KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA OSKÜLATÖR EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Hatice ALTIN ERDEM

Haziran 2013

Matematik Anabilim Dalı Hatice ALTIN ERDEM tarafından hazırlanan MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA OSKÜLATÖR EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Yrd.Doç. Dr. Osman KEÇİLİOĞLU	________________
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	________________
Üye	: Yrd.Doç. Dr. Recep ŞAHİN	________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA OSKÜLATÖR EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

ALTIN ERDEM , Hatice
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Haziran 2013, 73 sayfa

Bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde yarı-Öklidyen uzaylar tanıtılarak bu uzaylarda eğriler ve bu eğrilerin geometrik özellikleri tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde Minkowski uzay-zamanda timelike, spacelike, pseudo null, partially null ve null eğriler ve bu eğrilerin Frenet denklemleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde Öklid uzayında oskülatör eğrilerin karakterizasyonları verilmiştir.

Beşinci bölümde Minkowski uzay-zamanda birinci ve ikinci çeşit timelike ve spacelike oskülatör eğriler ve bu eğrilerin geometrik özellikleri verilmiştir.

Altıncı bölümde Minkowski uzay-zamanda birinci ve ikinci çeşit null oskülatör eğrilerin sınıflandırılması verilmiştir.

Yedinci bölümde Minkowski uzay-zamanda birinci ve ikinci çeşit partially null ve pseudo null oskülatör eğrilerin sınıflandırılması verilmiştir.

Sekizinci bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Minkowski 3-uzayı, Minkowski uzay-zaman, yarı-Öklidyen uzay, pseudo null eğri, partially null eğri, oskülatör eğri.

ABSTRACT

CHARACTERIZATIONS OF OSCULATING CURVES IN MINKOWSKI SPACE-TIME

ALTIN ERDEM, Hatice

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

June 2013, Pages 73

This thesis consist of eight chapter. The first chapter is reserved for introduction.

In the second chapter, the notion of semi-Euclidean space and its properties are given.

In the third chapter, Frenet frame of a timelike, spacelike, pseudo null, partially null and null curves in Minkowski space-time are given.

In the fourth chapter, we give some characterization of curves to be a osculating curve in the Euclidean space.

In the fifth chapter, characterizations of first and second kind timelike and spacelike osculating curves in Minkowski space-time are given.

In the sixth chapter, we give some characterization of first and second kind null curves to be a osculating curve in Minkowski space-time.

In the seventh chapter, we give some characterization of first and second kind partially null and pseudo null curves to be a osculating curve in Minkowski space-time.

In the eighth chapter, we give the discussion and conclusion.

Key words: Minkowski space, Minkowski space-time, semi-Euclidean space, pseudo null curve, partially null curve, osculating curve.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a ve desteklerini esirgemeyen sevgili eşim Kazım ERDEM'e teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

R^n	n-boyutlu Öklid uzayı
R^3	3-boyutlu Öklid uzayı
R_v^n	n-boyutlu yarı-Öklidyen uzay
R_1^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
R_1^3	3-boyutlu Minkowski uzayı
E_1^4	4-boyutlu Minkowski uzay-zaman
H_0^3	Hiperbolik birim küre (Hiperbolikuzay)
$\wedge_L$(veya$\times_L$)	Lorentz anlamında vektörel çarpım
S_1^3	Lorentz birim küresi
$<>$	Öklid iç çarpımı
$\times$	Vektörel çarpım
g	non-dejenere metrik

1. GİRİŞ

Geometride, özellikle diferensiyel geometride eğriler teorisi önemli bir çalışma alanıdır. Eğriler Öklid ve Öklid olmayan uzaylarda yoğun bir şekilde çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Eğrilerin karakterizasyonu problemi öne çıkan bir araştırma konusudur. Bu problemin çözümünde verilen eğrinin Frenet denklemleri (bu denklemler Serret-Frenet denklemleri olarak da bilinmektedir) (Frenet 1874, Serret 1851) ve eğrinin eğrilikleri önemli ve kullanışlı bir araçtır. Bu kavramlar yardımıyla eğrinin geometrik özellikleri incelenmektedir. Örnek olarak, verilen bir regüler α eğrisi eğrilikleri yardımıyla şu şekilde karakterize edilebilir. Eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s) = 0$ ise eğri bir geodeziktir. Eğrinin birinci eğriliği $k_1(s) \neq 0$ bir sabit ve ikinci eğriliği $k_2(s) = 0$ ise eğri bir çember, eğrinin $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler ise eğri bir dairesel helis eğrisidir.

