KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE BAZI QUASİ BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ

Hacer DAĞ

2013
KIRIKKALE

Matematik Anabilim Dalında Hacer DAĞ tarafından hazırlanan Kısmi Metrik Uzaylar Üzerinde Bazı Quasi Büzülme Dönüşümleri Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Üye	:Doç. Dr. İshak ALTUN

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. E. Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KISMİ METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE BAZI QUASİ BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ

DAĞ, Hacer
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Mart 2013, 53 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde bazı temel tanımlar, kavramlar ve teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak kısmi metrik uzay kavramı ve sıralı metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. İkinci olarak quasi büzülme dönüşümleri ve son olarak kısmi metrik uzayda lineer olmayan $\acute{C}iri\acute{c}$ tipi ψ −quasi-büzülmelere yer verilmiştir

Dördüncü bölümde ise tartışma ve sonuç yer almaktadır.

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Kısmi Metrik Uzay, Quasi Büzülme Dönüşümü

ABSTRACT

SOME QUASİ CONTRACTİON MAPPİNGS ON PARTİAL METRİC SPACES

DAĞ, Hacer
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK
March 2013, 53 Pages

This thesis consist of four chapters.

The first chapter is reserved for introduction.

The second chapter, some fundemental definitions, concepts and theorems are given.

The first subsection of section three, we introduce to partial metric space and some fixed point theorems were investigated in ordered metric spaces. Second subsection of this section, we have included quasi contraction mappings. Finally, we give nonlinear ψ-quasi-contractions of Ćirić-type in partial metric spaces.

The fourth chapter, we give the discussion and conclusion.

Key Words: Fixed Point, Partial Metric Space, Quasi Contraction

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK'e, tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir yardımı eksik etmeyen Sayın Doç. Dr. İshak ALTUN'a, çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen Tuncer ACAR, Özlem ACAR, Gülhan MINAK ile Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \geq 0$ reel sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına T nin Lipschitz sabiti denir. T Lipschitz dönüşümü için $\alpha < 1$ ise T dönüşümüne büzülme dönüşümü, $\alpha = 1$ ise T Lipschitz dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm denir. $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

Büzülme dönüşüm prensibi olarak da bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi ile tam metrik uzaylarda ilk sabit nokta teoremi verilmiştir. Fonksiyonel Analizin klasikleri arasında yer alan bu teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem. (Banach) "(X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve bir $\alpha \in [0,1)$ için $d(fx, fy) \leq \alpha\, d(x, y)$ eşitsizliğini sağlıyorsa f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $y_n = f^n x$ şeklinde tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi z noktasına yakınsar".

Bu teoremin uygulamalı matematikten başlayarak, matematiğin pek çok alanında olduğu gibi sabit nokta teori alanında da önemli kullanıma sahiptir. Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, bu konuda çalışmalar yapan Brouwer ve Schauder gibi diğer matematikçilerin verdiği sabit nokta teoremlerinden farklı olarak, sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de göstermektedir.

Sabit nokta teori çalışmaları sadece yukarıda bahsedilen tam metrik ve normlu uzaylarla sınırlı kalmayıp, sıralı Banach uzayları, düzgün uzaylar, fuzzy metrik uzaylar v.b. uzaylarda da yapılmıştır

1922 den başlayarak Banach teoreminin pek çok genellemesi yapılmış ve yapılmaktadır. Bu çalışmalar, bir dönüşümün sabit noktasının varlığının, o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımlandığı kümenin yapısına da bağlı olması esasına dayanmaktadır. Bilindiği üzere sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Kannan 1968'de Banach teoremindeki büzülme şartı yerine $\alpha \in [0,\frac{1}{2})$ olmak üzere $d(fx,fy) \leq \alpha(d(x,fx) + d(y,fy))$ eşitsizliğini kullanmıştır. 1971'de Reich, Banach ve Kannan sabit nokta teoremlerini $\alpha + \beta + \gamma < 1$ şartını sağlayan pozitif reel sayılar olmak üzere $d(fx,fy) \leq \alpha d(x,y) + \beta d(x,fx) + \gamma d(y,fy)$ eşitsizliğini kullanarak bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Ayrıca yine 1971'de Ljbomir $\acute{C}$irić $\sigma = sup\{\alpha d(x,y) + \beta d(x,y) + \gamma d(x,y) + 2\delta d(x,y): x,y \in X\} < 1$ olacak şekilde $\alpha,\beta,\gamma,\delta: X^2 \to [0,1)$ ile tanımlı fonksiyonlar olmak üzere, $d(fx,fy) \leq \alpha d(x,y) + \beta d(x,fx) + \gamma d(y,fy) + \delta[d(x,fy) + d(y,fx)]$ eşitsizliğini kullanarak bir sabit nokta teoremi ve ispatı verip bu eşitsizliği sağlayan dönüşümleri de genelleştirilmiş büzülmeler olarak adlandırmıştır. Benzer şekilde $\alpha \in [0,1)$, $m(x,y) = maks\left\{d(x,y), d(x,fx), d(y,fy), \frac{1}{2}[d(x,fy) + d(y,fx)]\right\}$ olmak üzere $d(fx,fy) \leq \alpha m(x,y)$ genelleştirilmiş büzülme eşitsizliğini kullanarakta sabit nokta teoremleri yapılmıştır. Yine φ bazı şartları sağlamak üzere lineer olmayan büzülme denilen

$$d(fx,fy) \leq \varphi(d(x,y)$$

ve genelleştirilmiş lineer olmayan büzülme denilen

$$d(fx,fy) \leq \varphi(m(x,y))$$

eşitsizlikleri kullanılarakta sabit nokta teoremleri yapılmıştır.

1974'de, Ljbomir $\acute{C}iri\acute{c}$ "A generalization of Banach's contraction principle", adlı makalesinde genelleştirilmiş büzülme olarak kullanılan $\frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]$ şartı yerine $maks\{d(x,Ty),d(y,Tx)\}$ terimi alınarak elde edilen dönüşüm için "Sabit nokta teoremi geçerliliğini korur mu?" sorusuna cevap aramıştır. Bu problemin çözümü yeni bir ispat metodu geliştirilmesi gereğini ortaya koydu. Çünkü mevcut iyi bilinen yöntemler, temel olarak

$$d(Tx,T^2x) < d(x,Tx), \forall x \in X$$

esasına dayanmaktadır. Ancak bu ifade quasi-büzülme denilen dönüşümlerde geçerli değildir. Bu durum ayrıntılı olarak Ljbomir $\acute{C}iri\acute{c}$ in, "Fixed Point Theory (Contraction Map Principle), Belgrad,2003", adlı kitabında incelenmiştir.

1.1. Kaynak özetleri

Metrik uzay, topolojik uzay ve fonksiyonel analiz ile ilgili temel kavramları için Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar" adlı kitabı ile Soykan'ın "Fonksiyonel Analiz" adlı kitabı kullanılmıştır [1,2]. Kısmi sıralama bağıntısı ve temel özellikleri ile ilgili kavramlar için Özer, Çöker ve Taş'ın "Soyut Matematik" adlı kitabı temel kaynak olmuştur [3]. Kısmı sıralı kümeler üzerinde verilen Knaster-Tarski ve Tarski sabit nokta teoremlerinin ispatı için Granas ve Dugundji nin " Fixed Point" adlı kitabından yararlanılmıştır [4]. Sabit nokta teorinin temel kavramları ve $\acute{C}iri\acute{c}$ tipinde sabit nokta teoremleri için Ljbomir $\acute{C}iri\acute{c}$ in "Fixed Point Theory(Contraction Mapping Principle) " adlı kitabından [28] yararlanılmıştır.

Sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teorisi için temel iki kaynak olan Ran ve Reurings'in "A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations" ile Nieto ve Rodriguez-Lopez'in "Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations" adlı makalelerinden faydalanılmıştır [5,23].

Kısmı sıralı metrik uzaylarda temel bağıntılar için Mathews'in "Partial metric topology", ve O'Neill in , "Partial metrics, valuations and domain theory"adlı makalelerinden yararlanılmıştır . Oltra ve Valero'nun, "Banach's fixed point theorem for partial metric spaces", Altun, Sola, Simsek'in, "Generalized contractions on partial metric spaces", Altun, ve Sadarangani nin "Corrigendum to Generalized contractions on partial metric spaces'', Altun ve Erduran nın "Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces", adlı makaleleri ve [6,7,9,10,11,12, 13,14,16,18,19,20,22,23,26,27] kaynaklarından faydalanılmıştır.

Ortak sabit noktanın varlığı ile lineer olmayan dönüşümler için sabit nokta teoremlerinin bazı örnekleri [8, 15, 17, 21, 24, 25] makalelerinden incelenmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

1974 yılında $\acute{C}$iri$\acute{c}$ makalesinde,(X, d) bir metrik uzay olsun. $T: X \rightarrow X$ bir quasi-büzülme ve X üzerinde T- orbital tam olsun. Bu durumda;

a) Tdönüşümü $u \in X$ olacak şekilde bir tek sabit noktaya sahiptir.
b) Herhangi x∈X için $lim_{n\rightarrow\infty} T^n\, x = u$ dur.
c) $d(T^n x, u) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(Tx, x)$ tir.

olduğunu göstermiştir. Bu makalenin metrik uzay üzerine ve kısmi metrik uzaylar üzerine genişlemeleri vardır.

Bizim bu tezde amacımız Ljbomir $\acute{C}$iri$\acute{c}$ in verdiği anlamda quasi büzülme ve kısmi metrik uzayda quasi büzülme yapısını araştırmak ve Francesca Vetro ve Stojan Radenovic'in App. Math. Comp. dergisinde 2012 de yayınlanan "Nonlinear ψ-quasi-contractions of $\acute{C}$iri$\acute{c}$ type in partial metric spaces" adlı makalesini araştırmaktır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Metrik ve Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
b) $d(x,y) = d(y,x)$
c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.2. (X,d) herhangi bir metrik uzay olsun. Bir $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B(x_0,r) = \{x \in X: d(x_0,x) < r\}$$

kümesine $x_0$merkezli *r* yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0,r) = \{x \in X: d(x_0,x) \leq r\}$$

kümesine $x_0$merkezli *r* yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0,r) = \{x \in X: d(x_0,x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.1.3. (X,d) bir metrik uzay ve U da X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x,r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine d-açık küme denir.

Tanım 2.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında bir U alt kümesi için $X \backslash U$ d-açık ise, U kümesine d-kapalı küme denir.

Önerme 2.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda

a) (X, d) içindeki her açık yuvar d-açık bir kümedir.
b) (X, d) içindeki her kapalı yuvar d-kapalı bir kümedir.

Tanım 2.1.5. (X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b): a \in A, b \in B\}$$

değerine *A* ve *B* kümeleri arasındaki uzaklık denir.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a): a \in A\}$$

değerine *x* noktasının *A* kümesine olan uzaklığı,

$$diam(A) = \sup\{d(a, b): a, b \in A\}$$

değerine *A* kümesinin çapı denir. Kısaca $d(A)$ olarak gösterilir.

Eğer $d(A) < \infty$ ise *A* kümesine sınırlı küme, $d(A) = \infty$ ise *A* kümesine sınırsız küme denir.

Tanım 2.1.6. Bir (X, d) metrik uzay, $\{x_n\}$, terimleri X de olan bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde varsa $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.1.2. Metrik uzayda yakınsak bir dizi tek bir noktaya yakınsar.

Tanım 2.1.7. (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Önerme 2.1.3. (X, d) bir metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Önerme 2.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın d-kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\} \subseteq A$ olacak şekildeki her $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \to x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 2.1.8. (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ de bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir.

Önerme 2.1.5. Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

Önerme 2.1.6. (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

Önerme 2.1.7. (X, d) bir metrik uzay $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat. $m, n \in \mathbb{N},\ m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1})$ verilen serinin kalan terimi olduğundan

$$lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.9. (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzaylar, $T: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. T fonksiyonunun x noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart X içinde herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsak iken, Y içindeki $\{Tx_n\}$ dizisinin Tx e yakınsak olmasıdır.

