KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BELTRAMİ DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

İlker GENÇTÜRK

2013
KIRIKKALE

Matematik Anabilim Dalında İlker GENÇTÜRK tarafından hazırlanan BELTRAMİ DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Ali ARAL

Üye (Danışman) : Prof. Dr. Kerim KOCA

Üye : Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV

10/06/2013

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BELTRAMİ DENKLEMİ İÇİN
SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

GENÇTÜRK, İlker
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA
Haziran 2013, 55 sayfa

Bu tezde birim diskte Beltrami Denklemi için bazı sınır değer problemleri incelenmiştir. Bu tez çalışması beş temel bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmaya giriş yapılarak çalışmanın amacı belirtilmiştir. İkinci bölümde ise tez çalışmasında gerekli olan reel ve kompleks düzlemde belli tipten fonksiyonlar için integral bağıntıları ve integral gösterilimleri ortaya konulmuştur.

Üçüncü bölümde birinci basamaktan $w_{\bar{z}} = 0,\ \ w_{\bar{z}} = f$ denklemleri için temel sınır değer problemleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Beltrami denkleminin genel çözümü verilerek daha sonra bu denklem için Schwarz ve Dirichlet sınır değer problemleri ele alınmıştır.

Son bölümde ise dördüncü bölümde incelenen Beltrami denkleminin bir genelleştirilmesi için Schwarz sınır değer probleminin çözümü ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Beltrami denklemi, Schwarz, Dirichlet sınır değer problemleri, Cauchy - Pompeiu integral gösterilimleri.

ABSTRACT

BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR THE BELTRAMI EQUATION

GENÇTÜRK, İlker
Kirikkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA

June 2013, 55 pages

In this thesis , we study some boundary value problems for the Beltrami equation in the unit disk. It mainly consists of five chapters.

In the the first chapter, the aim of the study is given. In the next chapter , in real and complex plane integral relations and representations for the certain type functions required in this study are put forward.

In the third chapter, some basic boundary value problems for the first order the homogeneous and the inhomogeneous Cauchy - Riemann equations in the unit disc are examined.

In the chapter IV, Schwarz and Dirichlet boundary value problems for Beltrami equation are investigated.

In the last chapter, in the unit disk we study about Schwarz boundary value problems for a form generalized of the Beltrami equation in the previous chapter.

Key Words : Beltrami equation, Schwarz, Dirichlet boundary value problems
Cauchy-Pompeiu represantation formulas.

TEŞEKKÜR

Tez çalışması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya, bana her zaman destek olan aileme teşekkür ederim.

Ahmet Dayıma...

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem (z-düzlemi)
D	Kompleks düzlemin bir alt bölgesi
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
∂D	D alt bölgesinin sınırı
$Re\, z$	z kompleks sayısının reel kısmı
$Im\, z$	z kompleks sayısının sanal kısmı
L_p	p normlu fonksiyon uzayı
T_D	Cauchy tipi zayıf singülerliliğe sahip operatör
Π_D	Cauchy tipi kuvvetli singülerliğe sahip operatör
C^1	1. basamaktan kısmi türevleri sürekli fonksiyonlar sınıfı
$\frac{\partial}{\partial z}$	z ye göre kısmi türev operatörü
$C^\alpha(D;\mathbb{C})$	D üzerinde tanımlı Hölder sürekli kompleks değerli fonksiyonların sınıfı
$C^{\alpha,1}(D;\mathbb{C})$	1.basamaktan kısmi türevleri mevcut ve Hölder sürekli fonksiyonların sınıfı
mD	D bölgesinin Lebesque ölçümü
$C_0^k(D;\mathbb{C})$	D ye ait k.basamağa kadar türevlere sahip tüm test fonksiyonların sınıfı

1. GİRİŞ

Kompleks analizin yöntemleri matematiğin hemen hemen her alanında kullanılabilen en etkili konularından biridir. Reel anlamda çözülemeyen bazı integraller, belli tipten diferansiyel ve integral denklemler kompleks analiz yöntemleriyle çözülebilmektedir. Bunların yanında kompleks analiz konuları potansiyel teori, dinamik sistemler, integral dönüşümler, harmonik analiz, operatör teori, cebirsel geometride yoğun olarak kullanılmaktadır. Ayrıca konform dönüşümlerle ilgili olarak fizikte de kompleks analizin uygulama alanı vardır.

Kompleks diferansiyel denklemler özellikle de kompleks kısmi türevli denklemler teorisi 1950 yılından sonra üzerinde çok çalışılmış ve teoride klasikleşmiş sonuçlar ortaya konulmuştur.

Bu tezde, uygulamalı bir kompleks kısmi türevli denklem olan Beltrami denklemi için Schwarz ve Dirichlet sınır değer problemleri incelenmektedir. Bilindiği gibi kompleks kısmi türevli denklemler için incelenen sınır değer problemlerinin başında Schwarz, Neumann, Dirichlet, Robin, Riemann ve Rimann-Hilbert sınır değer problemleri gelmektedir. Bu tür problemlerin incelenmesinde en temel araç kompleks fonksiyonların çeşitli integral gösterilimleridir. Bu gösterilimler, sınırı düzgün bir $D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde geçerli olan

$$\iint\limits_{D} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta = \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial D} w(\zeta)d\zeta, \quad \iint\limits_{D} w_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta = -\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial D} w(\zeta)d\bar{\zeta}$$

Gauss gösterilimlerine dayanır. Buradan elde edilen ve genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar teorisinde önemli rol oynayan

$$T_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \Pi_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

operatörleri bu tezde yoğun olarak kullanılmaktadır. Burada $f \in L_p(D),\ p > 2$ olup T_D ve Π_D sırasıyla Cauchy tipi zayıf ve kuvvetli singülerliği olan operatörlerdir. Bu operatörler 1. basamaktan kompleks kısmi türevli denklemler için incelenen sınır değer problemlerinde önemli rol oynarlar. Ancak daha yüksek basamaktan denklemler için geliştirilen ve bu operatörleri de içine alan $m, n \in \mathbb{Z},\ m+n \geq 0,\ m^2+n^2 > 0$ için

$$K_{m,n}(z,\zeta) = \begin{cases} \frac{(-1)^n(-m)!}{(n-1)!\pi}(\zeta - z)^{m-1}(\overline{\zeta - z})^{n-1}, & m \leq 0, \\ \frac{(-1)^m(-n)!}{(m-1)!\pi}(\zeta - z)^{m-1}(\overline{\zeta - z})^{n-1}, & n \leq 0, \\ \frac{(\zeta-z)^{m-1}(\overline{\zeta-z})^{n-1}}{(m-1)!(n-1)!\pi}\left[\log|\zeta - z|^2 - \sum\limits_{\mu=1}^{m-1}\frac{1}{\mu} - \sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{\nu}\right], & 1 \leq m, n, \end{cases}$$

olmak üzere, $f \in L(D,\mathbb{C})$ için

$$T_{0,0}f(z) = f(z),\ (m,n) = (0,0)$$

$$T_{m,n}f(z) = \int\limits_D K_{m,n}(z,\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\ (m,n) \neq (0,0)$$

operatörü çeşitli sınır değer problemlerin incelenmesinde doğrudan kullanılabilmektedir. Buradan da görüldüğü gibi bu operatörlerin uygulamalarında

$$\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z},\ \log|\zeta - z|^2,\ \frac{\zeta - z}{\overline{\zeta} - \overline{z}},\ \frac{1}{\zeta - z},\ \frac{1}{(\zeta - z)^2}$$

gibi katlı integrallerde singülerliğe sahip Cauchy tipi çekirdek fonksiyonları önem kazanmaktadır.

1.1. Tezin Amacı

Kompleks kısmi türevli denklemler için çeşitli sınır değer problemleri genel olarak elastisite teorisi, gazlar dinamiği, sualtı akustiği, kabuk teorisi, kuantum mekaniği gibi fizksel alanda uygulamalara sahiptir.

$|\mu(z)| \leq q_0 < 1,\ f \in L_1(D)$ olmak üzere

$$w_{\overline{z}}(z) + \mu(z)w_z(z) = f(z)$$

şeklinde tanımlanan Beltrami denklemi de uygulamalı bir denklemdir. Bu tezin temel amacı Beltrami denklemi için Schwarz, Dirichlet sınır değer problemlerini incelemek ve daha sonra bu denklemin bir genelleştirilmesi olan $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\frac{\partial^n w}{\partial \overline{z}^n} + \frac{\partial^n w}{\partial z^{n-1} \partial \overline{z}} = f$$

denklemi için Schwarz probleminin çözümünü ortaya koymaktır. Diğer bir amaç ise kompleks kısmi türevli denklemlerde incelenen temel sınır değer problemlerini genişletmek ve daha genel sonuçlar elde etmek için gerekli temel bilgi ve altyapıyı oluşturmaktır.

1.2. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanışında önce kompleks analizde bazı temel kavramlar ve belli sınıftan olan fonksiyonlar için integral gösterilimleri öğrenilmiştir.[1, 4] Daha sonra kompleks düzlemde Gauss-Green formüllerinin ortaya çıkışı ve belli tipten kompleks kısmi türevli denklemler için temel sınır değer problemleri incelenmiştir.[2] Beltrami denkleminin genel çözümü daha sonra belli sınır koşullarını sağlayan çözümleri ortaya konulmuştur. [2, 3]

Bu kaynaklardan elde edilen bilgi ve çözüm metodlarından yararlanılarak belli tipten bir genelleştirilmiş Beltrami denklemi için bir Schwarz sınır değer probleminin çözümü ortaya konmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Kompleks Düzlemde Gauss Teoremleri

Bildiğimiz gibi, $w = u + iv$ fonksiyonu analitik ise, bu takdirde u, v Cauchy-Riemann sistemini sağlar. Tersine eğer $u, v \in C^1(D)$ sınıfından ve Cauchy-Riemann sistemini sağlarsa, bu takdirde w, D bölgesinde analitiktir.

Şimdi analitik bir $w = u + iv$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda; u, v

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

Cauchy-Riemann sistemini sağlar. Burada

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

kompleks kısmi türev operatörleri kullanılırsa,

$$2w_z = u_x + iv_x - iu_y + v_y = 2(u_x + iv_x)$$

$$2w_{\bar{z}} = u_x + iv_x + iu_y - v_y = 0$$

elde edilir. Böylece Cauchy-Riemann sistemi, kompleks formda

$$w_{\bar{z}} = 0$$

denklemiyle gösterilebilir.

2.1.1. Düzlemde Reel Green Teoremi

Teorem 2.1. γ, pozitif yönde yönlendirilmiş parçalı düzgün, kapalı bir eğri ve D, γ tarafından sınırlanan bölge olsun.
Bu durumda P ve Q fonksiyonları D'de kısmi türevlere sahip $\overline{D} = D \cup \partial D = D \cup \gamma$ üzerinde sürekli iki fonksiyon olmak üzere,

$$\iint\limits_{D} P_y(x,y)dxdy = -\int\limits_{\partial D} P(x,y)dx, \tag{2.1}$$

$$\iint\limits_{D} Q_x(x,y)dxdy = \int\limits_{\partial D} Q(x,y)dy \tag{2.2}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. Teoremin ispatı için Calculus kitaplarına bakılabilir. □

(2.1) ve (2.2) den

$$\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dxdy \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.3) eşitliğine *Reel Green Formülü* denir.

2.1.2. Kompleks Düzlemde Gauss Teoremi

$D \subset \mathbb{C}$ üzerinde k. basamağa kadar kısmi türevleri var olan kompleks değerli fonksiyonların sınıfını $C^k(D;\mathbb{C})$ ile gösterelim. $C(D;\mathbb{C})$, D de sürekli fonksiyonların sınıfı olsun.

Teorem 2.2. $D \subset \mathbb{C}$ düzgün bir bölge olmak üzere, $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$ fonksiyonu verilsin.

$z = x + iy$ olmak üzere,

$$\iint\limits_{D} w_{\bar{z}}(z)dxdy = \frac{1}{2i}\int\limits_{\partial D} w(z)dz \tag{2.4}$$

$$\iint\limits_{D} w_z(z)dxdy = -\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial D} w(z)d\bar{z} \tag{2.5}$$

özdeşlikleri sağlanır.

