KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

METRİK UZAYDA KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

GÜLHAN MINAK

EYLÜL 2013

Matematik Anabilim Dalında GÜLHAN MINAK tarafından hazırlanan METRİK UZAYDA KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun oldugunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. İshak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan	: Doç. Dr. Muammer KULA	______________________
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. İshak ALTUN	______________________
Üye	: Doç. Dr. Ali ARAL	______________________

...../...../.......

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

METRİK UZAYDA KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

MINAK, Gülhan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. İshak ALTUN

Eylül 2013, 101 sayfa

Bu tez çalışmasında, temel olarak tam metrik uzaylarda küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir. İlk olarak, tez boyunca kullanılacak metrik uzay ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Sonra, tam metrik uzaylarda küme değerli dönüşümler için önemli sabit nokta teoremlerinden Nadler, Reich ve Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Daha sonra, tezin asıl kısmında dört ana teorem verilmiştir. Bunlar küme değerli F-büzülmeler için sabit nokta teoremi, küme değerli genelleştirilmiş F-büzülmeler için sabit nokta teoremi, küme değerli α-geçişli (α_*-geçişli) dönüşümler için sabit nokta teoremi ve son olarak küme değerli hemen hemen α-geçişli (α_*-geçişli) dönüşümler için sabit nokta teoremleridir. Burada literatürde ilk defa tanımlanan Küme Değerli Pseudo Picard Operator kavramı kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, literatürde daha önce verilen sabit nokta sonuçlarının birer öz genelleştirmesi olduğunu gösteren örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Küme Değerli Dönüşüm, α-Geçişli Dönüşüm, α_*-Geçişli Dönüşüm, Zayıf Picard Operatör, Pseudo Picard Operatör, F-Büzülmeler

ABSTRACT

FIXED POINT THEOREMS FOR MULTIVALUED MAPPINGS ON METRIC SPACE

MINAK, Gülhan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İshak ALTUN

September 2013, 101 pages

In this thesis, some fixed theorems for setvalued mappings in complete metric spaces are mainly examined. Firstly, fundamental concepts of metric spaces and some well-konown theorems are given which will be used throughout thesis. Also, Nadler, Reich and Mizoguchi-Takahashi fixed point theorems which are some of important theorems for setvalued mappings in complete metric spaces are deeply examined. In main section of thesis four main theorems are presented. These are fixed point theorem for setvalued F-contractions, fixed point theorem for setvalued generalized F-contractions, fixed point theorem for setvalued α-admissible mappings and fixed point theorem for setvalued almost α-admissible mappings. The concept of setvalued Pseudo Picard Operator defininig as first time in literature is used. Being a generalization of fixed point theorems in literature of the results obtaining in this thesis is showed with examples.

Key Words: Fixed Point, Multivalued Map, α-Admissible Map, α_*-Admissible Map, Weakly Picard Operator, Pseudo Picard Operator, F-Contraction.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren, tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir zaman yardımını eksik etmeyen değerli hocam, Sayın Doç. Dr. İshak ALTUN'a, çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen Tuncer ACAR, Özlem ACAR, Gonca DURMAZ, Emre DENİZ ile Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma, verdiği maddi desteklerinden dolayı TUBİTAK'a, ÖYP Birimi'ne ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x = Tx$ olacak şekilde $x \in X$ varsa o zaman x noktasına T nin sabit noktası denir. Yani T dönüşümü altında değişmeyen bir noktaya T nin bir sabit noktası denir. Örneğin $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = 2x$ dönüşümünün $x = 0$ noktası bir sabit noktası olmasına rağmen $Tx = x + 2$ şeklinde tanımlanan dönüşümün X de hiç bir sabit noktası yoktur. O halde bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımlandığı kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Sabit nokta teorisi matematiği bir çok dalı ile ilişkilidir. Örneğin, nonlineer fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, operatör teori ve genel topoloji bunlardan başlıcalarıdır. Tarihsel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki ana yönde gelişmektedir. Bunlardan birincisi, tam metrik uzay üzerinde büzülme ve büzülme tip dönüşümler için sabit nokta teoridir. İkincisi ise normlu uzayların kompakt ve konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli operatörler için sabit nokta teoridir. Normlu uzaylarda sabit nokta teori 1910 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendisine tanımlı sürekli her dönüşümün bir sabit noktasının var olduğunu göstermiştir. Bunun reel eksende özel bir durumu şu şekildedir: $T : [0,1] \to [0,1]$ sürekli bir dönüşüm ise T nin bir sabit noktası vardır. Brouwer'ın bu teoreminin sonsuz boyutlu uzaylara genişletilmesi düşünülmüş fakat Kakutani bu teoremin sonsuz boyutlu uzaylarda geçerli olmadığını gösteren aşağıdaki örneği vermiştir:

$(l_2, \|\cdot\|_2)$ Hilbert uzayını ve bunun $C = \{x = \{x_n\} \in l_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ kapalı birim yuvarını göz önüne alalım. $T : C \to C$ dönüşümü

$$Tx = \left\{ \sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_1, x_2, ..., x_n, ... \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda her $x = \{x_n\} \in l_2$ için

$$\begin{aligned}\|Tx\|_2 &= \sqrt{1 - \|x\|_2^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2 + ...} \\ &= \sqrt{1 - \|x\|_2^2 + \|x\|_2^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

olur. Ayrıca T dönüşümü süreklidir. Şimdi T nin sabit noktasının var olduğunu kabul edelim ve bu nokta $x_0 = \{x_0^{(n)}\}$ olsun. O halde, $\|x_0\|_2 = \|Tx_0\|_2 = 1$ olur. Fakat,

$$\begin{aligned}Tx_0 &= \left\{\sqrt{1 - \|x_0\|_2^2}, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, ..., x_0^{(n)}, ...\right\} \\ &= \left\{0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, ..., x_0^{(n)}, ...\right\} \\ &= x_o \\ &= \left\{x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, ..., x_0^{(n)}, ...\right\}\end{aligned}$$

olduğundan $x_0^{(1)} = 0, x_0^{(2)} = 0, ..., x_0^{(n)} = 0$ veya $x_0 = \{0, 0, ..., 0, ...\}$ bulunur. Bu ise $\|x_0\|_2 = 1$ olması ile çelişir.

Ancak yine de Brouwer sabit nokta teoremi bazı ek şartlarla birlikte 1930 yılında Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara aşağıdaki şekilde genişletilmiştir: X bir Banach uzayı, C, X uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi ve $T : C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, T dönüşümü C de en az bir sabit noktaya sahiptir.

Diğer taraftan, tam metrik uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları 1922 yılında Banach ile başlamıştır. Banach literatürde büzülme dönüşümü prensibi olarak da adlandırılan şu teoremi ifade ve ispat etmiştir: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun.Yani her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ var olsun. O zaman T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik X deki herhangi bir başlangıç noktasından elde edilen Picard iterasyonu T nin sabit noktasına yakınsar. Büzülme dönüşüm prensibi, matematikte çok önemli problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği için iyi bir araçtır. Bu önemimden dolayı bu prensip çoğu araştırmacılar tarafından genişletilmiş ve genelleştirilmiştir.

Öte yandan, 1969 da Nadler, Hausdorff metriğini kullanarak, küme değerli büzülme kavramını verip, büzülme dönüşüm prensibinin küme değerli versiyonunu ispatlamıştır.

(X,d) bir metrik uzay olmak üzere $\mathcal{P}(X)$, X in boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfını, $\mathcal{B}(X)$, X in boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerinin sınıfını, $\mathcal{C}(X)$, X in boş olmayan tüm kapalı alt kümelerinin sınıfını ve $\mathcal{CB}(X)$ de X in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin sınıfını göstersin. $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü için, eğer $x \in Tx$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu noktaya T küme değerli dönüşümünün bir sabit noktası denir. Örneğin, $X = [0,1]$ olmak üzere $Tx = [x^4, x^2]$ şeklinde tanımlansın. O zaman $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ bu dönüşümün sabit noktalarıdır.

(X,d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının A kümesine olan uzaklığı

$$D(x,A) = \inf \{d(x,y) : y \in A\}$$

ile tanımlanır. $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için

$$\delta(A,B) = \sup \{D(x,B) : x \in A\}$$

ve

$$H(A,B) = \max \{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$$

şeklinde tanımlansın. $A, B \in \mathcal{B}(X)$ ise hem $\delta(A,B)$ ve hem de $H(A,B)$ birer reel sayıdır. Ayrıca iyi tanımlı olmaları nedeni ile δ ve H, $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$ üzerinde birer reel değerli fonksiyondurlar. Yine H, $\mathcal{CB}(X)$ üzerinde bir metriktir. Bunun bir metrik olduğu ileriki bölümlerde gösterilecektir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x,y)$$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabiti varsa T ye küme değerli büzülme dönüşümü adı verilir. Nadler, tam metrik uzayda tanımlı her küme değerli büzülme dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu ispatlamıştır.

Nadler'in bu teoreminden sonra gelişmeye başlayan küme değerli dönüşümler için sabit nokta teori de tek değerli dönüşümler için verilen sabit nokta teoremlerine paralel şekilde diferensiyel ve integral içermelerin çözümlerinin varlığında kullanılmaktadır.

1.1 Kaynak Özetleri

Metrik uzay ve topolojik uzaylar ile ilgili temel kavramlar için Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar", Mucuk'un "Topoloji ve Kategori" ile Soykan'ın "Metrik Uzaylar ve Topolojisi" adlı kitapları kullanılmıştır[1, 2, 3] . Küme değerli dönüşümler için bazı tanımlar ve kavramlar için Agarwal, O'Regan ve Sahu'nun "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications" adlı kitabı temel alınmıştır[4] . Daha sonra tezin asıl amacını oluşturan Nadler sabit nokta teoremi için Nadler'in "Multivalued contraction mappings" adlı makalesi, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremi için Mizoguchi ve Takahashi'nin "Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces" adlı makalesi, α-geçişli dönüşümlerle ilgili sabit nokta teoremleri için Samet, Vetro ve Vetro'nun "Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings" adlı makalesi, küme değerli α-geçişli ve α_*-geçişli dönüşümlerle ilgili sabit nokta teoremleri için Asl, Rezapour ve Shahzad'ın "On fixed points of α-ψ-contractive multifunctions" adlı makalesi, F-büzülmeler için Wardowski'nin "Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces" adlı makalesi incelenmiştir[5, 6, 7, 8, 9] . Ayrıca, Nadler sabit nokta teoreminin genelleştirmeleri için Reich'in "Some remarks concerning contraction mappings" ile "Some problems and results in fixed point theory" adlı makaleleri, Mizoguchi-Takahashi fonksiyonunun özellikleri için Du'nun "On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps", "Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions satisfied Mizoguchi-Takahashi's condition in quasiordered metric spaces" ve "Some new results and generalizations in metric fixed point theory" adlı makaleleri, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin çok bir basit ispatı için Suzuki'nin "Mizoguchi-Takahashi's fixed point theorem is a real generalization of Nadler's" adlı makalesi, (c)-kıyaslama fonksiyonunun özellikleri için Berinde'nin "Iterative Approximation of Fixed Points" adlı kitabı incelenmiştir[10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] . α-geçişli ve α_*-geçişli dönüşümlerle ilgili sabit nokta teoremlerinin genelleştirmeleri için Mohammedi, Rezapour ve Shahzad'ın "Some results on fixed points of α-ψ-Ćirić generalized multifunctions" adlı makalesi incelenmiştir[17] . Küme değerli zayıf Picard (MWP) operatörün tanımı ve bu operatörler için sabit nokta teoremleri Rus'un "Basic problems of the metric fixed point theory revisited (II)", M. Berinde ve V. Berinde'nin "On a general class of multivalued weakly Picard mappings" adlı makalelerinden ve Mınak ve Altun'un "Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorem" adlı çalışmasından yararlanılmıştır[18, 19, 20] . Küme değerli Pseudo Picard (MPP) operatörün tanımı ve bu operatörlerle ilgili sabit nokta teoremleri için Mınak, Acar ve Altun'un "Multivalued Pseudo Picard Operators and Fixed Point Results" adlı makalesinden yararlanılmıştır[21] . F-büzülmeler için sabit nokta teoreminin genelleştirmeleri için Altun, Mınak ve Dağ'ın "Multivalued F-Contractions On Complete Metric Space" adlı çalışması ve Acar, Durmaz ve Mınak'ın "Generalized multivalued F-contractions on complete metric spaces" çalışması incelenmiştir[22, 23] . Son olarak elde edilen sonuçların sıralı metrik uzaylara uygulanmasında Feng ve Liu'nun "Fixed point theorems for multi-valued increasing operators in partially ordered spaces" adlı makalesinden yararlanılmıştır[24] .

1.2 Çalışmanın Amacı

Samet, Vetro ve Vetro, 2012 yılında sabit nokta teorisinin en önemli teoremlerinden biri olan Banach büzülme prensibinin bir genelleştirmesini aşağıdaki şekilde vermişlerdir: "(X, d) tam bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir α-geçişli, $\psi \in \Psi$ ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq \psi(d((x, y))$$

eşitsizliği var olsun. Eğer, $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var ve T sürekli ise o zaman T bir sabit noktaya sahiptir."

Diğer yandan, büzülme dönüşüm prensibinin bir başka genelleştirmesini de Wardowski, 2012 yılında bir çalışmasında aşağıdaki şekilde vermiştir: "(X, d) tam bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. $d(Tx, Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ var olsun. O zaman T nin tek bir sabit z noktası vardır. Üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit z noktasına yakınsar."

Daha sonra bu teoremler pek çok yazar tarafından genelleştirilmiş, uygulamaları yapılmış, farklı uzaylarda ispatları verilmiştir. Bu tez çalışmasında bu çalışmaları detaylı bir şekilde irdeleyerek bunların küme değerli versiyonlarını göz önüne alıp yeni sabit nokta sonuçlarının elde edilmesi amaçlanmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Bazı Temel Metrik ve Topolojik Kavramlar

Bu kısımda tez boyunca sıkça kullanacağımız, metrik uzay, metrik uzayda açık ve kapalı yuvar, topolojik uzay ve metrik uzayın topolojisi, temel topolojik kavramlar, metrik uzayda yakınsaklık, Cauchy dizisi ve tamlık kavramlarını hatırlatacağız.

Tanım 2.1 *X boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.*

a) *$d(x, y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,*

b) *her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,*

c) *her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

Tanım 2.2 *(X, d) herhangi bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.3 *(X, d) bir metrik uzay ve U, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine açık küme denir. Eğer $U^c = X \backslash U$ kümesi açık ise o zaman U kümesine kapalı küme denir.*

Önerme 2.1 *(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur.*

a) (X, d) *uzayındaki her açık yuvar açık bir kümedir.*

b) (X, d) *uzayındaki her kapalı yuvar kapalı bir kümedir.*

Tanım 2.4 *X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ sınıfı, aşağıdaki şartları sağlıyorsa o zaman τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.*

a) $\emptyset, X \in \tau$,

b) *τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti τ ya ait,*

c) *τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ya aittir.*

Tanım 2.5 *(X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. Eğer τ nun her elemanı β nın bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ topoloji için bir taban (baz) denir.*

Tanım 2.6 *Bir (X, τ) topolojik uzayında τ nun elemanlarına açık kümeler denir. $A \subseteq X$ için $A^c = X \backslash A$ kümesi açık ise A kümesine kapalı küme denir. A kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin arakesitine A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir. A kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimide ise A kümesinin içi denir ve A^o ile gösterilir. Bir $x \in X$ noktasını içeren her G açık kümesi için $(G \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ise $x \in X$ noktasına A nın bir yığılma noktası denir. A nın tüm yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.*

Tanım 2.7 *(X, τ) bir topolojik uzay, $\{x_n\} \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in G$ olacak şekildeki her G açık kümesi için, $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in G$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsar denir ve bu durum* $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ *yada kısaca $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.8 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer $f(x) \in V$ olacak şekildeki her $V \in \sigma$ için $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa f fonksiyonuna $x \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye bir sürekli fonksiyon denir.*

Tanım 2.9 *(X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. (X, τ_1) uzayında x noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için (Y, τ_2) uzayında $\{f(x_n)\}$ dizisi $f(x)$ noktasına yakınsıyorsa f fonksiyonuna x noktasında dizisel süreklidir denir. f fonksiyonu X uzayının her noktasında dizisel sürekli ise f ye X de dizisel süreklidir veya kısaca dizisel sürekli denir.*

Uyarı 2.1 *Her sürekli fonksiyon dizisel süreklidir, fakat genelde tersi doğru değildir. Ancak, metrik uzaylarda süreklilik ve dizisel süreklilik kavramları birbirine denktir.*

Tanım 2.10 *(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda*

$$D(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

değerine A ve B kümeleri arasındaki uzaklık,

$$D(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

değerine x noktasının A kümesine uzaklığı,

$$d(A) = \sup \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

değerine A kümesinin çapı denir. Eğer $d(A) < \infty$ ise A kümesine sınırlı küme, $d(A) = \infty$ ise A kümesine sınırsız küme denir.

Tanım 2.11 *(X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda*

$$\tau_d = \{U \subseteq X : U \text{ kümesi } (X, d) \text{ uzayında açık}\}$$

sınıfı X üzerinde bir topolojidir. Bu X üzerindeki τ_d topolojisine metrik topolojisi veya d metriğinin ürettiği topoloji denir. (X, τ_d) ikilisine de metrik topolojik uzay denir.

Tanım 2.12 *(X, d) bir metrik uzay, $\{x_n\}$, terimleri X de olan bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı, $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde varsa $\{x_n\}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $x_n \to x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir. x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limiti adı verilir.*

Teorem 2.1 *Metrik uzayda yakınsak her dizinin limiti tektir.*

Tanım 2.13 (X, d) *bir metrik uzay,* $\{x_n\}$*,* X *de bir dizi olsun.* $n_k < n_{k+1}$ *olmak üzere* $\{x_{n_k}\}$ *dizisine* $\{x_n\}$ *dizisinin bir alt dizisi denir.*

Teorem 2.2 (X, d) *bir metrik uzay olsun.* $\{x_n\}$ *dizisi yakınsak ise o zaman her* $\{x_{n_k}\}$ *alt dizisi de yakınsaktır ve aynı noktaya yakınsar.*

Tanım 2.14 (X, d) *bir metrik uzay,* $\{x_n\}$*,* X *de bir dizi olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı,* $m > n \geq n_0$ *özelliğindeki her* $m, n \in \mathbb{N}$ *için* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *olacak şekilde varsa* $\{x_n\}$ *dizine bir Cauchy dizisi denir. Eğer* (X, d) *metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise o zaman bu uzaya tam metrik uzay denir.*

Teorem 2.3 *Bir* (X, d) *metrik uzayında yakınsak her* $\{x_n\}$ *dizisi bir Cauchy dizisidir. Ayrıca her Cauchy dizisi sınırlıdır.*

Önerme 2.2 (X, d) *bir metrik uzay,* $\{x_n\}$ *,* X *de bir dizi ve* $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ *olsun. Bu durumda* $\{x_n\}$ *dizisi bir Cauchy dizisidir.*

İspat. Her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1})$ verilen serinin kalan terimi olduğundan $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. ■

Tanım 2.15 (X, d) *ve* (Y, e) *metrik uzaylar,* $f : (X, d) \to (Y, e)$ *bir fonksiyon ve* $x_0 \in X$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için* $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ *olacak şekilde bir* $\delta > 0$ *varsa, diğer bir deyişle her* $\varepsilon > 0$ *için* $d(x_0, x) < \delta$ *olduğunda* $e(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $\delta > 0$ *sayısı varsa* f *fonksiyonu* x_0 *noktasında süreklidir. Eğer* f *fonksiyonu* X *in her noktasında sürekli ise* f *ye bir sürekli fonksiyon denir.*

Tanım 2.16 *(X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve A, X in bir alt kümesi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için*

$$(B(x,\varepsilon)\backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

oluyorsa $x \in X$ noktasına A nın bir yığılma noktasıdır denir. A nın tüm yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir. $A \cup A'$ kümesine A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Önerme 2.3 *(X,d) metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi ve x, A nın bir yığılma noktası olsun. O zaman her bir $B(x,\varepsilon)$ açık yuvarı A nın sonsuz sayıda elemanını içerir.*

Teorem 2.4 *(X,d) metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. O zaman bir x noktası A nın bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak $x_n \to x$ olacak şekilde A kümesinden x den farklı $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ elemanlarını seçmek mümkündür.*

Teorem 2.5 *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak $x_n \to x$ olacak şekilde A içinde bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.*

Uyarı 2.2 *(X,τ) topolojik uzayında $x \in \overline{A}$ iken $x_n \to x$ olacak şekilde A içinde bir $\{x_n\}$ dizisi bulunmayabilir. Örneğin,*

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R}\backslash U \text{ sayılabilir}\} \cup \{\emptyset\}$$

olmak üzere $(\mathbb{R},\tau)$ sayılabilir tümleyenler uzayını göz önüne alalım. $2 \in \overline{(0,1)}$ olmasına rağmen $(0,1)$ de 2 noktasına yakınsayan hiçbir dizi yoktur.

Sonuç 2.1 *(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. O zaman A kapalıdır ancak ve ancak A daki yakınsak her dizinin limiti A dadır.*

Teorem 2.6 *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ dır.*

Teorem 2.7 *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. O zaman $x \in \overline{A}$ dır ancak ve ancak $D(x,A) = 0$ dır.*

İspat. İlk olarak $x \in \overline{A}$ olsun. Bu durumda Teorem 2.6 gereğince her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olur. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in A$ vardır. Bu nedenle

$$D(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\} = 0$$

olmak zorundadır. Çünkü eğer $\inf\{d(x,y) : y \in A\} = \beta > 0$ olsaydı o zaman her $y \in A$ için $d(x,y) \geq \beta > 0$ ve buradan $B(x,\beta) \cap A = \emptyset$ olurdu ki bu bir çelişkidir. Tersine $D(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $d(x,x_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in A$ vardır. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olur. Buna göre Teorem 2.6 gereğince $x \in \overline{A}$ bulunur. ■

Sonuç 2.2 *(X,d) bir metrik uzay ve A, X in kapalı bir alt kümesi olsun. $D(x,A) = 0$ dır ancak ve ancak $x \in A$ dır.*

Tanım 2.17 *Bir (X,τ) topolojik uzayında açık kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ için*

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i : i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer, açık örtünün

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

olacak biçimde bir $\{G_{i_k} : k = 1, 2, \cdots, n\}$ alt ailesi var ise, bu aileye A kümesinin sonlu bir alt örtüsü denir.