Tanım 2.1.10. X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ sınıfı,

a) $\emptyset, X \in \tau$
b) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti τ ya aittir
c) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ya aittir

şartlarını sağlıyorsa τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X,τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.11. (X,τ) bir topolojik uzay ve X in bazı açık alt kümelerinin sınıfı β olsun. X in her açık alt kümesi β nın elemanlarının herhangi bir sayıda birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ için bir tabandır denir.

Tanım 2.1.12. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A üzerindeki $\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$ topolojisine τ dan A üzerine indirgenmiş topoloji veya alt uzay topolojisi denir.

Tanım 2.1.13. X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip bir β bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve (X,β) ikilisine de kısmi sıralı küme denir.

a) β yansımalıdır, yani her $x \in X$ için $x\beta x$ dir,
b) β ters simetriktir, yani her $x, y \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta x$ ise $x = y$ dir,
c) β geçişlidir, yani her $x, y, z \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta z$ ise $x\beta z$ dir.

Bir kısmi sıralama bağıntısını göstermek için β simgesi yerine bundan sonra $\preccurlyeq$ gösterimini kullanacağız. Böylece $x\beta y$ yerine $x \preccurlyeq y$ yazıp bunu "x, y den önce gelir" ya da "x küçük eşit y" şeklinde okuyacağız. $x \preccurlyeq y$ ile $x \succcurlyeq y$ aynı anlama gelecektir. Ayrıca $x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ ise bu durumu $x \prec y$ biçiminde göstereceğiz.

Örnek 2.1.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bilinen $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.1.14. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $x, y \in X$ için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ oluyorsa x ile y elemanlarına karşılaştırılabilir elemanlar denir.

Tanım 2.1.15. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in bütün elemanları birbirleri ile karşılaştırılabilir ise bu $\preccurlyeq$ bağıntıya tam sıralama bağıntısı, $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine de tam sıralı küme denir. X kümesinin tam sıralı alt kümesine de bir zincir denir.

Tanım 2.1.16. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $a \in X$ olsun. Eğer X kümesinin hiçbir elemanı a dan daha büyük değilse a ya X in maksimal elemanı denir. Buna göre a, X in bir maksimal elemanıdır ancak ve ancak $x \in X$ ve $a \preccurlyeq x$ ise $a = x$ dir. Benzer şekilde bir $b \in X$ için, X kümesinin hiçbir elemanı b den daha küçük değilse b ye X in minimal elemanı denir. Buna göre b, X in bir minimal elemanıdır ancak ve ancak $x \in X$ ve $x \preccurlyeq b$ ise $b = x$ dir.

Tanım 2.1.17. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in bütün elemanlarından daha büyük eşit olan $a \in X$ elemanına X in en büyük (maksimum) elemanı denir. Yani her $x \in X$ için $x \preccurlyeq a$ olacak şekildeki $a \in X$ elemanına X in en büyük elemanı denir. Yine X in bütün elemanlarından daha küçük eşit olan $b \in X$ elemanına X in en küçük (minimum) elemanı denir. Yani her $x \in X$ için $b \preccurlyeq x$ olacak şekildeki $b \in X$ elemanına X in en küçük elemanı denir.

Tanım 2.1.18. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için $x \preccurlyeq a$ olacak şekilde bir $a \in X$ varsa a elemanına A kümesinin bir üst sınırı denir. Yine her $x \in A$ için $b \preccurlyeq x$ olacak şekilde bir $b \in X$ varsa b elemanına A kümesinin bir alt sınırı denir.

Tanım 2.1.19. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $a \in X$ elemanına A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $a = supA$ ile gösterilir.

i) a, A nın bir üst sınırıdır, yani her $x \in A$ için $x \preccurlyeq a$ dır.

ii) a, A nın üst sınırları kümesinin en küçük elemanıdır, yani c, A nın bir üst sınırı ise $a \preccurlyeq c$ dir.

Benzer şekilde aşağıdaki şartları sağlayan $b \in X$ elemanına A kümesinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $b = \inf A$ ile gösterilir:

i) b, A nın bir alt sınırıdır, yani her $x \in A$ için $b \preccurlyeq x$ dır.

ii) b, A nın alt sınırları kümesinin en büyük elemanıdır, yani d, A nın bir alt sınırı ise $d \preccurlyeq b$ dir.

Tanım 2.1.20. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X in boş olmayan her alt kümesinin en küçük elemanı varsa X e iyi sıralı küme, $\preccurlyeq$ bağıntısına da iyi sıralama bağıntısı denir.

Teorem 2.1.1. (Zorn Lemması) Boş olmayan ve her zinciri bir üst sınıra sahip olan kısmi sıralı bir kümenin maksimal elemanı vardır.

Tanım 2.1.21. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine bir latis (örgü) denir. Genellikle bir latiste $sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $inf\{x, y\} = x \wedge y$ gösterimleri kullanılır. Eğer X in boş olmayan her A alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine bir tam latis denir. Tam sayılar kümesi bilinen sıralamaya göre bir latistir fakat tam latis değildir.

Tanım 2.1.22. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $Tx \preccurlyeq Ty$ oluyorsa T fonksiyonuna azalmayan (artan, izoton, sıra korur) fonksiyon denir.

Teorem 2.1.2. (Knaster-Tarski) $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T: X \to X$ bir azalmayan bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki iki şartı sağlayan bir $x_0 \in X$ noktasının var olduğunu kabul edelim:

a) $x_0 \preccurlyeq Tx_0$

b) $\{x \in X: x_0 \preccurlyeq x\}$ kümesi içindeki her zincir bir üst sınıra sahip

Bu durumda *T* bir maksimal sabit noktaya sahiptir.

İspat. *X* içinde

$$Q = \{x \in X: x \preccurlyeq Tx\} \cap \{x \in X: x_0 \preccurlyeq x\}$$

kümesini göz önüne alalım. $x_0 \in Q$ olduğundan Q kümesi boş değildir. Ayrıca Q içindeki her zincir bir supremuma sahiptir. C, Q da bir zincir olmak üzere $u = supC$ denirse her $c \in C$ için $c \preccurlyeq u$ olup T azalmayan olduğundan $Tc \preccurlyeq Tu$ olur. Yine $c \in C$ olduğundan $c \preccurlyeq Tc \preccurlyeq Tu$ olur. Bu ise Tu nun da C nin bir üst sınırı olduğunu gösterir. Fakat $u = supC$ olduğundan $u \preccurlyeq Tu$ olmalıdır. Bu ise $u \in Q$ olduğunu gösterir ki buradan Q nun her zincirinin Q da bir üst sınırının var olması demektir. O halde Zorn Lemması gereği Q nun z gibi bir maksimal elemanı vardır. $z \in Q$ olduğundan $z \preccurlyeq Tz$ ve T azalmayan olduğundan $Tz \preccurlyeq TTz$ olur ki bu $x_0 \preccurlyeq z$ ve $x_0 \preccurlyeq Tx_0 \preccurlyeq Tz$ olduğundan $Tz \in Q$ olmasını gerektirir. Fakat z , Q nun maximal elemanı olduğundan $z = Tz$ olmalıdır.

Teorem 2.1.3. (Tarski) $(X, \preccurlyeq)$ bir tam latis ve $T: X \to X$ bir azalmayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. X bir tam latis olduğundan X in kendisi bir supremuma ve infimuma sahiptir. Bu nedenle $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır. Böylece
$Q = \{x \in X: x \preccurlyeq Tx\}$

kümesi boş değildir. Yine X tam latis olduğundan Q nun supremumu vardır. $u = supQ$ diyelim. O halde her $x \in Q$ için $x \preccurlyeq u$ olup T azalmayan olduğundan

$Tx \preccurlyeq Tu$ ve üstelik $x \preccurlyeq Tu$ olur. Bu durumda $u = supQ$ olduğundan $u \preccurlyeq Tu$ dur. Diğer taraftan $Tu \preccurlyeq TTu$ olduğundan $Tu \in Q$ dur. Böylece $Tu \preccurlyeq u$ olup $u = Tu$ elde edilir.

Tanım 2.1.23. X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerinde hem bir $\preccurlyeq$ kısmi sıralama bağıntısı hem de bir d metriği varsa X e sıralı metrik uzay diyeceğiz ve bunu $(X, \preccurlyeq, d)$ üçlüsü ile göstereceğiz. Eğer X kümesi d metriğine göre tam ise bu uzaya sıralı tam metrik uzay adını vereceğiz.

Tanım 2.1.24. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun.

$$0(x, T) = \{x, Tx, \dots, T^n x, \dots\}$$

kümesine T nin $x \in X$ noktasında orbiti denir.

Tanım 2.1.25. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $0(x, T)$ orbitindeki her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsak ise X e T-orbital tamdır denir.

Tanım 2.1.26. X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $0(x, T)$ orbitindeki her bir $\{x_n\}$ dizisi için için $x_n \to z$ iken $Tx_n \to Tz$ oluyorsa T ye $z \in X$ noktasında orbital süreklidir denir. Eğer T dönüşümü X in her noktasında orbital sürekli ise o zaman T orbital süreklidir denir.

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Kısmi Metrik Uzay

Kısmi metrik kavramı boş olmayan bir X kümesi üzerinde Matthews tarafından 1994 yılında tanımlanmıştır. Kısmi metrik uzayın en önemli özelliklerinden biri noktanın kendine olan uzaklığının sıfır olmayabileceğidir. Şimdi kısmi metrik uzayın tanımını ve bu uzayın özelliklerini verelim.

Tanım 3.1.1. X boş olmayan bir küme ve $p: X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için;

(P1) $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$
(P2) $p(x,x) \leq p(x,y)$
(P3) $p(x,y) = p(y,x)$
(P4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

şartları sağlanırsa (X, p) ikilisine kısmi metrik uzay denir.

Eğer $p(x,y) = 0$ ise $(P1)$ ve $(P2)$ özeliklerinden $x = y$ olduğu görülür. Fakat $x = y$ ise $p(x,y)$ sıfır olmayabilir.

Örnek 3.1.1. Her metrik uzay bir kısmi metrik uzaydır.

Örnek 3.1.2. $p: [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, $p(x,y) = maks\{x, y\}$ şeklinde tanımlı fonksiyon bir kısmi metriktir. Gerçekten; $x = y$ ise

$$p(x,x) = x = y = p(y,y) = p(x,y)$$

dir.

$$p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$$

ise $x = y$ bulunur. Böylece $(P1)$ sağlanır.

$$p(x,x) = x \leq maks\{x,y\} = p(x,y)$$

olup $(P2)$ sağlanır.

$$p(x,y) = maks\{x,y\} = maks\{y,x\} = p(y,x)$$

yani simetri özelliği $(P3)$ de sağlanır. Son olarak

$$p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olduğunu gösterelim. Eğer $z < x < y$ ise

$$p(x,y) = y \leq y + x - z = p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olup $(P4)$ sağlanır. Eğer $x < z < y$ ise

$$p(x,y) = y \leq z + y - z = p(x,x) + p(z,y) - p(z,z)$$

olup $(P4)$ sağlanır. Eğer $x < y < z$ ise

$$p(x,y) = y \leq z = z + z - z = p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$$

olup $(P4)$ sağlanır. Böylece p, X üzerinde bir kısmi metriktir.

Örnek 3.1.3. $a \leq b$ olmak üzere I tüm $[a,b]$ aralıklarının bir kümesi olsun. $p: I \times I \to [0,\infty)$, $p([a,b],[c,d]) = maks\{b,d\} - \min\{a,c\}$, şeklinde tanımlanan fonksiyon I üzerinde bir kısmi metriktir.

Örnek 3.1.4.$X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $p(x,y) = e^{maks\{x,y\}}$ şeklinde tanımlanan p fonksiyonu X üzerinde bir kısmi metriktir.