İspat. Kompleks kısmi türev operatörleri kullanarak

$$2w_{\bar{z}} = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) \tag{2.6}$$

yazılabilir. (2.1) ve (2.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2\iint_D w_{\bar{z}}(z)dxdy &= \iint_D (u_x(z) - v_y(z))dxdy + i\iint_D (v_x(z) + u_y(z))dxdy \\
&= \int_{\partial D} (u(z)dy + v(z)dx) + i\int_{\partial D} (v(z)dy - u(z)dy) \\
&= -i\int_{\partial D} (u + iv)(dx + idy) \\
&= -i\int_{\partial D} w(z)dz
\end{aligned}$$

olup bu da (2.4) eşitliğini verir.

(2.4) eşitliğinde w yerine $\overline{w}$ yazılıp her iki tarafın kompleks eşleniği alınarak $\overline{\partial_{\bar{z}} w} = \partial_z \overline{w}$ olduğu göz önüne alınırsa, (2.5) elde edilir. □

2.2. Cauchy- Pompeiu Gösterimi

2.2.1. T_D ve Π_D Operatörleri

Tanım 2.1. $D \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge olmak üzere, D de tanımlı kompleks değerli bir f fonksiyonu için

$$\left(T_D f\right)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanan T_D operatörüne *zayıf singülerliğe sahip Vekua integral operatörü* denir.

Tanım 2.2. $D \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge olmak üzere, D de tanımlı kompleks değerli bir f fonksiyonu için

$$(\Pi_D f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanan Π_D operatörüne *kuvvetli singülerliğe sahip Vekua integral operatörü* denir.

Tanım 2.3. $z_0 \in D$ sabit bir nokta olmak üzere, her $z \in D$ için

$$|u(z) - u(z_0)| \leq H|z - z_0|^{\alpha} \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde H pozitif reel sabiti ve $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α sabiti varsa $u(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında *Hölder sürekli*dir denir.
Eğer her $z_1, z_2 \in D$ için (2.9) yazılıyorsa $u(z)$ fonksiyonuna D de *Hölder sürekli*dir denir.

$C^{\alpha}(D;\mathbb{C})$, D üzerinde tanımlı Hölder sürekli kompleks değerli fonksiyonların sınıfını göstermek üzere, $f \in C^{\alpha}(D;\mathbb{C})$ veya $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ olması durumunda (2.7) ifadesi daima mevcuttur. Hatta

$$T_D : C^{\alpha}(D;\mathbb{C}) \to C^{\alpha,1}(D;\mathbb{C})$$

şeklinde sınırlı bir operatördür. Burada $C^{\alpha,1}(D;\mathbb{C})$, 1. basamaktan kısmi türevleri mevcut ve Hölder sürekli fonksiyonların sınıfıdır.

2.2.2. T_D ve Π_D Operatörlerinin Özellikleri

a) f , D'de sınırlı olmak üzere $T_D f$ kompleks düzlemin tamamında düzgün sınırlıdır ve

$$|T_D f(z)| \leq 2 \sup_D |f| \left(\frac{mD}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

dir.

b) T_D ve Π_D operatörleri

$$\begin{aligned} T_D : C^{\alpha}(\overline{D}) &\longmapsto C^{\alpha,1}(\overline{D}) \\ \Pi_D : C^{\alpha}(\overline{D}) &\longmapsto C^{\alpha}(\overline{D}) \end{aligned}$$

şeklinde sınırlı operatörlerdir.

c) $T_D f$ in Hölder normu

$$\|T_D f\|_{C^{\alpha}(\overline{D})} = \max\left(\sup\left|T_D f\right|, \sup_{\zeta_1 \neq \zeta_2} \frac{\left|(T_D f)(\zeta_1) - (T_D f)(\zeta_2)\right|}{|\zeta_1 - \zeta_2|^{\alpha}}\right) \tag{2.11}$$

olarak verilir.

d)

$$\partial_z T_D f = \Pi_D f, \tag{2.12}$$

$$\partial_{\bar{z}} T_D f = f \tag{2.13}$$

dir.

2.2.3. Neumann Serisi

Tanım 2.4. T bir operatör olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

formundaki serilere *Neumann serisi* denir.

Burada T^k, T operatörünün k defa kendi kendine uygulanmasını ifade eder. Ayrıca Neumann serisi geometrik serinin genelleştirilmiş halini verir.

Bu seri kavramı Carl Neumann tarafından potansiyel teorisinde kullanılmıştır. Özel olarak Neumann serileri Fredholm integral denklemlerin çözümlerinde kullanılan Lioville-Neumann serilerinin temel yapısını oluşturarak fonksiyonel analizde de önemli bir rol oynar.

Teorem 2.3. X normlu vektör uzayında T sınırlı operatör olsun. Eğer T operatör normunda Neumann serisi yakınsak ise bu durumda Id birim operatör olmak üzere,
Id – T tersinirdir ve

$$(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \tag{2.14}$$

dir.
X bir Banach uzayı ve operatör normuna göre $|T| < 1$ olduğu durumda yakınsaklık garanti edilir. Bununla beraber, daha zayıf koşullar altında serilerin yakınsak olduğu durumlar da vardır.

İspat. Teoremin doğruluğu için [5] nolu kaynağın 56. sayfasına bakılabilir. □

Sonuç 2.1. T_D ve Π_D operatörlerinin özelliklerinden dolayı (2.14) özelliği bu operatörler için de geçerlidir.

2.2.4. Cauchy-Pompeiu Gösterilim Formülleri

Cauchy teoreminden Cauchy formulu çıkartıldığı gibi (2.4) ve (2.5) denklemlerinden de bazı gösterim formülleri ortaya konulabilir.

Teorem 2.4 (Cauchy-Pompeiu Gösterilimleri). $D \subset \mathbb{C}$ ve $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$ olsun.

Bu durumda, her $z \in D$ için $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{D} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \tag{2.15}$$

ve

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{D} w_{\zeta}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}} \tag{2.16}$$

özdeşlikleri geçerlidir.

İspat. $z_0 \in D$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı, $K_\varepsilon(z_0) = \{\zeta \in D : |\zeta - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde seçilmiş olsun.

$D_\varepsilon = D \backslash \overline{K_\varepsilon(z_0)}$ olmak üzere w fonksiyonu yerine $\dfrac{w(\zeta)}{\zeta - z_0}$ fonksiyonunu (2.4) bağıntısında D_ε bölgesi için yeniden yazılırsa;

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - \int\limits_{D_\varepsilon} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = 0$$

olur.

$\zeta - z_0 = te^{i\theta}$ şeklinde kutupsal koordinatlar kullanılırsa, $d\xi d\eta = t dt d\theta$ olmak üzere,

$$\int\limits_{\overline{K_\varepsilon(z_0)}} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi} w_{\overline{\zeta}}(z_0 + te^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta dt$$

yazılabilir.

$$\int\limits_{D} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int\limits_{D_\varepsilon} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} + \int\limits_{\overline{K_\varepsilon(z_0)}} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}$$

olduğundan dolayısıyla

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0} = \int\limits_{D} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_0}$$

eşitliği geçerlidir.

$D_\varepsilon = D\backslash\overline{K_\varepsilon(z_0)}$ olduğundan

$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int\limits_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - \int\limits_{\partial K_\varepsilon(z_0)} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \tag{2.17}$$

olup buradan $\partial K_\varepsilon(z_0)$ için tekrar kutupsal koordinatlar kullanıldığında

$$\zeta - z_0 = \varepsilon e^{i\theta} \quad \text{ve} \quad d\zeta = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta \quad \text{için}$$

$$\int\limits_{\partial K_\varepsilon(z_0)} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\frac{\cancel{\varepsilon} i \cancel{e^{i\theta}}}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}} d\theta = i\int\limits_0^{2\pi} w(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

elde edilir. Son olarak (2.17) ifadesinin her iki tarafının $\varepsilon \to 0$ için limiti alınırsa

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial D_\varepsilon} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} = \int\limits_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z_0} - 2\pi i w(z_0)$$

bulunur.

Burada z_0 keyfi seçildiğinden bu ifadeyi her $z \in D$ için

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{D} \frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

olarak yazılabilir. Böylece (2.15) kanıtlanmış olur.

(2.15) ün her iki tarafının önce kompleks eşleniği alınır ve daha sonra $\overline{w}$ yerine w yazılırsa (2.16) elde edilir. □

Burada (2.15) de $w_{\overline{\zeta}}(\zeta) = 0$ alınırsa analitik fonksiyonlar için *Cauchy integral formülü* elde edilir.

Tanım 2.5. (2.15) ve (2.16) ifadelerine $w(z)$ fonksiyonunun *Cauchy-Pompeiu integral gösterilimleri* denir.

Tanım 2.6. Daha önce Vekua operatörü olarak tanımlanan, $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ olmak üzere,

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_D f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.18}$$

operatörüne *Pompeiu Operatörü* de denir.

Tanım 2.7. $D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesi verilsin. $\varphi \in C^k(D)$ olmak üzere reel değerli bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu tamamen D'nin içinde bulunan, kompakt bir alt bölgenin sınırında ve dışında özdeş olarak sıfır ise φ'ye D bölgesinde *test fonksiyonu* denir.

D'ye ait k.basamağa kadar türevlere sahip tüm test fonksiyonlarının sınıfı da $C_0^k(D;\mathbb{C})$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. Her $\varphi \in C_0^1(D;\mathbb{C})$ test fonksiyonu için verilen f fonksiyonuna karşılık

$$\iint\limits_D \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial z} + g\varphi\right)dxdy = 0 \tag{2.19}$$

koşulu sağlanacak şekilde bir g fonksiyonu var ise g ye f nin z ye göre birinci basamaktan *Sobolev türevi* denir ve klasik anlamda olduğu gibi

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde Sobolev anlamında $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ tanımı ve yüksek basamaktan türevleri elde edilebilir.

Teorem 2.5. $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ olsun. Bu durumda her $\varphi \in C_0^1(D;\mathbb{C})$ test fonksiyonu için

$$\int\limits_D Tf(z)\varphi_{\bar{z}}(z)dxdy + \int\limits_D f(z)\varphi(z)dxdy = 0 \tag{2.20}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. φ fonksiyonunun D bölgesinin sınırında özdeş olarak sıfır olduğu göz önüne alınarak (2.15) eşitliği bu fonksiyon için yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{D}\varphi_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\\
&= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{D}\varphi_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\\
&= \left(T_D\varphi_{\overline{\zeta}}\right)(z)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{D} T_D f(z)\varphi_{\overline{z}}(z)dxdy &= \int\limits_{D}\left[-\frac{1}{\pi}\int\limits_{D} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\right]\varphi_{\overline{z}}(z)dxdy\\
&= -\int\limits_{D} f(\zeta)\left[-\frac{1}{\pi}\int\limits_{D}\varphi_{\overline{z}}(z)\frac{dxdy}{z-\zeta}\right]d\xi d\eta\\
&= -\int\limits_{D} f(\zeta)\varphi(\zeta)d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Buradan

$$
\int\limits_{D} Tf(z)\varphi_{\overline{z}}(z)dxdy+\int\limits_{D} f(z)\varphi(z)dxdy=0
$$

elde edilir. □

(2.20) denklemi göz önüne alınırsa

$$
\int\limits_{D}\big(Tf(z)\varphi_{\overline{z}}(z)+f(z)\varphi(z)\big)dxdy=0 \qquad (2.21)
$$

olacağından dolayısıyla Sobolev anlamında

$$
\partial_{\overline{z}}Tf=f \qquad (2.22)
$$

bulunur.

Kompleks kısmi türevli denklemler için $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde sınır değer problemlerinin incelenmesi sırasında Cauchy-Pompeiu gösterilim formüllerinin değişik versiyonları karşımıza çıkar.

Teorem 2.6. $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} Re\, w(\zeta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} Im\, w(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z} + \frac{z\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{1-z\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta \end{aligned} \tag{2.23}$$

gösterilimi mevcuttur.