Tanım 2.18 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir. Eğer, X kompakt bir küme ise (X,τ) topolojik uzayına kompakt topolojik uzay denir.*

Teorem 2.8 *Bir (X,τ) kompakt topolojik uzayının kapalı her alt kümesi de kompaktır.*

Tanım 2.19 *(X,τ) bir topolojik uzay olsun. X in farklı her nokta çiftini içeren ayrık açık kümeler varsa (X,τ) topolojik uzayına Hausdorff uzay denir.*

Teorem 2.9 *Bir (X,τ) Hausdorff uzayının kompakt her alt kümesi kapalıdır.*

Teorem 2.10 *(X,τ) bir topolojik uzay, A, X in boş olmayan bir kompakt alt kümesi olsun. Eğer $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli ise $f(a) = \sup f(A)$ ve $f(b) = \inf f(A)$ olacak şekilde $a, b \in A$ vardır.*

Teorem 2.11 *Bir (X,d) metrik uzayı kompakttır ancak ve ancak bu uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.*

Teorem 2.12 *(X,d) metrik uzay ve A ile B, X in boş olmayan alt kümeleri olsun. Eğer A kompakt ise $D(A,B) = D(p,B)$ olacak şekilde bir $p \in A$ noktası vardır.*

İspat. A üzerinde $f(x) = D(x,B) = \inf\{d(x,y) : y \in B\}$ ile tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonunu gözönüne alalım. A kompakt olduğundan f fonksiyonu A üzerinde bir minimuma sahiptir, yani $f(p) = \inf_{x\in A} f(x)$ olacak şekilde bir $p \in A$ vardır ve bu nedenle

$$D(A,B) = \inf_{x\in A} D(x,B) = \inf_{x\in A} f(x) = f(p) = D(p,B)$$

olur. Bir başka ifade ile $D(A,B) = D(p,B)$ olacak şekilde bir $p \in A$ noktası vardır.
■

Sonuç 2.3 *(X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve A, X in kompakt bir alt kümesi olsun. O zaman $d(x,a) = D(x,A)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır.*

Tanım 2.20 *X boş olmayan bir küme olsun. X üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip bir β bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve (X,β) ikilisine de kısmi sıralı küme denir.*

a) *β yansımalıdır, yani her $x \in X$ için $x\beta x$ dir.*

b) *β ters simetriktir, yani her $x,y \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta x$ ise $x = y$ dir.*

c) *β geçişlidir, yani her $x,y,z \in X$ için $x\beta y$ ve $y\beta z$ ise $x\beta z$ dir.*

Bir kısmi sıralama bağıntısını göstermek için β simgesi yerine $\preceq$ gösterimini kullanacağız. Böylece $x\beta y$ yerine $x \preceq y$ yazıp bunu "x, y den önce gelir" yada "x küçük eşit y" biçiminde okuyacağız.

2.2. Küme Değerli Dönüşümler ve Hausdorff Metriği

Bu kısımda küme değerli dönüşüm, küme değerli dönüşümün sabit noktası, üstten ve alttan yarı süreklilik kavramları kısaca ele alınacaktır. Ayrıca Hausdorff metriği ve bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.21 *X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $T \subseteq X \times Y$ ise T ye X den Y ye bir küme değerli (çoğul değerli) dönüşüm denir. $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ ile gösterilir. Burada $\mathcal{P}(Y)$, Y nin boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfıdır. $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ küme değerli dönüşümünün tersi*

$$(x, y) \in T \Leftrightarrow (y, x) \in T^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

T, X den Y ye bir küme değerli dönüşüm ve $x \in X$ olsun. T nin x noktasındaki görüntüsü

$$Tx = \{y \in Y : (x, y) \in T\}$$

kümesidir. Yine $A \subseteq X$ için

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx$$

kümesi A nın T küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsüdür. Ayrıca,

$$\bigcup_{x \in A} Tx = \left\{y \in Y : T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\right\}$$

dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} u \in T(A) = \bigcup_{x \in A} Tx \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \text{ için } u \in Tx \\ & \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \text{ için } (x, u) \in T \\ & \Leftrightarrow \quad \exists x \in A \text{ için } x \in T^{-1}(u) \\ & \Leftrightarrow \quad T^{-1}(u) \cap A \neq \emptyset \\ & \Leftrightarrow \quad u \in \left\{y \in Y : T^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\right\} \end{aligned}$$

bulunur. $B \subseteq Y$ için

$$T^{-1}(B) = \bigcup_{y \in B} T^{-1}(y)$$

kümesine B nin T^{-1} altındaki görüntüsü (veya T altındaki ters görüntüsü) denir. Benzer şekilde

$$\bigcup_{y\in B} T^{-1}(y) = \{x \in X : Tx \cap B \neq \emptyset\}$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.22 *$T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü için $x_0 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa bu noktaya T nin sabit noktası denir. T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Yani*

$$F(T) = \{x \in X : x \in Tx\}$$

dir.

Örnek 2.1 *$X = [0, 1]$ olmak üzere $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} \{1\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ [0,1] & , \quad x = \frac{1}{2} \\ [0, 1-x] & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde

$$\begin{aligned} T(0) = \{1\} \quad &, \quad T(\tfrac{3}{4}) = \left[0, \tfrac{1}{4}\right] \\ T(\tfrac{1}{2}) = [0,1] \quad &, \quad T((\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4})) = [0,1] \\ T((0, \tfrac{1}{4}) = \{1\} \quad &, \quad T((\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4})) = \left[0, \tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Burada $\frac{1}{2} \in T\frac{1}{2} = [0,1]$ olduğundan $\frac{1}{2}$, T nin bir sabit noktasıdır.

Tanım 2.23 *X ve Y iki topolojik uzay ve $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer Y deki her kapalı kümenin ters görüntüsü X de kapalı oluyorsa, T ye üsten yarı sürekli, Y deki her açık kümenin ters görüntüsü X de açık ise T ye alttan yarı sürekli dönüşüm denir. Eğer bir küme değerli dönüşüm hem alttan hem de üstten yarı sürekli ise bu dönüşüme süreklidir denir.*

Örnek 2.2 $T : [0, 1] \to \mathcal{P}([0, 1])$

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{3}{4}\right\} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] & , \quad x = \frac{1}{2} \\ \\ \left\{\frac{1}{4}\right\} & , \quad \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü üstten yarı süreklidir ancak alttan yarı sürekli değildir. Çünkü $V = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ açık kümesi için $T^{-1}(V) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ olup açık değildir. Burada dikkat edelim ki her kapalı kümenin ters görüntüsü de kapalıdır.

Örnek 2.3 $T : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} \{0\} & , \ x \neq 0 \\ \\ [-1,1] & , \ x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü üstten yarı süreklidir ancak alttan yarı sürekli değildir. K kapalı kümesi için

$$T^{-1}(K) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \ 0 \in K \\ \\ \{0\} & , \ 0 \notin K \text{ ve } K \cap [-1,1] \neq \emptyset \\ \\ \emptyset & , \ K \cap [-1,1] = \emptyset \end{cases}$$

olduğundan T dönüşümü üstten yarı süreklidir. Ancak $U = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ açığı için $T^{-1}(U) = \{0\}$ olup açık değildir. O halde T dönüşümü alttan yarı sürekli değildir.

Örnek 2.4 $T : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} [-1,1] & , \ x \neq 0 \\ \\ \{0\} & , \ x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü alttan yarı süreklidir ancak üstten yarı sürekli değildir. Bu dönüşümde bir açık kümenin ters görüntüsü ya $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ya $\mathbb{R}$ yada $\emptyset$ dur. Dolayısıyla T dönüşümü alttan yarı süreklidir. Ancak, $K = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kapalı kümesi için $T^{-1}(K) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olup kapalı değildir. O halde T dönüşümü üstten yarı sürekli değildir.

(X, d) bir metrik uzay ve $\mathcal{K}(X)$, X in boş olmayan tüm kompakt alt kümelerin sınıfı olsun. O zaman $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq C(X)$ ve $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{CB}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ olduğu açıktır. $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için

$$\delta(A, B) = \sup_{x \in A} \{D(x, B)\} = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$$

ve

$$\begin{aligned} H(A,B) &= \max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\} \\ &= \max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y), \sup_{x\in B}\inf_{y\in A} d(x,y)\right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Örnek 2.5 *$X=\mathbb{R}$ kümesi alışılmış metrik ile göz önüne alınsın. $A=[1,2]$ ve $B=[4,\infty)$ kümeleri için*

$$\delta(A,B)=3,\ \ \delta(B,A)=\infty$$

olduğundan

$$H(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=\infty$$

bulunur. δ nin simetrik olmadığı buradan görülebilir. Yani genelde $\delta(A,B)\neq\delta(B,A)$ dır. Ayrıca, δ ve H ın $\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmadığı da görülmektedir.

Uyarı 2.3 *Eğer A ve B kümeleri (X,d) metrik uzayının sınırlı alt kümeleri ise $\delta(A,B)$, $\delta(B,A)$ ve $H(A,B)$ birer reel sayıdır. O halde δ ve H, $\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlardır.*

Örnek 2.6 *$X=\mathbb{R}$ kümesi alışılmış metrik ile göz önüne alınsın. $A=[2,4]$ ve $B=(2,4)$ kümeleri için*

$$\delta(A,B)=\delta(B,A)=0$$

olduğundan

$$H(A,B)=\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=0$$

bulunur. Burada $H(A,B)=0$ olmasına rağmen $A\neq B$ dir. Yani $H:\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(X)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bir metrik değildir.

Teorem 2.13 *(X,d) bir metrik uzay, $A,B\in\mathcal{P}(X)$ olsun. O zaman*

$$H(A,B)=\sup\{|D(x,A)-D(x,B)|:x\in X\}$$

dir.

İspat. Her $x \in X$ ve her $b \in B$ için

$$D(x, A) \leq d(x, b) + D(b, A)$$

yazılabilir. $D(b, A) \leq H(A, B)$ olduğundan

$$D(x, A) \leq d(x, b) + H(A, B)$$

olup bu eşitsizlik her $b \in B$ için de geçerlidir. Dolayısıyla

$$D(x, A) \leq D(x, B) + H(A, B)$$

veya

$$D(x, A) - D(x, B) \leq H(A, B)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$D(x, B) - D(x, A) \leq H(A, B)$$

elde edilir. O zaman her $x \in X$ için

$$|D(x, B) - D(x, A)| \leq H(A, B)$$

olur ki buradan

$$\sup_{x \in X} |D(x, A) - D(x, B)| \leq H(A, B) \tag{2.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\delta(B, A) &= \sup \{D(b, A) : b \in B\} \\
&= \sup \{D(b, A) - D(b, B) : b \in B\} \\
&\leq \sup \{D(x, A) - D(x, B) : x \in X\} \\
&\leq \sup \{|D(x, A) - D(x, B)| : x \in X\}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\delta(A, B) \leq \sup \{|D(x, A) - D(x, B)| : x \in X\}$$

olduğu gösterilebilir. O zaman

$$\begin{aligned}
H(A, B) &= \max \{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \\
&\leq \sup \{|D(x, A) - D(x, B)| : x \in X\} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde (2.1) ve (2.2) den istenilen eşitlik elde edilir. ■

Uyarı 2.4 *A ve B, reel sayıların boş kümeden farklı üsten sınırlı iki alt kümesi olsun. Bu durumda*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

dir. Gerçekten

$$A \subseteq A \cup B \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq \sup(A \cup B)$$

ve

$$B \subseteq A \cup B \quad \Rightarrow \quad \sup B \leq \sup(A \cup B)$$

olduğundan

$$\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B) \tag{2.3}$$

elde edilir. Şimdi $x \in A \cup B$ olsun. O zaman $x \in A$ veya $x \in B$ dir. Dolayısıyla $x \leq \sup A$ veya $x \leq \sup B$ dir. Buradan ise $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ elde edilir.olur. O zaman

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\} \tag{2.4}$$

olur. O halde (2.3) ve (2.4) den istenilen eşitlik elde edilir.

Aşağıdaki önermede δ nın bazı özellikleri incelenmiştir.

Önerme 2.4 *(X, d) bir metrik uzay ve $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır.*

1. $\delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$
2. $B \subseteq C \Rightarrow \delta(A, C) \leq \delta(A, B)$
3. $\delta(A \cup B, C) = \max\{\delta(A, C), \delta(B, C)\}$
4. $\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B)$

İspat. $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ olsun.

1.

$$\begin{aligned} \delta(A, B) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{x \in A}\{D(x, B)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{her } x \in A \text{ için } D(x, B) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{her } x \in A \text{ için } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow \quad A \subseteq \overline{B} \end{aligned}$$

2. $B \subseteq C$ olsun. Her $x \in X$ için $D(x,C) \leq D(x,B)$ dir. Bu durumda her $x \in A$ için de $D(x,C) \leq D(x,B)$ eşitsizliği sağlandığından $\delta(A,C) \leq \delta(A,B)$ elde edilir.

3. Uyarı 2.4 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\delta(A \cup B, C) &= \sup_{x \in A \cup B} \{D(x,C)\} \\ &= \max\left\{\sup_{x \in A}\{D(x,C)\}, \sup_{x \in B}\{D(x,C)\}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir.

4. $a \in A, b \in B$ ve $c \in C$ olsun. O zaman

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$$

olur. Burada $b \in B$ üzerinden infimum alınırsa

$$D(a,B) \leq d(a,c) + D(c,B)$$

elde edilir. $D(c,B) \leq \delta(C,B)$ olduğundan

$$D(a,B) \leq d(a,c) + \delta(C,B)$$

olur. Son eşitsizlikte $c \in C$ üzerinden infimum alınırsa

$$D(a,B) \leq D(a,C) + \delta(C,B)$$

olur. Yine $D(a,C) \leq \delta(A,C)$ olduğundan

$$D(a,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

olur. Böylece $a \in A$ üzerinden supremum alınırsa

$$\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

elde edilir.

■

Uyarı 2.5 *Önerme 2.4 de B kümesi kapalı ise*

$$\delta(A,B)=0 \Leftrightarrow A\subseteq B$$

ifadesinin doğru olduğu açıktır.

Önerme 2.5 *(X,d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda H, $\mathcal{CB}(X)$ üzerinde bir metriktir.*

İspat. H ın $\mathcal{CB}(X)\times\mathcal{CB}(X)$ üzerinde tanımınlı bir reel değerli fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca tanımdan $H(A,B)=H(B,A)$ dır. Şimdi $A,B\in\mathcal{CB}(X)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} H(A,B)=0 &\Leftrightarrow \max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=0 \\ &\Leftrightarrow \delta(A,B)=0 \text{ ve } \delta(B,A)=0 \\ &\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ ve } B\subseteq A \\ &\Leftrightarrow A=B \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $a,b,c,d\in[0,\infty)$ için

$$\max\{a+b,c+d\}\leq\max\{a,c\}+\max\{b,d\}$$

özelliğini kullanarak $A,B,C\in\mathcal{CB}(X)$ için

$$\begin{aligned} H(A,B) &= \max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\} \\ &\leq \max\{\delta(A,C)+\delta(C,B),\delta(B,C)+\delta(C,A)\} \\ &\leq \max\{\delta(A,C),\delta(C,A)\}+\max\{\delta(B,C),\delta(C,B)\} \\ &= H(A,C)+H(C,B) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $H:\mathcal{CB}(X)\times\mathcal{CB}(X)\to\mathbb{R}$ bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir. ■

Hausdorff metriğinin d ye bağlı olduğu aşağıdaki örnekle gösterilebilir. Ayrıca, eğer (X,d) tam metrik uzay ise $(\mathcal{CB}(X),H)$ ve $(\mathcal{K}(X),H)$ metrik uzayları da tamdırlar.

Örnek 2.7 *$X=\mathbb{R}$ üzerinde $d_1(x,y)=|x-y|$ ve*

$$d_2(x,y)=\begin{cases} 1 & , \quad x\neq y \\ 0 & , \quad x=y \end{cases}$$

metriklerini göz önüne alalım. Bu durumda $A = [0,1]\,, B = [3,5]$ *kümeleri için* $H_1(A,B) = 4$ *ve* $H_2(A,B) = 1$ *olur. Burada dikkat edelim ki her iki kümede* d_1 *ve* d_2 *metriğine göre kapalı ve sınırlıdır.*

Lemma 2.1 $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ *ve* $a \in A$ *olsun. O zaman her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ *vardır.*

İspat. $a \in A$ için

$$D(a,B) = \inf\{d(a,y) : y \in B\}$$

olur. İnfimumun tanımından her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a,b) \leq D(a,B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. Diğer taraftan

$$D(a,B) \leq \delta(A,B) \leq H(A,B)$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. ∎

Lemma 2.1 i aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz.

Lemma 2.2 $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ *ve* $a \in A$ *olsun. O zaman her* $q > 1$ *için*

$$d(a,b) \leq qH(A,B)$$

olacak şekilde bir $b \in B$ *vardır.*

İspat. Eğer $H(A,B) = 0$ ise $A = B$ dir. Bu durumda b, a olarak alınırsa her $q > 1$ için

$$d(a,b) \leq qH(A,B)$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. Şimdi $H(A,B) > 0$ olsun. Bu durumda

$$\varepsilon = (q-1)\,H(A,B) > 0$$

olarak seçilirse Lemma 2.1 gereğince her $q > 1$ için

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq H(A,B)+\varepsilon \\ &= H(A,B)+(q-1)\,H(A,B) \\ &= qH(A,B) \end{aligned}$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. ■

Önerme 2.6 *(X,d) bir metrik uzay olsun. Her $A, B, C, D \in \mathcal{CB}(X)$ için*

$$H(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{H(A,C), H(B,D)\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Önerme 2.4 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \delta(A \cup B, C \cup D) &= \max\{\delta(A, C \cup D), \delta(B, C \cup D)\} && (2.5) \\ &\leq \max\{\delta(A,C), \delta(B,D)\} && (2.6) \\ &\leq \max\{H(A,C), H(B,D)\} \end{aligned}$$

olur. Burada (2.5) için

$$\delta(A_1 \cup A_2, B_1) = \max\{\delta(A_1, B_1), \delta(A_2, B_1)\}$$

özelliği, (2.6) için

$$B_1 \subseteq A_1 \cup A_2 \Rightarrow \delta(A_1 \cup A_2) \leq \delta(B_1)$$

özelliği kullanıldı. Benzer şekilde

$$\delta(C \cup D, A \cup B) \leq \max\{H(A,C), H(B,D)\}$$

bulunur. O zaman H ın tanımı gereği

$$\begin{aligned} H(A \cup B, C \cup D) &= \max\{\delta(A \cup B, C \cup D), \delta(C \cup D, A \cup B)\} \\ &\leq \max\{H(A,C), H(B,D)\} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 2.3 *(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm ve $z \in X$ olsun. O zaman her $x \in X$ için*

$$D(z,Tz) \leq d(z,x) + D(x,Tz)$$

dir.

İspat. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} D(z,Tz) &= \inf\{d(z,y) : y \in Tz\} \\ &\leq \inf\{d(z,x) + d(x,y) : y \in Tz\} \\ &= d(z,x) + \inf\{d(x,y) : y \in Tz\} \\ &= d(z,x) + D(x,Tz) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Lemma 2.4 *(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm ve $z \in X$ olsun. O zaman her $x \in X$ için*

$$D(z,Tz) \leq D(z,Tx) + H(Tx,Tz)$$

dir.

İspat. Her $v \in X$ için $D(z,Tz) \leq d(z,v) + D(v,Tz)$ olduğundan her $v \in Tx$ için de $D(z,Tz) \leq d(z,v) + D(v,Tz)$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $D(v,Tz) \leq H(Tx,Tz)$ olduğundan her $v \in Tx$ için $D(z,Tz) \leq d(z,v) + H(Tx,Tz)$ olur. $v \in Tx$ üzerinden infimum alınırsa istenilen elde edilir. ■

2.3 Küme Değerli Dönüşümler için Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda küme değerli Lipschitz dönüşümü, küme değerli büzülme dönüşümü kavramları hatırlanacak ve bu tip dönüşümler için Nadler ve Reich tarafından verilen sabit nokta teoremleri incelenecektir.

Tanım 2.24 *(X,d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için*

$$H(Tx,Ty) \leq Ld(x,y) \tag{2.7}$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sabiti varsa T ye küme değerli Lipschitz dönüşümü adı verilir. (2.7) eşitsizliğini sağlayan L sayılarının en küçüğüne T nin Lipschitz sabiti denir ve k ile gösterilir. Eğer $k < 1$ ise T ye küme değerli büzülme dönüşümü, $k = 1$ ise genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Teorem 2.14 (Nadler) *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli büzülme dönüşümü olsun. O zaman T, X de bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. T nin Lipschitz sabiti $0 < k < 1$ olsun. $x_0 \in X$ keyfi olmak üzere $x_1 \in Tx_0$ seçelim. O zaman Lemma 2.1 gereğince

$$d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + k$$

olacak şekilde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Yine

$$d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + k^2$$

olacak şekilde bir $x_3 \in Tx_2$ vardır. Bu şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$$

olacak şekilde X içinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) + k^n \\ &\leq k\left[H(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + k^{n-1}\right] + k^n \\ &= kH(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) + 2k^n \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n \\ &\vdots \\ &\leq k^n d(x_0, x_1) + nk^n \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} [k^n d(x_0, x_1) + nk^n] \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n + \sum_{n=0}^{\infty} nk^n \\ &< \infty \end{aligned}$$

olur. Bu bize $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Bu durumda

$$D(x_{n+1}, Tz) \leq H(Tx_n, Tz) \leq kd(x_n, z)$$

olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$D(z, Tz) = 0$$

olur. Yani $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. O halde z, T nin bir sabit noktasıdır. ■

Örnek 2.8 *$X = [0,1]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $f : [0,1] \to [0,1]$*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & , \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ -\frac{x}{2} + 1 & , \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

olmak üzere $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \{f(x)\} \cup \{0\}$ şeklinde tanımlansın. O zaman T bir küme değerli büzülme dönüşümüdür. Ayrıca $F(T) = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ dir. Bu örnektende anlaşılacağı üzere küme değerli büzülme dönüşümünün sabit noktası tek olmayabilir.