Tanım 3.1.2. (X, p) herhangi bir kısmi metrik uzay olsun. Bir $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$B_p(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < p(x, x) + \varepsilon\}$$

kümesine x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar,

$$\bar{B}_p(x, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) \leq p(x, x) + \varepsilon\}$$

kümesine ise x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir.

Not 3.1.1. (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun. Her $x \in X$ için $\{B_p(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ açık yuvarlar ailesini taban kabul ederek X üzerinde bir τ_p topolojisi oluştururuz. Bu topoloji T_0 topolojisidir.

Örnek 3.1.5. $X = [0, \infty)$ kümesi üzerinde kısmi metriği $p(x, y) = maks\{x, y\}$ olarak alalım. Şimdi p metriğine göre X in elemanlarının herhangi bir $\varepsilon > 0$ için açık komşuluklarını bulalım.

$$\begin{aligned} B_p(x, \varepsilon) &= \{y \in X : p(x, y) < p(x, x) + \varepsilon\} \\ &= \{y \in X : maks\{x, y\} < x + \varepsilon\} \\ &= [0, x + \varepsilon) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece bu açık yuvarlardan elde edilen taban

$$\beta = \{[0, a) : a \epsilon (0, \infty)\}$$

biçimindedir. O halde

$$\tau_p = \{\emptyset, X\} \cup \{[0, a) : a \in (0, \infty)\}$$

olarak elde edilir.

Önerme 3.1.1. p, X üzerinde bir kısmi metrik ise $p^s: X \times X \to [0, \infty)$

$$p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

biçiminde tanımlı fonksiyon X de bir metriktir.

İspat. Her $x, y \in X$ için

$$p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \geq 0$$

dir. Çünkü $p(x, x) \leq p(x, y)$ ve $p(y, y) \leq p(x, y)$ dir.

$$\begin{aligned} x = y \Longrightarrow p^s(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= 2p(x, x) - 2p(x, x) = 0 \end{aligned}$$

ve $p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 0$ ise $x = y$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} 2p(x, y) &= p(x, x) + p(y, y) \\ &\leq p(x, y) + p(y, y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2p(x, y) &= p(x, x) + p(y, y) \\ &\leq p(x, x) + p(x, y) \end{aligned}$$

olup bu $p(x, x) = p(y, y) = p(x, y)$ olduğunu gösterir ki buradan $x = y$ elde edilir.

$$\begin{aligned} p^s(x, y) &= 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \\ &= 2p(y, x) - p(y, y) - p(x, x) = p^s(y, x) \end{aligned}$$

yani simetri özelliği de sağlanır. Son olarak $p^s(x,y) \leq p^s(x,z) + p^s(z,y)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &\leq 2[p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)] - p(x,x) - p(y,y) \\ &= 2p(x,z) - p(x,x) - p(z,z) + 2p(z,y) - p(z,z) - p(y,y) \\ &= p^s(x,z) + p^s(z,y) \end{aligned}$$

olup p^s, X üzerinde bir metriktir.

Yukarıda önermeden farklı olarak p, X üzerinde bir kısmi metrik ise $p^w: X \times X \to [0,\infty)$, $p^w(x,y) = p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\}$ ile tanımlı p^w fonksiyonuda X üzerinde bir metriktir.

Önerme 3.1.2. (X,p) bir kısmi metrik uzay olsun. Bu taktirde p^s ile p^w metrikleri denk metriklerdir.

İspat. p^s metriğinin tanımı gereği

$$\begin{aligned} p^s(x,y) &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= p(x,y) - p(x,x) + p(x,y) - p(y,y) \\ &\leq 2p^w(x,y) \end{aligned} \tag{3.1.}$$

yazılır. Ayrıca p^w nın tanımından

$$\begin{aligned} p^w(x,y) &= p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\} \\ &\leq p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\} + p(x,y) - maks\{p(x,x), p(y,y)\} \\ &= 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \\ &= p^s(x,y) \end{aligned} \tag{3.2.}$$

yazılır. Böylece (3.1.) ve (3.2.) eşitsizliklerinden

$$\frac{1}{2}p^s(x,y) \leq p^w(x,y) \leq p^s(x,y)$$

elde edilir.

Önerme 3.1.3. (X,p) bir kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n)$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $x_n \to x$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \geq 1$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq N$ için $x_n \in B_p(x,\varepsilon)$ dır.

$$0 \leq p(x_n,x) - p(x,x) < \varepsilon$$

bulunur. Her $\varepsilon > 0$ için bu eşitsizlik doğru olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} p(x,x_n) = p(x,x)$$

dır. Tersine;

$$\lim_{n\to\infty} p(x,x_n) = p(x,x)$$

ise her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \geq 1$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq N$ için

$$p(x,x_n) < p(x,x) + \varepsilon$$

olur. Böylece her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \geq 1$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq N$ için $x_n \in B_p(x,\varepsilon)$ olur. Bu da $x_n \to x$ demektir.

Tanım 3.1.3. (X, p) bir kısmi metrik uzay olsun.

i) $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere, eğer $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ limiti var ise $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir.

ii) X deki her Cauchy dizisi X de yakınsak ise yani $x \in X$ için $p(x, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ oluyorsa X e tamdır denir.

iii) Eğer $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere $\lim_{n,m\to+\infty} p(x_n, x_m) = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$, dizisine X de bir 0-Cauchy dizisi denir.

iv) (X, p) kısmi metrik uzayında her 0-Cauchy dizisi τ_p topolojisine göre X de $p(x, x) = 0$ olacak şekildeki $x \in X$ noktasına yakınsak ise o zaman (X, p) uzayına 0-tamdır denir.

Not 3.1.2. Kısmi metrik uzaylarda yakınsak bir dizinin Cauchy dizisi olması gerekmez.

Örnek 3.1.6. $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$ kümesi üzerinde $p(x, y) = -\min\{x, y\}$ kısmi metriğini alalım. Buradan (X, p) ikilisi bir kısmi metrik uzaydır. $x_n = \{0, -1, 0 - 1, \ldots\}$ bu uzayda bir dizi olmak üzere;

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, -1) = \lim_{n\to\infty}(-\min\{x_n, -1\}) = 1 = p(-1, -1)$$

olup $\{x_n\}$ dizisi -1 e yakınsar. Fakat $\lim\limits_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ limiti yoktur. Buradan $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olmadığı görülür.

Aşağıdaki lemma $\mathrm{p^s}$ ile p arasındaki ilişkiyi vermekte olup sabit nokta çalışmaları için sonuç elde etmekte önemli bir rol oynar.

Lemma 3.1.1. (X, p) kısmi metrik uzay olsun.

i) $\{x_n\}$ dizisinin (X, p) de bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ nin (X, p^s) de bir Cauchy dizisi olmasıdır.

ii) (X, p) nin tam olması için gerek ve yeter şart (X, p^s) nin tam olmasıdır.

İspat. p^s ile p^w metrikleri birbirine denk olduğundan ispatı p^w için verelim.

i) $\{x_n\}$ dizisi (X, p) de bir Cauchy dizisi olsun. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $m, n \geq n_0$ iken $|p(x_n, x_m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan her $m, n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} p^w(x_n, x_m) &= p(x_n, x_m) - \min\{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\} \\ &= p(x_n, x_m) - a + a - \min\{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\} \\ &\leq |p(x_n, x_m) - a| + |a - \min\{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\}| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan $\{x_n\}$ disinin (X, p^w) uzayında bir Cauchy dizisi olduğu görülür.

Şimdi $\{x_n\}$, (X, p^w) da bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon = \frac{1}{2}$ olsun. Her $m \geq n_0$ için $p^w(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} p(x_n, x_n) &\leq \left|p(x_n, x_n) - p(x_{n_k}, x_{n_k})\right| + p(x_{n_k}, x_{n_k}) \\ &\leq 2p^w\left(x_n, x_{n_k}\right) + p(x_{n_k}, x_k) \\ &< 1 + p(x_{n_k}, x_{n_k}) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $\{p(x_n, x_n)\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ de sınırlı olduğunu gösterir. Böylece $a \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\left\{p\left(x_{n_k}, x_{n_k}\right)\right\}$ alt dizisi a ya yakınsar. Diğer taraftan $\{x_n\}$, (X, p^w) de bir Cauchy dizisi olduğundan $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $n, m \geq n_\varepsilon$ iken $p^w(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Buradan

$$|p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)| \leq 2p^w(x_n, x_m) < \varepsilon$$

elde edilir ki bu $\{p(x_n, x_n)\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = a$ olur. Ayrıca

$$|p(x_n, x_m) - a|$$
$$\leq p(x_n, x_m) - \min\{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\} + |\min\{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m) - a|$$
$$= p^w(x_n, x_m) + |\min\{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m) - a|$$

olduğu kullanılırsa $\lim_{n,m\to+\infty} p(x_n, x_m) = a$ bulunur ki bu $\{x_n\}$ nin (X, p) de bir Cauchy dizisi olduğu gösterir.

ii) (X, p^w) tam metrik uzay olsun. $\{x_n\}$, (X, p) de bir Cauchy dizisi ise (X, p^w) da bir Cauchy dizisidir. (X, p^w) tam olduğundan $x \in X$ vardır öyle ki $\lim_{n\to\infty} p^w(x_n, x) = 0$ dır. $\{x_n\}$, (X, p) de bir Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(x, x)$ olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \geq n_0$ iken $p^w(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
|p(x_n, x_n) - p(x, x)| &= maks\{p(x_n, x_n), p(x, x)\} - \min\{p(x_n, x_n), p(x, x)\} \\
&= 2\left\{\frac{1}{2}\{maks\{p(x_n, x_n), p(x, x)\} + \min\{p(x_n, x_n), p(x, x)\}\}\right\} \\
&\qquad -2\min\{p(x_n, x_n). p(x, x)\} \\
&= 2\left[\frac{p(x_n, x_n) + p(x, x)}{2} - \min\{p(x_n, x_n), p(x, x)\}\right] \\
&\leq 2[p(x_n, x) - \min\{p(x_n, x_n), p(x, x)\} \\
&= 2p^w(x_n, x) < \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu (X, p) nin tam olduğunu gösterir.

Tersine (X, p) tam iken (X, p^w) tam metrik uzay olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$, (X, p^w) de bir Cauchy dizisi ise (X, p) de bir Cauchy dizisidir. (X, p) tam olduğundan $\lim_{n,m\to+\infty} p(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(x, x)$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Böylece $\varepsilon > 0$ ve her $n > n_\varepsilon$ için

$$maks\{|p(x_n, x) - p(x_n, x_n)|, |p(x_n, x) - p(x, x)|\} < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Sonuç olarak her $n > n_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} p^w(x_n, x) &= p(x_n, x) - \min\{p(x_n, x_n), p(x, x)\} \\ &= |p(x_n, x) - \min\{p(x_n, x_n), p(x, x)\}| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu (X, p^w) nın tam metrik uzay olduğunu gösterir.

3.2. Sıralı Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Ran ve Reurings 2007 yılında Banach sabit nokta teoremiyle Tarski nin sabit nokta teoreminden esinlenerek aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 3.2.1. (Ran-Reurings) $(X, \preccurlyeq, d)$ bir sıralı tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. T sürekli, azalmayan bir dönüşüm olmak üzere, $x \preccurlyeq y$ olacak şeklindeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ şartını sağlayan bir $k \in [0,1)$ var olsun. Eğer bir $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ teoremin ifadesinde belirtilen nokta olsun. Eğer $x_0 = Tx_0$ ise ispat biter. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Böylece $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ ve T azalmayan olduğundan

$$x_0 \preccurlyeq Tx_0 \preccurlyeq T^2x_0 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq T^nx_0 \preccurlyeq \cdots$$

elde edilir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $T^{n-1}x_0 \preccurlyeq T^nx_0$ olduğundan bu noktalar için büzülme şartı kullanılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}x_0, T^nx_0) &= d(TT^nx_0, TT^{n-1}x_0) \\ &\preccurlyeq kd(T^nx_0, T^{n-1}x_0) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$d(T^{n+1}x_0, T^nx_0) \leq k^n d(Tx_0, x_0) \qquad (3.3.)$$

elde edilir. $m \geq n$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
d(T^m x_0, T^n x_0) &\leq d(T^m x_0, T^{m-1} x_0) + \cdots + d(T^{n+1} x_0, T^n x_0) \\
&\leq (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n) d(Tx_0, x_0) \\
&= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(Tx_0, x_0) \\
&\leq \frac{k^n}{1-k} d(Tx_0, x_0)
\end{aligned}
$$

olduğundan $\{T^n x_0\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = y$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. T sürekli olduğundan

$$y = lim_{n\to\infty} T^{n+1} x_0 = T(lim_{n\to\infty} T^n x_0) = Ty$$

olur ki bu y nin T nin bir sabit noktası olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.1. de $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktasının varlığı yerine $Tx_0 \preccurlyeq x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktasının varlığı da kullanılabilir. Ayrıca bu teoremde T nin azalmayan olma şartı yerine artmayan şartı da kullanılabilir.