İspat. $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$ olduğundan (2.4) ifadesini

$$\frac{w(\zeta)\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}$$

fonksiyonu için yazarsak sabit bir z $(|z|<1)$ değeri için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının kompleks eşleniği alınırsa

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \overline{w(\zeta)}\frac{z}{1-z\overline{\zeta}}d\overline{\zeta} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} \overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}\frac{z}{1-z\overline{\zeta}}d\xi d\eta = 0$$

olur. Bu eşitlik (2.15) eşitliği olan

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

eşitliği ile toplanırsa ve birim diskte de $|\zeta|=1$ için $\overline{\zeta}d\zeta = -\zeta d\overline{\zeta}$ olduğu göz önüne alınarak

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\frac{\zeta w(\zeta)}{\zeta-z} + \frac{z\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z} + \overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}\frac{z}{1-z\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta \tag{2.24}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} Re\, w(\zeta)\,\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + i\, Im\, w(\zeta) &= \frac{1}{2}(w(\zeta)+\overline{w(\zeta)})\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{1}{2}(w(\zeta)-\overline{w(\zeta)}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\zeta-z}{\zeta-z}\right]w(\zeta) + \frac{1}{2}\left[\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\zeta-z}{\zeta-z}\right]\overline{w(\zeta)} \\ &= \frac{\zeta w(\zeta) + z\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z} \\ &= \frac{\zeta w(\zeta)}{\zeta-z} + \frac{z\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade (2.24) de yerine yazılırsa (2.23) elde edilmiş olur. $\square$

Sonuç 2.2. Her $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\overline{D};\mathbb{C})$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} Re\, w(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left(\frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{\zeta} \frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}} \right) d\xi d\eta \\ &\quad + i\, Im\, w(0) \end{aligned} \tag{2.25}$$

biçiminde gösterilebilir.

(2.25) formülü *Cauchy-Schwarz-Poisson formülü* olarak adlandırılır.

Not 1. Eğer $w(z)$ birim diskte analitik bir fonksiyon ise (2.25) formülü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} Re\, w(\zeta) \left(\frac{2\zeta}{\zeta-z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} + i\, Im\, w(0) \tag{2.26}$$

şekline gelir.

Tanım 2.9. (2.26) formülüne analitik fonksiyonlar için *Schwarz-Poisson Formülü* denir.

Ayrıca

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z} = \frac{2\zeta}{\zeta-z} - 1$$

ifadesine *Schwarz çekirdeği* ve bunun reel kısmı olan

$$\frac{\zeta}{\zeta-z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}} - 1 = \frac{\zeta(\overline{\zeta}-\overline{z}) + \overline{\zeta}(\zeta-z) - (\zeta-z)(\overline{\zeta}-\overline{z})}{|\zeta-z|^2} = \frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$$

ifadesine de *Poisson çekirdeği* denir.

Tanım 2.10. $\varphi(z)$ birim diskte analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$S\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanan S operatörüne *Schwarz operatörü* denir.

Burada $z \in D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ve $\zeta \in \partial D$ olmak üzere

$$\lim_{z\to\zeta} S\varphi(z) = \varphi(\zeta), \quad \varphi \in C(\partial D;\mathbb{R}) \tag{2.28}$$

olduğu görülebilir.

(2.25) Cauchy-Schwarz-Poisson formülünü D birim diskinde tanımlanan

$$w_{\bar{z}} = f, \quad Re\, w|_{\partial D} = \varphi, \quad Im\, w(0) = c \tag{2.29}$$

probleminin koşulları altında yeniden yazarsak

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}} \frac{1 + z\overline{\zeta}}{1 - z\overline{\zeta}} \right) d\xi d\eta + ic \tag{2.30}$$

fonksiyonunun (2.29) probleminin çözümü olduğu görülür.
Gerçekten (2.27) ve (2.28) özellikleri ile beraber T_D operatörünün $\big(T_D f(z)\big)_{\bar{z}} = f(z)$ özelliği göz önüne alınırsa (2.30) ifadesindeki $w(z)$ fonksiyonunun (2.29) probleminin koşullarını sağladığı görülebilir.

Buradan görüldüğü gibi integral gösterim formülleri sınır-değer problemlerinin çözümlerinde önemli bir rol oynar. Bu method sadece birim diskle sınırlı değildir ancak farklı durumlarda problem çözümleri birim diskte verilen çözümler kullanılarak verilir. Çünkü Riemann Dönüşüm Teoremi yardımıyla düzgün sınıra sahip her kompleks bölge birim diske homeomorf olarak dönüştürülebilir.

3. TEMEL SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Schwarz-Poisson formülü ve sonuçları göz önüne alındığında birim diskteki sınır değer problemleri bir önceki bölümde görüldüğü gibi bir yol izlenerek çözülebilmektedir. Kompleks kısmi türevli denklemler için incelenen sınır değer problemlerinin temeli, analitik fonksiyonlar için verilen sınır değer problemlerine dayanır.

Birim disk dışında ise Riemann Dönüşüm Teoremi kolaylık sağlar. Teoreme göre herhangi bir basit bağlantılı bölgeyi birim diske dönüştüren bir Riemann dönüşümü var olduğundan birim diskteki sonuçlar basit bağlantılı bölge için de geçerliliğini korur.

Şimdi asıl çalışmamızda rol oynayan iki temel sınır değer problemini görelim.

3.1. Schwarz Sınır Değer Problemi

Tanım 3.1 (SCHWARZ SINIR DEĞER PROBLEMI)**.** $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $w_{\overline{z}} = 0$ denkleminin

$$\mathrm{Re}\, w\,|_{\partial D} = \gamma,\ \mathrm{Im}\, w(0) = c,\ \gamma \in C(\partial D;\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}$$

sınır koşullarını sağlayan $w(z)$ çözümünün bulunması problemine analitik fonksiyonlar için *Schwarz sınır değer problemi* denir.

Diğer taraftan

$$w_{\overline{z}} = 0$$

denkleminin çözümleri analitik fonksiyonlar olduğundan analitik fonksiyonlar için Schwarz sınır değer probleminin çözümü de analitik bir fonksiyondur.

Teorem 3.1. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ olmak üzere;

$$w_{\bar{z}} = 0, \quad z \in D,$$
$$\text{Re } w(z) \mid_{\partial D} = \gamma(z), \quad \gamma \in C(\partial D\,;\mathbb{R}),$$
$$\text{Im } w(0) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

Schwarz problemi tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic \tag{3.1}$$

formülü ile verilir.

İspat. Teoremin doğruluğu

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \text{Re } w(\zeta) \left(\frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1 \right) \frac{d\zeta}{\zeta} + i \ \text{Im } w(0)$$

Schwarz-Poisson formülünden açıktır. □

3.2. Dirichlet Sınır Değer Problemi

Tanım 3.2 (DIRICHLET SINIR DEĞER PROBLEMI)**.** $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde
$w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin

$$w(z) \mid_{\partial D} = \gamma(z)\ ,\ z \in \partial D\ ,\ \gamma \in C(\partial D\,;\mathbb{C})$$

sınır koşullarını sağlayan $w(z)$ çözümünün bulunması problemine analitik fonksiyonlar için *Dirichlet sınır değer problemi* denir. Schwarz probleminde olduğu gibi analitik fonksiyonlar için Dirichlet sınır değer probleminin çözümü analitik bir fonksiyondur.

Not 2 (PLEMELJ-SOKHOTZKI FORMÜLLERI)**.** Cauchy integral formülünün hipotezleri altında $\Phi(z)$ fonksiyonu

$$\Phi^+(\tau) = \lim_{\substack{z \to \tau \\ z \in D^+}} \Phi(z), \qquad \Phi^-(\tau) = \lim_{\substack{z \to \tau \\ z \in D^-}} \Phi(z)$$

sınır değerlerine sahiptir.

Burada D^+, $\partial D^+ = \gamma$ ile sınırlanmış iç bölge, $D^- = \hat{\mathbb{C}} \setminus (D^+ \cup \gamma)$ ve $\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresidir.

Ayrıca $\tau \in \gamma$ için

$$\begin{aligned} \Phi^+(\tau) &= \frac{1}{2}\varphi(\tau) + \Phi(\tau) && (3.1) \\ \Phi^-(\tau) &= -\frac{1}{2}\varphi(\tau) + \Phi(\tau) && (3.2) \end{aligned}$$

olup, $\varphi(\tau)$ Cauchy esas değeri anlamındadır. (3.1) ve (3.2) bağıntıları *Plemelj-Sokhotzki* formülleri olarak bilinir.

Plemelj-Sokhotzki formülünden, $|\zeta| = 1$ için

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ |z|<1}} w(z) - \lim_{\substack{z \to \zeta \\ 1<|z|}} w\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \gamma(\zeta)$$

yazılabilir. $|\zeta| = 1$ iken

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ |z|<1}} w(z) = \gamma(\zeta)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ 1<|z|}} w(z) = 0$$

olmasıdır. Ancak, Plemelj-Sokhotzki formülünün klasik gösterilimi γ Hölder sürekli olduğunda geçerli olmasına rağmen birim disk için Hölder süreklilik gerekli değildir.

Teorem 3.2. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\gamma \in C(\partial D\,; \mathbb{R})$ olmak üzere $w_{\bar{z}} = 0$ denkleminin

$$w(z)\,|_{\partial D} = \gamma(z), \quad z \in D$$

koşulunu sağlayan çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\overline{\zeta}}{1 - \bar{z}\zeta} d\zeta = 0 \tag{3.3}$$

olmasıdır. Bu durumda da problemin tek çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \tag{3.4}$$

Cauchy integral formülü ile verilir.

İspat. $(\Rightarrow)$: (3.3) in gerek koşul olduğunu gösterelim. w, Dirichlet probleminin bir çözümü olsun. Bu takdirde, her $|\zeta|=1$ için w, D de analitik olup teoremin koşulundan

$$\lim_{z\to\zeta} w(z)=\gamma(\zeta) \tag{3.5}$$

sürekli sınır değerlerine sahiptir.

Diğer taraftan, $1<|z|$ için

$$w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta-z}}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$1<|z|$ için $z\to\zeta$ olduğunda $1/\overline{z}\to\zeta$ olur. Dolayısıyla, $1<|z|$ için $\lim\limits_{z\to\zeta} w(\zeta)$ mevcut olduğundan $\lim\limits_{z\to\zeta} w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)$ de mevcuttur.

Buradan,

$$w(z)-w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}-1\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

olup Poisson çekirdeğinin özelliklerinden $|\zeta|=1$ için

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\|z|<1}} w(z)-\lim_{\substack{z\to\zeta\\1<|z|}} w(\frac{1}{\overline{z}})=\gamma(\zeta) \tag{3.6}$$

elde edilir. Bu ifade (3.5) ile karşılaştırılırsa

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\|z|<1}} w(z)=0$$

olduğu görülür.

$1<|z|$ olduğunda $w(\infty)=0$ olacağından analitik fonksiyonlar için maksimum prensibi nedeniyle $w(z)\equiv 0$ olur. Buradan $|z|<1$ için

$$w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}\mathrm{d}\zeta=0$$

bulunur. Böylece (3.3) koşulu elde edilir.

$(\Leftarrow)$: (3.3) nin yeterli koşul olduğunu göstermek için (3.3) ile (3.4) taraf tarafa toplanırsa;

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta-z}}\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}-1\right)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

bulunur.

Böylece $|\zeta| = 1$ için Poisson özelliklerinden

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ |z|<1}} w(z) = \gamma(\zeta)$$

olduğu görülür. $\square$

Şimdi aynı sınır dğer problemlerini homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için inceleyelim.

3.3. Homojen Olmayan Cauchy-Riemann Denklemi için Schwarz Sınır Değer Problemi

Teorem 3.3. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ olmak üzere $w_{\overline{z}} = f$ homojen olmayan Cauchy-Riemann denkleminin

$$\text{Re } w|_{\partial D} = \gamma, \quad \text{Im } w(0) = c$$

koşullarını sağlayan çözümü vardır ve bu çözüm

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ic - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}} \frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}} \right) d\xi d\eta \tag{3.7}$$

formülü ile tek türlü belirlenebilir.