Teorem 2.15 (Reich) *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx, Ty) \leq aD(x, Tx) + bD(y, Ty) + cd(x, y)$$

olacak şekilde $a + b + c < 1$ özelliğine uygun negatif olmayan a, b ve c sayıları var olsun. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Eğer $a + c = 0$ ise her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq bD(y, Ty)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $x \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $y \in Tx$ için

$$D(y, Ty) \leq H(Tx, Ty) \leq bD(y, Ty)$$

olur ki bu $D(y,Ty)=0$ olması ile mümkündür. O halde $y \in Ty$ dir. Şimdi $a+c>0$ ve $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $x_1 \in Tx_0$ noktasını alalım. O zaman Lemma 2.1 gereğince

$$d(x_1,x_2) \le H(Tx_0,Tx_1)+(a+c)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &\le aD(x_0,Tx_0)+bD(x_1,Tx_1)+cd(x_0,x_1)+(a+c) \\ &\le ad(x_0,x_1)+bd(x_1,x_2)+cd(x_0,x_1)+(a+c) \end{aligned}$$

olur ki buradan

$$d(x_1,x_2) \le \frac{a+c}{1-b} d(x_0,x_1)+\frac{a+c}{1-b}$$

elde edilir. Yine Lemma 2.1 gereğince

$$d(x_2,x_3) \le H(Tx_1,Tx_2)+\frac{(a+c)^2}{1-b}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &\le aD(x_1,Tx_1)+bD(x_2,Tx_2)+cD(x_1,x_2)+\frac{(a+c)^2}{1-b} \\ &\le ad(x_1,x_2)+bd(x_2,x_3)+cd(x_1,x_2)+\frac{(a+c)^2}{1-b} \end{aligned}$$

olur ki buradan

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &\le \frac{a+c}{1-b} d(x_1,x_2)+\left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 \\ &\le \left(\frac{a+c}{1-b}\right)\left[\frac{a+c}{1-b} d(x_0,x_1)+\frac{a+c}{1-b}\right]+\left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 d(x_0,x_1)+2\left(\frac{a+c}{1-b}\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $\lambda=\frac{a+c}{1-b}<1$ olmak üzere

$$d(x_n,x_{n+1}) \le \lambda^n d(x_0,x_1)+n\lambda^n$$

ve $x_{n+1} \in Tx_n$ özelliklerine uygun X için de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. O zaman

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n,x_{n+1}) \le d(x_0,x_1)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n+\sum_{n=0}^{\infty} n\lambda^n$$

olup $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n < \infty$ ve $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\lambda^n < \infty$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq aD(x_n, Tx_n) + bD(z, Tz) + cd(x_n, z) \\ &\leq ad(x_n, x_{n+1}) + bD(z, Tz) + cd(x_n, z) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$D(z, Tz) \leq bDd(z, Tz)$$

olur ki bu $D(z, Tz) = 0$ demektir. Yani $z \in Tz$ dir. Dolayısıyla T bir sabit noktaya sahiptir. ■

2.4 Mizoguchi-Takahashi Fonksiyonu ve Özellikleri

Küme değerli sabit nokta teoremlerinin en önemlilerinden biri Mizoguchi ve Takahashi tarafından elde edilmiştir. Bu kesimde, önce Mizoguchi-Takahashi fonksiyonu ve özellikleri incelenecek ve daha sonra Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin iki farklı yoldan ispatına değinilecektir.

Tanım 2.25 $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ *bir fonksiyon olsun. Eğer her* $t \in [0,\infty)$ *için* $\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) < 1$ *oluyorsa bu* φ *fonksiyona bir Mizoguchi-Takahashi fonksiyonu denir ve kısaca* $\mathcal{MT}$*-fonksiyonu şeklinde gösterilir.*

Uyarı 2.6 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun.* $t \in \mathbb{R}$ *için*

$$\limsup_{s\to t^+} \varphi(s) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{0<s-t<\varepsilon} \varphi(s)$$

dir.

Örnek 2.9 $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ *artmayan veya azalmayan bir fonksiyon ise o zaman* φ *bir* $\mathcal{MT}$*-fonksiyondur.*

Örnek 2.10 $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$, $\varphi(t) = c \in [0,1)$, *sabit fonksiyonu bir* $\mathcal{MT}$*-fonksiyondur.*

Örnek 2.11 $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ *fonksiyonu*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & , \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \\ 0 & \quad t \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman φ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon değildir.

Örnek 2.12 $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ *fonksiyonu*

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \\ 0 & \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman φ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur.

Lemma 2.5 $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ *foksiyonunun bir $\mathcal{MT}$-fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart her $t \in [0,\infty)$ için öyle $r_t \in [0,1)$ ve $\varepsilon_t > 0$ sayıları vardır ki her $s \in [t, t+\varepsilon_t)$ için $\varphi(s) \leq r_t$ dir.*

İspat. Eğer φ bir $\mathcal{MT}-$fonksiyonu ise o zaman her $t \in [0,\infty)$ için $\limsup_{s\to t^+} k(s) < 1$ sağlanır. O zaman her bir $t \in [0,\infty)$ için

$$\sup_{s\in[t,t+\varepsilon_t)} \varphi(s) < 1$$

olacak şekilde $\varepsilon_t > 0$ vardır. Bu yüzden

$$\sup_{s\in[t,t+\varepsilon_t)} \varphi(s) \leq r_t < 1$$

olacak şekilde $r_t \in [0,1)$ bulanabilir. Dolayısıyla her $s \in [t, t+\varepsilon_t)$ için $\varphi(s) \leq r_t$ dir. Tersinin doğru olduğu açıktır. ■

Teorem 2.16 $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ *bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.*

i) *φ bir $\mathcal{MT}$-fonksiyonudur.*

ii) *Her $t \in [0,\infty)$ ve her $s \in \left(t, t+\varepsilon_t^{(1)}\right)$ için $\varphi(s) \leq r_t^{(1)}$ olacak şekilde $r_t^{(1)} \in [0,1)$ ve $\varepsilon_t^{(1)} > 0$ vardır.*

iii) *Her* $t\in[0,\infty)$ *ve her* $s\in\left[t,t+\varepsilon_t^{(2)}\right]$ *için* $\varphi(s)\le r_t^{(2)}$ *olacak şekilde* $r_t^{(2)}\in[0,1)$ *ve* $\varepsilon_t^{(2)}>0$ *vardır.*

iv) *Her* $t\in[0,\infty)$ *ve her* $s\in(t,t+\varepsilon_t^{(3)}]$ *için* $\varphi(s)\le r_t^{(3)}$ *olacak şekilde* $r_t^{(3)}\in[0,1)$ *ve* $\varepsilon_t^{(3)}>0$ *vardır.*

v) *Her* $t\in[0,\infty)$ *ve her* $s\in[t,t+\varepsilon_t^{(4)})$ *için* $\varphi(s)\le r_t^{(4)}$ *olacak şekilde* $r_t^{(4)}\in[0,1)$ *ve* $\varepsilon_t^{(4)}>0$ *vardır.*

vi) *Herhangi bir* $\{x_n\}\subseteq[0,\infty)$ *artmayan dizisi için*

$$0\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)<1$$

dir.

vii) *Herhangi bir* $\{x_n\}\subseteq[0,\infty)$ *kesin azalan dizisi için*

$$0\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\varphi(x_n)<1$$

dir.

İspat. Aşağıdaki aşamaları takip ederek ispatı yapalım.

(a) (i)⇔(ii). İlk önce (i)⇒(ii) olduğunu gösterelim. φ nin bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon olduğunu kabul edelim. O zaman her $t\in[0,\infty)$ için

$$\sup_{t<s<t+\varepsilon_t}\varphi(s)<1$$

olacak şekilde $\varepsilon_t>0$ vardır. $\mathbb{R}$ nin yoğunluğundan

$$\sup_{t<s<t+\varepsilon_t}\varphi(s)\le r_t<1$$

olacak şekilde $r_t\in[0,1)$ vardır. Bu ise her $s\in(t,t+\varepsilon_t)$ için $\varphi(s)\le r_t$ demektir. Tersinin yani (ii)⇒(i) olduğu açıktır.

(b) (ii)⇔(iii). $r_t^{(2)}=r_t^{(1)}$ ve $\varepsilon_t^{(2)}=\varepsilon_t^{(1)}$ alırsak (iii)⇒(ii) olur. Tersine (ii) yi kabul edelim. $t\in[0,\infty)$ verilsin. Kabulümüzden her $s\in\left(t,t+\varepsilon_t^{(1)}\right)$ için $\varphi(s)\le r_t^{(1)}$ olacak şekilde $r_t^{(1)}\in[0,1)$ ve $\varepsilon_t^{(1)}>0$ vardır. $\varepsilon_t^{(2)}=\varepsilon_t^{(1)}$ ve

$$r_t^{(2)}=\max\left\{r_t^{(1)},\varphi(t),\varphi\left(t+\varepsilon_t^{(1)}\right)\right\}$$

alırsak, o zaman her $s \in \left[t, t+\varepsilon_t^{(2)}\right]$ için $\varphi(s) \leq r_t^{(2)}$ ve $r_t^{(2)} \in [0,1)$ dir. Böylece (ii)⇒(iii) ispatlandı.

(c) (iii)⇒(iv)⇒(ii) ve (iii)⇒(v)⇒(ii) gerektirmeleri açıktır.

(d) (v)⇒(vi). (v) nin olduğunu kabul edelim. $\{x_n\}$, $[0,\infty)$ da artmayan bir dizi olsun. O zaman

$$t_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \geq 0$$

dır. Kabulümüzden her $s \in [t, t+\varepsilon_{t_0})$ için $\varphi(s) \leq r_{t_0}$ olacak şekilde $r_{t_0} \in [0,1)$ ve $\varepsilon_{t_0} > 0$ vardır. Öte yandan $n \geq l$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $t_0 \leq x_n < t_0 + \varepsilon_{t_0}$ olacak şekilde $l \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden her $n \geq l$ için $\varphi(x_n) \leq r_{t_0}$ dır.

$$\eta = \max\{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \cdots, \varphi(x_n), r_{t_0}\}$$

olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(x_n) \leq \eta$ dir. Bu yüzden $0 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) < 1$ dir. Dolayısıyla (vi) sağlanır.

(e) (vi)⇒(vii) gerektirmesi açıktır.

(f) Son olarak (vii)⇒(v) gerektirmesini ispat edelim. (vii) sağlansın. O zaman (v) sağlanır. Gerçekten, aksini kabul edelim. Yani, her $r \in [0,1)$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $t_0 \in [0,\infty)$ elemanı var ki $s \in [t_0, t_0+\varepsilon)$ için $\varphi(s) > r$ eşitsizliği sağlanır. Bu yüzden $r_1 = \varphi(t_0) \in [0,1)$ ve $\varepsilon_1 = 1 > 0$ için $\varphi(s_1) > r_1$ şartını sağlayan $s_1 \in [t_0, t_0+\varepsilon_1)$ var olmalıdır. Son eşitsizlik $s_1 \neq t_0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $t_0 < s_1$ dir. $t_0 + \varepsilon_2 \leq s_1$ olacak şekilde $\varepsilon_2 > 0$ seçelim ve $r_2 = \max\left\{\varphi(s_1), 1-\frac{1}{2}\right\}$ olsun. O zaman r_2 ve ε_2 için $\varphi(s_2) > r_2$ şartını sağlayan $s_2 \in [t_0, t_0+\varepsilon_2)$ bulabiliriz. Bu ayrıca $t_0 < s_2 < s_1$ olmasını gerektirir. Böyle devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi(s_n) > r_n = \max\left\{\varphi(s_{n-1}), 1-\frac{1}{n}\right\} \geq 1-\frac{1}{n}$$

olacak şekilde kesin azalan $\{s_n\} \subset [t_0,\infty) \subset [0,\infty)$ dizisi oluşturabiliriz. Bu ise $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n) \geq 1$ demektir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla (vii)⇒(v) gerektirmesi doğrudur.

■

1972 yılında Reich bir çalışmasında aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.17 *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ bir dönüşüm olsun. $k : (0,\infty) \to [0,1)$, her $t \in (0,\infty)$ için*

$$\limsup_{r \to t^+} k(r) < 1$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X, x \neq y$ için

$$H(Tx,Ty) \leq k(d(x,y))d(x,y)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir.

Reich bu teoremi ispatladıktan sonra 1974 yılında aşağıdaki problemi ortaya atmıştır.

Problem 2.1 *Teorem 2.17 de $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alındığında T bir sabit noktaya sahip midir?*

Reich'in bu problemi üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bu problemin çözümü tam olarak yapılamasada bazı kısmi cevaplar verilmiştir. Bunlardan en önemlisi Mizoguchi ve Takahashi tarafından 1989 yılında elde edilmiştir. Mizoguchi ve Takahashi, Reich'in sorusunda k üzerindeki

$$\limsup_{r \to t^+} k(r) < 1$$

şartının her $t \in [0,\infty)$ için sağlanması halinde $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alınabileceğini göstermiştir.

Teorem 2.18 (Mizoguchi-Takahashi) *(X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. $k : (0,\infty) \to [0,1)$, her $t \in [0,\infty)$ için*

$$\limsup_{r \to t^+} k(r) < 1$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $x \neq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq k(d(x,y))d(x,y)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. T nin sabit noktaya sahip olmadığını kabul edelim. Yani her $x \in X$ için

$$D(x, Tx) > 0$$

olsun. k fonksiyonu üzerindeki şart dikkate alınırsa her $t > 0$ için öyle $M(t)$ ve $e(t)$ pozitif sayıları vardır ki her $r \in (t, t + e(t))$ için

$$k(r) \leq M(t) < 1$$

dir. Şimdi $x_1 \in X$ noktasını göz önüne alalım. $t_1 = D(x_1, Tx_1)$ diyelim. O zaman her $y \in Tx_1$ için $D(x_1, Tx_1) < d(x_1, y)$ olması durumunda

$$d(t_1) < \min\left\{e(t_1), \left(\frac{1}{M(t_1)} - 1\right) t_1\right\}$$

eşitsizliğini sağlayan $d(t_1)$ pozitif sayısını seçelim.

$$\varepsilon(x_1) = \min\left\{\frac{d(t_1)}{t_1}, 1\right\}$$

diyelim. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &< D(x_1, Tx_1) + \varepsilon(x_1) D(x_1, Tx_1) \\ &= (1 + \varepsilon(x_1))\, D(x_1, Tx_1) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. T nin sabit noktaya sahip olmaması kabulünden $x_1 \neq x_2$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} D(x_2, Tx_2) &\leq H(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq k(d(x_1, x_2)) d(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D(x_1, Tx_1) - D(x_2, Tx_2) &\geq D(x_1, Tx_1) - k(d(x_1, x_2)) d(x_1, x_2)) \\ &\geq \frac{1}{1 + \varepsilon(x_1)} d(x_1, x_2) - k(d(x_1, x_2)) d(x_1, x_2) \\ &= \left[\frac{1}{1 + \varepsilon(x_1)} - k(d(x_1, x_2))\right] d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} t_1 &= D(x_1, Tx_1) < d(x_1, x_2) \\ &< D(x_1, Tx_1) + \varepsilon(x_1) D(x_1, Tx_1) \\ &< t_1 + d(t_1) \\ &< t_1 + e(t_1) \end{aligned}$$

olduğundan

$$k(d(x_1, x_2)) \leq M(t_1) < 1$$

yazılabilir.

$$\varepsilon(x_1) \leq \frac{d(t_1)}{t_1} < \frac{1}{M(t_1)} - 1$$

olduğundan

$$\frac{1}{1+\varepsilon(x_1)} > M(t_1)$$

elde edilir. Böylece

$$\left[\frac{1}{1+\varepsilon(x_1)} - k(d(x_1, x_2))\right] > 0$$

dır. Şimdi en az bir $x_2 \in Tx_1$ için $D(x_1, Tx_1) = d(x_1, x_2)$ olması durumunda

$$\begin{aligned} D(x_1, Tx_1) - D(x_2, Tx_2) &\geq D(x_1, Tx_1) - H(Tx_1, Tx_2) \\ &\geq D(x_1, Tx_1) - k(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2)) \\ &= [1 - k(d(x_1, x_2))]\, D(x_1, Tx_1) \end{aligned}$$

olur. Yine $t_2 = D(x_2, Tx_2)$ diyelim. O zaman her $y \in Tx_2$ için $D(x_2, Tx_2) < d(x_2, y)$ olması durumunda $e(t_2)$ ve $M(t_2)$ için

$$0 < d(t_2) < \min\left\{e(t_2), \left(\frac{1}{M(t_2)} - 1\right) t_2\right\}$$

eşitsizliğini sağlayan $d(t_2)$ pozitif sayısını seçelim ve

$$\varepsilon(x_2) = \min\left\{\frac{d(t_2)}{t_2}, \frac{1}{2}, \frac{t_1}{t_2} - 1\right\}$$

diyelim. Benzer şekilde

$$d(x_2, x_3) < (1 + \varepsilon(x_2))\, D(x_2, Tx_2)$$

ve

$$D(x_2, Tx_2) - D(x_3, Tx_3) \geq \left[\frac{1}{1+\varepsilon(t_2)} - k(d(x_2, x_3))\right] d(x_2, x_3) > 0$$

eşitsizliklerini sağlayan $x_3 \in Tx_2$ seçebiliriz.

$$\varepsilon(x_2) \leq \frac{t_1}{t_2} - 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &< (1+\varepsilon(x_2))\,D(x_2,Tx_2) \\ &\leq t_1 \\ &= D(x_1,Tx_1) \\ &\leq d(x_1,x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, en az bir $x_3 \in Tx_2$ için $D(x_2,Tx_2) = d(x_2,x_3)$ olması durumunda

$$D(x_2,Tx_2) - D(x_3,Tx_3) \geq [1 - k(d(x_2,x_3))]\,D(x_2,Tx_3) > 0$$

ve

$$d(x_2,x_3) = D(x_2,Tx_2) < D(x_1,Tx_1) \leq d(x_1,x_2)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek X içinde aşağıdaki özelliklere uygun bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir.

i) $x_{n+1} \in Tx_n$,

ii) $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ ve $\{D(x_n,Tx_n)\}$ dizileri azalan,

iii) $D(x_n,Tx_n) - D(x_{n+1},Tx_{n+1}) \geq \left\{\frac{1}{1+\delta(x_n)} - k(d(x_n,x_{n+1}))\right\} d(x_n,x_{n+1})$.

Buradaki $\delta(x_n)$,

$$0 \leq \delta(x_n) \leq \frac{1}{n}$$

eşitsizliğini sağlayan bir reel sayıdır. $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi azalan olduğundan negatif olmayan bir reel sayıya yakınsar. O zaman k üzerindeki şart düşünülürse

$$\limsup_{n\to\infty} k(d(x_n,x_{n+1})) < 1$$

dir.

$$a_n = \frac{1}{1+\delta(x_n)} - k(d(x_n,x_{n+1}))$$

denilirse

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{1+\delta(x_n)} - \limsup_{n\to\infty} k(d(x_n,x_{n+1})) > 0$$

olacağından yeterince büyük n ler için

$$D(x_n,Tx_n) - D(x_{n+1},Tx_{n+1}) \geq bd(x_n,x_{n+1})$$

eşitsizliğini sağlayan $b > 0$ sayısı vardır. Diğer taraftan $\{D(x_n, Tx_n)\}$ dizisi azalan olduğundan yakınsaktır. Böylece her $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \\ &\leq \frac{1}{b} \sum_{j=n}^{m-1} [D(x_j, Tx_j) - D(x_{j+1}, Tx_{j+1})] \\ &= \frac{1}{b} [D(x_n, Tx_n) - D(x_m, Tx_m)] \to 0, (m, n \to \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır. Eğer $x_0 \neq x_n$ ise

$$H(Tx_0, Tx_n) \leq k(d(x_0, x_n))d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_n)$$

olur. Eğer $x_0 = x_n$ ise

$$H(Tx_0, Tx_n) \leq d(x_0, x_n)$$

olur. Ayrıca

$$D(x_{n+1}, Tx_0) \leq H(Tx_0, Tx_n) \leq d(x_0, x_n)$$

olduğundan $n \to \infty$ için

$$D(x_0, Tx_0) = 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T bir sabit noktaya sahiptir. ■

Sonuç 2.4 *(X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm ve α, her $t \in (0, \infty)$ için $0 < \alpha(t) < 1$ özelliğine sahip monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Her $t \in (0, \infty)$ için $0 < \alpha(t) < 1$ ve α monoton artan olduğundan her $t \in (0, \infty)$ için $\limsup_{s \to t^+} k(s) < 1$ sağlanır. O zaman Mizoguchi-Takahashi teoreminden T nin bir sabit noktası vardır. ■

Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin ispatı hem uzun hemde karmaşık görülmektedir. Bu teorem bir kaç yazar tarafından da farklı yollarla ispatlanmıştır. Burada daha basit ve anlaşılır olması nedeni ile Suzuki tarafından yapılan ispata değineceğiz. Bunun için önce $\mathcal{MT}$-fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

Lemma 2.6 *$\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon olsun. $\beta : [0,\infty) \to [0,1)$,*

$$\beta(t) = \frac{\varphi(t)+1}{2}$$

şeklinde tanımlı β fonksiyonu da bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur.