Teorem 3.2.1. de T nin sürekliliği yerine ek bir şart konularak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.2.2. (Nieto) $(X, \preccurlyeq, d)$ bir sıralı tam metrik uzay, $T: X \to X$ azalmayan bir dönüşüm olsun. $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ eşitsizliğini sağlayan $k \in [0,1)$ sayısı var olsun. Ayrıca $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ve X kümesinin aşağıdaki şartı sağladığını kabul edelim.

"X içinde $x_n \to x$ olacak şekildeki azalmayan her $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \preccurlyeq x$ " (3.4.)

Bu durumda T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.2.1 in ispatında olduğu gibi $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = y \in X$ olduğu gösterilebilir. Şimdi $Ty = y$ olduğu gösterilebilir. Böylece (3.4.) şartından her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n x_0 \preccurlyeq y$ dir. O halde bu noktalar için büzülme şartı kullanılırsa

$$d(Ty, y) \leq d(Ty, T^{n+1}x_0) + d(T^{n+1}x_0, y) \leq kd(y, T^n x_0) + d(T^{n+1}x_0, y)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için $Ty = y$ bulunur.

Not 3.2.1. Yukarıdaki iki teoremde de eğer X kümesi

“Her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ cümlesi alt ve üst sınıra sahip olsun. ” (3.5.)

şartını sağlıyorsa T nin sabit noktasının tekliği garanti edilir.

Bunu görmek için önce her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = y$ olduğunu görelim.

Eğer $x \preccurlyeq x_0$ veya $x_0 \preccurlyeq x$ ise $T^n x \preccurlyeq T^n x_0$ veya $T^n x_0 \preccurlyeq T^n x$ elde edilir. Böylece büzülme şartı kullanılırsa

$$d(T^n x, T^n x_0) \leq k^n d(x, x_0)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} T^n x_0 = y$$

olur.

Eğer x ile x_0 karşılaştırılamıyor ise (3.4.) şartına göre, $x_2 \preccurlyeq x \preccurlyeq x_1$ ve $x_2 \preccurlyeq x_0 \preccurlyeq x_1$ olacak şekilde x_1, $x_2 \in X$ vadır. Böylece T azalmayan olduğundan $T^n x_2 \preccurlyeq T^n x \preccurlyeq T^n x_1$ ve $\lim_{n\to\infty} T^n x_1 = \lim_{n\to\infty} T^n x_2 = y$ elde edilir. Buradan $\lim_{n\to\infty} T^n x = y$ olur. Şimdi sabit noktanın tekliğini görmek için z, T nin başka bir sabit noktası ise $Tz = z$ olup $T^n z = z$ dir. Yani $\{T^n z\}$ dizisi hem y ye hem de z ye yakınsar. Bu durumda $y = z$ olup T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Burada dikkat edelim ki X bir latis ise (3.4.) şartı daima sağlanır. Diğer taraftan (3.4.) şartı sağlanmazsa T nin sabit noktası tek olmayabilir.

Örnek 3.2.1. $X = \mathbb{R}$ ve d alışılmış metrik olsun.X üzerinde $x, y \in X$ için

$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \{(x = y)$ veya $(x, y \in [1,4]$ için $x \leq y)\}$

şeklinde tanımlı $\preccurlyeq$ bağıntısı göz önüne alalım. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 2x & , x < 1 \\ \dfrac{x+5}{3} & , 1 \leq x \leq 4 \\ 2x-5 & , 4 < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm Teorem 3.2.1 in bütün şartlarını sağladığı kolayca görülebilir. Bu yüzden T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Örnek 3.2.2. $X_1 = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ ve X_1 üzerinde

$(x, y) \preccurlyeq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z$ ve $y \leq t$

ile tanımlı $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısını göz önüne alalım. Böylece X_1 farklı elemanları karşılaştırılamayan kısmi sıralı bir kümedir. Diğer yandan d, Öklid metriğiyle (X_1, d) tam metrik uzaydır. $T: X_1 \to X_1$, $T(x, y) = (x, y)$ özdeşlik dönüşümü sürekli ve azalmayandır. Ayrıca $(z, t) \preccurlyeq (x, y)$ olacak şekildeki her $(x, y), (z, t) \in X_1$ için

$$d\big(T(x, y), T(z, t)\big) \leq kd\big((x, y), (z, t)\big)$$

eşitsizliğini sağlayan $k \in [0,1)$ vardır. Çünkü X_1 in elemanları sadece kendileriyle karşılaştırılabilir.

Ayrıca $(1,0) \preccurlyeq T(1,0) = (1,0)$ dır. Bu durumda Teorem 3.2.1 in bütün şartları sağlanır. O halde X_1 in en az bir sabit noktaya sahiptir. Aynı zamanda Teorem 3.2.2

de uygulanabilir. Çünkü $\{(x_n, y_n)\} \subset X_1$ azalmayan ve $(x, y) \in X_1$ e yakınsayan bir dizi ise $\{(x_n, y_n)\}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, y_n) = (x, y)$ şeklinde bir sabit dizi olmalıdır. Böylece (x, y) limiti dizideki bütün terimler için bir üst sınırı olur. Yani (3.4.) şartı sağlanır. Bu ise Teorem 3.2.1. ve Teorem 3.2.2. nin şartlarının sabit noktanın tekliğini garanti etmediğini göstermektedir.

Aynı şartlar altında $X_2 = \{(x, -x) | \, x \in \mathbb{R}\}$ üzerinde tanımlı $T: X \to X$ tanımlı birim dönüşümünü göz önüne alalım. X_2 de farklı iki noktanın karşılaştırılamayacağı açıktır. Ayrıca Teorem 3.2.1. ve Teorem 3.2.2. deki tüm şartların sağlandığı kolayca görülebilir. Burada verilen T dönüşümünün sonsuz sayıda sabit noktası vardır. Örnek 3.2.1 ve Örnek 3.2.2. deki örneklerin her ikisinde de (3.5.) şartı sağlanmaz. Bir kısmi sıralı kümede (3.4.) ve (3.5.) şartları birbirinden bağımsızdır.

Örnek 3.2.3. $\preccurlyeq$ bağıntısı Örnek 3.2.2 deki gibi olmak üzere $(\mathbb{R}^2, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı kümesini göz önüne alalım. Bu durumda (3.4.) ve (3.5.) şartlarının her ikisi de sağlanır. Gerçekten, $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$ için $(maks\{x, z\}, maks\{y, t\}) \in \mathbb{R}^2$ ve $(\min\{x, z\}, \min\{y, t\}) \in \mathbb{R}^2$ $\{(x, y), (z, t)\}$ kümesinin sırasıyla üst ve alt sınırıdır. Eğer $\{(x_n, y_n)\}$ dizisi, $\mathbb{R}^2$ de azalmayan ve (x, y) noktasına yakınsayan dizi ise bu durumda $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri $\mathbb{R}$ de azalmayan ve sırası ile x ve y ye yakınsayan diziler olur. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathrm{x_n} \preccurlyeq \mathrm{x}$ ve $y_n \preccurlyeq y$ olacağından $(x_n, y_n) \preccurlyeq (x, y)$ olur. Yani (3.4.) şartı sağlanır.

3.3. Quasi Büzülme Dönüşümleri

Banach sabit nokta teoremi ortaya atıldıktan sonra bu teoremin birçok genellemesi ortaya çıkmıştır. Bunlardan birisi de 1971 yılında ortaya atılan $[d(x, Ty) + d(y, Tx)]/2$ yerine $maks\{d(x, Ty), d(y, Tx)\}$ alınması durumudur. Bu problemin çözümünün araştırılması için bilinen yollardan daha farklı bir ispat yöntemi bulma gereksinimi duyulmuştur. Verilen bu yeni büzülme çeşidi bilinen ispat yöntemlerinde de temel teşkil eden $d(Tx, T^2x) < d(x, Tx)$ ilkesine dayanmamaktadır.

Tanım 3.3.1. (X, d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall\, x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \tag{3.6.}$$

olacak şekilde $\lambda \in [0, 1)$ varsa T ye quasi-büzülme denir.

Quasi büzülmeler için sabit nokta teoremleri 1972 de ispatlanmıştır ve bu konuyla ilgili ana teorem [14] $\acute{C}$iri$\acute{c}$ tarafından verilmiştir.

Aşağıda verilen örnekte her $x \in X$ için (3.6.) eşitsizliğinin, $d(Tx, T^2x) < d(x, Tx)$ eşitsizliğini gerektirmediği gösterilmiştir.

Örnek 3.3.1. $X = [0,3] \cup [4,5]$ kümesi üzerinde alışılmış metrik verilsin. $T: X \to X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0 \;\;, & x \in [0,3] \\ 3 \;\;, & x \in [4,5] \end{cases}$$

şeklinde tanımlasın. Bu durumda herhangi $x \in [4,5]$ için $d(x, Tx) \leq 2$, $d(Tx, T^2x) = 3$ olur. Buradan $d(Tx, T^2x) > d(x, Tx)$ olur. Yani herhangi $x \in X$ için $d(Tx, T^2x) < d(x, Tx)$ sağlanmaz.

Şimdi T dönüşümünün (3.6.) şartını sağlandığını gösterelim. $x \in [0,3]$ ve $y \in [4,5]$ olsun. Bu durumda $d(Tx, Ty) = 3$, $d(y, Tx) \geq 4$ olur. Buradan $d(Tx, Ty) = \frac{3}{4} 4 \leq \frac{3}{4} maks\{d(x, Ty), d(y, Tx)\}$ olur. Böylece her $x, y \in X$ için $\lambda = \frac{3}{4}$ ile birlikte T dönüşümü (3.6.) deki yeterli koşulları sağlar.

Şimdi Ljbomir $\acute{C}$iri$\acute{c}$ in ana teoremini verelim [14].

Teorem 3.3.1. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir quasi-büzülme olsun. Ayrıca X T-orbital tam olsun. Bu durumda;

a) T dönüşümü bir tek $u \in X$ sabit noktasına sahiptir.

b) Herhangi $x \in X$ için $lim_{n\to\infty} T^n x = u$ dur.

c) $d(T^n x, u) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, Tx)$ dir.