İspat. $w \in C^1(D,\mathbb{C}) \cap C(\overline{D},\mathbb{C})$ için (2.25) gösterilimi göz önüne alınırsa problemin çözümünün

$$\begin{aligned} w(z) \;&=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \text{Re } w(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left(\frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}}{\zeta} \frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}} \right) d\xi d\eta \\ &+ i\text{Im } w(0) \end{aligned}$$

olduğu doğrudan görülür. Bu çözümün tek olduğu ise Teorem 3.1. den açıktır. $\square$

3.4. Homojen Olmayan Cauchy-Riemann Denklemi için Dirichlet Sınır Değer Problemi

Teorem 3.4. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde

$$w_{\bar{z}} = f, \quad f \in L_1(D;\mathbb{C}),$$
$$w|_{\partial D} = \gamma, \quad \gamma \in C(\partial D;\mathbb{C}),$$

olarak tanımlanan homojen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Dirichlet probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $|z| < 1$ birim D diskinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta \tag{3.8}$$

olmasıdır. Bu durumda Dirichlet probleminin tek çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\zeta - z} \tag{3.9}$$

dır.

İspat. Eğer Dirichlet probleminin çözümünün varlığı kabul edilirse (3.9) çözümü (2.15) Cauchy-Pompeiu gösteriliminden açıktır. Çözümün tekliği ise Teoremi 3.2. nin bir sonucudur.

Şimdi (3.8) koşulu altında (3.9) fonksiyonunun homojen olmayan Dirichlet sınır değer probleminin çözümü olduğunu görelim. Öncelikle $|z| < 1$ olmak üzere, (3.8) ve (3.9) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} w(z) &= \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\right)d\zeta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\right)d\xi d\eta \\ &= \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\bar{z}} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\right)d\xi d\eta \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{1-\bar{z}\zeta + \bar{z}\zeta - z\bar{z}}{(\zeta - z)(1-\bar{z}\zeta)}$$

olduğundan , $|z| = 1$ için bu ifade sıfırdır. Dolayısıyla $|z| = 1$ özelliğini sağlayan z sınır noktaları için

$$w(z) = \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{3.10}$$

yazılabilir.
(3.10) de Poisson çekirdeğinin özelliğini kullanılırsa $w(z) = \gamma(z)$ sınır koşulu sağlanır. Ayrıca $|z| < 1$ olmak üzere,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

fonksiyonu, T_D operatörünün özelliğinden $w_{\overline{z}} = f$ denklemini sağlar.

Diğer taraftan; gereklilik koşulu için analitik fonksiyonlara ilişkin Dirichlet probleminin çözülebilme koşulu olan ve (3.3) ile gösterilen

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}\mathrm{d}\zeta = 0$$

koşulunu göz önüne alalım. Bu koşulu $w - T_D f$ analitik fonksiyonu için uygulanırsa

$$(w - T_D f)|_{\partial D} = \gamma - (T_D f)_{\partial D}$$

olacağından (3.3) de γ yerine $\gamma - T_D f$ alınırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}(\gamma-Tf)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta=0$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}Tf(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left[-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}\frac{f(t)}{t-\zeta}dt_1dt_2\right]\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}f(t)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{t-\zeta}dt_1dt_2\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}f(t)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta-t}dt_1dt_2\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}f(t)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}t}dt_1dt_2\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta=0
\end{aligned}$$

olup böylece

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta=0$$

(3.8) çözülebilme koşulu elde edilir. Burada Cauchy integral formülü ζ ya göre analitik olan

$$f(\zeta)=\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}$$

fonksiyonu için kullanılmıştır. Formüle göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}}{\zeta-t}d\zeta=f(\zeta)|_{\zeta=t}=\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}t}\quad \text{dır.}\qquad\square$$

4. BELTRAMİ DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde ilk olarak Beltrami denkleminin genel çözümünü daha sonra daha önceki bölümde gördüğümüz homojen olmayan Cauchy-Riemann Denklemleri için sınır değer problemlerinden yararlanarak birim diskte Beltrami denklemi için Schwarz ve Dirichlet problemlerinin çözülebilme koşulları ve çözümlerini inceleyeceğiz.

4.1. Beltrami Denklemi

Önemli kompleks kısmi diferansiyel denklem sistemlerinden birisi de Cauchy-Riemann denklem sistemi ile aynı tipte ancak daha genel bir forma sahip ve

$$w_{\bar{z}} + q(z)w_z$$

şeklinde tanımlanan Beltrami denklem sistemidir.
Burada $q(z)$, D bölgesinde $|q(z)| \leq q_0 < 1$ özelliğine sahip ölçülebilir bir fonksiyondur. Bu koşul elliptik koşulu olarak adlandırılan sistemin güçlü elliptikliğini garanti eder.

Biz bu bölümde $f \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$ olmak üzere,

$$w_{\bar{z}} + q(z)w_z = f(z), \quad z \in D \tag{4.1}$$

denkleminin genel çözümünü özellikle Vekua tarafından verilen (2.8) Π_D operatörünü kullanarak vereceğiz.

Aşağıda lemmalara dayanarak (4.1) denklemi için Schwarz ve Dirichlet sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığını kanıtlayacağız.

Lemma 4.1. Homojen ($f=0$) olduğu durumda (4.1) denklemi, $\zeta=\zeta(z)$ ve q sabit olmak üzere

$$\zeta_{\bar{z}}+q\zeta_z=0$$

homeomorfizm dönüşümü ile $w_{\overline{\zeta}}=0$ Cauchy-Riemann denklemine dönüşür.

İspat. $w_{\bar{z}}+q(z)w_z=0$ homojen Beltrami denklemi verilsin. Burada $|q|\leq q_0<1$ için $\zeta_{\bar{z}}+q\zeta_z=0$ koşulu altında $\zeta=\zeta(z)$ dönüşümünü göz önüne alalım.

$\zeta=\zeta(z)$ dönüşümü homeomorfizm olduğundan $w=W(\zeta(z))$ dönüşümünde ζ, w nın sağladığı denklemi sağlar. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} w_{\bar{z}}+q(z)w_z &= W_\zeta\cdot\zeta_{\bar{z}}+W_{\overline{\zeta}}\cdot\overline{\zeta}_{\bar{z}}+q\left(W_\zeta\cdot\zeta_z+W_{\overline{\zeta}}\cdot\overline{\zeta}_z\right)\\ &= W_\zeta[\zeta_{\bar{z}}+q\zeta_z]+W_{\overline{\zeta}}\left[\overline{(\zeta_z)}+q\overline{(\zeta_{\bar{z}})}\right]\\ &= W_{\overline{\zeta}}\left[\overline{(\zeta_z)}+q\overline{(\zeta_{\bar{z}})}\right]\end{aligned}$$

olur.

$$\zeta_{\bar{z}}+q\zeta_z=0\iff -q\zeta_z=\zeta_{\bar{z}}\iff\frac{\zeta_{\bar{z}}}{q\zeta_z}=-1\implies\frac{\overline{(\zeta_{\bar{z}})}}{\overline{q}\overline{(\zeta_z)}}=-1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} W_{\overline{\zeta}}\left[\overline{(\zeta_z)}+q\overline{(\zeta_{\bar{z}})}\right] &= W_{\overline{\zeta}}\left[1+q\frac{\overline{(\zeta_{\bar{z}})}}{\overline{(\zeta_z)}}\right]\overline{(\zeta_z)}\\ &= W_{\overline{\zeta}}\left[1+q\overline{q}\frac{\overline{(\zeta_{\bar{z}})}}{\overline{q}\overline{(\zeta_z)}}\right]\overline{(\zeta_z)}\\ &= W_{\overline{\zeta}}\left[1+|q|^2(-1)\right]\overline{(\zeta_z)}=0\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Son eşitlikte $\zeta_z\neq 0$ ve $|q|^2<1$ olduğundan $W_{\overline{\zeta}}=0$ olmak zorundadır. Yani; $W(\zeta(z))=w$ fonksiyonu ζ nın analitik bir fonksiyonudur. □

Sonuç 4.1. Beltrami denklemi için klasik olarak verilen sınır değer problemlerinin ilgili çözümleri tek türlü gösterilir.

Lemma 4.1 nedeniyle analitik fonksiyonlar için homojen sınır koşulları ile sınır değer problemlerin tek aşikar çözümlere sahip olduğu söylenebilir.

4.2. Beltrami Denkleminin Genel Çözümü

Şimdi, (4.1) denkleminin genel çözümünü verelim. Beltrami denkleminin genel çözümü, $\rho := w_{\bar{z}}$ olmak üzere D de keyfi ϕ analitik fonksiyonu ve

$$T\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \rho(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

için

$$w(z) = \phi(z) + T\rho(z) \tag{4.2}$$

formundadır.

Burada, $\rho \in L^1(D)$ için Sobolev anlamında $\partial_{\bar{z}}T\rho(z) = \rho(z)$ dır.

Şimdi (4.2), (4.1) denklemini sağlayacak şekilde $\rho(z)$ yi bulmaya çalışalım. Bunun için önce

$$T\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \rho(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

ve

$$\Pi\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \rho(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

operatörleri için $\dfrac{\partial}{\partial z}T_D\rho(z) = \Pi\rho(z)$ ve $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}T_D\rho(z) = \rho(z)$ özellikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} w_z &= \varphi'(z) + \Pi\rho(z) \\ w_{\bar{z}} &= \rho(z) \end{aligned}$$

olup bu değerlerin (4.1) de yerine yazılmasıyla

$$\rho(z) + q(z)\varphi'(z) + q(z)\Pi\rho(z) = f(z)$$

elde edilir. Buradan

$$(Id + q\Pi)\rho(z) = f(z) - q(z)\varphi'(z)$$

yazılabilir. Π operatörünün (2.14) özelliğinden dolayı tersinirdir. Dolayısıyla $\rho(z)$ için

$$\begin{aligned}(Id+q\Pi)^{-1}\rho(z)(Id+q\Pi) &= (Id+q\Pi)^{-1}(f-q\varphi')(z)\\ \rho(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(q\Pi)^k(f-q\varphi')(z)\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada Id birim operatördür. Bu son eşitliği $\zeta_0 := z$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\rho(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(q\Pi)^k(f-q\varphi')(z)\\ &= f(z)-q(z)\varphi'(z)+q(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^k}\int\limits_{D^k}\frac{f(\zeta_k)-q(\zeta_k)\varphi'(\zeta_k)}{(\zeta_k-\zeta_{k-1})^2}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{q(\zeta_l)}{(\zeta_l-\zeta_{l-1})^2}\\ &\qquad d\xi_1 d\eta_1\ldots d\xi_k d\eta_k \end{aligned} \tag{4.3}$$

olur.

Özel olarak $z\in\mathbb{D}$ için $q(z)=c(c\,sabit)$ alalım. Bu durumda (4.3) denklemi

$$\begin{aligned}\rho(z) &= f(z)-c\varphi'(z)+\sum_{k=1}^{\infty}c^k\frac{1}{\pi^k}\int\limits_{D}f(\zeta_k)-c\varphi'(\zeta_k)\\ &\quad\times\left(\int\limits_{D^{k-1}}\prod_{l=1}^{k}\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_{l-1})^2}d\xi_1 d\eta_1\ldots d\xi_{k-1}d\eta_{k-1}\right)d\xi_k d\eta_k\end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Lemma 4.2.

$$\int\limits_{D^{k-1}}\prod_{l=1}^{k}\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_{l-1})^2}d\xi_1 d\eta_1\ldots d\xi_{k-1}d\eta_{k-1}=k\pi^{k-1}\frac{(\overline{\zeta_k-z})^{k-1}}{(\zeta_k-z)^{k+1}} \tag{4.5}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Lemmanın doğruluğunu tümevarımla görebiliriz. Öncelikle $k=2$ için doğrulugunu gösterelim. Daha sonra $(k-1)$ için denklemin doğruluğunu kabul edip k için (4.5) in doğru olduğunu göstermeliyiz.