İspat. Her $t \in [0,\infty)$ için $\varphi(t) < 1$ olduğundan $\frac{\varphi(t)+1}{2} < 1$ olur ki bu ise $0 < \beta(t) < 1$ demektir. Ayrıca $\varphi(t) < 1$ olduğından $\varphi(t) < \frac{\varphi(t)+1}{2} < 1$ elde edilir, yani her $t \in [0,\infty)$ için $\varphi(t) < \beta(t)$ dir. Şimdi $t \in [0,\infty)$ sabit bir eleman olsun. $\varphi : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon olduğundan her $s \in [t, t+\varepsilon)$ için $\varphi(s) \leq r_t$ olacak şekilde $r_t \in [0,1)$ ve $\varepsilon_t > 0$ vardır. $\lambda_t = \frac{r_t+1}{2}$ olsun. O zaman her $s \in [t, t+\varepsilon)$ için

$$\varphi(s) \leq r_t \quad \Rightarrow \quad \varphi(s)+1 \leq r_t+1 \quad \Rightarrow \quad \beta(s) = \tfrac{\varphi(s)+1}{2} \leq \tfrac{r_t+1}{2} = \lambda_t$$

den $\beta(s) \leq \lambda_t$ elde edilir. Dolayısıyla β bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur. ∎

Teorem 2.19 *(X,d) bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm ve α da bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon olsun. O zaman her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx,Ty) \leq \alpha(d(x,y))d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\beta : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $\beta(t) = \frac{1+\alpha(t)}{2}$ olarak tanımlansın. Lemma 2.6 gereğince β bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur. $x, y \in X$, $x \neq y$ keyfi iki nokta olsun. $u \in Tx$ ve $\varepsilon = \frac{1-\alpha(d(x,y))}{2}d(x,y) > 0$ diyelim. Lemma 2.1 gereğince $d(u,v) \leq H(Tx,Ty) + \epsilon$

olacak şekilde $v \in Ty$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq H(Tx,Ty) + \frac{1-\alpha(d(x,y))}{2} d(x,y) \\ &\leq \alpha(d(x,y))d(x,y) + \frac{1-\alpha(d(x,y))}{2} d(x,y) \\ &= \frac{1+\alpha(d(x,y))}{2} d(x,y) \\ &= \beta(d(x,y))d(x,y) \end{aligned}$$

olur. Yani her $x, y \in X$ ve $u \in Tx$ için

$$d(u,v) \leq \beta(d(x,y))d(x,y) \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ vardır. Şimdi $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer $x_0 = x_1$ ise o zaman x_0, T nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat tamamlanır. Şimdi $x_0 \neq x_1$ olsun. O zaman (2.8) den

$$d(x_1,x_2) \leq \beta(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Eğer $x_1 = x_2$ ise o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat tamamlanır. $x_1 \neq x_2$ olsun. O zaman (2.8) den

$$d(x_2,x_3) \leq \beta(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. O zaman bu şekilde devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \beta(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})$$

özelliklerine uygun X de bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilir (Bu dizinin ardışık terimlerinin birbirinden farklı olduğu kabul edilebilir, aksi halde ispat biter). Her $t \in [0,\infty)$ için $\beta(t) < 1$ olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\mathbb{R}$ de artmayan bir dizidir ve alttan sınırlı olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\lambda \geq 0$ sayısına yakınsar. β bir $\mathcal{MT}$-fonksiyonu olduğu için $\limsup_{s\to\lambda^+} \beta(s) < 1$ ve $\beta(\lambda) < 1$ dir. Dolayısıyla her $s \in [\lambda, \lambda+\varepsilon)$ için $\beta(s) \leq r$ olacak şekilde $r \in [0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. Her $n \geq k_0$ için $\lambda \leq d(x_n,x_{n+1}) < \lambda + \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. O halde $n \geq k_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_{n+2}) &\leq \beta(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1}) \\ &\leq rd(x_n,x_{n+1}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \\
&= \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} r d(x_n, x_{n+1}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(x_{k_0}, x_{k_0+1}) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\
&\leq \beta(d(x_n, z))d(x_n, z) \\
&\leq d(x_n, z)
\end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z, Tz) = 0$ olur ki bu ise $z \in Tz$ demektir. Dolayısıyla T bir sabit noktaya sahiptir. ■

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde tezin orijinal kısmını oluşturan çalışmalara yer vereceğiz. İlk olarak tek değerli dönüşümler için F-büzülme kavramı göz önüne alınarak bunun küme değerli versiyonu tanımlanacak ve küme değerli F-büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta sonucu elde edilecektir. Ardından bir genişletme ile genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme kavramı ile bu tip dönüşümler için sabit nokta teoremi elde edilecektir. Daha sonra α-geçişli dönüşüm kavramı incelenecek ve Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoreminin α-geçişli dönüşümler göz önüne alınarak bir ispatına değinilecektir. Son olarak α-geçişli dönüşümler yardımıyla küme değerli pseudo Picard operatörü tanımlanacak ve bu tip operatörlere örnek olması bakımından bazı sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

3.1. F-Büzülmeler için Sabit Nokta Teoremleri

Bu kesimde Wardowski tarafından tanımlanan ve bilinen büzülme kavramını da kapsayan F-büzülme dönüşümü tanımı incelenecek ve bazı sabit nokta teoremleri verilecektir.

$\mathcal{F}$ aşağıdaki şartları sağlayan bütün $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümlerinin ailesi olsun.

(F1) F kuvvetli artandır. Yani her $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ için $\alpha < \beta$ iken $F(\alpha) < F(\beta)$ dır.

(F2) Pozitif sayıların her $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ dır.

(F3) $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır.

Tanım 3.1 *(X, d) bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için*

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T ye bir F-büzülme adı verilir.

Aşağıda $\mathcal{F}$ ailesine ait bazı örnekler verilmiştir. Bu örnekler yardımıyla literatürde bulunan bazı büzülme dönüşümlerinin bir F-büzülme oldukları görülmektedir.

Örnek 3.1 *$F_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_1(\alpha) = \ln(\alpha)$ şeklinde tanımlansın. O zaman $F_1 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer T bir F_1-büzülme ise o zaman $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y) \tag{3.2}$$

sağlanır. Ayrıca $d(Tx, Ty) = 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için (3.2) eşitsizliği de sağlanır. Böylece T dönüşümü $L = e^{-\tau}$ sabiti ile birlikte bir Lipschitz dönüşümüdür. $L = e^{-\tau} < 1$ olduğundan T bir büzülme dönüşümüdür. Dolayısıyla her büzülme bir F_1-büzülmedir.

Örnek 3.2 *$F_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_2(\alpha) = \alpha + \ln(\alpha)$ şeklinde tanımlansın. O zaman $F_2 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer T bir F_2-büzülme ise o zaman $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için*

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx,Ty) - d(x,y)} \leq e^{-\tau} \tag{3.3}$$

sağlanır.

Örnek 3.3 *$F_3 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_3(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ şeklinde tanımlansın. O zaman $F_3 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer T bir F_3-büzülme ise o zaman $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için*

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{(1 + \tau\sqrt{d(x, y)})^2} d(x, y)$$

sağlanır.

Örnek 3.4 *$F_4 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_4(\alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha)$ şeklinde tanımlansın. O zaman $F_4 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. Eğer T bir F_4-büzülme ise o zaman $d(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için*

$$\frac{d(Tx, Ty)(d(Tx, Ty) + 1)}{d(x, y)(d(x, y) + 1)} \leq e^{-\tau}$$

sağlanır.

Uyarı 3.1 *(F1) ve (3.1) eşitsizliğinden her F-büzülme, bir büzülebilir dönüşümdür. Yani, T bir F-büzülme ise $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ sağlanır. Bu yüzden her F-büzülme dönüşümü süreklidir.*

Uyarı 3.2 *$H_1, H_2 \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer her $\alpha > 0$ için $H_1(\alpha) \le H_2(\alpha)$ ve $G = H_2 - H_1$ azalmayan bir dönüşüm ise o zaman her H_1-büzülme bir H_2-büzülmedir. Gerçekten Uyarı 3.1 gereğince $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için*

$$G(d(Tx,Ty)) \le G(d(x,y))$$

elde edilir. O zaman $d(Tx,Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} \tau + H_2(d(Tx,Ty)) &\le \tau + H_1(d(Tx,Ty)) + G(d(Tx,Ty)) \\ &\le H_1(d(x,y)) + G(d(x,y)) \\ &= H_2(d(x,y)) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi 2012 yılında Wardowski tarafından verilen teoremi ifade ve ispat edelim:

Teorem 3.1 *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü F-büzülme olsun. O zaman T nin bir tek sabit noktası vardır. Üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin sabit noktasına yakınsar.*

İspat. İlk olarak T nin sabit noktasının var olması halinde tek olması gerektiğini gösterelim. Gerçekten z ile w, T nin farklı iki sabit noktası olsun. O zaman $d(z,w) = d(Tz,Tw) > 0$ olduğundan (3.1) eşitsizliğinden

$$\tau \le F(d(z,w)) - F(d(Tz,Tw)) = 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde T nin sabit noktası varsa tektir.

Şimdi T nin bir sabit noktasının var olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir $x_0 \in X$ noktasını ele alalım. Her $n \ge 0$ tamsayı için $x_{n+1} = Tx_n$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım ve $\gamma_n = d(x_{n+1}, x_n)$ olsun. Eğer $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, o zaman $Tx_{n_0} = x_{n_0}$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi her $n \geq 0$ tamsayı için $x_{n+1} \neq x_n$ olduğunu kabul edelim. O halde her $n \geq 0$ tamsayı için $\gamma_n > 0$ olduğundan (3.1) eşitsizliğinden

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(\gamma_0) - n\tau \tag{3.4}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.4) eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

elde edilir. Bu yüzden (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

olur. O halde (F3) den

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k F(\gamma_n) = 0$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır. Ayrıca (3.4) eşitsizliğinden her $n \geq 0$ tamsayı için

$$\gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) \leq -\gamma_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.5}$$

olur. (3.5) eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k n = 0 \tag{3.6}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.6) dan her $n \geq n_1$ için $\gamma_n^k n\tau \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sonuç olarak her $n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}$$

bulunur. O halde $m > n \geq n_1$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Son olarak, T nin sürekliliğinden

$$d(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

olur. Böylece $z = Tz$ olup ispat tamamlanır. ■

Örnek 3.1 ve Örnek 3.2 de tanmlı F_1 ve F_2 dönüşümlerini göz önüne alalım. O zaman her $\alpha > 0$ için $F_1(\alpha) < F_2(\alpha)$ ve $F_2 - F_1$ dönüşümü kuvvetli artan olduğundan Uyarı 3.1 gereğince her büzülme dönüşümü (3.3) büzülme şartını sağlar. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.5 *$X = \left\{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi alışılmış metrik ile birlikte göz önüne alınsın. O zaman (X, d) tam bir metrik uzaydır. $T : X \to X$ dönüşümü*

$$Tx_n = \begin{cases} x_1 & , \quad n = 1 \\ & \\ x_{n-1} & , \quad n > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Örnek 3.1 de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln(\alpha)$ için T, bir F_1-büzülme değildir. Yani T dönüşümü bir büzülme dönüşümü değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{d(Tx_n, Tx_1)}{d(x_n, x_1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)n}{2} - 1}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n - 2}{n^2 + n - 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. Öte yandan Örnek 3.2 de tanımlanan $F_1(\alpha) = \alpha + \ln(\alpha)$ için T, $\tau = 1$ ile birlikte bir F_2-büzülmedir. Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alalım. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(Tx_m, Tx_n) > 0 \Leftrightarrow ((m > 2 \wedge n = 1) \vee (m > n > 1))$$

dir.

Durum 1 *$m > 2$ ve $n = 1$ için*

$$\begin{aligned}
\frac{d(Tx_m, Tx_1)}{d(x_m, x_1)} e^{d(Tx_m,Tx_1)-d(x_m,x_1)} &= \frac{x_{m-1}-1}{x_m-1} e^{x_{m-1}-x_m} \\
&= \frac{m^2-m-2}{m^2+m-2} e^{-m} \\
&< e^{-m} \\
&< e^{-1}
\end{aligned}$$

olur.

Durum 2 *$m > n > 1$ için*

$$\begin{aligned}
\frac{d(Tx_m, Tx_n)}{d(x_m, x_n)} e^{d(Tx_m,Tx_n)-d(x_m,x_n)} &= \frac{x_{m-1}-x_{n-1}}{x_m-x_n} e^{x_{m-1}-x_{n-1}-x_m+x_n} \\
&= \frac{m+n-1}{m+n+1} e^{n-m} \\
&< e^{n-m} \\
&\leq e^{-1}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi F-büzülme dönüşümlerinin küme değerli versiyonunu verelim.

Tanım 3.2 *(X, d) bir metrik uzay, $F \in \mathcal{F}$ ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için*

$$\tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \tag{3.7}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T ye küme değerli F-büzülme denir.

Eğer Örnek 3.1 de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln(\alpha)$ dönüşümü göz önüne alınırsa, her küme değerli büzülme, bir küme değerli F-büzülme olur.

Teorem 3.2 *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ küme değerli F-büzülme olsun. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından, $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçilebilir. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise, o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olur ve böylece ispat tamamlanır. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1, Tx_1) > 0$ dır. Öte yandan, $D(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$ ve (F1) den

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1))$$

olur. Dolayısıyla (3.7) eşitsizliğinden

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \tau \tag{3.8}$$

elde edilir. Tx_1 kompakt olduğundan, $d(x_1, x_2) = D(x_1, Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Bu durumda (3.8) eşitsizliğinden

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \tau$$

elde edilir. Eğer bu şekilde devam edilirse, her $n \geq 0$ tamsayısı için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_n, x_{n-1})) - \tau \tag{3.9}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Eğer $x_{n_0} \in Tx_{n_0}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise o zaman x_{n_0}, T nin bir sabit noktası olur ve böylece ispat tamamlanır. Bu yüzden her $n \geq 0$ tamsayısı için $x_n \notin Tx_n$ olduğunu kabul edelim ve her $n \geq 0$ tamsayısı için $a_n = d(x_n, x_{n+1})$ olsun. O zaman her $n \geq 0$ tamsayısı için $a_n > 0$ olduğundan ve (3.9) eşitsizliğini kullanarak

$$F(a_n) \leq F(a_{n-1}) - \tau \leq F(a_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(a_0) - n\tau \tag{3.10}$$

bulunur. (3.10) eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ elde edilir. Bu yüzden (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

olur. O halde (F3) den

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k F(a_n) = 0$$

olacak şekilde bir $k \in (0, 1)$ vardır. Ayrıca (3.10) eşitsizliğinde her $n \geq 0$ tamsayı için

$$a_n^k F(a_n) - a_n^k F(a_0) \leq -a_n^k n\tau \leq 0 \tag{3.11}$$

olur. (3.11) eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} n a_n^k = 0 \tag{3.12}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.12) ifadesinden her $n \geq n_1$ için $\gamma_n^k n\tau \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sonuç olarak her $n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{1/k}}$$

bulunur. Böylece $m > n \geq n_1$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

olup $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Diğer taraftan (3.7) eşitsizliğinden $H(Tx, Ty) > 0$ olacak şekildeki $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) < d(x, y)$$

elde edilir ve böylece her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

olur. O zaman

$$D(x_{n+1}, Tz) \leq H(Tx_n, Tz) \leq d(x_n, z) \tag{3.13}$$

olacağından (3.7) eşitsizliğinden $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z, Tz) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $z \in \overline{Tz} = Tz$ elde edilir ki bu T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.3 *Dikkat edelim ki Teorem 3.2 de her $x \in X$ için Tx kompaktır. Bu yüzden Reich probleminde olduğu gibi aşağıdaki soru akla gelebilir.*

Problem 3.1 *Teorem 3.2 de $\mathcal{K}(X)$ yerine $\mathcal{CB}(X)$ alındığında T bir sabit noktaya sahip midir?*

Bu sorunun cevabı da tam olarak bilinmese de, F üzerine bir şart eklenerek Problem 3.1 e kısmen Teorem 3.3 de bir cevap verilmiştir.

Teorem 3.3 *(X,d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ küme değerli F-büzülme olsun. Ayrıca F aşağıdaki şartı sağlarsa o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.*

(F4) $\inf A > 0$ *olacak şekildeki her* $A \subset (0,\infty)$ *kümesi için*

$$F(\inf A) = \inf F(A)$$

dır.

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından, $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçilebilir. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise, o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olur ve böylece ispat tamamlanır. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1, Tx_1) > 0$ dır. Öte yandan, $D(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$ ve (F1) den

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1))$$

olur. Dolayısıyla (3.7) eşitsizliğinden

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \tau \tag{3.14}$$

elde edilir. Dikkat edelim ki $D(x_1, Tx_1) > 0$ dır. (F4) den

$$F(D(x_1, Tx_1)) = \inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1, y))$$

olur ve böylece (3.14) eşitsizliğinden

$$\inf_{y \in Tx_1} F(d(x_1, y)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \tau < F(d(x_1, x_0)) - \frac{\tau}{2} \tag{3.15}$$

bulunur. O zama (3.15) eşitsizliğinden

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise ispat biter. Aksi takdirde biz aynı yolla

$$F(d(x_2, x_3)) \leq F(d(x_2, x_1)) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ elde edebiliriz. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \geq 0$ tamsayısı için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_n, x_{n-1})) - \frac{\tau}{2}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. İspatın geri kalan kısmı, Teorem 3.2 ispatında olduğu gibi yapılabilir. ■

Uyarı 3.4 *(F1) şartını sağlayan sürekli her F fonksiyonu (F4) şartını sağlar.*

Aşağıdaki örnek, küme değerli F-büzülme dönüşümü olan fakat küme değerli büzülme dönüşümü olmayan dönüşümlerin var olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Örnek 3.6 $X = \left\{x_n = \frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *kümesi alışılmış metrik ile birlikte göz önüne alınsın. O zaman (X, d) tam bir metrik uzaydır. $T : X \to \mathcal{K}(X)$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} \{x_1\} & , \quad x = x_1 \\ \\ \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\} & , \quad x = x_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü $F(\alpha) = \alpha + \ln \alpha$ ve $\tau = 1$ ile birlikte küme değerli F-büzülmedir. Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alalım. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$H(Tx_m, Tx_n) > 0 \Leftrightarrow ((m > 2 \wedge n = 1) \vee (m > n > 1))$$

dır.

Durum 1 *$m > 2$ ve $n = 1$ için*

$$\begin{aligned} \frac{H(Tx_m, Tx_1)}{d(x_m, x_1)} e^{H(Tx_m, Tx_1) - d(x_m, x_1)} &= \frac{x_{m-1} - x_1}{x_m - x_1} e^{x_{m-1} - x_m} \\ &= \frac{m^2 - m - 2}{m^2 + m - 2} e^{-m} < e^{-m} < e^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2 *$m > n > 1$ için*

$$\begin{aligned}\frac{H(Tx_m, Tx_n)}{d(x_m, x_n)} e^{H(Tx_m,Tx_n)-d(x_m,x_n)} &= \frac{x_{m-1} - x_{n-1}}{x_m - x_n} e^{x_{m-1}-x_{n-1}-x_m+x_n} \\ &= \frac{m+n-1}{m+n+1} e^{n-m} < e^{n-m} \leq e^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu yüzden T bir küme değerli F-büzülmedir. Ayrıca Teorem 3.2 veya Teorem 3.3 nin diğer şartları da sağlanır. O halde T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Öte yandan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(Tx_n, Tx_1)}{d(x_n, x_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n-1} - 1}{x_n - 1} = 1$$

olduğu için T küme değerli büzülme dönüşümü değildir.

Tanım 3.3 *(X, d) bir metrik uzay, $F \in \mathcal{F}$ ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $H(Tx, Ty) > 0$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(H(Tx, Ty)) \leq F(M(x, y)) \tag{3.16}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ varsa T ye genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme denir. Burada

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{2}\left[D(x, Ty) + D(y, Tx)\right]\right\}$$

dir.

Eğer Örnek 3.1 de tanımlanan $F_1(\alpha) = \ln(\alpha)$ dönüşümü göz önüne alınırsa, bu durumda her genelleştirilmiş küme değerli büzülme, bir genelleştirilmiş küme değerli F-büzülmedir.

Teorem 3.4 *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{K}(X)$ genelleştirilmiş küme değerli F-büzülme olsun. Eğer T veya F sürekli ise o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ olsun. Her $x \in X$ için Tx boş olmadığından, $x_1 \in Tx_0$ olacak şekilde $x_1 \in X$ seçilebilir. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise, o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olur ve böylece ispat tamamlanır. $x_1 \notin Tx_1$ olsun. Tx_1 kapalı olduğundan $D(x_1, Tx_1) > 0$ dır. Öte yandan, $D(x_1, Tx_1) \leq H(Tx_0, Tx_1)$ ve (F1) den

$$F(D(x_1, Tx_1)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1))$$

olur. Dolayısıyla (3.16) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
F(D(x_1, Tx_1)) &\leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \\
&\leq F(M(x_0, x_1)) - \tau \\
&= F(\max \left\{ \begin{array}{l} d(x_0, x_1), D(x_0, Tx_0), D(x_1, Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0, Tx_1) + D(x_1, Tx_0)\right] \end{array} \right\}) - \tau \\
&\leq F(\max \left\{ d(x_0, x_1), \frac{1}{2} D(x_0, Tx_1) \right\}) - \tau \\
&\leq F(\max \left\{ d(x_0, x_1), \frac{1}{2}\left[d(x_0, x_1) + D(x_1, Tx_1)\right] \right\}) - \tau \\
&\leq F(\max \left\{ d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1) \right\}) - \tau \\
&= F(d(x_0, x_1)) - \tau \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Tx_1 kompakt olduğundan $d(x_1, x_2) = D(x_1, Tx_1)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. O zaman (3.17) eşitsizliğinden

$$F(d(x_1, x_2)) \leq F(H(Tx_0, Tx_1)) \leq F(d(x_1, x_0)) - \tau$$

elde edilir. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \geq 0$ tamsayısı için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$F(d(x_n, x_{n+1})) \leq F(d(x_n, x_{n-1})) - \tau \qquad (3.18)$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Teorem 3.1 deki gibi $\{x_n\}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tz$ ve

$$D(x_n, Tz) \leq H(Tx_n, Tz)$$

dir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için $D(z, Tz) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $z \in Tz$ dir. Şimdi F sürekli olsun. Bu durumda biz iddia ediyoruz ki $z \in Tz$ dir. Aksini kabul edelim. Yani, $z \notin Tz$ olsun. Bu durumda her $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\{x_n\}$ nin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Aksi halde her $n \geq n_1$ için $x_n \in Tz$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki bu ise $z \in Tz$ olması demektir. Bu ise $z \notin Tz$ olması ile çelişir. O halde $n_k \geq n_0$ için $D(x_{n_k+1}, Tz) > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \tau + F(D(x_{n_k+1}, Tz)) &\leq \tau + F(H(Tx_{n_k}, Tz)) \\ &\leq F(M(x_{n_k}, z)) \\ &\leq F(\max \left\{ \begin{array}{c} d(x_{n_k}, z), d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[D(x_{n_k}, Tz) + d(z, x_{n_k+1}) \end{array} \right\}) \end{aligned}$$

elde edilir. F nin sürekliliği kullanılırsa $k \to \infty$ için $\tau + F(D(z, Tz)) \leq F(D(z, Tz))$ bulunur ki bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden $z \in Tz$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.5 *Örnek 3.6 göz önüne alındığında T genelleştirilmiş küme değerli F-büzülmedir, fakat genelleştirilmiş küme değerli büzülme değildir.*

3.2 Kıyaslama Fonksiyonları ve α-Geçişli Dönüşümler

Bu kısımda kıyaslama fonksiyonları ve bazı özellikleri incelenecek, ardından (c)-kıyaslama fonksiyonları kullanılarak α-geçişli tek değerli dönşümler için bazı sabit nokta teoremleri göz önüne alınacaktır. Buradaki bilgiler sonraki kısımlara alt yapı oluşturacaktır.