İspat. $x \in X$ keyfi bir eleman olsun. Aşağıdaki kısaltmaları kullanacağız.

$$0(x,n) = \{x, Tx, T^2x, \dots, T^nx\},\ \alpha(x,n) = diam\big(0(x,n)\big)$$
$$0(x) = \{x, Tx, \dots, T^nx, \dots.\}, \qquad \alpha(x) = diam(0(x))$$

İlk olarak;

$$\alpha(Tx, n-1) \leq \lambda\alpha(x,n) \tag{3.7.}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$\alpha(Tx, n-1) = d(T^jx, T^kx)$ olacak şekilde $1 \leq j < k \leq n$ vardır. T-quasi büzülmeyi kullanarak (3.6.) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\alpha(Tx, n-1) &= d\big(TT^{j-1}x, TT^{k-1}x\big) \\
&\leq \lambda maks\{d\big(T^{j-1}x, T^{k-1}x\big), d\big(T^{j-1}x, T^jx\big), d(T^{k-1}x, T^kx), \\
&\qquad d\big(T^{j-1}x, T^kx\big), d(T^{k-1}x, T^jx)\} \\
&\leq \lambda diam(\{T^{j-1}x, T^jx, T^{j+1}x, \dots, T^kx\}) \\
&\leq \lambda diam(\{x, Tx, T^2x, \dots, T^nx\}) \\
&= \lambda\alpha(x,n)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.7.) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Bazı $k \leq$ n için

$$\alpha(x,n) = d(x, T^kx) \tag{3.8.}$$

olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $\alpha(x,n)=0$ ise eşitsizliğin sağlandığı görülür. $1\le j<k\le n$ için $\alpha(x,n)>0$ ve $\alpha(x,n)=d(T^jx,T^kx)$ olduğunu kabul edelim. (3.7.) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\alpha(x,n)&=d\big(T^jx,T^kx\big)\\&=\alpha\big(T^jx,n-j\big)\\&=\alpha\big(T\big(T^{j-1}x\big),n-j\big)\\&\le\lambda\alpha(T^{j-1}x,n-j+1)\\&\le\lambda\alpha(x,n)\end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece (3.8.) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Şimdi $\alpha(x)$ in sınırlı olduğunu gösterelim. (3.7.), (3.8.) ve üçgen eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\alpha(x,n)=d(x,T^kx)&\le d(x,Tx)+d(Tx,T^kx)\\&\le d(x,Tx)+\alpha(Tx,n-1)\\&\le d(x,Tx)+\lambda\alpha(x,n)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha(x,n)\le\frac{1}{1-\lambda}d(x,Tx) \tag{3.9.}$$

elde edilir. $\alpha(x,n)$ tanımı dikkate alındığında $\{\alpha(x,n)\}$ dizisi azalmayandır ve ayrıca $\lim_{n\to\infty}\alpha(x,n)=\alpha(x)$ dir. Böylece (3.9.) eşitsizliğinde $n\to\infty$ için

$$\alpha(x)\le\frac{1}{1-\lambda}d(x,Tx) \tag{3.10.}$$

olur ki bu bize $\alpha(x)$ in sınırlı olduğunu gösterir.

Şimdi $\{T^nx\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $n=0,1,2,\ldots$ için;

$$\beta_n(x)=\alpha(T^nx)$$

olsun. Bu durumda $0 \leq \beta_n(x) \leq \alpha(x)$ ve $\{\beta_n(x)\}$ dizisi artmayandır ve alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır. Böylece $\lim_{n\to\infty} \beta_n(x) = \beta(x)$ vardır ve her $n \geq 0$ için $\beta(x) \leq \beta_n(x)$ dır. Şimdi (3.7.) den $n \to \infty$ için

$$\alpha(Tx) \leq \lambda\alpha(x) \tag{3.11.}$$

-

olur. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\beta_{n+1}(x) = \alpha(T^{n+1}x)\alpha(TT^n x) \leq \lambda\alpha(T^n x) = \lambda\beta_n(x)$$

elde edilir. Her $n \geq 0$ için $\beta(x) \leq \beta_{n+1}(x)$ olduğundan

$$\beta(x) \leq \lambda\beta_n(x)$$

olup buradan $n \to \infty$ için

$$\beta(x) \leq \lambda\, \beta(x)$$

elde edilir. Böylece $\lambda < 1$ olduğundan $\beta(x) = 0$ olmalıdır ki bu $\{T^n x\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X, T- orbital tam olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} T^n\, x = u$$

olacak şekilde $u \in X$ vardır. (3.6.) den

$$d(Tu, TT^n x)$$
$$\leq \lambda maks\{d(u, T^n x), d(u, Tu), d(T^n x, T^{n+1}x), d(u, T^{n+1}x), d(T^n x, Tu)\}$$

olur. Buradan $n \to \infty$ için;

$$d(Tu, u) \leq \lambda d(u, Tu)$$

bulunur. $\lambda < 1$ olduğundan $d(Tu, u) = 0$ olur. Buradan $Tu = u$ elde edilir. (3.6.) den sabit noktanın tekliği görülür. Böylece (a) ve (b) şıkları ispatlanmış oldu.

(3.11.) da aynı işlem n kez yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\alpha(T^n x) &= \alpha(TT^{n-1}x) \\
&\leq \lambda\alpha(T^{n-1}x) = \lambda\alpha(TT^{n-2}x) \\
&\leq \lambda^2\alpha(T^{n-2}x) = \lambda^2\alpha(TT^{n-3}x) \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^n\alpha(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Daha sonra (3.10.) eşitsizliğini kullanırsak

$$\alpha(T^n x) \leq \lambda^n \frac{1}{1-\lambda} d(x, Tx)$$

olur. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$d(T^n x, T^m x) \leq \alpha(T^n x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, Tx)$$

olup $m \to \infty$ için (c) nin de sağlandığı görülür.

Önerme 3.3.1. T dönüşümü sabit noktaya sahip bir quasi büzülme dönüşümü olsun. O zaman bu T dönüşümü bu noktada süreklidir.

İspat. u, T nin bir sabit noktası ve $\{y_n\}$ dizisi de u ya yakınsayan bir dizi olsun. Biz $Ty_n \to Tu = u$ olduğu göstermeliyiz. (3.6.) den

$$
\begin{aligned}
d(Ty_n, Tu) &\leq \lambda maks\{d(y_n, u), d(y_n, Ty_n), d(u, Tu), d(y_n, Tu), d(u, Ty_n)\} \\
&\leq \lambda maks\{d(y_n, u), d(y_n, Ty_n), d(u, Ty_n)\} \\
&\leq \lambda d(y_n, u) + \lambda \mathrm{d}(\mathrm{u}, \mathrm{T}y_n)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan;

$d(Ty_n, Tu) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(y_n, u).$

olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} Ty_n = Tu$ olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.2. (X, d) bir metrik uzay olsun. S, Xin herhangi bir boş olmayan kapalı alt kümesi ve $T: S \to S$ bir quasi büzülme olsun. Eğer T, S de sabit noktaya sahip ise X tamdır.

İspat. Teoremdeki tüm şartlar sağlansın fakat X tam olmasın. O zaman X de alınan en az bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak değildir. Kabul edelim ki her $n \neq m$ için $d(x_n, x_m) > 0$ olsun. $0 < \lambda < 1$ olmak üzere herhangi bir $x \in X$ için

$$\mathrm{r}(x) = \inf\{d(x_n, x): x_n \neq x, n = 0,1, \dots\}$$

şeklinde tanımlansın. Açıktır ki $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olmadığından her $x \in X$ için $\mathrm{r}(x) > 0$ dır. $\{x_n\}$ nin $\left\{x_{n_j}\right\}$ alt dizisini seçelim. $\{n_j\}$ pozitif tamsayıların alt dizisini $\mathrm{n}_0 = 0$ ve n_j sayısını n_{j-1} den büyük eşit bir tamsayı olarak tanımlayalım. Yani her $i, k \geq n_j$, $j \geq 1$ için $d(x_i, x_k) \leq \lambda \mathrm{r}(x_{n_{j-1}})$ olsun. $\{x_n\}$ Cauchy dizisi olduğundan bu dizi oluşturulabilir. Şimdi her j için $Tx_n = x_{n_{j+1}}$ tanımlansın. Herhangi $n > m \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
d\left(Tx_{n_j}, Tx_{m_j}\right) = d\left(x_{n_{j+1}}, x_{m_{j+1}}\right) \leq \lambda\, \mathrm{r}\left(x_{m_j}\right) \leq \lambda d\left(x_{m_j}, x_{n_j}\right) \\
\leq \lambda maks\{d\left(x_{n_j}, x_{m_j}\right), d\left(x_{n_j}, x_{n_{j+1}}\right), d\left(x_{m_j}, x_{m_{j+1}}\right) \\
, d\left(x_{n_j}, x_{m_{j+1}}\right), d\left(x_{j_m}, x_{n_{j+1}}\right)\} \\
= \lambda maks\{\mathrm{d}\left(x_{n_j}, x_{m_j}\right), d\left(x_{n_j}, Tx_{n_j}\right), d\left(x_{m_j}, Tx_{m_j}\right) \\
, d\left(x_{n_j}, Tx_{m_j}\right), d\left(x_{m_j}, Tx_{n_j}\right)\}
\end{aligned}$$

vardır. Bu nedenle $S = \{x_{n_j}\}$ üzerinde T-quasi büzülmedir. Açıktır ki S kapalıdır ve T, S içerisinde sabit noktaya sahip değildir. Bu bir çelişkidir. Yani (X, d) metrik uzayı tamdır.

Şimdi metrik üzerinde lineer olmayan bazı quasi büzülmeleri vereceğiz.

Teorem 3.3.3. (X,d) tam metrik uzay, $T: X \to X$ orbital sürekli dönüşüm ve $\varphi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ sağdan sürekli fonksiyonu her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ şartını sağlasın. p ve q sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x, y \in X$ ve $P = \{0,1, \dots, p\}$, $Q = \{0,1, \dots, q\}$ için

$$d(T^p x, T^q y) \leq maks\{\varphi[d(T^r x, T^s y)], \varphi\left[d\left(T^r x, T^{r'} y\right)\right],$$
$$\varphi\left[d\left(T^s x, T^{s'} y\right)\right]: r, r' \in P; s, s' \in Q\} \quad (3.12.)$$

olsun. Eğer $\varphi(t)$

$$\varphi(t) \text{ azalmayan fonksiyon} \quad (3.13.)$$
$$\lim_{t \to \infty}[t - \varphi(t)] = +\infty \quad (3.14.)$$

şartlarını sağlarsa T dönüşümü $u \in X$ olacak şekilde bir tek sabit noktaya sahiptir ve herhangi $x \in X$ için $\lim_{n \to \infty} T^n x = u$ dur.

İspat. İlk olarak herhangi bir $x \in X$ için $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ sınırlılığını göstermeliyiz. n herhangi bir pozitif tamsayı olsun.

$$\delta_n(x) = diam(\{x, Tx, T^2 x, \dots, T^n x\}) = d(T^i x, T^j x) \quad (3.15.)$$

olacak şekilde $i = i(n)$ ve $j = j(n)$ pozitif tamsayıları var olsun. φ’nin monotonluğu göz önüne alındığında (3.12.) deki eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$d(T^p x, T^q y)$$
$$\leq \varphi[maks\{d(T^r x, T^s y), d\left(T^r x, T^{r'} x\right), d\left(T^s y, T^{s'} y\right): \ r, r' \epsilon P \ ve \ s, s' \epsilon Q\}] \quad (3.16.)$$

Genelliği bozmaksızın kabul edelim ki $p \leq q,\ i < j$ ve $p \leq i, q < j$ olsun. $j \leq q$ durumu aşikardır. İlk olarak $\delta_n(x) > 0$ ve $i \geq p$ olduğunu gösterelim. (3.16.) den ve φ'nin monotonluğundan

$$\begin{aligned}\delta_n(x) &= d\left(T^p T^{i-p}x, T^q T^{j-q}x\right)\\ &\leq \varphi\left[diam\left\{T^{i-p}x, \dots, T^i x, T^{j-q}x, \dots, T^j x\right\}\right]\\ &\leq \varphi[\delta_n(x)] \text{ dır.}\end{aligned}$$