R^3, 3- boyutlu Öklid uzayında verilen iki regüler eğri α ve β olsun. Bu eğrilerin Frenet vektörleri arasındaki ilişki yardımıyla eğriler şu şekilde karakterize edilebilir. Eğrilerin asli normal vektörleri lineer bağımlı ise α ve β bir Bertrand eğri çifti oluştururlar. α eğrisinin asli normal vektörü ile β eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise α ve β bir Mannheim eğri çifti oluştururlar.

B. Y. Chen (2003), tarafından “Ne zaman, bir eğrinin konum vektörü her zaman kendi rektifiyen düzleminde yatar?” sorusuna vermiş olduğu cevapla birlikte eğriler için yeni bir sınıf olan “rektifiyen eğriler” kavramı ortaya çıkmıştır [4]. Bu kavramla birlikte bir eğrinin konum vektörü yardımıyla karakterize edilmesi problemi çok yoğun bir şekilde çalışılmaya başlanmıştır. Chen ve Dillen (2005) tarafından, rektifiyen eğrilerin kinematikte, mekanikte ve diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan centroid (centrode) kavramıyla ve extremal eğrilerle olan ilişkileri incelenmiştir [5].

Benzer düşünceyle bir eğrinin konum vektörü her zaman kendi normal düzleminde yatıyorsa bu tip eğrilere normal eğri adı verilir. 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin normal eğri olması için gerek ve yeter şart küresel eğri olmasıdır.

Eğer eğrinin konum vektörü her zaman kendi oskülatör düzleminde yatıyorsa bu tip eğrilere oskülatör eğri adı verilir. 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin oskülatör eğri olması için gerek ve yeter eğrinin düzlemsel olması yani $k_2(s) = 0$ olmasıdır.

4-boyutlu Öklid uzayında ve Minkowski uzay-zamanda, İlarslan ve Nesovic, Oskülatör uzay tanımını yaparak, bir eğrinin konum vektörünün bu uzayda kalma şartlarını araştırmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tez çalışmamızda temel kavramlar için Hacısalihoğlu (2000) nun "Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II" kitabı, Sabuncuoğlu (2004) nun "Diferensiyel Geometri" kitabı, O'Neill (2006) 'in "Elementary Differential Geometry" kitabı, Kuhnel (2006)' in "Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds" kitabı ve Carmo (1976) nun "Differential Geometry of Curves and Surfaces" adlı kitabı referanslarımızı oluşturmuştur [3,7,8,11,19]. Ayrıca Minkowski 3-uzayı ve bu uzaydaki geometrik kavramlar için O' Neill (1983) in " Semi–Riemann Geometry with applications to relativity" kitabı , Duggal ve Bejancu (1996) 'ın "Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications " kitabından faydalanılmıştır [6,10].

Ayrıca E_1^4 Minkowski uzay-zamanda null olmayan eğrilerin oskülatör eğri olma özellikleri için İlarslan ve Nesovic makalesinden faydalanılmıştır.

1.2. Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında, 4-boyutlu Lorentz-Minkowski Uzayı veya daha çok bilinen ismiyle Minkowski uzay-zamanda bir eğrinin konum vektörünün her zaman kendi oskülatör uzayında kalması için elde edilen sonuçların incelenmesi amaçlanmış olup elde edilen bu sonuçların detaylı bir şekilde sunulmasıyla ileriki çalışmalara (örneğin 4-boyutlu, 2- indeksli yarı-Öklidyen uzayında oskülatör eğriler) güzel bir taban oluşturması tezimizin bir diğer amacını oluşturmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Minkowski uzay-zamanda ve bu uzay ile ilgili tanım ve kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1. (Simetrik Bilineer Form)

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g: V \times V \to R$$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i. $g(u,v) = g(v,u)$

ii. $g(au + bv, w) = a\, g(u,w) + b\, g(v,w)$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir.

Tanım 2.2.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

i. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g'ye pozitif tanımlı,

ii. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise g'ye negatif tanımlı,

iii. $g(v,v) > 0$ ve $g(w,w) < 0$ olacak şekilde $v, w \in V$ mevcut ise g'ye indefinit denir.