İlk olarak $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. ψ için aşağıdaki şartları göz önüne alalım.

ψ_1) ψ azalmayan bir dönüşüm,

ψ_2) $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$, $\forall t \geq 0$,

ψ_3) $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$, $\forall t > 0$.

Kısalık olması bakımından $\Phi = \{\psi : \psi_1$ ve ψ_2 sağlanır$\}$ ve $\Psi = \{\psi : \psi_1$ ve ψ_3 sağlanır$\}$ diyelim. Literatürde Φ ailesine ait fonksiyonlara kıyaslama fonksiyonları, Ψ ailesine ait fonksiyonlara da (c)-kıyaslama fonksiyonları adı verilir. Tanımlardan $\Psi \subseteq \Phi$ olduğu açıktır. Yani her (c)-kıyaslama fonksiyonu bir kıyaslama fonksiyonudur.

Lemma 3.1 *Eğer $\psi \in \Phi$ ise o zaman her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ dir.*

İspat. ψ_2 den her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ dır. En az bir $t_0 > 0$ için $\psi(t_0) \geq t_0$ olduğunu kabul edelim. ψ azalmayan bir dönüşüm olduğundan

$$t_0 \leq \psi(t_0) \leq \psi(\psi(t_0)) \leq \cdots \leq \psi^n(t_0) \leq \cdots$$

olur. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$t_0 \leq \lim_{n\to\infty} \psi^n(t_0) = 0$$

olur ki bu çelişkidir. O halde her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ dir. ∎

Lemma 3.2 *Eğer $\psi \in \Phi$ ise o zaman $\psi(0) = 0$ dır.*

İspat. $\psi(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\psi(0) = t_1 > 0$ dır. ψ azalmayan bir dönüşüm olduğundan $\psi(0) \leq \psi(t_1)$ ve buradan da Lemma 3.1 gereğince

$$0 < t_1 = \psi(0) \leq \psi(t_1) < t_1$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $\psi(0) = 0$ dır. ∎

Lemma 3.3 *Eğer $\psi \in \Phi$ ise o zaman ψ, sıfır noktasında süreklidir.*

İspat. $\psi \in \Phi$ olsun. O zaman Lemma 3.2 gereğince $\psi(0) = 0$ dır. $t_n \to 0$ olsun. $\psi(t_n) \to \psi(0) = 0$ olduğunu göstereceğiz. $t_n \to 0$ olduğundan $t_n \to 0^+$ olur ki bu ise her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq t_n$ demektir. ψ azalmayan bir dönüşüm olduğundan

$$0 = \psi(0) \leq \psi(t_n) \leq t_n$$

elde edilir. Son eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa $\psi(t_n) \to \psi(0) = 0$ olur. O halde ψ, sıfır noktasında süreklidir. ∎

Örnek 3.7 $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *fonksiyonu* $\lambda \in [0,1)$ *olmak üzere* $\psi(t) = \lambda t$ *şeklinde tanımlansın. O zaman* $\psi \in \Psi$ *olduğu açıktır.*

Örnek 3.8 $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *fonksiyonu*

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{18} & , \quad \frac{2}{3} < t \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\psi \in \Psi$ *olur.*

Örnek 3.9 *$\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\psi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Phi \backslash \Psi$ dir.*

Tanım 3.4 *X boş olmayan bir küme, $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\alpha(x,y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için $\alpha(Tx,Ty) \geq 1$ oluyorsa o zaman T ye α-geçişli dönüşüm denir.*

Örnek 3.10 *$X = [0,\infty)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \sqrt{x}$ ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} e^{x-y} & , \quad x \geq y \\ \\ 0 & , \quad x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü α-geçişlidir.

Örnek 3.11 *$X = (0,\infty)$ olmak üzere $T : X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \ln x$ ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 2 & , \quad x \geq y \\ \\ 0 & , \quad x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü α-geçişlidir.

Samet, Vetro ve Vetro, (c)-kıyaslama fonksiyonlarını ve α-geçişli dönüşümleri kullanarak α-ψ-büzülme kavramını ortaya atmışlardır. Ardından bu yeni tip büzülmeler için bazı sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir. Elde edilen sonuçlar literetürde sıralı metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremleri ile yakından ilgilidir.

Tanım 3.5 *(X,d) bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir dönüşüm, $\psi \in \Psi$ ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. O zaman her $x,y \in X$ için*

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \leq \psi(d((x,y)) \tag{3.19}$$

oluyorsa T dönüşümüne bir α-ψ-büzülme denir.

Uyarı 3.6 *Tanım 3.5 da eğer $\alpha(x,y) = 1$ ve $\delta \in [0,1)$ olmak üzere $\psi(t) = \delta t$ şeklinde alınırsa her büzülme dönüşümünün bir α-ψ-büzülme olduğu görülür.*

Tanım 3.6 *(X,τ) bir topolojik uzay $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlıyorsa α ya (B) özelliğine sahiptir denir.*

(B) *Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x$ iken $\alpha(x_n, x) \geq 1$ dir.*

Tanım 3.7 *X boş olmayan bir küme olmak üzere eğer $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartı sağlıyorsa o zaman X e (H) özelliğine sahiptir denir.*

(H) *Her $x, y \in F(T)$ için $\alpha(x,z) \geq 1$ ve $\alpha(y,z) \geq 1$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.*

Teorem 3.5 *(X,d) tam bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir α-geçişli, α-ψ-büzülme dönüşümü olsun. Eğer $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var ve T sürekli ise o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ hipotezde bahsedilen nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0 = Tx_{n-1}$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Eğer $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa o zaman x_{n_0}, T nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat tamamlanır. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. T, α-geçişli olduğundan

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx_0, Tx_1) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$$

dir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.19) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alarak ve (3.20) eşitsizliğini göz önünde bulundurarak

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n) d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \psi(d(x_{n-1}, x_n)) \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarım yöntemiyle her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1))$$

olur. Şimdi, her $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d\left(x_k, x_{k+1}\right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k(d(x_0, x_1)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^k(d(x_0, x_1)) \end{aligned}$$

olup $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(d((x_0, x_1))$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. T sürekli olduğundan

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.7 *Teorem 3.5 de T nin sürekliliği yerine α nın (B) özelliğine sahip olması kullanılabilir.*

Teorem 3.6 *(X, d) tam bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir α-geçişli, α-ψ-büzülme dönüşümü olsun. $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ var olduğunu kabul edelim. Eğer α, (B) özelliğine sahip ise o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. Teorem 3.5 in ispatında olduğu gibi $\{x_n\}$ dizisinin (X, d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Diğer tarafdan α nın (B) özelliğine sahip olması ve (3.20) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, z) \geq 1 \tag{3.21}$$

dir. (3.19) ve (3.21) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &\leq d(z,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tz) \\ &= d(z,x_{n+1}) + d(Tx_n,Tz) \\ &\leq d(z,x_{n+1}) + \alpha(x_n,z)d(Tx_n,Tz) \\ &\leq d(z,x_{n+1}) + \psi(d(x_n,z)) \end{aligned}$$

elde edilir. ψ, $t=0$ noktasında sürekli olduğundan ve son eşitsizlikten $n \to \infty$ için $d(z,Tz)=0$ olur. Yani $z=Tz$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 3.12 *$X=\mathbb{R}$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T: X \to X$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} 2x - \frac{3}{2} & , \quad x > 1 \\ \frac{x}{2} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$d(T1,T2) = 2 > 1 = d(1,2)$$

olduğundan T bir büzülme dönüşümü değildir. Şimdi, $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x,y \in [0,1] \\ 0 & , \quad x \notin [0,1] \text{ veya } y \notin [0,1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T dönüşümü her $t \geq 0$ için $\psi(t)=\frac{t}{2}$ ile birlikte bir α-ψ-büzülmedir, çünkü her $x,y \in X$ için

$$\alpha(x,y)d(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}d(x,y)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $x_0=1$ için $\alpha(1,T1)=\alpha(1,\frac{1}{2})=1$ dir. Şimdi T nin α-geçişli dönüşüm olduğunu gösterelim. $\alpha(x,y) \geq 1$ olsun. O zaman α nın tanımından $x,y \in [0,1]$ dir. O halde $Tx=\frac{x}{2} \in [0,1]$ ve $Ty=\frac{y}{2} \in [0,1]$ olduğundan $\alpha(Tx,Ty) \geq 1$ dir. Son olarak T sürekli olduğundan Teorem 3.5 in tüm şartları sağlandı. O halde T nin bir sabit noktası vardır.

Uyarı 3.8 *Yukarıdaki örnektende anlaşılacağı üzere Teorem 3.5 sabit noktanın tekliğini garanti etmez. Çünkü örnekte* 0 *ve* $3/2$, T *nin iki sabit noktasıdır.*

Örnek 3.13 $X = \mathbb{R}$ *kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım.* $T : X \to X$ *dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} 2x - \frac{3}{2} & , \quad x > 1 \\ \\ \frac{x}{4} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$d(T1, T2) = \frac{9}{4} > 1 = d(1, 2)$$

olduğu için T *bir büzülme dönüşümü değildir. Ayrıca* T *sürekli olmadığından Teorem 3.5 bu örneğe uygulanamaz. Şimdi,* $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonu*

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x, y \in [0, 1] \\ \\ 0 & , \quad x \notin [0, 1] \text{ veya } y \notin [0, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T *dönüşümü her* $t \geq 0$ *için* $\psi(t) = \frac{t}{4}$ *ile birlikte bir* α-ψ-*büzülmedir, çünkü her* $x, y \in X$ *için*

$$\alpha(x, y) d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{4} d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $x_0 = 1$ *için* $\alpha(1, T1) = \alpha(1, \frac{1}{4}) = 1$ *dir. Şimdi* T *nin* α-*geçişli dönüşüm olduğunu gösterelim.* $\alpha(x, y) \geq 1$ *olsun. Bu durumda* α *nın tanımından* $x, y \in [0, 1]$ *dir. O halde* $Tx = \frac{x}{4} \in [0, 1]$ *ve* $Ty = \frac{y}{4} \in [0, 1]$ *olduğundan* $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ *dir. Son olarak,* α *nın (B) özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *ve* $x_n \to x$ *olacak şekilde* X *de bir* $\{x_n\}$ *dizisi var olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *olduğu için* α *nın tanımından her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \in [0, 1]$ *dir. Dolayısıyla* $x_n \to x$ *olduğundan* $x \in [0, 1]$ *olmalıdır. O halde her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha(x_n, x) \geq 1$ *dir. Bu yüzden* α, *(B) özelliğine sahip olup Teorem 3.6 in tüm şartları sağlanır. O halde* T *nin bir sabit noktası vardır.*

Uyarı 3.9 *Yine Teorem 3.6 da sabit noktanın tekliğini garanti etmez. Çünkü yukarıdaki örnekte* 0 *ve* $3/2$, T *nin iki sabit noktasıdır.*

Teorem 3.7 *Teorem 3.5 veya Teorem 3.6 nın şartlarına ek olarak* X, *(H) özelliğine de sahip olsun. O zaman* T *bir tek sabit noktaya sahiptir.*

İspat. z ve w, T nin iki sabit noktası olsun. O zaman X in (H) özelliğinden dolayı $\alpha(z,u) \geq 1$ and $\alpha(w,u) \geq 1$ olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. T, α-geçişli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(z, T^n u) \geq 1 \tag{3.22}$$

ve

$$\alpha(w, T^n u) \geq 1 \tag{3.23}$$

olur. Bu yüzden (3.19) ve (3.22) eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(z, T^n u) &= d(Tz, T(T^{n-1}u)) \\ &\leq \alpha(z, T^{n-1}u) d(Tz, T(T^{n-1}u)) \\ &\leq \psi(d(z, T^{n-1}u)) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(z, T^n u) \leq \psi^n(d(z,u))$$

bulunur. Son eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa $T^n u \to z$ elde edilir. Benzer olarak (3.19) ve (3.23) eşitsizliklerini kullanarak $n \to \infty$ için $T^n u \to w$ elde edilir. Metrik uzaylarda limit noktasının tekliğinden $z = w$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi α-ψ-büzülme dönüşümleri için bazı genelleştirmeler verelim.

Tanım 3.8 (X,d) *bir metrik uzay,* $T : X \to X$ *bir dönüşüm,* $\psi \in \Psi$ *ve* $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ *bir dönüşüm olsun. O zaman her* $x, y \in X$ *için*

$$\alpha(x,y) d(Tx, Ty) \leq \psi(m(x,y)) \tag{3.24}$$

oluyorsa T *ye Ćirić tip* α-ψ*-genelleştirilmiş büzülme denir. Burada*

$$m(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}[d(x,Ty) + d(y,Tx)]\}$$

dır.

Uyarı 3.10 *Tanım 3.8 da eğer* $\alpha(x,y) = 1$ *ve* $\delta \in [0,1)$ *olmak üzere* $\psi(t) = \delta t$ *şeklinde alınırsa o zaman her Ćirić tip genelleştirilmiş büzülmeler bir Ćirić tip* α-ψ*-genelleştirilmiş büzülmedir.*

Teorem 3.8 (X,d) *tam bir metrik uzay,* $T : X \to X$ *bir* α*-geçişli ve Ćirić tip* α-ψ*-genelleştirilmiş büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca* $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ *olacak şekilde bir* $x_0 \in X$ *var olduğunu kabul edelim. Eğer* T *sürekli veya* α*, (B) özelliğine sahip ise o zaman* T *bir sabit noktaya sahiptir. Ek olarak* X*, (H) özelliğine de sahip ise o zaman* T *nin sabit noktası tektir.*

İspat. $x_0 \in X$ hipotezde bahsedilen nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n x_0 = Tx_{n-1}$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Eğer $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa o zaman x_{n_0}, T nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat tamamlanır. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. T, α-geçişli olduğundan

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, Tx_0) \geq 1 \Rightarrow \alpha(Tx_0, Tx_1) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$$

dir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.24) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alarak ve (3.25) eşitsizliğini göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n) d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \psi(m(x_{n-1}, x_n)) \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir ki burada

$$
\begin{aligned}
m(x_{n-1}, x_n) &= \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n), \\ \frac{1}{2}[d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})] \end{array} \right\} \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \\ \frac{1}{2}[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \end{array} \right\} \\
&= \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2} d(x_{n-1}, x_{n+1})\} \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \\ \frac{1}{2}[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \end{array} \right\} \\
&= \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}
\end{aligned}
$$

dir. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1})$ ise (3.26) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &\leq \psi(m((x_{n-1}, x_n)) \\
&\leq \psi(\max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}) \\
&= \psi(d(x_n, x_{n+1})) \\
&< d(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}
$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_{n-1}, x_n) > d(x_n, x_{n+1})$ dir. Böylece

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi(d(x_{n-1}, x_n))$$

olur ve buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(d(x_0, x_1)) \tag{3.27}$$

elde edilir. Şimdi her $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ için

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k(d(x_0, x_1)) \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^k(d(x_0, x_1))
\end{aligned}
$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(d(x_0, x_1))$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir.

Şimdi α, (B) özelliğine sahip olsun. (3.25) eşitsizliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, z) \geq 1 \tag{3.28}$$

dir. (3.24) ve (3.28) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &\leq d(z,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tz) \\ &= d(z,x_{n+1}) + d(Tx_n,Tz) \\ &\leq d(z,x_{n+1}) + \alpha(x_n,z)d(Tx_n,Tz) \\ &\leq d(z,x_{n+1}) + \psi(m(x_n,z)) \end{aligned} \tag{3.29}$$

elde edilir ki burada

$$\begin{aligned} m(x_n,z) &= \max\left\{\begin{array}{l} d(x_n,z), d(x_n,Tx_n), d(z,Tz), \\ \frac{1}{2}[d(x_n,Tz)+d(z,Tx_n)] \end{array}\right\} \\ &= \max\left\{\begin{array}{l} d(x_n,z), d(x_n,x_{n+1}), d(z,Tz), \\ \frac{1}{2}[d(x_n,Tz)+d(z,x_{n+1})] \end{array}\right\} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $d(z,Tz) > 0$ olduğunu kabul edelim. (3.27) eşitsizliğini ve $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğunu göz önüne alırsak, her $n \geq n_0$ için $d(x_n,z) < \frac{d(z,Tz)}{2}$ ve $d(x_n,x_{n+1}) < \frac{d(z,Tz)}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} m(x_n,z) &\leq \max\left\{\begin{array}{l} d(x_n,z), d(x_n,x_{n+1}), d(z,Tz), \\ \frac{1}{2}\left[d(x_n,z)+d(z,Tz)+d(z,x_{n+1})\right] \end{array}\right\} \\ &\leq d(z,Tz) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (3.29) eşitsizliğinden her $n \geq n_0$ için

$$d(z,Tz) \leq d(z,x_{n+1}) + \psi(d(z,Tz))$$

elde edilir. Son eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(z,Tz) \leq \psi(d(z,Tz)) < d(z,Tz)$$

olur ki bu çelişkidir. O halde $d(z,Tz)=0$ yani $z=Tz$ elde edilir. böylece T nin bir sabit noktası vardır.

Şimdi X in (H) özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. z ve w, T nin iki sabit noktası olsun. O zaman X in (H) özelliğinden dolayı $\alpha(z,u)\geq 1$ and $\alpha(w,u)\geq 1$ olacak şekilde bir $u\in X$ vardır. T, α-geçişli olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\alpha(z,T^n u)\geq 1 \tag{3.30}$$

ve

$$\alpha(w,T^n u)\geq 1 \tag{3.31}$$

elde edilir. Bu yüzden (3.24) ve (3.30) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} d(z,T^{n+1}u) &= d(Tz,T(T^n u)) \\ &\leq \alpha(z,T^n u)d(Tz,T(T^n u)) \\ &\leq \psi(m(z,T^n u)) \end{aligned}$$

elde edilir ki burada

$$m(x,y)=\max\left\{d(z,T^n u),d(z,T^{n+1}u)\right\}$$

bulunur. Yani

$$d(z,T^{n+1}u)\leq\psi\left(\max\left\{d(z,T^n u),d(z,T^{n+1}u)\right\}\right) \tag{3.32}$$

bulunur. Genelliği bozmaksızın her $n\in\mathbb{N}$ için $d(z,T^n u)>0$ olsun. O zaman $d(z,T^n u)>d(z,T^{n+1}u)$ olmalıdır. Aksi halde bir çelişki elde edilir. O halde biz (3.32) den ve ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan her $n\in\mathbb{N}$ için

$$d(z,T^{n+1}u)\leq\psi\left(d(z,T^n u)\right)\leq\cdots\leq\psi^n\left(d(z,u)\right)$$

bulunur. Son eşitsizlikten $n\to\infty$ için limit alınırsa $T^{n+1}u\to z$ elde edilir. Benzer olarak (3.24) ve (3.31) eşitsizlikleri kullanılarak $n\to\infty$ için $T^{n+1}u\to w$ elde edilir. Metrik uzaylarda limit noktasının tekliğinden $z=w$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Örnek 3.14 *$X = [0, \infty)$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to X$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} 2x - \frac{5}{3} & , \quad x > 1 \\ \\ \frac{x}{3} & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x, y \in [0, 1] \\ \\ 0 & , \quad x \notin [0, 1] \ \textit{veya} \ y \notin [0, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $d(T1, T2) = 2$ ve $m(1, 2) = \frac{3}{2}$ olduğu için

$$d(T1, T2) \leq \delta m(1, 2)$$

olacak şekilde hiç bir $\delta \in [0, 1)$ sayısı bulunamadığından T, Ćirić tip genelleştirilmiş büzülme dönüşümü değildir. Fakat T dönüşümü her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{3}$ ile birlikte bir Ćirić tip α-ψ-genelleştirilmiş büzülmedir, çünkü her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{3} d(x, y) \leq \frac{1}{3} m(x, y)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $x_0 = 1$ için $\alpha(1, T1) = \alpha(1, \frac{1}{3}) = 1$ dir. Şimdi T nin α-geçişli olduğunu gösterelim. $\alpha(x, y) \geq 1$ olsun. O zaman α nın tanımından $x, y \in [0, 1]$ dir. O halde $Tx = \frac{x}{3} \in [0, 1]$ ve $Ty = \frac{y}{3} \in [0, 1]$ olduğundan $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ dir. Son olarak α nın (B) özelliğine sahip olduğunu da gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi var olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ olduğu için α nın tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in [0, 1]$ dir. Dolayısıyla $x_n \to x$ olduğundan $x \in [0, 1]$ olmalıdır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ dir. Bu yüzden α, (B) özelliğine sahiptir. Dolayısıyla Teorem 3.8 in tüm şartları sağlanır. O halde T nin bir sabit noktası vardır.

Uyarı 3.11 *Dikkat edelim ki Teorem 3.8, eğer X, (H) özelliğine sahip değilse sabit noktanın tekliğini garanti etmemektedir. Yukarıdaki örnekte X, (H) özelliğine sahip olmayıp 0 ve 5/3, T nin iki sabit noktasıdır.*

3.3 Küme Değerli α-Geçişli ve α_*-Geçişli Dönüşümler

Bu kesimde α-geçişli dönüşümlerin küme değerli versiyonları gözönüne alınarak küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

Tanım 3.9 *(X, d) bir metrik uzay, $T : X \to \mathcal{P}(X)$ bir küme değerli dönüşüm, $\psi \in \Psi$ ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$\alpha(x, y)H(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

oluyorsa T ye küme değerli α-ψ-büzülme;

$$\alpha_*(Tx, Ty)H(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)),$$

oluyorsa T ye küme değerli α_*-ψ-büzülme dönüşümü denir. Burada

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \inf\{\alpha(a, b) : a \in Tx, b \in Ty\}$$

dır. Benzer olarak $d(x, y)$ yerine $M(x, y)$ alınarak T ye sırası ile Ćirić tip küme değerli α-ψ-genelleştirilmiş büzülme ve Ćirić tip küme değerli α_*-ψ-genelleştirilmiş büzülme denir.