1. adım $k=2$ için

$$\int\limits_{D^{2-1}}\prod_{l=1}^{2}\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_{l-1})^2}d\xi_1 d\eta_1=\int\limits_{D}\frac{d\xi_1 d\eta_1}{(\zeta_2-\zeta_1)^2(\zeta_1-\zeta_0)^2}=2\pi\frac{\overline{\zeta_2-z}}{(\zeta_2-z)^3} \tag{4.6}$$

olup olmadığını görelim.

Bu ifadenin değerini elde etmek için ilk olarak $\zeta_0 := z$ olmak üzere,

$$\int_D \frac{d\xi_1 d\eta_1}{(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_1-z)} = \frac{1}{\zeta_2-z}\left[\int_D \frac{1}{\zeta_2-\zeta_1} d\xi_1 d\eta_1 + \int_D \frac{1}{\zeta_1-z} d\xi_1 d\eta_1\right] \tag{4.7}$$

eşitliğini göz önüne alalım. Burada parantez içindeki integraller için (2.15) Cauchy-Pompeiu gösterilim formülünde $w(z) = \bar{z}$ alırsak

$$\int_D \frac{1}{\zeta_2-\zeta_1} d\xi_1 d\eta_1 = -\frac{1}{2i}\int_{\partial D} \overline{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2} + \pi w(\zeta_2) \tag{4.8}$$

ve

$$\int_D \frac{1}{\zeta_1-z} d\xi_1 d\eta_1 = -\frac{1}{2i}\int_{\partial D} \overline{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z} - \pi w(z) \tag{4.9}$$

olur.

(4.8) ve (4.9) ifadelerini (4.7) yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{d\xi_1 d\eta_1}{(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_1-z)} &= \frac{1}{\zeta_2-z}\left[-\frac{1}{2i}\int_{\partial D} \overline{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2} + \pi\overline{\zeta_2} + \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \overline{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z} - \pi\bar{z}\right] \\
&= \frac{1}{\zeta_2-z}\pi(\overline{\zeta_2}-\bar{z}) = \frac{1}{\zeta_2-z}\pi(\overline{\zeta_2-z}) \\
&= \pi\frac{\overline{\zeta_2-z}}{\zeta_2-z}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.6) ifadesini

$$\begin{aligned}
&\int_D \frac{d\xi_1 d\eta_1}{(\zeta_2-\zeta_1)^2(\zeta_1-z)^2} \\
&= \frac{1}{(\zeta_2-z)^2}\left[\int_D \frac{1}{(\zeta_2-\zeta_1)^2} d\xi_1 d\eta_1 + 2\int_D \frac{d\xi_1 d\eta_1}{(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_1-z)} + \int_D \frac{1}{(\zeta_1-z)^2} d\xi_1 d\eta_1\right]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde yazabiliriz. Yine benzer şekilde burada da (2.4) Gauss formülünü kullanarak parantez içindeki integraller için

$$\int_D \frac{1}{(\zeta_2-\zeta_1)^2} d\xi_1 d\eta_1 = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{\overline{\zeta_1}}{(\zeta_2-\zeta_1)^2} d\zeta_1 \tag{4.12}$$

ve

$$\int\limits_D \frac{1}{(\zeta_2 - z)^2} d\xi_1 d\eta_1 = \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} \frac{\overline{\zeta_1}}{(\zeta_1 - z)^2} d\zeta_1 \tag{4.13}$$

yazabiliriz.

(4.10), (4.12) ve (4.13) değerlerini (4.11) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\int\limits_D \frac{d\xi_1 d\eta_1}{(\zeta_2 - \zeta_1)^2 (\zeta_1 - z)^2} &= \frac{1}{(\zeta_2 - z)^2} \left[\frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} \frac{\overline{\zeta_1}}{(\zeta_2 - \zeta_1)^2} d\zeta_1 + 2\pi \frac{\overline{\zeta_2 - z}}{\zeta_2 - z} + \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} \frac{\overline{\zeta_1}}{(\zeta_2 - z)^2} d\zeta_1 \right] \\
&= 2\pi \frac{\overline{\zeta_2 - z}}{(\zeta_2 - z)^3} \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

olur. Bu bize (4.5) denkleminde $k = 2$ için denklemin doğruluğunu verir.

2. adım (4.5) in $(k-1)$ indisi için doğruluğunu kabul edelim. Yani;

$$\int\limits_{D^{k-2}} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2} d\xi_1 d\eta_1 \ldots d\xi_{k-2} d\eta_{k-2} = (k-1)\pi^{k-2} \frac{(\overline{\zeta_{k-1} - z})^{k-2}}{(\zeta_{k-1} - z)^k} \tag{4.15}$$

sağlansın.

3.adım k indisi için

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D^{k-1}} \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2} d\xi_1 d\eta_1 \ldots d\xi_{k-1} d\eta_{k-1} \\
&= \int\limits_D \underbrace{\int\limits_{D^{k-1}} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2} d\xi_1 d\eta_1 \ldots d\xi_{k-2} d\eta_{k-2}}_{(k-1)\text{indisli terim}} \frac{1}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2} d\xi_{k-1} d\eta_{k-1} \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $(k-1)$ indisli terim için (4.15) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D^{k-1}} \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2} d\xi_1 d\eta_1 \ldots d\xi_{k-1} d\eta_{k-1} \\
&= \int\limits_D (k-1)\pi^{k-2} \frac{(\overline{\zeta_{k-1} - z})^{k-2}}{(\zeta_{k-1} - z)^k} \frac{1}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2} d\xi_{k-1} d\eta_{k-1} \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

olur. (4.17) denklemi için (2.4) Gauss formülünü kullanırsak $w(\zeta_{k-1}) = \dfrac{1}{k-1}(\overline{\zeta_{k-1}-z})^{k-2}$ olmak üzere

$$\int_D (k-1)\pi^{k-2}\frac{(\overline{\zeta_{k-1}-z})^{k-2}}{(\zeta_{k-1}-z)^k}\frac{1}{(\zeta_k-\zeta_{k-1})^2}d\xi_{k-1}d\eta_{k-1}$$
$$= (k-1)\pi^{k-2}\frac{1}{2i}\int_{\partial D}\frac{1}{k-1}\frac{(\overline{\zeta_{k-1}-z})^{k-1}}{(\zeta_{k-1}-z)^k}\frac{d\zeta_{k-1}}{(\zeta_k-\zeta_{k-1})^2} \quad (4.18)$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}\frac{\pi^{k-2}}{2i}\int_{\partial D}\frac{(\overline{\zeta_{k-1}-z})^{k-1}}{(\zeta_{k-1}-z)^k}\frac{d\zeta_{k-1}}{(\zeta_k-\zeta_{k-1})^2} &= \frac{\pi^{k-2}}{2i}2\pi ik\frac{(\overline{\zeta_{k-1}-z})^{k-1}}{(\zeta_{k-1}-z)^{k+1}} \\ &= k\pi^{k-1}\frac{(\overline{\zeta_k-z})^{k-1}}{(\zeta_k-z)^{k+1}} \quad (4.19)\end{aligned}$$

yazılabilir. Sonuç olarak k. terim için

$$\int_{D^{k-1}}\prod_{l=1}^{k}\frac{1}{(\zeta_l-\zeta_{l-1})^2}d\xi_1 d\eta_1\ldots d\xi_{k-1}d\eta_{k-1} = k\pi^{k-1}\frac{(\overline{\zeta_k-z})^{k-1}}{(\zeta_k-z)^{k+1}} \quad (4.20)$$

olur. Böylece (4.5) ispatlanmış oldu.

□

(4.5) e göre (4.4) yeniden yazılırsa $\rho(z)$nin değeri

$$\rho(z) = f(z) - c\varphi'(z) + \sum_{k=1}^{\infty}kc^k\frac{1}{\pi}\int_D\left\{f(\zeta_k)-c\varphi'(\zeta_k)\right\}\frac{(\overline{\zeta_{k-1}-z})^{k-1}}{(\zeta_{k-1}-z)^{k+1}}\mathrm{d}\xi_k\mathrm{d}\eta_k \quad (4.21)$$

olarak bulunur.

(4.21) değerini (4.2) denkleminde yazalım. Bu durumda, $t = t_1 + it_2$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} w(z) &= \varphi(z) - \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|<1}\left\{f(\zeta)-c\varphi'(\zeta)\right\}\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty}kc^k\frac{1}{\pi^2}\int_{D^2}\left\{f(\zeta)-c\varphi'(\zeta)\right\}\frac{(\overline{\zeta-t})^{k-1}}{(\zeta-t)^{k+1}}\frac{1}{t-z}dt_1dt_2d\xi d\eta \quad (4.22)\end{aligned}$$

elde edilir.

Beltrami denkleminin genel çözümü olan bu ifadeyi daha basit hale getirmek için aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 4.3. $|k| > 0$ olmak üzere; $|z| < 1$ ve $|\zeta| < 1$ için,

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k-1}}{(\zeta - t)^{k+1}} \frac{1}{t-z} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 = \frac{1}{k} \frac{(\overline{\zeta - z})^k}{(\zeta - z)^{k+1}} \tag{4.23}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Öncelikle

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k-1}}{(\zeta - t)(t-z)} dt_1 dt_2 \\
&\quad = \frac{1}{\zeta - z}\left\{ \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k-1}}{(\zeta - t)} dt_1 dt_2 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k-1}}{(t-z)} dt_1 dt_2 \right\} \\
&\quad = \frac{1}{k}\frac{1}{\zeta - z}\left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k}}{(t-\zeta)} dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k}}{(t-z)} dt + (\overline{\zeta - z})^k \right\} \\
&\quad = \frac{1}{k}\frac{(\overline{\zeta - z})^k}{\zeta - z}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

yazılabilir. Burada eşitliğin her iki tarafının ζ ya göre k. türevi alınırsa

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k-1}}{(\zeta - t)^{k+1}} \frac{1}{t-z} dt_1 dt_2 = \frac{1}{k} \frac{(\overline{\zeta - z})^k}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

olur ve bu da (4.23) ü verir. □

Lemma 4.3 kullanılırsa (4.22) çözümü

$$\begin{aligned} w(z) &= \varphi(z) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \{f(\zeta) - c\varphi'(\zeta)\} \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} k c^k \frac{1}{\pi} \int\limits_{D} \{f(\zeta) - c\varphi'(\zeta)\} \left[\frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k-1}}{(\zeta - t)^{k+1}} \frac{1}{t - z} dt_1 dt_2 \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (4.23) bu son eşitlikte yerine yazılırsa

$$w(z) = \varphi(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c^k \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ f(\zeta) - c\varphi'(\zeta) \right\} \frac{(\overline{\zeta - z})^k}{(\zeta - z)^{k+1}} d\xi d\eta \tag{4.25}$$

elde edilir.

Son olarak $|c| < 1$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k \frac{(\overline{\zeta - z})^k}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta - z} \left(\frac{c(\overline{\zeta - z})}{\zeta - z} \right)^k = \frac{1}{\zeta - z} \quad \frac{1}{1 - \frac{c(\overline{\zeta - z})}{\zeta - z}} = \frac{1}{\zeta - z - c(\overline{\zeta - z})}$$

yazılabilirdir. Böylece Beltrami denkleminin genel çözümü φ, D birim diskinde keyfi analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$w(z) = \varphi(z) - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ f(\zeta) - c\varphi'(\zeta) \right\} \frac{1}{\zeta - z - c(\overline{\zeta - z})} d\xi d\eta \tag{4.26}$$

olarak elde edilir.

4.3. Schwarz Sınır Değer Problemi

Teorem 4.1. Birim diskte $f \in L_p(\overline{D})$, $p > 2$, $\gamma \in C(\partial D, \mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$w_{\bar{z}} + c w_z = f, \quad \text{Re } w|_{\partial D} = \gamma, \quad \text{Im } w(0) = a$$

olarak verilen Schwarz sınır değer problemi çözülebilirdir ve çözüm

$$\begin{aligned} w(z) &= \varphi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \Big\{ c^k \Pi_1^k (f - c\varphi')(\zeta) \frac{\zeta - z}{\zeta(\zeta - z)} \\ &\quad + \bar{c}^k \overline{\Pi_1^k (f - c\varphi')(\zeta)} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(1 - z\bar{\zeta})} \Big\} d\xi d\eta \end{aligned} \tag{4.27}$$

dır. Burada $\varphi(z)$ fonksiyonu ve Π_1 operatörü

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ia \tag{4.28}$$

$$\Pi_1 \rho(z) := -\frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \left\{ \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2} + \frac{\overline{\rho}(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^2} \right\} d\xi d\eta. \tag{4.29}$$

dır.