Tanım 2.3.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall u \in V$ için

$$g(\xi, u) = 0$$

ise g'ye V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g'ye non-dejeneredir denir. Bu tanıma göre g' nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$g(u,v)=0 \text{ iken } u=0$$

olmasıdır.

Tanım 2.4.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.V'nin

$$RadV=\{\xi\in V \ : \ g(\xi,v)=0\,,\forall v\in V\}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına g' ye göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir.

$RadV$ 'nin boyutuna g' nin nulluk derecesi denir ve $nullV$ ile gösterilir.

Eğer $nullV>0$ ise g dejeneredir, eğer $nullV=0$ ise non-dejeneredir.

Tanım 2.5. (İndeks)

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,

$$g|_W : W\times W\to R$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g' nin indeksi denir ve q ile gösterilir.

Teorem 2.1.

V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,

i) $g(\alpha_i,\alpha_j)=0\ ,\quad i\neq j$

ii) $g(\alpha_i,\alpha_i)=1\ ,\quad 1\leq i\leq\gamma$

iii) $g(\alpha_i,\alpha_i)=-1\,,\ \gamma+1\leq i\leq\gamma+q$

iv) $g(\alpha_i,\alpha_i)=0\,,\quad \gamma+q+1\leq i\leq\gamma+q+\mu=n$

olacak şekilde V'nin bir $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ bazı vardır.

Tanım 2.6.

Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer g formuna, V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (yarı Öklid metriği) ve (V, g) ikilisine de skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) denir.

Tanım 2.7.

V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,

i) g pozitif tanımlı ise g'ye Öklid metriği, (V, g)'ye de Öklid uzayı,

ii) g'nin indeksi $q = 1$ ise g'ye Lorentz (Minkowski) metriği, (V, g)'ye de Lorentz (Minkowski) uzayı,

iii) g dejenere ise V vektör uzayına g' ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir.

Tanım 2.8.

V yarı-Öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skalar çarpımı için,

i. $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v 'ye spacelike,

ii. $v \neq 0$ iken $g(v, v) < 0$ ise v 'ye timelike,

iii. $v \neq 0$ iken $g(v, v) = 0$ ise v ' ye de lightlike (null veya isotropik) vektör denir.

$v \in V$ vektörünün bu üç tipine v' nin casual karakteri denir.

V yarı-Öklid uzayı üzerinde bir g skalar çarpımı için; $\| v \| = |g(v, v)|^{\frac{1}{2}}$ sayısına v vektörünün uzunluğu (boyu) denir. Uzunluğu bir birim olan (yani $g(v, v) = \pm 1$) vektöre, birim vektör denir. $v, w \in V$ için $g(v, w) = 0$ ise bu iki vektör ortogonaldir denir. $\vec{0}$ vektörü tüm vektörlere ortogonaldir. Eğer g indefinit ise herhangi bir null vektör kendisine ortogonaldir. V'deki lineer bağımsız vektörlerin sayısına V'nin boyutu adı verilir. Bu vektörlerin kümesi V için bir baz oluşturur. Sonlu boyutlu her vektör uzayı için bir baz mevcuttur ve bu baz ortonormal hale getirilebilir.

Tanım 2.9.

V bir reel vektör uzayı ve $W \subset V$ de bir alt uzay olsun. Bu durumda; $g_{|_W}$, dejenere ise W'ye lightlike (dejenere) alt uzay denir.

Genel olarak W'nin dik'i

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v,w) = 0\,, \forall w \in W\}$$

olmak üzere,

$$W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$$

dır.

Tanım 2.10.

V yarı-Öklid uzayının;

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, \dots, \mu\}$$

$$g(u_\alpha, f_j) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0, \quad g(u_\alpha, u_\beta) = \epsilon\delta_{\alpha\beta}\,, \alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}, \epsilon = \pm 1$$

olacak şekildeki

$$\{f_1, \dots, f_\mu, f_1^*, \dots, f_\mu^*, u_1, \dots, u_t\}$$

bazına V'nin quasi-ortonormal bazı denir.

Teorem 2.2.

V bir yarı-Öklid uzay ve W da bu uzayın bir lightlike altuzayı olsun. Bu durumda, W boyunca V uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır.