$0 < t$ için $\varphi(t) < t$ olduğu için bu bir çelişkidir. Buradan $i < p$ dir. Üçgen eşitsizliğinden

$$d\left(T^i x, T^j x\right) \leq d\left(T^i x, T^p x\right) + d\left(T^p x, T^j x\right)$$

ve $q < j$ olduğundan (3.15.) ı kullanırsak

$$\delta_n(x) \leq d\left(T^i x, T^p x\right) + d\left(T^p x, T^q T^{j-q}x\right) \tag{3.17.}$$

elde edilir. (3.16.) den

$$d\left(T^p x, T^q T^{j-q}x\right) \leq \varphi\left[diam\left\{x, Tx, \dots, T^p x, T^{j-q}x, \dots, T^j x\right\}\right]$$

ve φ nin monotonluğundan

$$d\left(T^p x, T^q T^{j-q}x\right) \leq \varphi[\delta_n(x)]$$

sağlanır. (3.17.) kullanıldığında açıktır ki;

$$\delta_n(x) - \varphi[\delta_n(x)] \leq d\left(T^i x, T^p x\right) \leq K \tag{3.18.}$$

olacak şekilde $K = maks\{d(T^m x, T^p x) : m \in P\}$ vardır. $\{\delta_n(x)\}$ azalmayan bir dizi olduğu için $\lim \delta_n(x)$ mevcuttur. $\lim \delta_n(x) = +\infty$ olsun. (3.14.) dan (3.18.) un sol tarafı sınırsız olurken sağ tarafı sınırlıdır. Bu bir çelişki olup $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \delta(x) < +\infty$ olur ve

$$\delta(x) = diam\{x, Tx, T^2x, \ldots, T^nx, \ldots\} < +\infty \qquad (3.19.)$$

elde edilir. Şimdi $\{T^nx\}$ in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $n = 0,1,2, \ldots$için,

$$\alpha_n = \delta(T^nx) = diam(\{T^nx, T^{n+1}x, \ldots, \}) \qquad (3.20.)$$

olur. (3.19.) kullanırsak $\{\alpha_n\}$ sınırlı negatif olmayan bir dizidir. $\alpha_{n+1} \le \alpha_n$ olduğudan $\{\alpha_n\}$ bazı $\alpha \ge 0$ için yakınsaktır. Şimdi $\alpha = 0$ olduğunu göstermeliyiz. n keyfi sayı ve r, s herhangi pozitif tamsayıları için $n + q \le r, s$ olsun. (3.16.) den

$$\begin{aligned} d(T^rx, T^sx) &= d(T^pT^{r-p}x, T^qT^{s-q}x) \\ &\le \varphi[diam\{T^{r-p}x, T^{r-p+1}x, \ldots, T^sx\}] \\ &\le \varphi[\delta(T^{r-p}x)] \le \varphi[\delta(T^nx)] \end{aligned}$$

olacağından

$$\sup\{d(T^rs, T^sx) : n + q \le r, s\} \le \varphi[\delta(T^nx)]$$

olur. Buradan

$$\alpha_{n+p} \le \varphi(\alpha_n)$$

dır. Bu nedenle $\alpha \le \alpha_{n+p}$ olduğundan, $\alpha \le \varphi(\alpha_n)$ olur. Kabul edelim ki $\alpha > 0$ olsun. Her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ ve φ nin sağdan sürekli olmasından

$$\alpha \le \lim_{\alpha_n \to \alpha^+} \varphi(\alpha_n) < \alpha$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu yüzden $\alpha = 0$ dır. Bu durumda

$\lim_{n\to\infty} diam(\{T^n x, T^{n+1}x, \dots,\}) = 0$

dır ve buradan da $\{\mathrm{T^n x}\}$ Cauchy dizisdir. X in tamlığından

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} x_n = u \qquad (3.21.)$$

olacak şekilde $u \in X$ vardır ve $\mathrm{x_n} = \mathrm{T^n x_n}$ dir. T orbital sürekli olduğundan

$$Tu = \lim_{n\to\infty} T\,x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = u$$

olur ki bu u, T nin bir sabit noktasıdır. (3.12.) ve her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olduğundan T nin sabit noktası tektir.

3.4. Kısmi Metrik Uzayda Lineer Olmayan $\acute{C}$iri$\acute{c}$ Tipi ψ −Quasi-Büzülmeler

Lemma 3.4.1. (X, p) kısmi metrik uzay ve $\{x_n\} \subset X$ olsun. Eğer $x_n \to x \in X$ ve $p(x, x) = 0$ ise her $z \in X$ için $\lim_{n\to+\infty} p(x_n, z) = p(x, z)$ dir [8].

Tanım 3.4.1. X boş olmayan bir küme ve $f, g: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x \in X$ için $fx = gx$ ise x noktasına f ve g nin çakışık noktası denir. Her $gx = fx$ olacak şekildeki $x \in X$ için $gfx = fgx$ oluyorsa f ve g dönüşümlerine zayıf bağdaşık denir.

Tanım 3.4.3. X boş olmayan bir küme olsun. (X, p) kısmi metrik uzay ve $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralıysa $(X, p, \preccurlyeq)$ uzayına sıralı kısmi metrik uzay denir.

Tanım 3.4.4. $(X, \preccurlyeq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. $x, y \in X$ için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ oluyorsa *x* ile *y* elemanlarına karşılaştırılabilir elemanlar denir.

Tanım 3.4.5. $f, g: X \to X$ iki dönüşüm, her $x, y \in X$ için $gx \preccurlyeq gy$ iken $fx \preccurlyeq fy$ oluyorsa f dönüşümüne g-azalmayan denir. Eğer g dönüşümü X üzerinde birim dönüşümü ise f dönüşümü azalmayan dönüşümdür.

$\psi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ aşağıdaki özelliklerle tanımlı reel değerli ψ fonksiyonlarının kümesi Ψ olsun.

(i) ψ azalmayan bir fonksiyon;

(ii) $\psi(0) = 0$;

(iii) $\lim_{x\to+\infty}\big(x - \psi(x)\big) = +\infty$;

(iv) Her $r > 0$ için $\lim_{t\to r^+} \psi(t) < r$.

Not 3.4.1. (iv) den ve $\psi(r) \leq \lim_{t\to r^+} \psi(t) < r$ olduğundan her $0 < r$ için $\psi(r) < r$ olur. Dahası (i) ve (iv) den her $r > 0$ için $\lim_{n\to+\infty} \psi^n(r) = 0$ elde edilir.

Tanım 3.4.6. (X,p) kısmi metrik uzay ve $f,g: X \to X$ dönüşüm olsunlar. Her $x,y \in X$ için;

$$p(fx,fy) \leq maks\{\psi\big(p(gx,gy)\big), \psi\big(p(gx,fx)\big), \psi\big(p(gy,fy)\big), \psi\big(p(gx,fy)\big), \psi\big(p(gy,fx)\big)\} \quad (3.22.)$$

sağlayan $\psi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ fonksiyonu varsa f dönüşümüne g-ψ-quasi büzülme denir.

Tanım 3.4.7. $(X,p,\preccurlyeq)$ sıralı kısmi metrik uzay olsun. $gy \preccurlyeq gx$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için (3.22.) şartını sağlayan $\psi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ fonksiyonu varsa f'ye g-ψ sıralı quasi büzülme denir. g bir birim dönüşümü ise f dönüşümü g-ψ- sıralı quasi büzülmedir.

Tanım 3.4.8. $fX \subset gX$ olsun. Her $x_0 \in X$ için $\{x_n\} \subset X$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $gx_n = fx_{n-1}$ şeklinde tanımlansın. x_o başlangıç noktasıyla $\{fx_n\}$dizisi f-g dizisidir. $O_n(x_0) = \{gx_0, fx_0, fx_1, \ldots, fx_n\}$ ve $O(x_0) = \{gx_0, fx_0, fx_1, \ldots, fx_n, \ldots\}$ olarak tanımlansın. Bir A kümesinin çapıda

$$D(A) = \sup\{p(x,y): x,y \in A\}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca dikkat edilmelidir ki $A \subset B$ iken $D(A) \leq D(B)$ dir.

Bu bölümde g-ψ-quasi büzülme için bazı ortak sabit nokta teoremleri vereceğiz.

Teorem 3.4.1. (X,p) kısmi metrik uzay ve $f,g: X \to X$, $fX \subset gX$ olacak şekilde iki dönüşüm olsun. f dönüşümü $\psi \in \Psi$ ile birlikte g-ψ-quasi büzülme şartlarını sağlasın. gX uzayı, X uzayının 0-tam alt uzayı ise f ve g dönüşümleri çakışık noktaya sahiptir. Bunlara ek olarak f ve g dönüşümleri zayıf bağdaşıksa bu iki dönüşüm X te bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. Üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ başlangıç noktası ile oluşturulan $\{fx_n\}$ dizisi (f-g dizisi) sabit noktaya yakınsar.

İspat. $x_0 \in X$ sabit bir nokta olmak üzere $fX \subset gX$ olduğundan x_o başlangıç noktalı $\{fx_n\}$ dizisini (f-g dizisi) oluşturabiliriz. Şimdi $\mathcal{O}(x_0)$ sınırlı olduğunu gösterelim. Bunun için ilk olarak her $n \in \mathbb{N}$ ve her bir $0 \leq i,j \leq n$ için

$$p(fx_i, fx_j) \leq \psi\left(D\left(\mathcal{O}_n(x_0)\right)\right) \tag{3.23.}$$

olduğunu göstermeliyiz.

Her bir $0 \leq i,j \leq n$ için f dönüşümü g-ψ-quasi büzülme olduğundan

$$\begin{aligned}
&p(fx_i, fx_j) \\
&\leq maks\{\psi\left(p\left(gx_i, gx_j\right)\right), \psi(p(gx_i, fx_i)), \psi\left(p\left(gx_j, fx_j\right)\right) \\
&\qquad , \psi\left(p\left(gx_i, fx_j\right)\right), \psi\left(p\left(gx_j, fx_i\right)\right)\} \\
&\leq \psi\left(D\left(\mathcal{O}_n(x_0)\right)\right)
\end{aligned}$$

olur. $\psi\left(D\left(\mathcal{O}_n(x_0)\right)\right) < D\left(\mathcal{O}_n(x_0)\right)$ olduğundan Not 3.4.1. ve (3.23.) eşitsizliği gereği her $n \geq 1$ için $D\left(\mathcal{O}_n(x_0)\right) = p(gx_0, fx_k)$ olacak şekilde $0 \leq k \leq n$ vardır. ψ fonksiyonunun (iii) özelliğinden her $L < x$ ve $h < x - \psi(x)$ için $h = p(gx_0, fx_o) < L$ olacak şekilde L reel sayısı vardır. (3.23.) eşitsizliğini kullanarak her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} D\big(\mathcal{O}_n(x_0)\big) &= p(gx_0, fx_k) \\ &\leq p(gx_0, fx_0) + p(fx_0, fx_k) \\ &\leq h + \psi\Big(D\big(\mathcal{O}_n(x_0)\big)\Big) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D\big(\mathcal{O}_n(x_0)\big) - \psi D\big(\mathcal{O}_n(x_0)\big) \leq h$$

dir. Bu durum her $n \in \mathbb{N}$ için $D\big(\mathcal{O}_n(x_0)\big) \leq L$ olmasıyla mümkündür. Buradan $D\big(\mathcal{O}(x_0)\big) = \lim_{n\to+\infty} D(\mathcal{O}_n(x_0) \leq L$ olduğundan $\mathcal{O}(x_0)$ sınırlıdır. Her $k \geq 1$ için $\mathcal{O}(fx_k) = \{fx_k, \dots, fx_n, \dots\}$ şeklinde tanımlanırsa her f, g-ψ-quasi büzülme dönüşümü her $k \in \mathbb{N}$ için

$$D\big(\mathcal{O}(fx_k)\big) \leq \psi\Big(D\big(\mathcal{O}(fx_{k-1})\big)\Big) \tag{3.24.}$$

sağlanır. (3.24.) den

$$D\big(\mathcal{O}(fx_k)\big) \leq \psi^k(D\big(\mathcal{O}(fx_0)\big)$$

olup $\{fx_n\}$ dizisi (f-g dizisi) 0-Cauchy dizisidir.

gX, X in 0-tam altuzayı olduğundan

$$\lim_{n\to+\infty} p(fx_n, z) = \lim_{n\to+\infty} p(gx_n, z) = p(z,z) = p(gu, gu) = 0$$

olacak şekilde $z = gu \in gX$ vardır.