İspat.

$$T_1 \rho(z) := -\frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|<1} \left\{ \frac{\rho(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{\rho}(\zeta)}{\bar{\zeta}} \frac{1 + z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}} \right\} d\xi d\eta$$

ve

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ia$$

olmak üzere $w(z) = \varphi(z) + T_1 \rho(z)$ ifadesini Beltrami denkleminde yerine yazarsak

$$\rho(z) + c\varphi'(z) + c\Pi_1 \rho(z) = f(z) \tag{4.30}$$

$$\text{Re } \varphi(z)|_{\partial D} = \gamma, \quad \text{Im } \varphi(0) = a \tag{4.31}$$

olur. Bu durumda φ ve ρ yi bulalım.

Teorem 3.3 ü kullanarak analitik fonksiyonlar için Schwarz probleminin çözümünü

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ia \tag{4.32}$$

olarak göstermiştik.

Diğer taraftan, Beltrami denkleminin genel çözümü verilirken Π operatörü için yapılan işlemler Π_1 operatorü için yapılırsa (4.30) den ρ yu

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (c\Pi_1)^k (f - c\varphi')(z) \tag{4.33}$$

olarak bulabiliriz.

(4.32) ve (4.33) $\quad w(z) = \varphi(z) + T_1\rho(z)$ de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + ia \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ c^k \Pi_1^k (f - c\varphi')(\zeta) \frac{\zeta - z}{\zeta(\zeta - z)} \right. \\ &\quad \left. + \overline{c}^k \overline{\Pi_1^k (f - c\varphi')}(\zeta) \frac{1 + z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1 - z\overline{\zeta})} \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. □

4.4. Dirichlet Sınır Değer Problemi

Teorem 4.2. Birim diskte $p>2$ için $f\in L_p(\overline{D})$ ve $\gamma\in C(\partial D;\mathbb{C})$ olmak üzere,

$$w_{\bar z}+cw_z=f,\quad w|_{\partial D}=\gamma$$

Dirichlet sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{1}{1+cz\overline{\zeta}}\frac{\bar z d\zeta}{1-\bar z\zeta}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)(\overline{\zeta-z})^k\frac{\bar z^{k+1}d\xi d\eta}{(1-\bar z\zeta)^{k+1}} \tag{4.35}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda problemin tek çözümü

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z-c(\overline{\zeta-z})} \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z-c(\overline{\zeta-z})} \end{aligned} \tag{4.36}$$

dır.

İspat. $\varphi(z)$, D de analitik bir fonksiyon olmak üzere Beltrami denkleminin $w(z)=\varphi(z)+T\rho(z)$ formunda çözümü göz önüne alınırsa;

$$\rho+c\Pi_\rho = f-c\varphi',\quad z\in D, \tag{4.37}$$

$$\varphi|_{\partial D} = (\gamma-T\rho)|_{\partial D}, \tag{4.38}$$

elde edilir. Burada (4.37) ve (4.38) sağlanacak şekilde ρ ve φ yi bulmamız gerekir.

(4.38) eşitliğine baktığımızda bu denklemin analitik fonksiyonlar için Dirichlet sınır değer problemi olduğunu görürüz. Dolayısıyla Dirichlet probleminin çözülebilme koşulu olan (3.3) den (4.38) in çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\Big(\gamma(\zeta)-T\rho(\zeta)\Big)\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{1-\bar z\zeta}=0,\qquad |z|<1, \tag{4.39}$$

olmasıdır. Bu durumda tek çözüm

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\Big(\gamma(\zeta)-T\rho(\zeta)\Big)\frac{d\zeta}{\zeta-z} \tag{4.40}$$

dır.

(4.39) eşitliğini (2.4) Gauss bağıntısı yardımıyla

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} T\rho(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}2i\int\limits_{|\zeta|<1}\rho(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\rho(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta$$

olarak yazabiliriz. Böylece (4.39) çözülebilme koşulu

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\rho(\zeta)\frac{\overline{z}d\xi d\eta}{1-\overline{z}\zeta} \tag{4.41}$$

şekline gelir.

Cauchy-Pompeiu gösteriliminin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\Big[\gamma(\zeta)-T\rho(\zeta)\Big]\frac{d\zeta}{\zeta-z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}T\rho(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta + T\rho(z)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan daha önceki bölümlerde olduğu gibi (4.37) den,

$$I(k;z,\zeta) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}\frac{(\overline{t-z})^{k-1}}{(t-z)^{k+1}}\frac{dt_1dt_2}{(t-\zeta)^2},$$

olmak üzere $\rho(z)$ fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
\rho(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k \Pi^k (f - q\varphi')(z) \\
&= f(z) - \frac{c}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\gamma(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} k c^k \left\{ \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{(\overline{\zeta - z})^{k-1}}{(\zeta - z)^{k+1}} d\xi d\eta - \frac{c}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) I(k;z,\zeta) d\zeta \right\}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Şimdi $I(k;z,\zeta)$ değerini hesaplayalım:

Lemma 4.4. $|k| > 0$ olmak üzere; $|z| < 1$ ve $|\zeta| < 1$ için,

$$
\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{t - z})^{k-1}}{(t - z)^{k+1}} \frac{dt_1 dt_2}{(t - \zeta)^2} = \frac{k+1}{k}\frac{(\overline{\zeta - z})^k}{(\zeta - z)^{k+2}} \tag{4.42}
$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Öncelikle

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{t - z})^{k-1}}{(t - z)(t - \zeta)} dt_1 dt_2 \\
&\qquad = \frac{1}{\zeta - z}\left\{ \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{t - z})^{k-1}}{t - \zeta} dt_1 dt_2 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{t - z})^{k-1}}{(t - z)} dt_1 dt_2 \right\} \\
&\qquad\quad = \frac{1}{k(\zeta - z)}\left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{(\overline{t - z})^k}{(t - \zeta)} dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{(\overline{t - z})^k}{(t - z)} dt - (\overline{\zeta - z})^k \right\} \\
&\qquad = -\frac{(\overline{\zeta - z})^k}{k(\zeta - z)}
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

yazılabilir. Burada ilk önce eşitliğin her iki tarafının ζ a göre türevi alınıp daha sonra z ye göre k. türevi alınırsa

$$
I(k;z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{t - z})^{k-1}}{(t - z)^{k+1}} \frac{dt_1 dt_2}{(t - \zeta)^2} = \frac{k+1}{k}\frac{(\overline{\zeta - z})^k}{(\zeta - z)^{k+2}}
$$

elde edilir. □

Lemma 4.4 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\rho(z) &= f(z)-\frac{c}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}kc^k\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{(\overline{\zeta-z})^{k-1}}{(\zeta-z)^{k+1}}d\xi d\eta-\frac{k+1}{k}\frac{c}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{(\overline{\zeta-z})^{k}}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta\right\}\end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. Diğer taraftan (4.44) çözülebilme koşulu olan (4.41) de yerine yazılırsa çözülebilme koşulu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)I_1(k;z,\zeta)d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} + \sum_{k=1}^{\infty}kc^k\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)I_2(k;z,\zeta)d\xi d\eta\end{aligned} \tag{4.45}$$

şekline gelir. Burada

$$\begin{aligned}I_1(k;z,\zeta) &:= \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}\frac{(\overline{\zeta-t})^{k}}{(\zeta-t)^{k+2}}\frac{\bar{z}dt_1dt_2}{1-\bar{z}t}, \\ I_2(k;z,\zeta) &:= \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}\frac{(\overline{\zeta-t})^{k-1}}{(\zeta-t)^{k+1}}\frac{\bar{z}dt_1dt_2}{1-\bar{z}t}\end{aligned}$$

dır. Bu iki integralin değeri

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|<1}\frac{(\overline{\zeta-t})^{k}}{\zeta-t}\frac{\bar{z}dt_1dt_2}{1-\bar{z}t}=\frac{1}{k+1}\frac{\bar{z}(\overline{\zeta-z})^{k+1}}{1-\bar{z}\zeta}$$

eşitliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}I_1(k;z,\zeta) &= \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\frac{\bar{z}^{k+2}(\overline{\zeta-z})^{k+1}}{(1-\bar{z}\zeta)^{k+2}} \\ I_2(k;z,\zeta) &= \frac{(-1)^{k}}{k}\frac{\bar{z}^{k+1}(\overline{\zeta-z})^{k}}{(1-\bar{z}\zeta)^{k+1}}\end{aligned}$$

olarak bulunabilir. I_1 ve I_2 değerleri (4.45) de yerlerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta \quad + \quad \sum_{k=0}^{\infty}\cancel{(k+1)}c^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{(-1)^{k+1}}{\cancel{k+1}}\frac{\bar{z}^{k+2}(\overline{\zeta-z})^{k+1}}{(1-\bar{z}\zeta)^{k+2}}d\zeta$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta \quad + \quad \sum_{k=1}^{\infty}\cancel{k}c^{k}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{(-1)^{k}}{\cancel{k}}\frac{\bar{z}^{k+1}(\overline{\zeta-z})^{k}}{(1-\bar{z}\zeta)^{k+1}}d\xi d\eta$$

olup toplamla integralin yerleri değiştirilerek

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta \quad + \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{(1-\bar{z}\zeta)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{c^{k+1}\bar{z}^{k+1}(\overline{\zeta-z})^{k+1}}{(1-\bar{z}\zeta)^{k+1}}d\zeta$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta \quad + \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}}{(1-\bar{z}\zeta)}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{c^{k}\bar{z}^{k}(\overline{\zeta-z})^{k}}{(1-\bar{z}\zeta)^{k}}d\xi d\eta$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\left(\frac{c\bar{z}(\overline{\zeta-z})}{(1-\bar{z}\zeta)}\right)^{k}\frac{\bar{z}}{(1-\bar{z}\zeta)}d\zeta$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\left(\frac{c\bar{z}(\overline{\zeta-z})}{(1-\bar{z}\zeta)}\right)^{k}\frac{\bar{z}}{(1-\bar{z}\zeta)}d\xi d\eta$$

bulunur.

$|c|<1$ ve $|\zeta|=1$ oldukları göz önüne alınarak gerekli işlemler yapılırsa, çözülebilme koşulu

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{1}{1+c\bar{z}\overline{\zeta}}\frac{\bar{z}}{(1-\bar{z}\zeta)}d\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}c^{k}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)(\overline{\zeta-z})^{k}\frac{\bar{z}^{k+1}}{(1-\bar{z}\zeta)^{k+1}}d\xi d\eta$$

olarak bulunur.

Son olarak; hesaplanan ρ ve φ değerlerini $w(z) = \varphi(z) + T\rho(z)$ de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c^{k+1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) J_1(k;z,\zeta) d\zeta \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} k c^k \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta) J_2(k;z,\zeta) d\xi d\eta \end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir. Burada $J_1(k;z,\zeta)$ ve $J_2(k;z,\zeta)$ integralleri

$$\begin{aligned} J_1(k;z,\zeta) &:= \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{\zeta - t})^k}{(\zeta - t)^{k+2}} \frac{dt_1 dt_2}{t - z}, \\ J_2(k;z,\zeta) &:= \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|<1} \frac{(\overline{\zeta - t})^{k-1}}{(\zeta - t)^{k+1}} \frac{dt_1 dt_2}{t - z} \end{aligned}$$

dir. Lemma 4.4 ve Lemma 4.7 nin göz önüne alınmasıyla bu integraller

$$\begin{aligned} J_1(k;z,\zeta) &= \frac{1}{k+1} \frac{(\overline{\zeta - z})^{k+1}}{(\zeta - z)^{k+2}}, \\ J_2(k;z,\zeta) &= \frac{1}{k} \frac{(\overline{\zeta - z})^k}{(\zeta - z)^{k+1}} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir.J_1 ve J_2 (4.46) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\cancel{(k+1)}c^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{1}{\cancel{(k+1)}}\frac{(\overline{\zeta-z})^{k+1}}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta\\
&\quad-\sum_{k=1}^{\infty}\cancel{k}c^{k}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{1}{\cancel{k}}\frac{(\overline{\zeta-z})^{k}}{(\zeta-z)^{k+1}}d\xi d\eta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\\
&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}c^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{(\overline{\zeta-z})^{k+1}}{(\zeta-z)^{k+1}}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\\
&\quad-\sum_{k=1}^{\infty}c^{k}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{(\overline{\zeta-z})^{k}}{(\zeta-z)^{k}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada da seri ile integralin yerleri değiştirilerek gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{c(\overline{\zeta-z})}{\zeta-z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c(\overline{\zeta-z})}{\zeta-z}\right)^{k}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{c(\overline{\zeta-z})}{\zeta-z}\right)^{k}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}
\end{aligned}$$

olur.