Tanım 2.11.

q indeksli ve $m = p + q$ boyutlu V yarı-Öklid uzayının $\{e_1, \dots, e_q\}$ birim timelike ve $\{e_{q+1}, \dots, e_{q+p}\}$ birim spacelike vektörlerinden oluşan $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ bir ortonormal bazı ile;

$$q < p \Rightarrow i \in \{1, \dots, q\} \text{ ve } p < q \Rightarrow i \in \{1, \dots, p\}$$

için

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0 \,, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}$$

yi sağlayacak şekilde oluşturulan

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\} \,; \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\}$$

vektörleri yardımıyla lightlike vektörleri kapsayan V yarı- Öklid uzayının aşağıdaki bazları mevcuttur.

i) $q < p$ ise $2q$ tane lightlike vektör ve $(p - q)$ tane spacelike vektörden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*, e_{q+1}, \dots, e_p\}$$

kümesi,

ii) $p < q$ ise $2p$ tane lightlike vektör ve $(q - p)$ tane timelike vektörden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_p, f_1^*, \dots, f_p^*, e_{p+1}, \dots, e_q\}$$

kümesi,

iii) $p = q$ ise $2p = 2q$ adet lightlike vektörden oluşan

$$\{f_1, \dots, f_q, f_1^*, \dots, f_q^*\}$$

kümesi V'nin bir bazıdır.

Tanım 2.12. (Yarı-Öklid uzay)

R^n, R üzerinde n- boyutlu standart vektör uzayı olsun. R^n üzerinde $0 \leq q \leq n$ olmak üzere, q tamsayısı için

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^{q} x_i y_i + \sum_{i=q+1}^{n} x_i y_i \,, \quad \forall x, y \in R^n$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınarak elde edilen uzaya q-indeksli, n-boyutlu yarı-Öklid uzay denir ve R_q^n ile gösterilir.

Örnek 2.1.

Özel olarak Minkowski 3- uzayı R_1^3 de $x=(1,0,0)$, $y=(0,0,1)$ ve $z=(1,0,1)$ vektörlerini ele alalım. g nin işareti $(-,+,+)$ olmak üzere;

$g\big((1,0,0),(1,0,0)\big) = -1 < 0$ olduğundan *x* vektörü bir timelike vektör,

$g\big((0,0,1),(0,0,1)\big) = 1 > 0$ olduğundan *y* vektörü spacelike vektör ,

$g\big((1,0,1),(1,0,1)\big) = 0$ olduğundan *z* vektörü null (lightlike) vektördür.

Tanım 2.13.

$c \in R_q^n$ sabit bir nokta ve $r > 0$ sabiti için;

$$S_q^{n-1}(c,r) = \left\{x \in R_q^n \ : g(x-c,x-c) = r^2\right\}$$

kümesine yarı-Riemann küre,

$$H_{q-1}^{n-1}(c,r) = \left\{x \in R_q^n \ : g(x-c,x-c) = -r^2\right\}$$

kümesine yarı-Riemann hiperbolik uzay,

$$Q_q^{n-1}(c,r) = \left\{x \in R_q^n \ : g(x-c,x-c) = 0\right\}$$

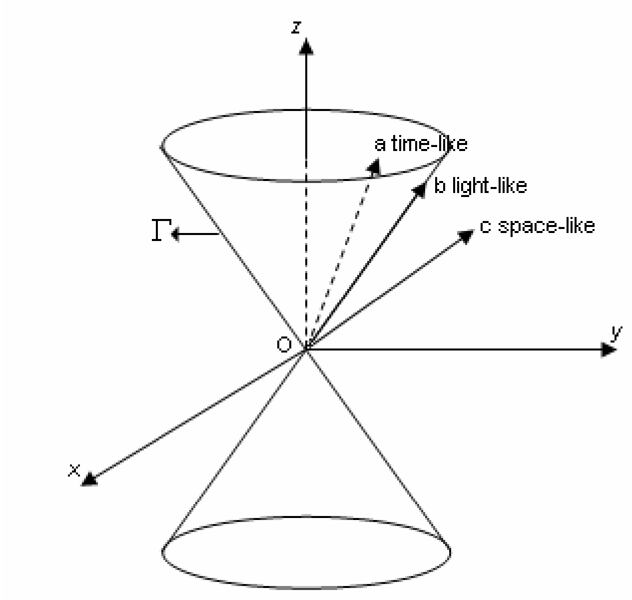
kümesine de yarı-Riemann lightlike koni (veya null koni) denir.

