrt{\dfrac{k_1k_2+|k_1k_3|}{2}}$ iken $b_1=\mp\sqrt{\dfrac{-k_1k_2+|k_1k_3|}{2}}$

ve

$a_2=\mp\sqrt{\dfrac{k_1k_2-|k_1k_3|}{2}}$ iken $b_2=\mp\sqrt{\dfrac{-k_1k_2-|k_1k_3|}{2}}$

elde edilir. $\omega=\sqrt{\dfrac{k_1k_2+|k_1k_3|}{2}}$ ve $\gamma=\sqrt{\dfrac{-k_1k_2+|k_1k_3|}{2}}$ denirse;

(i) $k_1k_2>0$ ve $k_1k_2>|k_1k_3|$ ise; $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ ve $b_1,b_2\notin\mathbb{R}$ elde edilir. Bu durum $b_1,b_2\in\mathbb{R}$ olması ile çelişir.

(ii) $k_1k_2>0$ ve $k_1k_2<|k_1k_3|$ ise; $\lambda_1=\omega+i\gamma$ veya $\lambda_1=-\omega-i\gamma$ elde edilir.

(iii) $k_1k_2<0$ ve $-k_1k_2>|k_1k_3|$ ise; $a_1,a_2\notin\mathbb{R}$ ve $b_1,b_2\in\mathbb{R}$ elde edilir. Bu durum $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ olması ile çelişir.

(iv) $k_1k_2<0$ ve $-k_1k_2<|k_1k_3|$ ise; $\lambda_1=\omega+i\gamma$ veya $\lambda_1=-\omega-i\gamma$ elde edilir.

(**) $\lambda_2=a+ib$; ($a,b\in\mathbb{R}$) olsun. Bu durumda;

$a^2-b^2=k_1k_2$ ve $2ab=-\sqrt{k_1^2(k_3^2-k_2^2)}$ dir. Böylece **(*)** daki durumlar elde edilir **(*)-(ii)** ve **(*)-(iv)** durumları için; $\lambda_2=\omega-i\gamma$ veya $\lambda_2=-\omega+i\gamma$ elde edilir.

Sonuç olarak **(*)** ve **(**)** dan her iki durumda da λ_1 ve λ_2 birbirinin eşleniği iki kök elde edilir. Buradan;

$$T(s) = \cos(\gamma s)(V_1 \cosh(\omega s) + V_2 \sinh(\omega s)) + \sin(\gamma s)(V_3 \cosh(\omega s) + V_4 \sinh(\omega s))$$

denklemi elde edilir. Burada $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$ sabitler, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = 0$ ve $g(T^{'}, T^{'}) = -k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak;

$$g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$$

ve $g(V_1,V_4) = \dfrac{k_1^2}{2\omega\gamma} = -g(V_2,V_3)$ elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \begin{bmatrix} (V_1 - \frac{\gamma}{\omega} V_4)\cos(\gamma s)\sinh(\omega s) + (V_2 - \frac{\gamma}{\omega} V_3)\cos(\gamma s)\cosh(\omega s) + \\ (\frac{\gamma}{\omega} V_1 + V_4)\sin(\gamma s)\cosh(\omega s) + (\frac{\gamma}{\omega} V_2 + V_3)\sin(\gamma s)\sinh(\omega s) \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz:

Teorem 3.3.12. α, $\mathbb{R}_2^4$ de $k_2 \neq 0$ şartını sağlayan eğriliklere sahip birim hızlı bir null eğri olsun. Bu durumda α bir *W*- eğridir gerek ve yeter şart $\mathbb{R}_2^4$ uzayının izometrilerine bağlı olarak α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \begin{bmatrix} (V_1 - \frac{\gamma}{\omega} V_4)\cos(\gamma s)\sinh(\omega s) + (V_2 - \frac{\gamma}{\omega} V_3)\cos(\gamma s)\cosh(\omega s) + \\ (\frac{\gamma}{\omega} V_1 + V_4)\sin(\gamma s)\cosh(\omega s) + (\frac{\gamma}{\omega} V_2 + V_3)\sin(\gamma s)\sinh(\omega s) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $\lambda_1^2 = k_1k_2 + i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$, $\lambda_2^2 = k_1k_2 - i\sqrt{k_1^2(k_3^2 - k_2^2)}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k_1k_2 + |k_1k_3|}{2}}$ ve

$\gamma = \sqrt{\dfrac{-k_1k_2 + |k_1k_3|}{2}}$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ olup $g(V_1, V_4) = \dfrac{k_1^2}{2\omega\gamma} = -g(V_2, V_3)$

$g(V_1,V_1) = g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_4) = g(V_3,V_4) = 0$

eşitliklerini sağlayan sabit vektörlerdir.