Şimdi u nun f ve g dönüşümlerinin çakışık noktası, yani $fu = gu$ olduğunu gösterelim. Eğer $d = p(gu, fu) > 0$ ise

$\lim_{n\to+\infty} p(gx_n, gu) = \lim_{n\to+\infty} p(gx_n, fx_n) = \lim_{n\to+\infty} p(gu, fx_n) = 0$

olduğundan yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$p(gx_n, gu) \leq d, p(gx_n, fx_n) \leq d, p(gu, fx_n) \leq d$

olur. Lemma 3.4.1. kullanırsak $\lim_{n\to+\infty} p(gx_n, fu) = d$ olduğundan $n \to \infty$ için

$maks\{p(gu, fu), p(fx_{n-1}, fu)\} \to d^+$

olur. Yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
p(fx_n, fu) &\leq maks\{\psi(p(gx_n, gu)), \psi(p(gx_n, fx_n)), \psi(p(gu, fu)) \\
&\quad , \psi(p(gx_n, fu)), \psi(p(gu, fx_n))\} \\
&= maks\{\psi(p(gu, fu)), \psi(p(gx_n, fu))\} \\
&= \psi(maks\{p(gu, fu), p(fx_{n-1}, fu)\})
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır. ψ fonksiyonun (iv) özelliğinden $n \to \infty$ için

$$
\begin{aligned}
p(gu, fu) &= \lim_{n\to\infty} p(fx_n, fu) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \psi\,(maks\{p(gu, fu), p(fx_{n-1}, fz)\}) \\
&< p(gu, fu)
\end{aligned}
$$

olacağından bu bir çelişkidir, yani $gu = fu$ dur. Böylece f ve g dönüşümleri çakışık noktaya sahiptir.

Şimdi f ve g dönüşümleri zayıf bağdaşık ise f ve g dönüşümlerinin z ortak sabit noktaya sahip olduğunu göstermeliyiz. $fz = fgu = gfu = gz$ olduğunu biliyoruz. Eğer $fz \neq z = fu$ ise;

$$
\begin{aligned}
&p(fu, fz) \\
&\leq maks\{\psi(p(gu, gz)), \psi(p(gu, fu)), \psi(p(gz, fz)), \psi(p(gu, fz)), \psi(p(gz, fu))\}
\end{aligned}
$$

$= \psi\big(p(fu, fz)\big)$
$< p(fu, fz)$

olur ki bu bir çelişki olduğundan $fz = gz = z$ dir. Ortak sabit noktanın tekliği g-ψ-quasi büzülmenin tanımından kolayca elde edilir. Ayrıca herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{fx_n\}$ dizisi (f-g dizisi) sabit noktaya yakınsar.

Not 3.4.2. Her $0 < \lambda < 1$ ve $t \in [0, +\infty)$ için $\psi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\psi(t) = \lambda t$ ile tanımlı fonksiyon olmak üzere Ψ ye aittir. Teorem 3.4.1. den aşağıdaki sonuç açıktır.

Sonuç 3.4.1. (X, p) kısmi metrik uzay ve $f, g: X \to X$, $fX \subset gX$ olacak şekilde iki dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(fx, fy) \leq \lambda maks\{p(gx, gy), p(gx, fx), p(gy, fy), p(gx, fy), p(gy, fx)\}$$

olacak şekilde $0 < \lambda < 1$ var olsun. gX uzayı X uzayının 0-tam alt uzayı ise f ve g dönüşümleri çakışık noktaya sahiptir. Bunlara ek olarak f ve g dönüşümleri zayıf bağdaşıksa bu iki dönüşüm X te bir tek ortak sabit noktaya sahiptir. Üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ başlangıç noktası ile oluşturulan $\{fx_n\}$ dizisi (f-g dizisi) sabit noktaya yakınsar.

Örnek 3.4.1. $X = [0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ kümesi $p(x, y) = maks\{x, y\}$ kısmi metrikle donatılmış olsun. Açıktır ki (X, p) 0-tam kısmi metrik uzaydır. $f, g: X \to X$ dönüşümleri

$$fx = \frac{x}{1+x}\ , gx = x$$

olarak tanımlansın. Kolayca görülebilir ki f dönüşümü her $t \in [0, +\infty)$ için $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$ şeklinde tanımlı $\psi: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu ile birlikte g-ψ- quasi büzülmedir. Bu d alışılmış metriğine göre (X, d) tam değildir. Dolayısıyla f dönüşümü için Teorem 3.3.1. uygulanamaz.

Örnek 3.4.2. $X = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde $p: X \times X \to [0, +\infty)$ fonksiyonu

$p(1,2) = p(2,1) = p(2,3) = p(3,2) = 1$

$p(1,3) = p(3,1) = \frac{3}{2}$

$p(1,1) = p(3,3) = \frac{1}{2}$

$p(2,2) = 0$

olarak tanımlansın. Açıktır ki p, X üzerinde bir kısmi metriktir, ancak $p(1,1) \neq 0$ olduğundan p, X üzerinde bir metrik belirtmez. $f: X \to X$ dönüşümü $f1 = 2,\ f2 = 2,\ f3 = 1$ ve $g: X \to X$ dönüşümüde her $x \in X$ için $gx = x$ şeklinde tanımlansın. $\psi \in \Psi$ ise $t \geq 0$ için $\psi = \frac{2t}{3}$ şeklinde tanımlansın. f dönüşümü bir g-ψ-quasi büzülme dönüşümüdür. Gerçekten;

Eğer $x, y \in \{1,2\}$ ise $p(fx, fy) = p(2,2) = 0$ olup (3.22.) eşitsizliğini sağlar. O zaman $y = 3$ için aşağıdaki üç durum vardır.

$p(f1, f3) = p(2,1) = 1 \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

$= maks\{\psi(p(1,3)), \psi(p(1, f1)), \psi(p(3, f3)), \psi(p(1, f3), \psi(p3, f1))\}$

$p(f2, f3) = p(2,1) = 1 \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

$= maks\{\psi(p(2,3)), \psi(p(2, f2)), \psi(p(3, f3)), \psi(p(2, f3)), \psi(p(3, f2))\}$

$p(f3, f3) = p(1,1) = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

$= maks\{\psi(p(3,3)), \psi(p(3, f3))\}$

Dolasıyla Teorem 3.4.1. in bütün hipotezleri sağlanır. Burada f ve g nin ortak sabit noktası 2 dir. Diğer taraftan Teorem 3.3.1. bu örneğe uygulanamaz. Çünkü p^s metriğine göre $x = 1$, $y = 3$ alınırsa

$p^s(f1, f3) = p^s(2,1) = \frac{3}{2} \nleq \frac{4}{3} =$

$= maks\{\psi(p^s(1,3)), \psi(p^s(1, f1)), \psi(p^s(3, f3)), \psi(p^s(1, f3)), \psi(p^s(3, f1))\}$

$= \frac{2}{3} maks\{ p^s(1,3), p^s(1,2), p^s(3,1), p^s(1,1), p^s(3,2)\}$

$= \frac{2}{3} maks \left\{2,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 0,\ \frac{3}{2}\right\}$

elde edilir.

Şimdi de sıralı kısmi metrik uzaylar için bazı sabit nokta sonuçlarını verelim.

Teorem 3.4.2. $(X, p, \preccurlyeq)$ sıralı kısmi metrik uzay ve $f, g\colon X \to X$, $fX \subset gX$ olacak şekilde iki dönüşüm olsun. Kabul edelim ki f dönüşümü $\psi \in \Psi$ ile g-sıralı quasi büzülme ve "$\preccurlyeq$" sıralama bağıntısına göre g-azalmayan dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa

(i) $gx_0 \preccurlyeq fx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

(ii) $\{gx_n\}$, $gu \in X$ noktasına yakınsayan X de azalmayan dizisi için, her $n \in \mathbb{N}$ için $gx_n \preccurlyeq gu$ ve $gu \preccurlyeq ggu$ vardır.

(iii) gX uzayı 0-tamdır.

o zaman f ve g dönüşümleri X uzayında çakışık noktaya sahiptir. Üstelik, f ve g dönüşümleri zayıf bağdaşık ise, o zaman bu iki dönüşüm ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $gx_0 \preccurlyeq fx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası $\{fx_n\}$ dizisi (f-g dizisi) için bir başlangıç noktası olsun. $gx_0 \preccurlyeq fx_0$ ve $fx_0 = gx_1$ olduğu için $gx_0 \preccurlyeq gx_1$ olur. f dönüşümü g azalmayan olduğundan $fx_0 \preccurlyeq fx_1$ dir. Bu şekilde devam edildiğinde

$$gx_0 \preccurlyeq fx_0 = gx_1 \preccurlyeq fx_1 = gx_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq fx_n = gx_{n+1} \preccurlyeq \cdots$$

olur. Eğer bazı n ler için $fx_n = fx_{n+1}$ ise $gx_{n+1} = fx_n = fx_{n+1}$ olacağından bu bize x_{n+1} in f ve g dönüşümleri için bir çakışık nokta olduğunu gösterir ve böylece ispat biter. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $p(fx_n, fx_{n+1}) > 0$ olduğunu kabul edelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $gx_n \preccurlyeq gx_{n+1}$ olduğundan Teorem 3.4.1. deki gibi $\{fx_n\}$ dizisinin ($f - g$ dizisi) bir 0-Caucyh dizisi olduğu gösterilebilir. gX uzayı X uzayının 0- tam alt uzayı olduğundan

$$\lim_{n\to+\infty} p(fx_n, z) = \lim_{n\to+\infty} p(gx_n, z) = p(z,z) = p(gu,gu) = 0$$

olacak şekilde $z = gu \in gX$ vardır. Şimdi u nun f ve g dönüşümlerinin çakışık noktası yani $fu = gu$ olduğunu gösterelim

$d = p(fu, gu) > 0$ ise

$$\lim_{n\to+\infty} p(gx_n, gu) = \lim_{n\to+\infty} p(gx_n, fx_n) = \lim_{n\to+\infty} p(gu, fx_n) = 0$$

olduğundan yeterince büyük n ler için

$$p(gx_n, gu) < d, p(gx_n, fx_n) < d\ , p(gu, fx_n) \leq d$$

elde edilir. Lemma 3.4.1 gereği, $\lim_{n\to\infty} p(gx_n, fu) = d$ olup ve böylece $n \to \infty$ için

$$maks\{p(gu, fu), p(fx_{n-1}, fu)\} \to d^+$$

olur. (ii) şartından her $n \in \mathbb{N}$ için $gx_n \preccurlyeq gu$ olacağından yeterince büyük n ler için

$$\begin{aligned}
p(fu, fx_n) &\leq maks\{\psi\big(p(gu, gx_n)\big), \psi\big(p(gu, fu)\big), \psi\big(p(gx_n, fx_n)\big) \\
&\qquad , \psi\big(p(gu, fx_n)\big), \psi\big(p(gx_n, fu)\big) \\
&= maks\big\{\psi\big(p(gu, fu)\big), \psi\big(p(gx_n, fu)\big)\big\} \\
&= \psi(maks\{p(gu, fu), p(fx_{n-1}, fu)\})
\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için

$$\begin{aligned}
p(gu, fu) &= \lim_{n\to+\infty} p(fx_n, fu) \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \psi(maks\{p(gu, fu), p(fx_{n-1}, fz)\}) \\
&< p(gu, fu)
\end{aligned}$$

olduğundan bu bir çelişki olup $gu = fu$ olur. Buradan u noktası f ve g dönüşümlerinin çakışık noktasıdır.

Şimdi f ve g dönüşümleri zayıf bağdaşık olması durumunda f ve g dönüşümlerinin z ortak sabit noktasına sahip olduğunu göstereceğiz. $fz = fgu = gfu = gz$ olup (ii) şartından $gu \preccurlyeq ggu = gz$ olur. f dönüşümü g-ψ -sıralı quasi büzülme olduğundan

$$
\begin{aligned}
&p(fz, fu) \\
&\leq maks\{\psi(p(gz, gu)), \psi(p(gz, fz)), \psi(p(gu, fu)), \psi(p(gz, fu)), \psi(p(gu, fz))\} \\
&= \psi(p(fu, fz)) \\
&< p(fu, fz)
\end{aligned}
$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $fz = gz = z$ olup z noktası f ve g dönüşümleri için ortak bir sabit noktadır.