Son olarak $|c|<1$ olduğundan Dirichlet probleminin çözümü olarak

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{c(\overline{\zeta-z})}{\zeta-z-c(\overline{\zeta-z})}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\\
&\quad-\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z-c(\overline{\zeta-z})} \qquad (4.47)
\end{aligned}$$

bulunur. □

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ BELTRAMİ DENKLEMİ İÇİN SCHWARZ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde Beltrami denklemi için Schwarz probleminin çözümünü kullanarak $q(z)$, D bölgesinde $|q(z)| \leq q_0 < 1$ özelliğine sahip ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere önce

$$w_{\overline{z}\overline{z}} + q(z) w_{z\overline{z}} = f, \quad f \in L_p(\overline{D}), \quad p > 2, \tag{5.1}$$

denklemi için Schwarz probleminin çözümünü daha sonra ise (5.1) in genelleştirilmiş bir formu olan

$$\frac{\partial^n w}{\partial_{\overline{z}}^n} + q(z)\,\frac{\partial^n w}{\partial_z \partial_{\overline{z}}^{n-1}} = f, \quad f \in L_p(\overline{D}), \quad p > 2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.2}$$

denklemi için Schwarz problemininin çözümü özel olarak $z \in \mathbb{D}$ için $q(z) = c(c\,sabit)$ olduğu durum göz önüne alınarak incelenecektir.

5.1. Schwarz Problemi

(5.1) denklemi

$$w_{\bar{z}} = f_1, \tag{5.3}$$

$$w_{\bar{z}} + cw_z = f_2, \tag{5.4}$$

denklemlerinin birbiriyle ardışık uygulanması olarak düşünülebilir. Bir önceki bölümde verildiği üzere, D birim diskinde $|c| < 1$ olmak üzere;

$$w_{\bar{z}} + cw_z = f, \quad \text{Re } w|_{\partial D} = \gamma, \quad \text{Im } w(0) = a \tag{5.5}$$

Beltrami denklemi için Schwarz sınır değer probleminin çözümü

$$w(z) = \varphi(z) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left[\frac{\rho(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{\overline{\zeta}} \frac{1 + z\overline{\zeta}}{1 - z\overline{\zeta}} \right] d\xi d\eta \tag{5.6}$$

şeklindedir. Burada $\rho(z) = w_{\bar{z}}$ olmak üzere

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c^k \Pi_1^k (f - c\varphi')(z)$$

ve φ, D de keyfi analitik bir fonksiyondur.

Şimdi (5.1) operatörü için Schwarz problemini göz önüne alalım. Benzer şekilde Dirichlet problemi de aynı yolla çözülebilirdir.

Teorem 5.1. Birim diskte $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial D, \mathbb{R})$ ve $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $= f, \quad f \in L_p(\overline{D})$ olmak üzere,

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + cw_{z\bar{z}} = f\,, z \in D, \tag{5.7}$$

$$\text{Re } w|_{\partial D} = \gamma_0\,, \text{Re } w_{\bar{z}}|_{\partial D} = \gamma_1\,, \text{Im } w(0) = a_0\,, \text{Im } w_{\bar{z}}(0) = a_1 \tag{5.8}$$

olarak tanımlanan Schwarz sınır değer problemi tek türlü çözülebilirdir ve çözüm

$$\begin{aligned} w(z) \quad = \quad & \varphi(z) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c^k \overline{\Pi_1^k (f - \varphi')}(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta(\zeta - z)} \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \overline{c^k} \overline{\Pi_1^k (f - \varphi')}(\zeta) \frac{1 + z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1 - z\overline{\zeta})} \right\} (\zeta - z - \overline{\zeta - z}) d\xi d\eta \end{aligned} \tag{5.9}$$

ile verilir. Burada

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)(\zeta-z-\overline{\zeta-z})\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} + ia_0+ia_1(z+\overline{z}) \tag{5.10}$$

ve

$$\Pi_1\rho(z) := -\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{\overline{\rho(\zeta)}}{(1-z\overline{\zeta})^2}\right\}d\xi d\eta$$

dır.

İspat. (5.7)-(5.8) sınır değer problemi

$$w_{\overline{z}} = g, \quad \operatorname{Re} w|_{\partial D} = \gamma_0, \quad \operatorname{Im} w(0) = a_0, \tag{5.11}$$

$$g_{\overline{z}}+cg_z = f, \quad \operatorname{Re} g|_{\partial D} = \gamma_1, \quad \operatorname{Im} g(0) = a_1, \tag{5.12}$$

problemlerine denktir.

Teorem 3.3 den (5.11) Schwarz sınır değer probleminin tek çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ia_0-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{g(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta \tag{5.13}$$

şeklindedir. Diğer taraftan Teorem 4.1 den dolayı (5.12) probleminin tek çözümü ise $g_{\overline{z}} := \rho$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}+ia_1-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{\rho(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{\rho(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{5.14}$$

dır. Burada $\rho(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k \Pi_1^k(f-c\varphi')(z)$ dır.

(5.14) den $g(\zeta)$ ve $\overline{g(\zeta)}$ değerleri (5.13) de yerine yazıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ia_0 \\
&-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\gamma_1(t)\left\{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{t-\zeta}}\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}\frac{dt}{t}d\xi d\eta \\
&-ia_1\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}d\xi d\eta \\
&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k\Pi_1^k(f-\varphi')(t) \\
&\qquad\times\left\{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1+\overline{\zeta}t}{1-\overline{\zeta}t}\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}\frac{dt_1dt_2}{t}d\xi d\eta \\
&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\overline{c^k}\,\overline{\Pi_1^k(f-\varphi')}(t) \\
&\qquad\times\left\{\frac{1+\zeta\overline{t}}{1-\zeta\overline{t}}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{t-\zeta}}\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}\frac{dt_1dt_2}{\overline{t}}d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

olur. Burada Fubini teoremine göre integrasyon sırası değiştirildiğinde ortaya çıkan integrallerin değerleri, Gauss ve Cauchy-Pompeiu integral gösterilimleri kullanılarak $z,t\in D$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}d\xi d\eta &= -z-\overline{z}, \\
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\xi d\eta &= \frac{t+z}{t-z}(\overline{t-z}), \\
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{1+\overline{\zeta}t}{1-\overline{\zeta}t}\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}d\xi d\eta &= t+z, \\
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{t-\zeta}}\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}d\xi d\eta &= \frac{1+z\overline{t}}{1-z\overline{t}}(t-z), \\
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{1+\zeta\overline{t}}{1-\zeta\overline{t}}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\xi d\eta &= \frac{1+z\overline{t}}{1-z\overline{t}}(\overline{t-z})
\end{aligned}
$$

olarak bulunabilir. Bu sonuçlar (5.15) de yerine yazılırsa (5.7)-(5.8) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)(\zeta-z-\overline{\zeta-z})\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad +ia_0+ia_1(z+\overline{z}) \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k \Pi_1^k(f-\varphi')(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}\right. \\ &\quad \left. +\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\overline{c^k}\overline{\Pi_1^k(f-\varphi')(\zeta)}\frac{1+z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1-z\overline{\zeta})}\right\}(\zeta-z-\overline{\zeta-z})d\xi d\eta \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Çözümün tekliği ise Teorem 3.1. ve Teorem 3.3 den dolayı analitik fonksiyonlar için Schwarz problemin tek türlü çözülebilirliğinden açıktır. □

Lemma 5.1. $|z|<1$, $|t|<1$ ve $k\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1}(t-z+\overline{t-z})^{k+1} &= \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}(z+\overline{z})^{k+1} \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+t}{\zeta-z}-\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+t\overline{\zeta}}{1-t\overline{\zeta}}\right)(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^k d\xi d\eta \end{aligned} \tag{5.16}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $w(t)=i\,\dfrac{(t-z+\overline{t-z})^{k+1}}{(k+1)}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon

$$\begin{cases} w_{\overline{t}}(t) &= i(t-z+\overline{t-z})^k; \quad D \text{ de}, \\ \operatorname{Re} w(t) &= 0; \quad \partial D \text{ üzerinde}, \\ \operatorname{Im} w(0) &= \dfrac{(-1)^{k+1}}{k+1}(z+\overline{z})^{k+1} \end{cases}$$

Schwarz koşullarını sağlar. Dolayısıyla Teorem 3.7 e göre

$$w(t)=i\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}(z+\overline{z})^{k+1}-\frac{i}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+t}{\zeta-t}-\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+t\overline{\zeta}}{1-t\overline{\zeta}}\right)(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^k\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

yazılabilir. Bu bize (5.16) eşitliğini verir. □

Sonuç 5.1. $|z| < 1$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere (5.16) de $t = 0$ ve $t = z$ alırsak; sırasıyla

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\overline{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k d\xi d\eta = 0 \tag{5.17}$$

ve

$$\frac{i}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{1}{\overline{\zeta}} \frac{1 + z\overline{\zeta}}{1 - z\overline{\zeta}} \right) (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k d\xi d\eta = \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} (z + \overline{z})^{k+1} \tag{5.18}$$

eşitlikleri geçerli olur.

Teorem 5.2. $f \in L_p(\overline{D})$ için

$$\partial_{\overline{z}}^n w + c\, \partial_{z\overline{z}^{n-1}}^n w = f, \quad |c| < 1 \tag{5.19}$$

denkleminin $\gamma_k \in C(\partial D, \mathbb{R})$, $a_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\text{Re } \partial_{\overline{z}}^k w|_{\partial D} = \gamma_k, \quad \text{Im } \partial_{\overline{z}}^k w(0) = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \tag{5.20}$$

Schwarz sınır koşulları altında tek çözümü

$$\begin{aligned} w(z) \;\; = \;\; & i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!} (z + \overline{z})^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_k(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} (\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k \frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \Bigg\{ c^m \Pi_1^m (f - \varphi')(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta(\zeta - z)} \\ & + \overline{c^m} \overline{\Pi_1^m (f - \varphi')}(\zeta) \frac{1 + z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1 - z\overline{\zeta})} \Bigg\} (\zeta - z - \overline{\zeta - z})^{n-1} d\xi d\eta \end{aligned} \tag{5.21}$$

dır.

İspat. (5.19) - (5.20) Schwarz sınır değer problemi

$$\partial_{\overline{z}}^{n-1} w = g, \quad \text{Re } \partial_{\overline{z}}^k w|_{\partial D} = \gamma_k, \quad \text{Im } \partial_{\overline{z}}^k w(0) = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-2, \tag{5.22}$$

$$g_{\overline{z}} + c g_z = f, \quad \text{Re } g|_{\partial D} = \gamma_{n-1}, \quad \text{Im } g(0) = a_{n-1}, \tag{5.23}$$

sınır değer problemlerine denktir.

[2, II] deki Teorem 14 den dolayı (5.22) in tek çözümü

$$\begin{aligned} w(z) &= i\sum_{k=0}^{n-2}\frac{a_k}{k!}(z+\overline{z})^k+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_k(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^k\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad +\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{g(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}(\zeta-z-\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta \end{aligned} \tag{5.24}$$

dir.