3.4. $\mathbb{R}_2^4$ de Partially null *W*- Eğriler

$\mathbb{R}_2^4$ de diferensiyellenebilir birim hızlı bir partially null eğrinin Frenet denklemleri (2.4) de verilmişti. Bu denklemlerde $k_1(s)$, $k_2(s)$, $k_3(s)$ sabit alınarak bir *W*- eğrinin Frenet denklemleri elde edilir.

Buna göre (2.4) Frenet Denklemleri kullanılarak partially null *W*- eğrinin vektörel diferensiyel denklemini şu şekilde elde ederiz:

$\alpha^{'}(s) = T(s)$ eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$T^{'}(s) = k_1N(s)$$

Bu eşitlikten s ye göre 2 defa türev alınır ve (2.4) denklemleri kullanılırsa

$$T^{'''} - k_1^2T^{'} = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse;

$$T = V_1 + V_2\sinh(k_1s) + V_3\cosh(k_1s)$$

denklemi elde edilir. Burada $k_1 \in \mathbb{R}$ sabit, $V_1, V_2, V_3 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup

$g(T,T)=\varepsilon$ ve $g(T^{'},T^{'})=-\varepsilon k_1^2$ eşitlikleri kullanılarak;

$g(V_1,V_1)=g(V_1,V_2)=g(V_1,V_3)=g(V_2,V_3)=0$ ve $g(V_2,V_2)=-g(V_3,V_3)=-\varepsilon$ elde edilir.

Yukarıdaki denklemde s ye göre integral alınırsa α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s)=V_1 s+\frac{1}{k_1}(V_2\cosh(k_1 s)+V_3\sinh(k_1 s))$$

3.5. $\mathbb{R}_2^4$ de Pseudo null *W*- Eğriler

$\mathbb{R}_2^4$ de diferensiyellenebilir birim hızlı bir pseudo null eğrinin Frenet denklemleri (2.5) de verilmişti. Bu denklemlerde $k_1(s)$, $k_2(s)$, $k_3(s)$ sabit alınarak bir *W*- eğrinin Frenet denklemleri elde edilir.

Buna göre (2.5) Frenet Denklemleri kullanılarak pseudo null *W*- eğrinin vektörel diferensiyel denklemini şu şekilde elde ederiz:

$\alpha^{'}(s)=T(s)$ eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$T^{'}(s)=N(s)$$

Bu eşitlikten s ye göre 3 defa türev alınır ve (2.5) denklemleri kullanılırsa

$$T^{(iv)}-2k_2k_3T^{''}+k_2^2T=0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse iki durum oluşur:

(A-i) $K = k_2 k_3 > 0$ ve $K^2 - k_2^2 > 0$ olsun. Bu durumda α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1 \cosh(\lambda_1 s) + V_2 \sinh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \cosh(\lambda_2 s) + V_4 \sinh(\lambda_2 s))$$

Burada $\lambda_1^2 = K + \sqrt{K^2 - k_2^2}$, $\lambda_2^2 = K - \sqrt{K^2 - k_2^2}$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = \varepsilon$ eşitliği kullanılarak $i, j = 1,...,4$ ve $\forall\ i \neq j$ için $g(V_i, V_j) = 0$, Ayrıca $g(T^{'}, T^{'}) = 0$ eşitliği kullanılarak $g(V_1, V_1) = \varepsilon \dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = -g(V_2, V_2)$ ve $g(V_3, V_3) = -\varepsilon \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = -g(V_4, V_4)$ bulunur.

(A-ii) $K = k_2 k_3 < 0$ ve $K^2 - k_2^2 > 0$ olsun. Bu durumda α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1 \sin(\lambda_1 s) - V_2 \cos(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \sin(\lambda_2 s) - V_4 \cos(\lambda_2 s))$$

Burada $\lambda_1^2 = -K - \sqrt{K^2 - k_2^2}$, $\lambda_2^2 = -K + \sqrt{K^2 - k_2^2}$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = \varepsilon$ eşitliği kullanılarak $i, j = 1,...,4$ ve $\forall\ i \neq j$ için $g(V_i, V_j) = 0$, Ayrıca $g(T^{'}, T^{'}) = 0$ eşitliği kullanılarak $g(V_1, V_1) = \varepsilon \dfrac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = g(V_2, V_2)$ ve $g(V_3, V_3) = \varepsilon \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = g(V_4, V_4)$ bulunur.