Tanım 3.10 *X boş olmayan bir küme, $T : X \to \mathcal{P}(X)$ bir küme değerli dönüşüm ve $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun.*

(a) *eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve $y \in Tx$ için; $\alpha(y, z) \geq 1$ eşitsizliği her $z \in Ty$ için sağlanıyorsa T ye α-geçişli denir.*

(b) *eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve $y \in Tx$ için $\alpha_*(Tx, Ty) \geq 1$ oluyorsa T ye α_*-geçişli denir.*

Uyarı 3.12 *Her α_*-geçişli dönüşüm aynı zamanda bir α-geçişli dönüşümdür. Ama tersi genelde doğru değildir.*

Örnek 3.15 *$X = [-1, 1]$ kümesini göz önüne alalım. $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu*

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ \\ 1 & , \quad x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca $T : X \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \{-x\} & , \quad x \notin \{-1, 0\} \\ \{0, 1\} & , \quad x = -1 \\ \{1\} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $x = -1$, ve $y = 0 \in Tx = \{0, 1\}$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ olmasına rağmen $\alpha_*(Tx, Ty) = \alpha_*(\{0, 1\}, \{1\}) = 0$ dır. Dolayısıyla T bir α_*-geçişli dönüşüm değildir. Şimdi T nin α-geçişli olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki durumlar sonucunda T dönüşümünün α-geçişli olduğu görülmektedir:

Durum 1 *Eğer $x = 0$ ise o zaman $y = 1$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dır. Ayrıca, $z = -1 \in Ty = \{-1\}$ için $\alpha(y, z) \geq 1$ dir.*

Durum 2 *Eğer $x = -1$ ise o zaman $y \in \{0, 1\}$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dır. Ayrıca her $z \in Ty$ için $\alpha(y, z) \geq 1$ dır.*

Durum 3 *Eğer $x \notin \{-1, 0\}$ ise o zaman $y = -x$ ve $\alpha(x, y) \geq 1$ dır. Ayrıca $z = x \in Ty = \{x\}$ olduğu için $\alpha(y, z) \geq 1$ dir.*

Şimdi, Mohammadi, Rezapour ve Shahzad tarafından küme değerli α-ψ-büzülme dönüşümleri için verilen sabit nokta teoreminin ifade ve ispatını inceleyelim.

Teorem 3.9 *(X, d) bir tam metrik uzay, $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ bir fonksiyon, $\psi \in \Psi$ kuvvetli artan bir fonksiyon, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ α-geçişli ve küme değerli α-ψ-büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca, $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer T sürekli veya α, (B) özelliğine sahip ise o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ hipotezdeki noktalar olsun. Eğer $x_1 = x_0$ ise o zaman ispat biter. $x_1 \neq x_0$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} D(x_1, Tx_1) &\leq \alpha(x_0, x_1) H(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq \psi\left(d(x_0, x_1)\right) \end{aligned}$$

olur. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise o zaman x_1, T nin sabit noktası olur. $x_1 \notin Tx_1$ ve $q > 1$ olsun. O zaman

$$0 < D(x_1, Tx_1) < q\psi\left(d(x_0, x_1)\right)$$

dir. $t_0 = d(x_0, x_1)$ diyelim. O zaman $t_0 > 0$ ve $D(x_1, Tx_1) < q\psi(t_0)$ dır. Dolayısıyla $d(x_1, x_2) < q\psi(t_0)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. ψ kuvvetli artan bir fonksiyon olduğundan

$$\psi(d(x_1, x_2)) < \psi(q\psi(t_0))$$

olur. $x_2 \neq x_1$ olduğu kabul edilebilir. Aksi halde ispat biter. Şimdi $q_1 = \frac{\psi(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_1,x_2))}$ olsun. $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ ve T, α-geçişli olduğundan her $u \in Tx_1$ için $\alpha(x_1, u) \geq 1$ dir. $u = x_2 \in Tx_1$ alırsak $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ olur. O zaman $q_1 > 1$ ve

$$\begin{aligned} d(x_2, Tx_2) &\leq \alpha(x_1, x_2)H(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq \psi(d(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise o zaman x_2, T nin sabit noktası olur. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. O zaman

$$0 < D(x_2, Tx_2) < q_1\psi(d(x_1, x_2))$$

dir. Bu yüzden $d(x_2, x_3) < q_1\psi(d(x_1, x_2)) = \psi(q\psi(t_0))$ olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Dolayısıyla $x_3 \neq x_2$ ve $\psi(d(x_2, x_3)) < \psi^2(q\psi(t_0))$ dır. $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ ve T, α-geçişli olduğundan her $v \in Tx_2$ için $\alpha(x_2, v) \geq 1$ dir. $v = x_3 \in Tx_2$ alırsak $\alpha(x_2, x_3) \geq 1$ olur. $q_2 = \frac{\psi^2(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_2,x_3))}$ olsun. O zaman $q_2 > 1$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(x_3, Tx_3) &\leq \alpha(x_2, x_3)H(Tx_2, Tx_3) \\ &\leq \psi(d(x_2, x_3)) \end{aligned}$$

olur. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_{n-1}, x_n \neq x_{n-1}$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^{n-1}(q\psi(t_0))$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Şimdi, her $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^{k-1}(q\psi(t_0)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{k-1}(q\psi(t_0)) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(q\psi(t_0))$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise, o zaman

$$D(z,Tz)=\lim_{n\to\infty} D(x_{n+1},Tz)\leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n,Tz)=0$$

olur ve böylece $z\in\overline{Tz}=Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi, α, (B) özelliğine sahip olsun. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha(x_n,z)\geq 1$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(x_{n+1},Tz) &\leq H(Tx_n,Tz) \\ &\leq \alpha(x_n,z)H(Tx_n,Tz) \\ &\leq \psi(d(x_n,z)) \end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} d(x_n,z)=0$ ve ψ, 0 noktasında sürekli olduğundan (3.33) eşitsizliğinde $n\to\infty$ için $D(z,Tz)=0$ bulunur ve böylece $z\in\overline{Tz}=Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat biter. ■

Şimdi de Asl, Rezapour ve Shahzad tarafından küme değerli α_*-ψ-büzülme dönüşümleri için verilen sabit nokta teoreminin ifade ve ispatını inceleyelim.

Teorem 3.10 *(X,d) bir tam metrik uzay, $\alpha: X\times X\to[0,\infty)$ bir fonksiyon, $\psi\in\Psi$ kuvvetli artan bir fonksiyon, $T: X\to\mathcal{C}(X)$ α_*-geçişli ve küme değerli α_*-ψ-büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca, $\alpha(x_0,x_1)\geq 1$ olacak şekilde $x_0\in X$ ve $x_1\in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer T sürekli veya α, (B) özelliğine sahip ise o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0\in X$ ve $x_1\in Tx_0$ hipotezdeki noktalar olsun. Eğer $x_1=x_0$ ise o zaman ispat biter. $x_1\neq x_0$ olsun. Eğer $x_1\in Tx_1$ ise o zaman x_1, T nin sabit noktası olur. $x_1\notin Tx_1$ ve $q>1$ olsun. $\alpha(x_0,x_1)\geq 1$ ve T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_0,Tx_1)\geq 1$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &< D(x_1,Tx_1) \\ &\leq \alpha_*(Tx_0,Tx_1)H(Tx_0,Tx_1) \\ &< q\alpha_*(Tx_0,Tx_1)H(Tx_0,Tx_1) \end{aligned}$$

olur. O halde

$$0<d(x_1,x_2)<q\alpha_*(Tx_0,Tx_1)H(Tx_0,Tx_1)\leq q\psi\left(d(x_0,x_1)\right)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Ayrıca $x_2 \neq x_1$ ve $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ dir. Bu yüzden T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq 1$ dir. $t_0 = d(x_0, x_1)$ diyelim. Buradan $t_0 > 0$ ve $d(x_1, x_2) < q\psi(t_0)$ dır. ψ kuvvetli artan bir fonksiyon olduğundan

$$\psi(d(x_1, x_2)) < \psi(q\psi(t_0))$$

dir. $q_1 = \frac{\psi(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_1,x_2))}$ olsun. O zaman $q_1 > 1$ dir. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise o zaman x_2, T nin sabit noktası olur. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. O zaman

$$0 < D(x_2, Tx_2) \leq \alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2) < q_1\alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2)$$

dir. Bu yüzden

$$0 < d(x_2, x_3) < q_1\alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2) \leq q_1\psi(d(x_1, x_2)) = \psi(q\psi(t_0))$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Dolayısıyla $x_3 \neq x_2$, $\alpha(x_2, x_3) \geq 1$ ve $\psi(d(x_2, x_3)) < \psi^2(q\psi(t_0))$ dir. $q_2 = \frac{\psi^2(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_2,x_3))}$ olsun. O zaman $q > 1$ dir. Eğer $x_3 \in Tx_3$ ise o zaman x_3, T nin sabit noktası olur. $x_3 \notin Tx_3$ olsun. O zaman

$$0 < D(x_3, Tx_3) < \alpha_*(Tx_2, Tx_3)H(Tx_2, Tx_3) < q_2\alpha_*(Tx_2, Tx_3)H(Tx_2, Tx_3)$$

dir. Bu yüzden

$$0 < d(x_3, x_4) < q_2\alpha_*(Tx_2, Tx_3)H(Tx_2, Tx_3) \leq q_2\psi(d(x_2, x_3)) = \psi^2(q\psi(t_0))$$

olacak şekilde $x_4 \in Tx_3$ vardır. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_{n-1}, x_n \neq x_{n-1}$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^{n-1}(q\psi(t_0))$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Şimdi, her $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^{k-1}(q\psi(t_0)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{k-1}(q\psi(t_0)) \end{aligned}$$

olduğundan ve $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(q\psi(t_0))$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$

vardır.

Eğer T sürekli ise, o zaman

$$D(z,Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1},Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n,Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi, α, (B) özelliğine sahip olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n,z) \geq 1$ elde edilir. T, α_*-geçişli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_*(Tx_n,Tz) \geq 1$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(z,Tz) &\leq H(Tz,Tx_n) + D(Tx_n,z) \\ &\leq H(Tz,Tx_n) + d(x_{n+1},z) \\ &\leq \alpha_*(Tx_n,Tz)H(Tx_n,Tz) + d(x_{n+1},z) \\ &\leq \psi(d(x_n,z)) + d(x_{n+1},z) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} d(x_n,z) = 0$ ve ψ, 0 noktasında sürekli olduğundan son eşitsizlikten $n \to \infty$ için $D(z,Tz) = 0$ olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat biter. ∎

Örnek 3.16 *$X = [0,\infty)$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to \mathcal{C}(X)$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} \left[2x - \frac{3}{2}, \infty\right) & , \quad x > 1 \\ \\ \left[0, \frac{x}{2}\right] & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x,y \in [0,1] \\ \\ 0 & , \quad x \notin [0,1] \ \textit{veya}\ y \notin [0,1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ile birlikte bir α_*-ψ-büzülmedir, çünkü her $x, y \in X$ için

$$\alpha_*(Tx,Ty)H(Tx,Ty) \leq \frac{1}{2}d(x,y)$$

dir. Ayrıca $x_0 = 1$ ve $x_1 = \frac{1}{2} \in T1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için $\alpha(1, \frac{1}{2}) = 1$ dir. Şimdi T nin α_*-geçişli olduğunu gösterelim. $\alpha(x,y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve $y \in Tx$

için $x \in [0,1]$ *ve* $y \in Tx = \left[0, \frac{x}{2}\right]$ *olur. O zaman* $Ty = \left[0, \frac{x}{4}\right]$ *olacağından*

$$\alpha_*(Tx, Ty) = \inf\left\{\alpha(a,b) : a \in \left[0, \frac{x}{2}\right], b \in \left[0, \frac{y}{4}\right]\right\} = 1$$

dir. O halde T *bir* α_**-geçişli dönüşümdür. Son olarak* α *nın (B) özelliğine sahip olduğunu da gösterelim. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *ve* $x_n \to x$ *olacak şekilde* X *de bir* $\{x_n\}$ *dizisi var olsun. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *olduğu için* α *nın tanımından her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \in [0,1]$ *dir. Dolayısıyla* $x_n \to x$ *olduğundan* (X,d) *metrik uzayında* $x \in [0,1]$ *dır. O halde her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\alpha(x_n, x) \geq 1$ *dir. Bu yüzden* α*, (B) özelliğine sahiptir. Dolayısıyla Teorem 3.10 in tüm şartları sağlanır. O halde* T *nin bir sabit noktası vardır. Dikkat edelim ki* T *nin sonsuz çoklukta sabit noktası vardır.*

Teorem 3.11 *(X,d) bir tam metrik uzay, $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ bir fonksiyon, $\psi \in \Psi$ kuvvetli artan bir fonksiyon, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$, α-geçişli ve Ćirić tip küme değerli α-ψ-genelleştirilmiş büzülme olsun. Ayrıca $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer T sürekli veya α, (B) özelliğine sahip ise o zaman T bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ hipotezdeki noktalar olsun. Eğer $x_1 = x_0$ ise o zaman ispat biter. $x_1 \neq x_0$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} D(x_1, Tx_1) &\leq \alpha(x_0, x_1) H(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq \psi\left(M(x_0, x_1)\right) \end{aligned}$$

olur ki burada

$$\begin{aligned} M(x_0, x_1) &= \max\left\{\begin{array}{l} d(x_0, x_1), D(x_0, Tx_0), D(x_1, Tx_1), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_0, Tx_1) + D(x_1, Tx_0)\right] \end{array}\right\} \\ &= \max\left\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1), \frac{1}{2} D(x_0, Tx_1)\right\} \\ &\leq \max\left\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1), \frac{1}{2}\left[d(x_0, x_1) + D(x_1, Tx_1)\right]\right\} \\ &= \max\left\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1)\right\} \end{aligned}$$

dir. Eğer $d(x_0, x_1) \leq D(x_1, Tx_1)$ ise

$$D(x_1, Tx_1) \leq \psi\left(D(x_1, Tx_1)\right)$$

olur ki buradan $D(x_1, Tx_1) = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $d(x_0, x_1) > D(x_1, Tx_1)$ dır. Böylece

$$D(x_1, Tx_1) \leq \psi\left(d(x_0, x_1)\right)$$

bulunur. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise o zaman x_1, T nin sabit noktası olur. $x_1 \notin Tx_1$ ve $q > 1$ olsun. Bu durumda

$$0 < D(x_1, Tx_1) < q\psi\left(d(x_0, x_1)\right)$$

dir. $t_0 = d(x_0, x_1)$ diyelim. Bu yüzden $t_0 > 0$ ve $D(x_1, Tx_1) < q\psi(t_0)$ dır. Dolayısıyla $d(x_1, x_2) < q\psi(t_0)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. ψ kuvvetli artan bir dönüşüm olduğundan

$$\psi\left(d(x_1, x_2)\right) < \psi\left(q\psi(t_0)\right)$$

dir. Dikkat edelim ki $x_2 \neq x_1$ dir. $q_1 = \frac{\psi(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_1,x_2))}$ olsun. Bu durumda $q_1 > 1$ ve

$$\begin{aligned} d(x_2, Tx_2) &\leq \alpha(x_1, x_2) H(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq \psi\left(M(x_1, x_2)\right) \end{aligned}$$

olur ki burada

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2) &= \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_1, x_2), D(x_1, Tx_1), D(x_2, Tx_2), \\ \frac{1}{2}\left[D(x_1, Tx_2) + D(x_2, Tx_1)\right] \end{array} \right\} \\ &= \max\left\{ d(x_1, x_2), D(x_2, Tx_2), \frac{1}{2} D(x_1, Tx_2) \right\} \\ &\leq \max\left\{ d(x_1, x_2), D(x_2, Tx_2), \frac{1}{2}\left[d(x_1, x_2) + D(x_2, Tx_2)\right] \right\} \\ &= \max\left\{ d(x_1, x_2), D(x_2, Tx_2) \right\} \end{aligned}$$

dir. Eğer $d(x_1, x_2) \leq D(x_2, Tx_2)$ ise

$$D(x_2, Tx_2) \leq \psi\left(D(x_2, Tx_2)\right)$$

olur ki buradan $D(x_2, Tx_2) = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $d(x_1, x_2) > D(x_2, Tx_2)$ dır. Böylece

$$D(x_2, Tx_2) \leq \psi\left(d(x_1, x_2)\right)$$

bulunur. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise o zaman x_2, T nin sabit noktası olur. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. Bu durumda

$$0 < D(x_2, Tx_2) < q_1\psi\left(d(x_1, x_2)\right)$$

dir. Bu yüzden $d(x_2, x_3) < q_1\psi(d(x_1, x_2)) = \psi(q\psi(t_0))$ olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Dolayısıyla $x_3 \neq x_2$ ve $\psi(d(x_2, x_3)) < \psi^2(q\psi(t_0))$ dir. $q_2 = \frac{\psi^2(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_2,x_3))}$ olsun. O zaman $q_2 > 1$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(x_3, Tx_3) &\leq \alpha(x_2, x_3)H(Tx_2, Tx_3) \\ &\leq \psi(M(x_2, x_3)) \end{aligned}$$

olur ki burada

$$\begin{aligned} M(x_2, x_3) &= \max\left\{\begin{array}{l} d(x_2, x_3), D(x_2, Tx_2), D(x_3, Tx_3), \\ \frac{1}{2}[D(x_2, Tx_3) + D(x_3, Tx_2)] \end{array}\right\} \\ &= \max\left\{d(x_2, x_3), D(x_3, Tx_3), \frac{1}{2}D(x_2, Tx_3)\right\} \\ &\leq \max\left\{d(x_2, x_3), D(x_3, Tx_3), \frac{1}{2}[d(x_2, x_3) + D(x_3, Tx_3)]\right\} \\ &= \max\{d(x_2, x_3), D(x_3, Tx_3)\} \end{aligned}$$

dir. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_{n-1}, x_n \neq x_{n-1}$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^{n-1}(q\psi(t_0)) \tag{3.34}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Şimdi $m > n$ özelliğindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^{k-1}(q\psi(t_0)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{k-1}(q\psi(t_0)) \end{aligned}$$

olduğundan ve $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(q\psi(t_0))$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise, o zaman

$$D(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi α, (B) özelliğine sahip olsun.Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \alpha(x_n, z) H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \psi(M(x_n, z)) \end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir ki burada

$$\begin{aligned} M(x_n, z) &= \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_n, z), D(x_n, Tx_n), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[D(x_n, Tz) + D(z, Tx_n)] \end{array} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[D(x_n, Tz) + d(z, x_{n+1})] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $D(z, Tz) > 0$ olduğunu kabul edelim. (3.34) eşitsizliğini ve $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğunu göz önüne alırsak, her $n \geq n_0$ için $d(x_n, z) < \frac{D(z,Tz)}{2}$ ve $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{D(z,Tz)}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} M(x_n, z) &\leq \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}\left[d(x_n, z) + D(z, Tz) + d(z, x_{n+1})\right] \end{array} \right\} \\ &\leq D(z, Tz) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (3.35) eşitsizliğinden her $n \geq n_0$ için

$$D(x_{n+1}, Tz) \leq \psi(D(z, Tz))$$

elde edilir. Son eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$D(z, Tz) \leq \psi(D(z, Tz)) < D(z, Tz)$$

olur ki bu çelişkidir. O halde $D(z, Tz) = 0$ bulunur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat biter. ■

Teorem 3.12 (X, d) *bir tam metrik uzay,* $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ *bir fonksiyon,* $\psi \in \Psi$ *kuvvetli artan bir fonksiyon,* $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ α_**-geçişli ve Ćirić tip küme değerli* α_**-*ψ*-genelleştirilmiş büzülme olsun. Ayrıca* $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ *olacak şekilde* $x_0 \in X$ *ve* $x_1 \in Tx_0$ *var olduğunu kabul edelim. Eğer* T *sürekli veya* α*, (B) özelliğine sahip ise o zaman* T *bir sabit noktaya sahiptir.*

İspat. $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ hipotezdeki noktalar olsun. Eğer $x_1 = x_0$ ise o zaman ispat biter. $x_1 \neq x_0$ olsun. $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ ve T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_0, Tx_1) \geq 1$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} D(x_1, Tx_1) &\leq \alpha_*(Tx_0, Tx_1) H(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq \psi\left(M(x_0, x_1)\right) \end{aligned}$$

olur ki burada

$$M(x_0, x_1) \leq \max\left\{d(x_0, x_1), D(x_1, Tx_1)\right\}$$

bulunur. Eğer $d(x_0, x_1) \leq D(x_1, Tx_1)$ ise

$$D(x_1, Tx_1) \leq \psi\left(D(x_1, Tx_1)\right)$$

olur ki buradan $D(x_1, Tx_1) = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $d(x_0, x_1) > D(x_1, Tx_1)$ elde edilir. Böylece

$$D(x_1, Tx_1) \leq \psi\left(d(x_0, x_1)\right)$$

bulunur. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise o zaman x_1, T nin sabit noktası olur. $x_1 \notin Tx_1$ ve $q > 1$ olsun. Bu durumda

$$0 < D(x_1, Tx_1) < q\psi\left(d(x_0, x_1)\right)$$

dir. $t_0 = d(x_0, x_1)$ diyelim. Bu yüzden $t_0 > 0$ ve $D(x_1, Tx_1) < q\psi(t_0)$ dır. Dolayısıyla $d(x_1, x_2) < q\psi(t_0)$ olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. ψ kuvvetli artan bir dönüşüm olduğundan

$$\psi\left(d(x_1, x_2)\right) < \psi\left(q\psi(t_0)\right)$$

dir. Ayrıca $x_2 \neq x_1$ ve $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ dir. Bu yüzden T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq 1$ dir. $q_1 = \frac{\psi(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_1, x_2))}$ olsun. Bu durumda $q_1 > 1$ ve

$$\begin{aligned} D(x_2, Tx_2) &< \alpha_*(Tx_1, Tx_2) H(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq \psi\left(M(x_1, x_2)\right) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $M(x_1, x_2) \leq \max\left\{d(x_1, x_2), D(x_2, Tx_2)\right\} = d(x_1, x_2)$ olduğu gösterilebilir. Böylece

$$D(x_2, Tx_2) \leq \psi\left(d(x_1, x_2)\right)$$

bulunur. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise o zaman x_2, T nin sabit noktası olur. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. O zaman

$$D(x_2, Tx_2) \leq \psi\left(d(x_1, x_2)\right) < q_1 \psi\left(d(x_1, x_2)\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$0 < d(x_2, x_3) < q_1 \psi\left(d(x_1, x_2)\right) = \psi\left(q \psi\left(t_0\right)\right)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Dolayısıyla $x_3 \neq x_2$, $\alpha(x_2, x_3) \geq 1$ ve $\psi\left(d(x_2, x_3)\right) < \psi^2\left(q\psi\left(t_0\right)\right)$ dir. T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_2, Tx_3) \geq 1$ dir. $q_2 = \frac{\psi^2(q\psi(t_0))}{\psi(d(x_2,x_3))}$ olsun. O zaman $q_2 > 1$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(x_3, Tx_3) &\leq \alpha_*(Tx_2, Tx_3) H(Tx_2, Tx_3) \\ &\leq \psi\left(M(x_2, x_3)\right) \end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde $M(x_2, x_3) \leq \max\left\{d(x_2, x_3), D(x_3, Tx_3)\right\} = d(x_2, x_3)$ olduğu gösterilebilir. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_{n-1}, x_n \neq x_{n-1}$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^{n-1}(q\psi\left(t_0\right)) \tag{3.36}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Şimdi $m > n$ özelliğindeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d\left(x_k, x_{k+1}\right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^{k-1}(q\psi\left(t_0\right)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^{k-1}(q\psi\left(t_0\right)) \end{aligned}$$

olduğundan ve $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k(q\psi\left(t_0\right))$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise, o zaman

$$D(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi α, (B) özelliğine sahip olsun.O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ elde edilir. T, α_*-geçişli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_*(Tx_n, Tz) \geq 1$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \alpha_*(Tx_n, Tz)H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \psi(M(x_n, z)) \end{aligned} \tag{3.37}$$

elde edilir ki burada

$$\begin{aligned} M(x_n, z) &= \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_n, z), D(x_n, Tx_n), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[D(x_n, Tz) + D(z, Tx_n)] \end{array} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[D(x_n, Tz) + d(z, x_{n+1})] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $D(z, Tz) > 0$ olduğunu kabul edelim. (3.36) eşitsizliğini ve $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğunu göz önüne alırsak, her $n \geq n_0$ için $d(x_n, z) < \frac{D(z,Tz)}{2}$ ve $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{D(z,Tz)}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} M(x_n, z) &\leq \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), D(z, Tz), \\ \frac{1}{2}\left[d(x_n, z) + D(z, Tz) + d(z, x_{n+1})\right] \end{array} \right\} \\ &\leq D(z, Tz) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (3.37) eşitsizliğinden her $n \geq n_0$ için

$$D(x_{n+1}, Tz) \leq \psi(D(z, Tz))$$

elde edilir. Son eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$D(z, Tz) \leq \psi(D(z, Tz)) < D(z, Tz)$$

olur ki bu çelişkidir. O halde $D(z, Tz) = 0$ bulunur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat biter. ∎