Not 3.4.2. ve Teorem 3.4.2. den aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4.2. $(X, p, \preccurlyeq)$ sıralı kısmi metrik uzay ve $f, g: X \to X$, $fX \subset gX$ olacak şekilde iki dönüşüm olsun. f dönüşümü "$\preccurlyeq$ " sıralama bağıntısına göre g-azalmayan dönüşümdür. $gy \preccurlyeq gx$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$p(fx, fy) \leq \lambda maks\{p(gx, gy), p(gx, fx), p(gy, fy), p(gx, fy), p(gy, fx)\}$$

olacak şekilde $0 < \lambda < 1$ var olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa

(i) $gx_0 \preccurlyeq fx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

(ii) $\{gx_n\}$, $gu \in X$ noktasına yakınsayan X de azalmayan dizisi için, her $n \in \mathbb{N}$ için $gx_n \preccurlyeq gu$ ve $gu \preccurlyeq ggu$ vardır.

(iii) gX uzayı 0-tamdır.

o zaman f ve g dönüşümleri X uzayında çakışık noktaya sahiptir. Üstelik, f ve g dönüşümleri zayıf bağdaşık ise, o zaman bu iki dönüşüm ortak sabit noktaya sahiptir.

Örnek 3.4.2. $X = [0,2]$ kümesi

$$p(x,y) = \begin{cases} |x-y| & , x,y \in [0,1] \\ maks\{x,y\} & , \{x,y\} \cap (1,2] \neq \emptyset \end{cases}$$

kısmi metrikle donatılmış olsun. Açıktır ki (X,p) uzayı 0-tam kısmi metrik uzaydır. $f,g: X \to X$ dönüşümleri, her $x \in X$ için

$$gx = x, \qquad fx = \begin{cases} 2x & , x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & , x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ \frac{1+x}{2} & , x \in (1,2] \end{cases}$$

olarak tanımlasın. f ve g dönüşümleri iki ortak sabit noktaya sahiptir. Bu yüzden f dönüşümü g- ψ -quasi büzülme değildir.

(X,p) uzayında

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow (x = y) \text{ ya da } (x,y \in (1,2] \text{ ve } x \leq y)$$

ile tanımlı sıralı bağıntısı ile $\psi: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & , t \in [0,1] \\ \frac{1+t}{2} & , t \in (1,2] \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alırsak f dönüşümü g-ψ -sıralı quasi büzülme ve g azalmayandır. Teorem 3.4.2. den f ve g dönüşümleri ortak sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Teorem 3.4.2. ve Sonuç 3.4.2. ortak sabit noktanın tekliği için ek bir şart vereceğiz.

Teorem 3.4.3. Teorem 3.4.2. nin tüm şartları sağlansın. Ayrıca her $x, y \in gX$ ve v_0 başlangıç noktasıyla oluşturulan $\{fv_n\}$ dizisi (f-g dizisi) için $x \preccurlyeq gv_0,\ y \preccurlyeq gv_o$ ve $\lim_{n\to\infty} p(fv_{n-1}, fv_n) = 0$ olacak şekilde $v_0 \in X$ varsa o zaman f ve g dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. $z \neq w$ olacak şekilde $z,\ w \in X$ noktaları, f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktaları olsun. Eğer z ve w karşılaştırılabilirse hipotezden f dönüşümü g-ψ-büzülme olduğundan $z = w$ dir. Eğer z ve w noktaları karşılaştırılamıyorsa $z = gz \preccurlyeq gv_0, w = gw \preccurlyeq gv_0$ olacak şekilde bir $v_0 \in X$ vardır. f dönüşümü g azalmayan ve $gz \preccurlyeq gv_0$ olduğu için

$$gz = fz \preccurlyeq fv_0 = gv_1$$

olur. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$gz = fz \preccurlyeq fv_n = gv_{n+1}$$

olur. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} p(fv_n, fz) &\leq maks\{\psi(p(gv_n, gz)), \psi(p(gv_n, fv_n)), \psi(p(gz, fz)) \\ &\qquad , \psi(p(gv_n, fz)), \psi(p(gz, fv_n))\} \\ &= maks\{\psi(p(fv_{n-1}, fz)), \psi(p(fv_{n-1}, fv_n)), \psi(p(fz, fv_n))\} \end{aligned}$$

olur. Eğer

$$maks\{\psi(p(fv_{n-1}, fz)), \psi(p(fv_{n-1}, fv_n)), \psi(p(fz, fv_n))\} = \psi(p(fz, fv_n))$$

olursa

$$
\begin{aligned}
p(fz, fv_n) &\leq \psi\big(p(fz, fv_n)\big) \\
&< p(fz, fv_n)
\end{aligned}
$$

olur ki bu bir çelişkidir. Teoremin hipotezinden $\lim_{n\to\infty} p(fv_{n-1}, fv_n) = 0$ ve yeterince büyük n ler için

$$p(fv_n, fz) \leq \psi\big(p(fv_{n-1}, fz)\big) \tag{3.25.}$$

elde edilir. (3.25.) den ve her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ olduğundan $\{p(fv_n, fz)\}$ azalan dizi ve altan sınırlı olduğundan, $\lim_{n\to+\infty} p(fv_n, z) = r \geq 0$ dır. Eğer $r > 0$ ise (3.25.) te $n \to +\infty$ için

$$r \leq \lim_{n\to+\infty} \psi\big(p(fv_{n-1}, fz)\big) < r$$

olur ki bu bir çelişkidir. Yani $r = 0$ dır.

Benzer şekilde $p(fw, fv_n) \to 0$ elde edilebilir. Bu yüzden $n \to \infty$ için

$$0 < p(w, z) = p(fw, fz) \leq p(fw, fv_n) + p(fv_n, fz) \to 0$$

olur ki bu da bir çelişkidir. Bu nedenle f ve g dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.4.3. Sonuç 3.4.2. . nin tüm şartları sağlansın. Ayrıca her $x, y \in gX$ ve v_0 başlangıç noktasıyla oluşturulan $\{fv_n\}$ dizisi (f-g dizisi) için $x \preccurlyeq gv_0$, $y \preccurlyeq gv_o$ ve $\lim_{n\to\infty} p(fv_{n-1}, fv_n) = 0$ olacak şekilde $v_0 \in X$ varsa o zaman f ve g dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Not 3.4.2. Teorem 3.4.1., Teorem 3.4.2. ve Teorem 3.4.3. den

(i) $p(fx, fy) \leq maks\{\psi(p(gx, gy)), \psi(p(gx, fx)), \psi(p(gy, fy))\}$

(ii) $p(fx, fy) \leq$
$maks\left\{\psi(p(gx, gy)), \psi(p(gx, fx)), \psi(p(gy, fy)), \psi\left(\frac{p(gx,fy)+p(gy,fx)}{2}\right)\right\}$

şartlarından birini sağlayan $f, g: X \to X$ dönüşümleri için ortak sabit nokta sonuçları elde edilir.

4.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Ljbomir $\acute{C}iri\acute{c}$ tarafından verilen quasi büzülmeler ve bunun kısmi metrik uzaya genişlemesi olan Francesco Vetro ve Stojan Radenovic tarafından Applied Math. And Computation dergisi 219(2012), sayfa 1594-1600' da yayınlanan "Nonlinear ψ-quasi contractions of $\acute{C}iri\acute{c}$-type in Partial metric spaces" adlı makalesi incelenmiştir**.**

KAYNAKLAR

[1] Koçak. M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

[2] Soykan, Y., Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2008.

[3] Özer,O, Çöker, D., Taş, K., Soyut Matematik, İzgi Yayınları, Ankara, 1996.

[4] Granas, A., Dugundji, J., Fixed Point Theory, Springer, New York, 2003.

[5] Nieto, J. J., Rodriguez-Lopez, R., Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order, 22 (2005), 223-239.

[6] Abdeljawad, T., Fixed points for generalized weakly contractive mappings in partial metric spaces, Math. Comput. Modelling. 54 (2011) 2923–2927.

[7] Abdeljawad, T., Karapinar, E., Tas, K., A generalized contraction principle with control functions on partial metric spaces, Comput. Math. Appl. (2011), http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2011.11.035.

[8] Abdeljawad, T., Karapinar, E., Tas, K., Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 1900–1904.

[9] Altun, I., Sola, F., Simsek, H., Generalized contractions on partial metric spaces, Topol. Appl. 157 (2010) 2778–2785.

[10] Altun, I., Sadarangani, K., Corrigendum to ‘‘Generalized contractions on partial metric spaces’’, Topol. Appl. 157 (2010) 2778–2785; Altun, I., Sadarangani, K., Corrigendum to ‘‘Generalized contractions on partial metric spaces’’, Topol. Appl. 158 (2011) 1738–1740.

[11] Altun, I., Erduran, A., Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces, Fixed Point Theory Appl. (2011) 10,http://dx.doi.org/10.1155/2011/508730 (Article ID 508730).

[12] Arandelovic´, I.D., Rajovic´, M., Kilibarda, V., On nonlinear quasi-contractions, Fixed Point Theory 9 (2008) 387–394.

[13] Banach, S., Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. 3 (1922) 133–181.

[14] Ćirić, Lj., A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974) 267–273.

[15] Ćirić, Lj., Samet, B., Aydi, H., Vetro, C., Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application, Appl. Math. Comput.218 (2011) 2398–2406.

[16] Ćirić, Lj., Cakic´, N., Rajovic´, M., Ume, J.S., Monotone generalized nonlinear contractions in partially ordered metric spaces, Fixed Point Theory Appl. (2008),http://dx.doi.org/10.1155/2008/131294.

[17] Golubovic´, Z., Kadelburg, Z., Radenovic´, S., Common fixed points of ordered g-quasicontractions and weak contractions in ordered metric spaces, FixedPoint Theory Appl. 20(2012), http://dx.doi.org/10.1186/1687-1812-2012-20.

[18] Ilic´, D., Pavlovic´, V., Rakocˇevic´, V., Some new extensions of Banach's contraction principle to partial metric space, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 1326–1330.

[19] Karapinar, E., Erhan, Inci M., Fixed point theorems for operators on partial metric spaces, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 1894–1899.

[20] Matthews, S.G., Partial metric topology, Proceedings of Eighth SummerConference on General Topology and Applications, vol. 728, Annals New YorkAcademic Science, (1994), 183–197.

[21] Nashine, H.K., Kadelburg, Z., Radenovic´, S., Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered partial metric spaces, Math. Compt. Modelling, (2011), http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2011.12.019.

[22] O'Neill, J., Partial metrics, valuations and domain theory, in: Proc. 11th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New YorkAcad. Sci. 806 (1996) 304–315.

[23] Ran, A.C.M., Reurings, M.C.B., A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004)1435–1443.

[24] Samet, B., Rajovic´, M., Lazovic´, R., Stoiljkovic´, R., Common fixed point results for nonlinear contractions in ordered partial metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 71 (2011), http://dx.doi.org/10.1186/1687-1812-2011-71.

[25] Shatanawi, W., Mustafa, Z., Tahat, N., Some coincidence point theorems for nonlinear contractions in ordered metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 68(2011), http://dx.doi.org/10.1186/1687-1812-2011-68.

[26] Vetro, F., Radenovic, S., Nonlinear ψ-quasi-contractions of Ćirić-type in partial metric spaces,App. Math. and Compt.,219, 4(2012), 1594-1600.

[27] Oltra, S., Valero, O., Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 36 (2004), 17–26.

[28] Ćirić, Lj., Fixed Point Theory (Contraction Mapping Principle), Fac.Of Mech.Eng., Belgrad, 2003.