(B) $K = k_2 k_3$ ve $K^2 - k_2^2 < 0$ olsun. Bu durumda α eğrisinin genel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\begin{bmatrix} (\lambda_1 V_1 - \lambda_2 V_4)\cos(\lambda_2 s)\sinh(\lambda_1 s) + (\lambda_1 V_4 + \lambda_2 V_1)\sin(\lambda_2 s)\cosh(\lambda_1 s) + \\ (\lambda_1 V_2 - \lambda_2 V_3)\cos(\lambda_2 s)\cosh(\lambda_1 s) + (\lambda_1 V_3 + \lambda_2 V_2)\sin(\lambda_2 s)\sinh(\lambda_1 s) \end{bmatrix}$$

Burada $\lambda_1^2 = \dfrac{k_2 + K}{2}$, $\lambda_1^2 = \dfrac{k_2 - K}{2}$, $V_1, V_2, V_3, V_4 \in \mathbb{R}_2^4$ sabit vektörler olup $g(T,T) = \varepsilon$ eşitliği kullanılarak $i, j = 1,...,4$ ve $\forall\, i \neq j$ için $g(V_i, V_j) = 0$, Ayrıca $g(T', T') = 0$ eşitliği kullanılarak $g(V_1, V_1) = -g(V_2, V_2) = g(V_3, V_3) = -g(V_4, V_4) = \varepsilon$ bulunur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

4- boyutlu 2- indeksli yarı- Öklidyen uzayda pseudo null ve rektefiyen eğrilerin Frenet denklemleri Torgasev-Petrovic, Nesovic ve İlarslan tarafından elde edilmiş ve bu çalışmada bir pseudo null W- eğri ve bir partially null W- eğriye ait diferensiyel denklemler elde edilerek çözülmüştür.

Bu tez çalışmasında 4- boyutlu 2- indeksli yarı- Öklidyen uzayda null ve null olmayan (spacelike ve timelike) W- eğriler için diferensiyel denklemler elde edilmiş ve bu denklemler çözülerek adı geçen eğrilerin parametrik denklemleri oluşturulmuştur. Yapılan tez çalışmasına paralel olarak $\mathbb{R}_2^4$ de özel tipli eğriler ve yüzeyler daha geniş bir şekilde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Bonnor, W.B., Null curves in a Minkowski space-time, Tensor 20, 29-242, 1969.

[2] Chen, B.Y., Dillen, F., Verstraelen, L., Finite type space curves, Soochow J. Math. 12, 1-10, 1986.

[3] Chen, B. Y., Ishikawa S., On Classification of Some Surfaces of Revolution of Finite Type , Tsukuba J. Math., Vol.17, No.1, 287-298, 1993.

[4] Chen, B.Y., A report on submanifolds of finite type, Soochow J. Math. 22, 1-128, 1996.

[5] Carmo, M. Perdigao do, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall Inc., Brazil, 1976.

[6] Duggal, K.L. and Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications, Klower Academic Publishers , London ,1996.

[7] Frenet, F., Surles courbes a double courbure. J. De Math., appliquees, tome 17, p. 437-447, 1852.

[8] Gluck, H., Higher curvatures of curves in Euclidean space, Am. Math. Monthly 73, 699-704, 1966.

[9] Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara , 2000.

[10] Klein, F. and Lie, S., über diejenigen ebenen curven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendirch vielen vertauschberen linearen Transformatronen in sich übergeben. Math. Ann., 4, 50-84, 1871.

[11] Kuhnel, W.,Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, Student Mathematical Library Volume 16, American Mathematical Society , 2006.

[12] Lipschutz, M. M., Theory and problems of Differential Geometry, Schaum’s Outline Series , New York, 1969.

[13] Milman, R. S., Elements of Differential Geometry, California State University, Prentice-Hall Inc. , California, 1977.

[14] O’Neill, B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity , Academic Press , New York, 1983.

[15] O’Neill, B., Elementary Differential Geometry , Elsevier Inc., New York 2006.

[16] Petrovic-Torgasev, Sucurovic, *W*- curves in Minkowski space time, Novi Sad J. Math. Vol. 32, No.2, 2002.

[17] Petrovic-Torgasev, İlarslan and Nesovic, On partially null and pseudo null curves in the semi-euclidean space $\mathbb{R}_2^4$, J. Geom. 84, 106-116, Basel 2005.

[18] Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri , Nobel yayın dağıtım , Ankara, 2004.

[19] Serret, J.-A., Sur quelques formules relatives a la theorie des courbes a double courbure, J. De Math., tome 16, p. 193-207, 1851.

[20] Synge, J. L.,Timelike helices in flat space-time, Proc. Roy. Irish Academy, A65, 27-42, 1967.

[21] Walrave, J., Curves and surfaces in Minkowski space, Doctoral thesis, K. U. Leuven, Fac. Of Science, Leuven, 1965.