3.4 Küme Değerli Zayıf Picard ve Pseudo Picard Operatörler

Bu kısımda 1991 yılında Rus tarafından verilen küme değerli zayıf Picard operatör kavramını göz önüne alarak küme değerli pseudo Picard operator tanımı yapılacaktır. Küme değerli dönüşümlerin α-geçişliliği kullanılarak küme değerli pseudo

Picard operatörlerin örneklerle zayıf Picard operatorlerden daha zayıf olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.11 *(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{P}(X)$ bir küme değerli operatör olsun. Eğer her $x \in X$ ve herhangi bir $y \in Tx$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa o zaman T ye küme değerli zayıf Picard (MWP) operatör denir;*

(i) $x_0 = x$, $x_1 = y$,

(ii) $x_{n+1} \in Tx_n$,

(iii) $\{x_n\}$ *dizisi X de yakınsak ve dizinin limiti T nin bir sabit noktasıdır.*

Uyarı 3.13 *Tam metrik uzaylarda her Nadler tip küme değerli büzülmeler, Reich tip küme değerli büzülmeler ve Mizoguchi-Takahashi tip küme değerli büzülmeler MWP operatörlere örneklerdir.*

Tanım 3.12 *(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{P}(X)$ bir küme değerli operatör olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlayan $x_0 \in X$, $x_1 \in Tx_0$ ve X de bir $\{x_n\}$ dizisi varsa o zaman T ye küme değerli Pseudo Picard (MPP) operatör denir;*

(i) $x_{n+1} \in Tx_n$,

(ii) $\{x_n\}$ *dizisi X de yakınsak ve dizinin limiti T nin bir sabit noktasıdır.*

Uyarı 3.14 *Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 de bahsedilen operatörler bir MPP operatördür. Ayrıca her MWP operatör bir MPP operatördür. Ancak tersi aşağıdaki örneklerde gösterildiği gibi her zaman doğru değildir.*

Örnek 3.17 *$X = [-1, 1]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} \{0, x^2\} & , \quad x \in (-1, 1) \\ & \\ \{-x\} & , \quad x \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T bir MWP operatör değildir. Gerçekten; $x = 1$ olsun. O zaman, $Tx = \{-1\}$ olduğundan $y = -1$ olur. Bu yüzden her $n \geq 0$

için yakınsak olmayan $x_n = (-1)^n$ dizisi elde edilir. Fakat T bir MPP operatördür. Gerçekten $x_0 = \frac{1}{2}$ ve $x_1 = \frac{1}{4} \in Tx_0 = \{0, \frac{1}{4}\}$ olsun. Bu şekilde devam edildiğinde T nin sabit noktası olan 0 a yakınsayan $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabiliriz.

Örnek 3.18 *$X = [0, \infty)$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} [0, \frac{x}{2}] & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ [x+1, x+2] & , \quad x > 1 \end{cases}.$$

şeklinde tanımlansın. O zaman Örnek 3.17 de olduğu gibi T nin bir MPP operatör alduğu fakat MWP operatör olmadığı görülebilir.

Berinde ve Berinde, küme değerli (δ, L)-zayıf büzülme ve küme değerli (k, L)-zayıf büzülme kavramlarını verip MWP operatöre örnekler elde etmişlerdir.

Tanım 3.13 *(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli operatör olsun. Eğer, her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + LD(y, Tx) \tag{3.38}$$

olacak şekilde $\delta \in [0, 1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri varsa, o zaman T ye küme değerli (δ, L)-zayıf büzülme dönüşümü denir.

Uyarı 3.15 *d ve H nın simetrik olmasından dolayı T nin küme değerli (δ, L)-zayıf büzülme dönüşümü olması için ayrıca (3.38) eşitsizliğinin dualinin de kontrol edilmesi gerekir. Yani T dönüşümü ayrıca her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + LD(x, Ty) \tag{3.39}$$

eşitsizliğini de sağlaması gerekir.

Tanım 3.14 *(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli operatör olsun. Eğer her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx, Ty) \leq k(d(x, y))d(x, y) + LD(y, Tx) \tag{3.40}$$

olacak şekilde bir k $\mathcal{MT}$-fonksiyon ve $L \geq 0$ sabiti varsa, o zaman T ye küme değerli (k, L)-zayıf büzülme dönüşümü denir.

Uyarı 3.16 *Yine d ve H nın simetrik olmasından dolayı T nin küme değerli (k, L)-zayıf büzülme dönüşümü olması için ayrıca (3.40) eşitsizliğinin dualini de kontrol etmemiz gerekir. Yani T dönüşümü ayrıca her $x, y \in X$ için*

$$H(Tx, Ty) \leq k(d(x, y))d(x, y) + LD(x, Ty) \tag{3.41}$$

eşitsizliğini de sağlaması gerekir.

Teorem 3.13 *(X, d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli (δ, L)-zayıf büzülme olsun. O zaman T bir MWP operatördür.*

İspat. $h = q\delta < 1$ olmak üzere $q > 1$, $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer $H(Tx_0, Tx_1) = 0$ ise o zaman $Tx_0 = Tx_1$ olur. Buradan ise $x_1 \in Tx_1$ elde edilir ki bu ise x_1 in T nin bir sabit noktası olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. Şimdi $H(Tx_0, Tx_1) > 0$ olsun. O zaman Lemma 2.2 gereğince

$$d(x_1, x_2) \leq qH(Tx_0, Tx_1)$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Dolayısıyla (3.38) dan

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq qH(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq q\left[\delta d(x_0, x_1) + LD(x_1, Tx_0)\right] \\ &= q\delta d(x_0, x_1) \\ &= hd(x_0, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $H(Tx_1, Tx_2) = 0$ ise o zaman $Tx_1 = Tx_2$ olur. Buradan ise $x_2 \in Tx_2$ elde edilir ki bu ise x_2 in T bir sabit noktası olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. Şimdi $H(Tx_1, Tx_2) > 0$ olsun. O zaman Lemma 2.2 gereğince

$$d(x_2, x_3) \leq qH(Tx_1, Tx_2)$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Dolayısıyla (3.38) dan

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leq qH(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq q\left[\delta d(x_1, x_2) + LD(x_2, Tx_1)\right] \\ &= q\delta d(x_1, x_2) \\ &= hd(x_1, x_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq hd(x_{n-1}, x_n) \leq h^n d(x_0, x_1) \tag{3.42}$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Ayrıca $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq h^n d(x_0, x_1) + h^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + h^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= \left[h^n + h^{n+1} + \cdots + h^{m-1}\right] d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{h^n}{1-h} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned} D(z, Tz) &\leq d(z, x_{n+1}) + D(x_{n+1}, Tz) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + H(Tx_n, Tz) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + \delta d(x_n, z) + LD(z, Tx_n) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + \delta d(x_n, z) + Ld(z, x_{n+1}) \end{aligned}$$

son eşitsizliğinden $n \to \infty$ için

$$D(z, Tz) = 0$$

bulunur ki bu ise $z \in \overline{Tz} = Tz$ demektir. Dolayısıyla T bir MWP operatördür. ■

Teorem 3.14 *(X, d) tam bir metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir küme değerli (k, L)-zayıf büzülme olsun. O zaman T bir MWP operatördür.*

İspat. $\beta : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $\beta(t) = \frac{1+k(t)}{2}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde Lemma 2.6 gereğince β bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur. $x, y \in X$, $x \neq y$ keyfi iki nokta olmak üzere $u \in Tx$ ve $\varepsilon = \frac{1-k(d(x,y))}{2} d(x,y) > 0$ olsun. Lemma 2.1 gereğince $d(u,v) \leq H(Tx,Ty) + \epsilon$ olacak şekilde $v \in Ty$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq H(Tx,Ty) + \frac{1-k(d(x,y))}{2} d(x,y) \\ &\leq k(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx) + \frac{1-k(d(x,y))}{2} d(x,y) \\ &= \frac{1+k(d(x,y))}{2} d(x,y) + LD(y,Tx) \\ &= \beta(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx) \end{aligned}$$

olur. Yani her $x, y \in X$ ve $u \in Tx$ için

$$d(u,v) \leq \beta(d(x,y))d(x,y) + LD(y,Tx) \tag{3.43}$$

olacak şekilde bir $v \in Ty$ vardır. Şimdi $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Eğer $x_0 = x_1$ ise o zaman x_0, T nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat biter. Şimdi $x_0 \neq x_1$ olsun. O zaman (3.43) den

$$\begin{aligned} d(x_1,x_2) &\leq \beta(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1) + LD(x_1,Tx_0) \\ &= \beta(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Eğer $x_1 = x_2$ ise o zaman x_1, T nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat tamamlanır. $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu takdirde (3.43) den

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &\leq \beta(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) + LD(x_2,Tx_1) \\ &= \beta(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Bu şekilde devam edilirse her $n \geq 0$ tamsayısı için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \beta(d(x_n,x_{n+1}))d(x_n,x_{n+1})$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir (Ardışık terimler birbirinden farklıdır, aksi halde ispat biter). Her $t \in [0,\infty)$ için $\beta(t) < 1$ olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\mathbb{R}$ de artmayan bir dizidir ve alttan sınırlı olduğundan $\{d(x_n,x_{n+1})\}$ dizisi $\lambda \geq 0$ sayısına yakınsar. β bir $\mathcal{MT}$-fonksiyon olduğu için $\limsup_{s\to\lambda^+} \beta(s) < 1$ ve $\beta(\lambda) < 1$

dir. Dolayısıyla her $s \in [\lambda, \lambda + \varepsilon)$ için $\beta(s) \leq r$ olacak şekilde $r \in [0, 1)$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. Her $n \geq k_0$ için $\lambda \leq d(x_n, x_{n+1}) < \lambda + \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. O halde $n \geq k_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq \beta(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq rd(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=k_0}^{\infty} rd(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(x_{k_0}, x_{k_0+1}) \\ &< \infty \end{aligned}$$

bulunur. O zaman $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \beta(d(x_n, z))d(x_n, z) \\ &< d(x_n, z) \end{aligned}$$

olduğu için $n \to \infty$ için limit alınırsa $D(z, Tz) = 0$ olur ki bu $z \in \overline{Tz} = Tz$ demektir. Dolayısıyla T bir MWP operatördür. ■

Teorem 3.15 *(X, d) bir tam metrik uzay, $\psi \in \Psi$ kuvvetli artan bir dönüşüm, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir α-geçişli dönüşüm ve her $x, y \in X$ için*

$$\alpha(x, y)H(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) + L \min\{D(x, Ty), D(y, Tx)\} \tag{3.44}$$

olacak şekilde $L \geq 0$ var olsun. Ayrıca, $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer T sürekli veya α, (B) özelliğine sahip ise o zaman T bir MPP operatördür.

İspat. x_0 ve x_1 hipotezde bahsedilen noktalar olsun. Eğer $x_0 = x_1$ veya $x_1 \in Tx_1$ ise ispat tamamlanır. $x_0 \neq x_1$, $x_1 \notin Tx_1$ ve $q > 1$ bir sabit olsun. Bu durumda

$$0 < D(x_1, Tx_1) \leq \alpha(x_0, x_1)H(Tx_0, Tx_1) < q\alpha(x_0, x_1)H(Tx_0, Tx_1)$$

olur. Bu yüzden

$$\begin{aligned} 0 &< d(x_1, x_2) \\ &< q\alpha(x_0, x_1)H(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq q\psi(d(x_0, x_1)) + qL\min\{D(x_0, Tx_1), D(x_1, Tx_0)\} \\ &= q\psi(d(x_0, x_1)) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Ayrıca, T bir α-geçişli, $x_1 \in Tx_0$ ve $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olduğundan, her $u \in Tx_1$ için $\alpha(x_1, u) \geq 1$ dir. Bu yüzden $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ dır. ψ kuvvetli artan olduğundan

$$0 < \psi\left(d(x_1, x_2)\right) < \psi\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$$

elde edilir. $q_1 = \frac{\psi(q\psi(d(x_0,x_1)))}{\psi(d(x_1,x_2))}$ denirse $q_1 > 1$ olur. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise ispat tamamlanır. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. O zaman

$$0 < D(x_2, Tx_2) \leq \alpha(x_1, x_2)H(Tx_1, Tx_2) < q_1\alpha(x_1, x_2)H(Tx_1, Tx_2)$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} 0 &< d(x_2, x_3) \\ &< q_1\alpha(x_1, x_2)H(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq q_1\psi(d(x_1, x_2)) + q_1L\min\{D(x_1, Tx_2), D(x_2, Tx_1)\} \\ &= q_1\psi(d(x_1, x_2)) \\ &= \psi\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. T, α-geçişli, $x_2 \in Tx_1$ ve $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$ olduğu için her $v \in Tx_2$ için $\alpha(x_2, v) \geq 1$ dir. Bu yüzden $x_3 \in Tx_2$ olduğu için $\alpha(x_2, x_3) \geq 1$ dir. ψ kuvvetli artan olduğundan

$$0 < \psi\left(d(x_2, x_3)\right) < \psi^2\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$$

elde edilir. $q_2 = \frac{\psi^2(q\psi(d(x_0,x_1)))}{\psi(d(x_1,x_2))}$ denirse $q_2 > 1$ olur. Eğer $x_3 \in Tx_3$ ise ispat tamamlanır. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$, $x_n \neq x_{n+1}$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n \left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$$

olacak şekilde X de $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Şimdi, her $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d\left(x_k, x_{k+1}\right) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k \left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$$

olduğundan ve $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k \left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise, o zaman

$$D(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi, α, (B) özelliğine sahip olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \alpha(x_n, z)H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \psi(d(x_n, z)) + L\min\{D(x_n, Tz), D(z, Tx_n)\} \\ &\leq \psi(d(x_n, z)) + L\min\{D(x_n, Tz), d(z, x_{n+1})\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$ ve ψ, 0 noktasında sürekli olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten $n \to \infty$ için $D(z, Tz) = 0$ bulunur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Dolayısıyla T bir MWP operatördür. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.16 *(X, d) bir tam metrik uzay, $\psi \in \Psi$ kuvvetli artan bir dönüşüm, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir α_*-geçişli dönüşüm ve her $x, y \in X$ için*

$$\alpha_*(Tx, Ty)H(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) + L\min\{D(x, Ty), D(y, Tx)\}$$

olacak şekilde $L \geq 0$ var olsun. Ayrıca, $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer T sürekli veya α, (B) özelliğine sahip ise o zaman T bir MPP operatördür.

İspat. x_0 ve x_1 hipotezde bahsedilen noktalar olsun. T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_0, Tx_1) \geq 1$ dir. Eğer $x_0 = x_1$ veya $x_1 \in Tx_1$ ise ispat tamamlanır. $x_0 \neq x_1$, $x_1 \notin Tx_1$ ve $q > 1$ bir sabit olsun. Bu durumda

$$0 < D(x_1, Tx_1) \leq \alpha_*(Tx_0, Tx_1)H(Tx_0, Tx_1) < q\alpha_*(Tx_0, Tx_1)H(Tx_0, Tx_1)$$

olur. Bu yüzden

$$\begin{aligned} 0 &< d(x_1, x_2) \\ &< q_*(Tx_0, Tx_1)H(Tx_0, Tx_1) \\ &\leq q\psi(d(x_0, x_1)) + qL\min\{D(x_0, Tx_1), D(x_1, Tx_0)\} \\ &= q\psi(d(x_0, x_1)) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. Ayrıca, $\alpha(x_1, x_2) \geq \alpha_*(Tx_0, Tx_1) \geq 1$ ve T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq 1$ dir. ψ kuvvetli artan olduğundan

$$0 < \psi\left(d(x_1, x_2)\right) < \psi\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$$

elde edilir. $q_1 = \frac{\psi(q\psi(d(x_0,x_1)))}{\psi(d(x_1,x_2))}$ denirse $q_1 > 1$ olur. Eğer $x_2 \in Tx_2$ ise ispat tamamlanır. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. Bu durumda

$$0 < D(x_2, Tx_2) \leq \alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2) < q_1\alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2)$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} 0 &< d(x_2, x_3) \\ &< q_1\alpha_*(Tx_1, Tx_2))H(Tx_1, Tx_2) \\ &\leq q_1\psi(d(x_1, x_2)) + q_1L\min\{D(x_1, Tx_2), D(x_2, Tx_1)\} \\ &= q_1\psi(d(x_1, x_2)) \\ &= \psi\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right) \end{aligned}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Ayrıca $\alpha(x_2, x_3) \geq \alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq 1$ve T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_2, Tx_3) \geq 1$ dir. ψ kuvvetli artan olduğundan

$$0 < \psi\left(d(x_2, x_3)\right) < \psi^2\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$$

elde edilir. $q_2 = \frac{\psi^2(q\psi(d(x_0,x_1)))}{\psi(d(x_1,x_2))}$ denirse $q_2 > 1$ olur. Eğer $x_3 \in Tx_3$ ise ispat tamamlanır. Bu şekilde devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$, $x_n \neq x_{n+1}$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$$

olacak şekilde X de $\{x_n\}$ dizisi elde edilir Şimdi her $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d\left(x_k, x_{k+1}\right) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \psi^k\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$$

olur. Buradan ise $\sum_{k=1}^{\infty} \psi^k\left(q\psi(d(x_0, x_1))\right)$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise, o zaman

$$D(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi, α, (B) özelliğine sahip olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ dır. T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_n, Tz) \geq 1$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \alpha_*(Tx_n, Tz)H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \psi(d(x_n, z)) + L\min\{D(x_n, Tz), D(z, Tx_n)\} \\ &\leq \psi(d(x_n, z)) + L\min\{D(x_n, Tz), d(z, x_{n+1})\} \end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$ ve ψ, 0 noktasında sürekli olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten $n \to \infty$ için $D(z, Tz) = 0$ bulunur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Dolayısıyla T bir MWP operatördür. ∎

Uyarı 3.17 *Eğer $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\alpha(x, y) = 1$ olarak alınırsa o zaman her $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü hem α-geçişli hem de α_*-geçişlidir. Bu yüzden Teorem 3.13, Teorem 3.15 ve Teorem 3.16 nin özel bir durumudur.*

Uyarı 3.18 *Eğer Teorem 3.15 ve Teorem 3.16 de $L = 0$ alırsak o zaman sırasıyla Teorem 3.10 ve Teorem 3.9 elde edilir.*

Aşağıdaki örnek incelendiğinde hem Teorem 3.13 hem de Teorem 3.9 uygulanamaz olduğu, fakat örnekteki T nin bir MPP operatör olduğu görülür.

Örnek 3.19 *$X = [0,1] \cup \{2,3\}$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} [0, \frac{x}{2}] & , \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{3x-1}{2}\right] & , \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ \\ \{x\} & , \quad x \in \{2,3\} \end{cases}$$

ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x,y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{2,3\} \\ \\ 0 & , \quad \{x,y\} \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right] \neq \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T, α-geçişli bir dönüşüm olup ve her $t > 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ve $L = 1$ ile birlikte (3.44) şartını sağlar. Gerçekten, ilk öce T nin bir α-geçişli olduğunu gösterelim. Her $x \in X$ ve $y \in Tx$ için $\alpha(x,y) \geq 1$ olsun. O zaman $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{2,3\}$ olmalıdır. Bu durumda $y \in Tx \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{2,3\}$ olur. Dolayısıyla her $z \in Ty \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{2,3\}$ için $\alpha(y,z) \geq 1$ olduğundan T, α-geçişlidir. Şimdi her $t > 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ve $L = 1$ ile birlikte (3.44) şartını sağladığını gösterelim. Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alalım:

Durum 1 *$\{x,y\} \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right] \neq \emptyset$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için $\alpha(x,y) = 0$ olduğundan (3.44) şartı sağlanır. Ayrıca, eğer $x = y$ ise $H(Tx,Ty) = 0$ olacağından yine (3.44) şartı sağlanır. Bu yüzden bundan sonra aşağıdaki durumlarda $x \neq y$ olarak düşünülecektir.*

Durum 2 *$x,y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \{2,3\}$ olacak şekildeki her $x,y \in X$ için $\alpha(x,y) = 1$ olduğundan aşağıdaki gibi alt durumlar söz konusudur.*

(i) *$x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve genelliliği bozmaksızın $x > y$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) &= H\left(\left[0, \frac{x}{2}\right], \left[0, \frac{y}{2}\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}(x - y) \\ &= \frac{1}{2}d(x, y) + \min\{D(x, Ty), D(y, Tx)\} \end{aligned}$$

olur ve böylece (3.44) şartı sağlanır.