(5.23) in çözümü ise Teorem 4.1 den

$$\begin{aligned} g(z) &= ia_{n-1}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad -\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{c^{\nu}\Pi_1^{\nu}(f-\varphi')(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}\right. \\ &\quad \left.+\overline{c^{\nu}}\overline{\Pi_1^{\nu}(f-\varphi')}(\zeta)\frac{1+z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1-z\overline{\zeta})}\right\}d\xi d\eta \end{aligned} \tag{5.25}$$

dir. Diğer taraftan

$$\varphi_{n-2}(z)=i\sum_{k=0}^{n-2}\frac{a_k}{k!}(z+\overline{z})^k+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_k(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^k\frac{d\zeta}{\zeta}$$

dersek, (5.24) çözümü

$$w(z)=\varphi_{n-2}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{g(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}(\zeta-z-\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta \tag{5.26}$$

olarak yazılabilir.

(5.25) ifadesi (5.26) de yerine yazılırsa

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{g(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\overline{\zeta}}}\right\}(\zeta-z-\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}ia_{n-1}\left\{\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-\frac{1}{\overline{\overline{\zeta}}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\overline{\zeta}}}\right\}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\gamma_{n-1}(t)\left\{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{\overline{t-\zeta}}}\frac{1}{\overline{\overline{\zeta}}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\overline{\zeta}}}\right\}$$

$$\times(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}\frac{dt}{t}d\xi d\eta$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m c^m\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<1}\Pi_1^m(f-\varphi')(t)\left\{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1+\overline{\zeta}t}{1-\overline{\zeta}t}\frac{1}{\overline{\overline{\zeta}}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\overline{\zeta}}}\right\}$$

$$\times(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}\frac{dt_1dt_2}{t}d\xi d\eta$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\overline{c}^m\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<1}\overline{\Pi_1^m(f-\varphi')}(t)\left\{\frac{1+\zeta\overline{t}}{1-\zeta\overline{t}}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{\overline{t-\zeta}}}\frac{1}{\overline{\overline{\zeta}}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\overline{\zeta}}}\right\}$$

$$\times(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}\frac{dt_1dt_2}{\overline{t}}d\xi d\eta \qquad (5.27)$$

bulunur. Bu eşitlikte ilk integral için (5.18) kullanılır ve diğer integrallerin integrasyon sırası değiştirilirse buradan (5.27) in sağ tarafı

$$
\begin{aligned}
& ia_{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}(-1)^{n-1}\frac{(z+\bar{z})^{n-1}}{(n-1)} \\
& +\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\gamma_{n-1}(t)\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{t-\zeta}}\frac{1}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right\} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta\frac{dt}{t} \\
& +\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m c^m\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<1}\Pi_1^m(f-\varphi')(t)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1+\bar{\zeta}t}{1-\bar{\zeta}t}\frac{1}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right\} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta\frac{dt_1dt_2}{t} \\
& +\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\bar{c}^{m+1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<1}\overline{\Pi_1^m(f-\varphi')}(t)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{1+\zeta\bar{t}}{1-\zeta\bar{t}}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{t-\zeta}}\frac{1}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right\} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta\frac{dt_1dt_2}{\bar{t}}
\end{aligned}
$$

şekline gelir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
& \frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1+\bar{\zeta}t}{1-\bar{\zeta}t}\frac{1}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \\
& =-\Big(\frac{2t}{\zeta-t}+1\Big)\Big(\frac{2}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\Big)+\Big(\frac{2}{1-\bar{\zeta}t}-1\Big)\Big(\frac{2z}{1-z\bar{\zeta}}+\frac{1}{\bar{\zeta}}\Big) \\
& =-\frac{4t}{t-z}\Big(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-z}\Big)+\frac{2}{\zeta-t}-\frac{2}{\zeta}-\frac{2}{\zeta-z}+\frac{1}{\zeta} \\
& \quad+\frac{4z}{t-z}\Big(\frac{t}{1-t\bar{\zeta}}-\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}\Big)+\frac{2t}{1-t\bar{\zeta}}+\frac{2}{\bar{\zeta}}-\frac{2z}{1-z\bar{\zeta}}-\frac{1}{\bar{\zeta}} \\
& =-2\frac{t+z}{t-z}\Big(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-z}\Big)+2\frac{t+z}{t-z}\Big(\frac{t}{1-t\bar{\zeta}}-\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}\Big)-\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\bar{\zeta}} \\
& =-2\frac{t+z}{t-z}\Big(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{t}{1-t\bar{\zeta}}-\frac{1}{\zeta-z}+\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}\Big)-\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\bar{\zeta}} \\
& =-\frac{t+z}{t-z}\Big(\frac{2}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta}-\frac{2t}{1-t\bar{\zeta}}-\frac{1}{\bar{\zeta}}-\frac{2}{\zeta-z}+\frac{1}{\zeta}+\frac{2z}{1-z\bar{\zeta}}+\frac{1}{\bar{\zeta}}\Big)-\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\bar{\zeta}} \\
& =-\frac{t+z}{t-z}\Big(\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+t}{\zeta-t}-\frac{1}{\bar{\zeta}}\frac{1+t\bar{\zeta}}{1-t\bar{\zeta}}-\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\Big)-\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\bar{\zeta}}
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&\frac{1+\zeta\bar{t}}{1-\zeta\bar{t}}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{t-\zeta}}\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\\
&=-\frac{1+z\bar{t}}{1-z\bar{t}}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{\overline{\zeta+t}}{\overline{\zeta-t}}-\frac{1}{\zeta}\frac{1+\zeta\bar{t}}{1-\zeta\bar{t}}-\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)-\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\overline{\zeta}}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu durumda Lemma 5.1 den (5.16), (5.17) ve (5.18) nin de kullanılmasıyla

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1+\overline{\zeta}t}{1-\overline{\zeta}t}\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{t+z}{t-z}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+t}{\zeta-t}-\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+t\overline{\zeta}}{1-t\overline{\zeta}}-\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta\\
&= \frac{t+z}{t-z}\left[\frac{1}{n-1}(t-z-\overline{t-z})^{n-1}-\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}(z+\bar{z})^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}(z+\bar{z})^{n-1}\right]\\
&= \frac{t+z}{t-z}\;\frac{1}{n-1}(t-z-\overline{t-z})^{n-1},
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{1+\zeta\bar{t}}{1-\zeta\bar{t}}\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{t+\zeta}}{\overline{t-\zeta}}\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1+z\bar{t}}{1-z\bar{t}}\;\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{\overline{\zeta+t}}{\overline{\zeta-t}}-\frac{1}{\zeta}\frac{1+\zeta\bar{t}}{1-\zeta\bar{t}}-\frac{1}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-2}d\xi d\eta\\
&= -\frac{1+z\bar{t}}{1-z\bar{t}}\left[\frac{1}{n-1}(t-z-\overline{t-z})^{n-1}-\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}(z+\bar{z})^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}(z+\bar{z})^{n-1}\right]\\
&= \frac{t+z}{t-z}\frac{1}{n-1}\;(t-z-\overline{t-z})^{n-1}
\end{aligned}$$

bulunur.

Bu değerler (5.27) da yerine yazılırsa

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\left\{\frac{g(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right\}(\zeta-z-\overline{\zeta-z})^{n-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$\begin{aligned}
= \; & i\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}(z+\overline{z})^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-1}\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&+\frac{(-1)^{n}}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m c^m\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\Pi_1^m(f-\varphi')(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-1}d\xi d\eta\\
&+\frac{(-1)^{n}}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \overline{c^m}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\overline{\Pi_1^m(f-\varphi')}(\zeta)\frac{1+z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1-z\overline{\zeta})}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-1}d\xi d\eta
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (5.26) çözümü

$$\begin{aligned}
w(z) \;=\; & i\sum_{k=0}^{n-2}\frac{a_k}{k!}(z+\overline{z})^k+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_k(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^k\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&+i\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}(z+\overline{z})^{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_{n-1}(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-1}\frac{d\zeta}{\zeta}\\
&+\frac{(-1)^{n}}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m c^m\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\Pi_1^m(f-\varphi')(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-1}d\xi d\eta\\
&+\frac{(-1)^{n}}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \overline{c^m}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1}\overline{\Pi_1^m(f-\varphi')}(\zeta)\frac{1+z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(1-z\overline{\zeta})}(\zeta-z+\overline{\zeta-z})^{n-1}d\xi d\eta
\end{aligned}$$

şekline gelir.

Eğer bu eşitlikte sağdaki 3. ve 4. terimler sırasıyla 1. ve 2. terimlerle birleştirilirse (5.26) çözümü elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur. □

5.2. Sonuç

$n = 1$ için (5.19) denklemi, [3] nolu makaledeki probleme dönüşür. Dolayısıyla [3] nolu makaledeki Beltrami denklemi için Schwarz problemi, incelediğimiz problemin özel bir halidir.

Aynı makalede, yazar aşağıdaki Schwarz sınır değer probleminin birim D diskinde çözülebileceğini ifade etmiş ancak çözüm vermemiştir. İncelemelerimiz doğrultusunda önceden verilen $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial D, \mathbb{C}),\ f \in L_p(\overline{D}),\ p > 2$ fonksiyonları ve $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ sabitleri için

$$w_{z\bar{z}} + c w_{\overline{zz}} = f, \tag{5.28}$$

$$\text{Re}\, w|_{\partial D} = \gamma_0, \quad \text{Re}\, w_{\bar{z}}|_{\partial D} = \gamma_1, \quad \text{Im}\, w(0) = a_0, \quad \text{Im}\, w_{\bar{z}}(0) = a_1 \tag{5.29}$$

problemi $\left|\dfrac{\Pi_1}{c}\right| < 1$ durumunda çözülebilirdir. Bu durumda çözüm

$$\begin{aligned} w(z) \;=\; & \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta)(\zeta - z - \overline{\zeta - z})\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} \\ & + i a_0 + i a_1(z + \bar{z}) \\ & + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ \frac{1}{c^{k+1}}\Pi_1^k(f-\varphi')(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)} \right. \\ & \qquad \left. \frac{1}{\bar{c}^{k+1}}\overline{\Pi_1^k(f-\varphi')}(\zeta)\frac{1+z\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(1-z\bar{\zeta})} \right\}(\zeta - z - \overline{\zeta - z})\, d\xi\, d\eta \end{aligned}$$

dır.

Bir önceki bölümdeki benzer işlemlerle,

$$\partial^n_{z\bar{z}^{n-1}} w + c\,\partial^n_{\bar{z}} w = f, \quad f \in L_p(\overline{D}),\ p > 2, \tag{5.30}$$

$$\text{Re}\ \partial^k_{\bar{z}} w|_{\partial D} = \gamma_k, \quad \text{Im}\ \partial^k_{\bar{z}} w(0) = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \tag{5.31}$$

olarak verilen Schwarz sınır değer problemi de Π_1 and c üzerine konulan koşullar altında tek türlü çözülebilirdir ve bu çözüm

$$\begin{aligned} w(z) &= i\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!}(z+\bar{z})^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_k(\zeta) \frac{\zeta+z}{\zeta-z}(\zeta - z + \overline{\zeta - z})^k \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &+ \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ \frac{1}{c^{m+1}} \Pi_1^m (f - \varphi')(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta(\zeta - z)} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\bar{c}^{m+1}} \overline{\Pi_1^m (f-\varphi')}(\zeta) \frac{1 + z\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}(1 - z\bar{\zeta})} \right\} (\zeta - z - \overline{\zeta - z})^{n-1} d\xi d\eta \end{aligned}$$

dır.

KAYNAKLAR

[1] H. Begehr, *Complex Analytic Methods for Partial Diferential Equations An Introductory Text*, World Scientific , 1994.

[2] H. Begehr, *Boundary value problems in complex analysis I, II*, Bol. Asoc. Mat. Venezolana, 12, 65-85; 217-250, 2005.

[3] G. Harutyunyan, *Boundary value problems for the Beltrami operator*, Complex Variables and Elliptic Equations: An International Journal ,52:6, 475-484, 2007.

[4] Vekua, I.N., *Generalized Analytic Functions*, Pergamon, 1962.

[5] Werner, Dirk,*Funktionalanalysis (in German)*,Springer Verlag, 2005.