(ii) *$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $y \in \{2, 3\}$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) &= H\left(\left[0, \frac{x}{2}\right], \{y\}\right) \\ &= y - \frac{x}{2} \\ &\leq \frac{3}{2}(y - x) \\ &= \frac{1}{2}(y - x) + \min\{y - x, y - \frac{x}{2}\} \\ &= \frac{1}{2}d(x, y) + \min\{D(x, Ty), D(y, Tx)\} \end{aligned}$$

olur ve böylece (3.44) şartı sağlanır.

(iii) *$x = 2$ ve $y = 3$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) &= 1 = d(x, y) \\ &\leq \frac{1}{2}d(x, y) + \min\{D(x, Ty), D(y, Tx)\} \end{aligned}$$

olur ve böylece (3.44) şartı sağlanır.

Son olarak, α, (B) özelliğine sahip olduğundan Teorem 3.15 in tüm şartları sağlanır. O zaman T bir MPP operatördür. Diğer taraftan

$$H(T1, T\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}, d(1, \frac{3}{4}) = \frac{1}{4} \text{ ve } D(\frac{3}{4}, T1) = 0$$

olduğundan (3.38) şartı sağlanmaz. Bu yüzden Teorem 3.13, bu örneğe uygulanamaz. Ayrıca, $\alpha(2, 3) = 1$, $H(T2, T3) = 1$, $d(2, 3) = 1$ olduğundan T küme değerli α-ψ-büzülme dönüşümü değildir. Dolayısıyla, Teorem 3.9 bu örneğe uygulanamaz.

Teorem 3.17 *(X,d) bir tam metrik uzay, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü α-geçişli ve her $x, y \in X$ için*

$$\alpha(x,y)H(Tx,Ty) \leq k(d(x,y))d(x,y) \tag{3.45}$$

olacak şekilde bir k $\mathcal{MT}$-fonksiyon var olsun. Ayrıca, $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer T sürekli veya α, (B) özellğine sahip ise o zaman T bir MPP operatördür.

İspat. $h : [0,\infty) \to [0,1)$ fonksiyonu $h(t) = \frac{1+k(t)}{2}$ şeklinde tanımlansın. Lemma 2.6 gereğince h bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur. x_0 ve x_1 hipotezde bahsedilen noktalar olsun. Eğer $x_0 = x_1$ ise o zaman x_0, T nin bir sabit noktasıdır. $x_0 \neq x_1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\dfrac{1-k(d(x_0,x_1))}{2}d(x_0,x_1) > 0$ dır. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
d(x_1,x_2) &\leq H(Tx_0,Tx_1) + \frac{1-k(d(x_0,x_1))}{2}d(x_0,x_1) \\
&\leq \alpha(x_0,x_1)H(Tx_0,Tx_1) + \frac{1-k(d(x_0,x_1))}{2}d(x_0,x_1) \\
&\leq k(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1) + \frac{1-k(d(x_0,x_1))}{2}d(x_0,x_1) \\
&= \frac{1+k(d(x_0,x_1))}{2}d(x_0,x_1) \\
&= h(d(x_0,x_1))d(x_0,x_1)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. T, α-geçişli, $x_1 \in Tx_0$ ve $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$ olduğundan her $u \in Tx_1$ için $\alpha(x_1,u) \geq 1$ dir. $x_2 \in Tx_1$ olduğu için $\alpha(x_1,x_2) \geq 1$ dir. Eğer $x_1 = x_2$ ise o zaman x_1, T nin sabit noktası olur. $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu durumda $\dfrac{1-k(d(x_1,x_2))}{2}d(x_1,x_2) > 0$ dır.

$$\begin{aligned}
d(x_2,x_3) &\leq H(Tx_1,Tx_2) + \frac{1-k(d(x_1,x_2))}{2}d(x_1,x_2) \\
&\leq \alpha(x_1,x_2)H(Tx_1,Tx_2) + \frac{1-k(d(x_1,x_2))}{2}d(x_1,x_2) \\
&\leq k(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2) + \frac{1-k(d(x_1,x_2))}{2}d(x_1,x_2) \\
&= \frac{1+k(d(x_1,x_2))}{2}d(x_1,x_2) \\
&= h(d(x_1,x_2))d(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Tekrar, T, α-geçişli olduğu için $\alpha(x_2,x_3) \geq 1$ dir. Bu şekilde devam edildiğinde, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$, $\alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1$ ve

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq h(d(x_{n-1},x_n))d(x_{n-1},x_n)$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturabilir. Her $t \in [0,\infty)$ için $h(t) < 1$ olduğundan $[0,\infty)$ da bir $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalandır. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \lambda \geq 0$$

dır. Şimdi h bir $\mathcal{MT}$-fonksiyonu olduğundan $\limsup_{s\to\lambda^+} h(s) < 1$ ve $h(\lambda) < 1$ dir. Bu yüzden Lemma 2.5 gereğince, her $s \in [\lambda, \lambda+\varepsilon)$ için $h(s) \leq r$ olacak şekilde $r \in [0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \lambda$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $\lambda \leq d(x_n, x_{n+1}) < \lambda + \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq h(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq rd(x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{n_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{n_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=n_0}^{\infty} d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=n_0}^{\infty} rd(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} d(x_n, x_{n+1}) + \sum_{n=1}^{\infty} r^n d(x_{n_0}, x_{n_0+1}) \\ &< \infty \end{aligned}$$

olur ki buradan $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise, o zaman

$$D(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi, α, (B) özelliğine sahip olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \alpha(x_n, z)H(Tx_n, Tz) \\ &\leq k(d(x_n, z))d(x_n, z) \\ &< d(x_n, z) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$ için $D(z, Tz) = 0$ bulunur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat biter. ■

Teorem 3.18 *(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü α_*-geçişli ve her $x, y \in X$ için*

$$\alpha_*(Tx, Ty)H(Tx, Ty) \leq k(d(x, y))d(x, y) \tag{3.46}$$

olacak şekilde bir k $\mathcal{MT}$-fonksiyon var olsun. Ayrıca, $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $x_1 \in Tx_0$ var olduğunu kabul edelim. Eğer T sürekli veya α, (B) özellğine sahip ise o zaman T bir MPP operatördür.

İspat. $h : [0, \infty) \to [0, 1)$ fonksiyonu $h(t) = \frac{1+k(t)}{2}$ şeklinde tanımlansın. Lemma 2.6 dan h bir $\mathcal{MT}$-fonksiyondur. x_0 ve x_1 hipotezde bahsedilen noktalar olsun. Eğer $x_0 \in Tx_0$ ise o zaman x_0, T nin bir sabit noktasıdır. $x_0 \notin Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_0 \neq x_1$ olduğu için $\dfrac{1 - k(d(x_0, x_1))}{2} d(x_0, x_1) > 0$ dır. Eğer $x_1 \in Tx_1$ ise o zaman x_1, T nin bir sabit noktasıdır. $x_1 \notin Tx_1$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_0, Tx_1) \geq 1$ dır. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
d(x_1, x_2) &\leq H(Tx_0, Tx_1) + \frac{1 - k(d(x_0, x_1))}{2} d(x_0, x_1) \\
&\leq \alpha_*(Tx_0, Tx_1)H(Tx_0, Tx_1) + \frac{1 - k(d(x_0, x_1))}{2} d(x_0, x_1) \\
&\leq k(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1) + \frac{1 - k(d(x_0, x_1))}{2} d(x_0, x_1) \\
&= \frac{1 + k(d(x_0, x_1))}{2} d(x_0, x_1) \\
&= h(d(x_0, x_1))d(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $x_2 \in Tx_1$ vardır. $\alpha(x_1, x_2) \geq \alpha_*(Tx_0, Tx_1) \geq 1$ ve T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq 1$ dır. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
d(x_2, x_3) &\leq H(Tx_1, Tx_2) + \frac{1 - k(d(x_1, x_2))}{2} d(x_1, x_2) \\
&\leq \alpha_*(Tx_1, Tx_2)H(Tx_1, Tx_2) + \frac{1 - k(d(x_1, x_2))}{2} d(x_1, x_2) \\
&\leq k(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2) + \frac{1 - k(d(x_1, x_2))}{2} d(x_1, x_2) \\
&= \frac{1 + k(d(x_1, x_2))}{2} d(x_1, x_2) \\
&= h(d(x_1, x_2))d(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

olacak şekilde $x_3 \in Tx_2$ vardır. Tekrar, eğer $x_2 \in Tx_2$ ise x_2, T nin bir sabit noktasıdır. $x_2 \notin Tx_2$ olsun. $\alpha(x_2, x_3) \geq \alpha_*(Tx_1, Tx_2) \geq 1$ ve T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_2, Tx_3) \geq 1$ dır. Bu şekilde devam edildiğinde, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$, $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq h(d(x_{n-1}, x_n))d(x_{n-1}, x_n)$$

olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. Teorem 3.17 ispatında olduğu gibi $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise, o zaman

$$D(z, Tz) = \lim_{n\to\infty} D(x_{n+1}, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi, α, (B) özelliğine sahip olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, z) \geq 1$ dır. T, α_*-geçişli olduğundan $\alpha_*(Tx_n, Tz) \geq 1$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, Tz) &\leq H(Tx_n, Tz) \\ &\leq \alpha_*(Tx_n, Tz)H(Tx_n, Tz) \\ &\leq k(d(x_n, z))d(x_n, z) \\ &\leq d(x_n, z) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = 0$ için $D(z, Tz) = 0$ bulunur ve böylece $z \in \overline{Tz} = Tz$ dir. Yani z, T nin bir sabit noktasıdır. Böylece ispat biter. ■

Aşağıdaki örneği incelerken dikkat edelim ki bu örneğe Mizoguchi-Takahashi teoremi uygulanamaz, fakat T bir MPP operatördür.

Örnek 3.20 *$X = [-1, 1]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ dönüşümü*

$$Tx = \begin{cases} \{2x+1\} & , \quad x \in \left[-1, -\frac{3}{4}\right) \\ \\ \{2x-1\} & , \quad x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right] \\ \\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & , \quad x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right] \end{cases}$$

ve $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ *fonksiyonu*

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x,y \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \\ \\ 0 & , \quad \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman T *bir* α_**-geçişli ve her* $x,y \in X$ *için*

$$\alpha_*(Tx,Ty)H(Tx,Ty) \le k(d(x,y))d(x,y) \tag{3.47}$$

dir. Burada k*, herhangi bir* $\mathcal{MT}$*-fonksiyonudur. Öncelikle* T *nin* α_**-geçişli olduğunu gösterelim. Eğer* $\alpha(x,y) \ge 1$ *ise o zaman* $x,y \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ *dir. Bu yüzden*

$$\begin{aligned} \alpha_*(Tx,Ty) &= \alpha_*\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) \\ &= \inf\left\{\alpha\left(a,b\right) : a,b \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. O halde T *bir* α_**-geçişli dönüşümdür. Şimdi (3.47) şartının sağlandığını gösterelim. Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alalım.*

Durum 1 $\{x,y\} \cap \left\{\left[-1,-\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4},1\right]\right\} \neq \emptyset$ *olacak şekildeki her* $x,y \in X$ *için* $\alpha_*(Tx,Ty) = 0$ *olduğundan (3.47) şartı sağlanır.*

Durum 2 $x,y \in \left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$ *olacak şekildeki her* $x,y \in X$ *için*

$$\begin{aligned} H(Tx,Ty) &= H\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla tekrar (3.47) şartı sağlanır.

Diğer taraftan $x,y \in \left(\frac{3}{4},1\right]$ *olacak şekildeki* $x,y \in X, x \neq y$ *için*

$$\begin{aligned} H(Tx,Ty) &= H(\{2x-1\},\{2y-1\}) \\ &= 2d(x,y) \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (2.19) şartını sağlayan herhangi bir $\mathcal{MT}$*-fonksiyonu yoktur.*

Uyarı 3.19 *Eğer* $\alpha : X \times X \to [0,\infty)$ *fonksiyonunu* $\alpha(x,y) = 1$ *olarak alırsak her* $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ *dönüşümü hem* α*-geçişli hem de* α_**-geçişlidir. Bu yüzden, Mizoguchi-Takahashi sabit nokta teoremi, Teorem 3.17 ve Teorem 3.18 in özel bir halidir.*

3.5 Uygulama

Bu kısımda α geçişli ve α_*-geçişli dönüşümler için önceki kesimlerde elde edilen sonuçların, sıralı metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri elde etmek için kullanılabileceğini gösteren bir kaç uygulama vereceğiz. İlk önce kümeler arasında verilen bazı bağıntıları hatırlayacağız. X boş olmayan bir küme ve $\preceq$, X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olsun.

Tanım 3.15 *A ve B, X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. O zaman A ve B kümeleri arasında aşağıdaki gibi bağıntılar tanmlanabilir.*

a) Eğer her $a \in A$ için $a \preceq b$ olacak şekilde bir $b \in B$ varsa o zaman $A \prec_1 B$ dir.

b) Eğer her $b \in B$ için $a \preceq b$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa o zaman $A \prec_2 B$ dir.

c) Eğer $A \prec_1 B$ ve $A \prec_2 B$ ise o zaman $A \prec B$ dir.

Uyarı 3.20 *A ve B kümesi üzerinde $\prec_1$ ve $\prec_2$ bağıntıları birbirinden farklıdır. Örneğin; $X = \mathbb{R}$, $A = [\frac{1}{2}, 1]$, $B = [0,1]$ ve $\leq$, X üzerinde bilinen sıralama olsun. O zaman $A \prec_1 B$ dir ancak $A \not\prec_2 B$ dir. $C = [0,1]$ ve $D = [0, \frac{1}{2}]$ kümeleri için $C \prec_2 D$ olmasına karşın $C \not\prec_1 D$ dir.*

Uyarı 3.21 *$\prec_1$, $\prec_2$ve $\prec$ bağıntıları yansımalı ve geçişli olmasına rağmen ters simetrik değildir. Örneğin; $X = \mathbb{R}$, $A = [0,3]$, $B = [0,1] \cup [2,3]$ ve $\leq$, X üzerinde bilinen sıralama olsun. O zaman $A \prec B$ ve $B \prec A$ olmasına rağmen $A \neq B$ dir. Bu yüzden bu bağıntılar kısmi sıralama bağıntısı değildirler.*

Teorem 3.19 *$(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme d, (X,d) tam bir metrik uzay olacak şekilde X üzerinde bir metrik, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm ve $\psi \in \Psi$ kuvvetli artan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$, $x \preceq y$ için*

$$H(Tx, Ty) \leq \psi(d(x,y)) + L \min\{D(x,Ty), D(y,Tx)\}$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ var olsun. $\{x_0\} \prec_1 Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ in de var olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $x \preceq y$ olacak şekildeki her $x \in X$ ve $y \in Tx$ için

$y \preceq z$ eşitsizliği her $z \in Ty$ için sağlansın. Eğer T sürekli veya

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ olacak şekildeki her } \{x_n\} \subset X \text{ dizisi için} \\ x_n \preceq x \text{ eşitsizliği her } n \in \mathbb{N} \text{ için sağlansın} \end{cases} \tag{3.48}$$

şartı sağlanırsa, o zaman T nin bir sabit noktası vardır.

İspat. $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 \quad , \quad x \preceq y \\ \\ 0 \quad , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman, her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y)H(Tx,Ty) \leq \psi(d(x,y)) + L\min\{D(x,Ty), D(y,Tx)\}$$

elde edilir. Ayrıca $\{x_0\} \prec_1 Tx_0$ olduğu için $x_0 \preceq x_1$ olacak şekilde $x_1 \in Tx_0$ vardır. Bu yüzden $x_0 \preceq x_1$ ve $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ dir. Şimdi, $x \in X$ ve $y \in Tx$ olsun ve $\alpha(x,y) \geq 1$ eşitsizliği sağlansın. O zaman $x \preceq y$ dir. Böylece her $z \in Ty$ için $y \preceq z$ dir. Yani her $z \in Ty$ için $\alpha(y,z) \geq 1$ dir. Bu ise T nin bir α-geçişli olduğunu gösterir. Son olarak T sürekli veya (3.48) şartını sağlanırsa, o zaman T sürekli veya α, (B) özelliğine sahiptir. O halde Teorem 3.15 gereğince T nin bir sabit noktası vardır. ■

Teorem 3.20 *$(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme d, (X,d) tam bir metrik uzay olacak şekilde X üzerinde bir metrik ve $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$, $x \preceq y$ için*

$$H(Tx,Ty) \leq k(d(x,y))d(x,y)$$

olacak şekilde bir k $\mathcal{MT}$-fonksiyon var olsun. $\{x_0\} \prec_1 Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ in de var olduğunu kabul edelim. Ayrıca, her $x \in X$ ve $y \in Tx$, $x \preceq y$ için $y \preceq z$ eşitsizliği her $z \in Ty$ için sağlansın. Eğer T sürekli veya

$$\begin{cases} x_n \to x \text{ olacak şekildeki her } \{x_n\} \subset X \text{ dizisi için} \\ x_n \preceq x \text{ eşitsizliği her } n \in \mathbb{N} \text{ için sağlansın} \end{cases} \tag{3.49}$$

şartı sağlanırsa, o zaman T nin bir sabit noktası vardır.

İspat. $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \preceq y \\ \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y)H(Tx,Ty) \leq k(d(x,y))d(x,y)$$

elde edilir. Ayrıca $\{x_0\} \prec_1 Tx_0$, olduğu için $x_0 \preceq x_1$ olacak şekilde $x_1 \in Tx_0$ vardır. Bu yüzden $x_0 \preceq x_1$ ve $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$ dir. Şimdi, $x \in X$, $y \in Tx$ ve $\alpha(x,y) \geq 1$ eşitsizliği sağlansın. O zaman $x \preceq y$ dir. Böylece hipotezden her $z \in Ty$ için $y \preceq z$ dir. Yani her $z \in Ty$ için $\alpha(y,z) \geq 1$ dir. Bu ise T nin bir α-geçişli olduğunu gösterir. Son olarak T sürekli veya (3.49) şartı sağlanırsa, o zaman T sürekli veya α, (B) özelliğine sahiptir. O halde Teorem 3.17 gereğince T nin bir sabit noktası vardır. ∎

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında literatürdeki bilgiler kullanılarak bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir. İlk olarak tek değerli dönüşümler için F-büzülme yardımıyla küme değerli dönüşümler için F-büzülme kavramı tanımlanmış ve bu tip dönüşümler için bir sabit nokta teoremi elde edilmiştir. İkinci olarak, küme değerli F-büzülme kavramı genişletilerek küme değerli genelleştirilmiş F-büzülme tanımı yapılmış ve sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Diğer taraftan literatüre küme değerli pseudo Picard (MPP) operator kavramı kazandırılmış ve α-geçişli dönüşümler yardımıyla MPP operatörler ve bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Burada elde edilen sonuçların literatürdeki bazı sabit nokta teoremlerinden daha genel olduklarını gösteren açıklayıcı örnekler verilmiştir. Son olarak α-geçişli dönüşümler için elde edilen sabit nokta teoremlerinin, sıralı metrik uzayda küme değerli dönüşümler için sabit nokta teoremi elde etmek amacıyla uygulaması yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Koçak. M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

[2] Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2010.

[3] Soykan, Y., Metrik Uzaylar ve Topolojisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2012.

[4] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sahu, D. R., Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer, New York, 2009.

[5] Nadler S. B., Multivalued contraction mappings, Pacific Journal Mathematics, 30 (1969), 475-488.

[6] Mizoguchi, N., Takahashi, W., Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and Appliations, 141 (1989), 177-188.

[7] Samet, B., Vetro, C., Vetro, P., Fixed point theorems for α-ψ-contractive type mappings, Nonlinear Analysis, 75 (2012), 2154-2165.

[8] Asl, J. H., Rezapour, S., Shahzad, N., On fixed points of α-ψ-contractive multifunctions, Fixed Point Theory and Applications, 212 (2012), 6 pages, doi:10.1186/1687-1812-2012-212.

[9] Wardowski, D., Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012, 2012:94, 6 pp.

[10] Reich, S., Some problems and results in fixed point theory, Contemporary Mathematics, 21 (1983), 179-187.

[11] Reich, S., Some remarks concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull., 14 (1971), pp. 121-124.

[12] Du, W. S., On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multi-valued maps, Topology and its Applications, vol. 159, no. 1, pp. 49–56, 2012.

[13] Du, W. S., Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions satisfied Mizoguchi-Takahashi's condition in quasiordered metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2010, Article ID 876372, 9 pages, 2010.

[14] Du, W. S., Some new results and generalizations in metric fixed point theory, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 73 (5) (2010), 1439-1446.

[15] Suzuki, T., Mizoguchi-Takahashi's fixed point theorem is a real generalization of Nadler's, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340 (2008), 752-755.

[16] Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[17] Mohammadi, B., Rezapour, S., Shahzad, N., Some results on fixed points of α-ψ-Ćirić generalized multifunctions, Fixed Point Theory and Applications, 24 (2013), 10 pages.

[18] Rus, I. A., Basic problems of the metric fixed point theory revisited (II), Stud. Univ. Babeş-Bolyai, 36 (1991), 81–99.

[19] Berinde, M., Berinde, V., On a general class of multivalued weakly Picard mappings, Jornal of Mathematical Analysis and Applications, 326 (2007), 772-782.

[20] Mınak, G., Altun, I., Mizoguchi-Takahashi type fixed point theorem, (Submitted).

[21] Mınak, G., Acar, Ö., Altun, I., Multivalued Pseudo Picard Operators and Fixed Point Results, Journal of Function Spaces and Applications, Volume 2013, Article ID 827458, 7 pages, 2013.

[22] Altun, I., Mınak, G., Dağ, H., Multivalued F-Contractions On Complete Metric Space,Journal of Nonlinear and Convex Analysis, In press.

[23] Acar, Ö., Durmaz, G., Mınak, G., Generalized multivalued F-contractions on complete metric spaces, (Submitted).

[24] Feng, Y., Liu, S., Fixed point theorems for multi-valued increasing operators in partially ordered spaces, Soochow J. Math., 30 (4), (2004), 461-469.