Örnek 2.2.

R_1^3 Minkowski 3-uzayında lightlike, spacelike ve null vektörleri elde edelim. $\Gamma = \{x \in R_1^3 : \ g(x,x) = 0\}$ cümlesiR_1^3 uzayının null konisi olarak adlandırılır. Koninin denklemi $x = (x_1,x_2,x_3) \in R_1^3$ olmak üzere;

$$g(x,x) = g\big((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\big)$$
$$=-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

olup $g(x,x) = 0$ olduğundan $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$ olarak elde edilir. Koni yüzeyinde yatan vektörler lightlike (null) vektörler, koninin iç bölgesindeki vektörler timelike vektörler ve koninin dış bölgesindeki vektörler spacelike vektörlerdir.



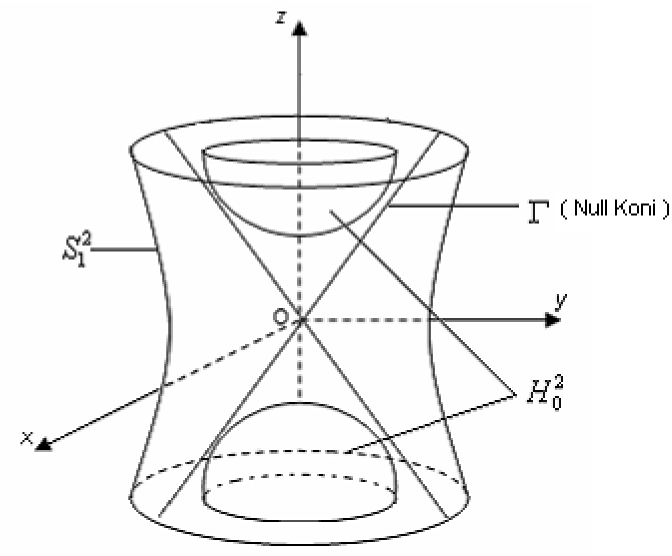
Şekil 2.1. R_1^3 de vektörler

Tanım 2.14.

R_1^3 uzayında sırasıyla

$$S_1^2 = \{x \in R_1^3 : \ g(x,x) = 1\} \text{ ve } H_0^2 = \{x \in R_1^3 : g(x,x) = -1\}$$

cümlelerine Lorentz ve hiperbolik birim küreler denir.



Şekil 2.2. R_1^3 de birim küreler

Tanım 2.15.

R_1^n , n-boyutlu Minkowski uzayı olsun. $\forall X, Y \in R_1^n$ için

$$g(X,Y) = 0$$

ise X ve Y vektörleri Lorentz anlamda diktirler denir.

Örnek 2.3.

$n = 2$ için $X = (1,-1)$ ve $Y = (1,1)$ vektörleri verilsin. Bu vektörler Öklid anlamında dik olmasına rağmen, Lorentz anlamında dik değildirler. Yine $X = (1,-1)$ ve $Y = (1,1)$ vektörleri de Lorentz anlamında dik iken, Öklid anlamında dik değildirler.

Null vektörlerin dikliği vektörlerin lineer bağımlılığı ile açıklanır.

Tanım 2.16.

$X = (x_1, \dots, x_n) \in R_1^n$ için X vektörünün normu

$$\|X\|_L = \sqrt{|g(X,X)|}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.3.

$X = (x_1, \dots, x_n) \in R_1^n$ olsun. Bu taktirde

i. $\|X\|_L > 0$ dır,

ii. $\|X\|_L = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür,

iii. X bir timelike vektör ise, $\|X\|_L^2 = -g(X,X)$ dir,

iv. X bir spacelike vektör ise, $\|X\|_L^2 = g(X,X)$ dir.

Tanım 2.17.

$\alpha \in R_1^n$ Minkowski uzayında bir eğri olsun. Böylece α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere

i. $g(\alpha', \alpha') > 0$ ise α spacelike eğri,

ii. $g(\alpha', \alpha') < 0$ ise α timelike eğri,

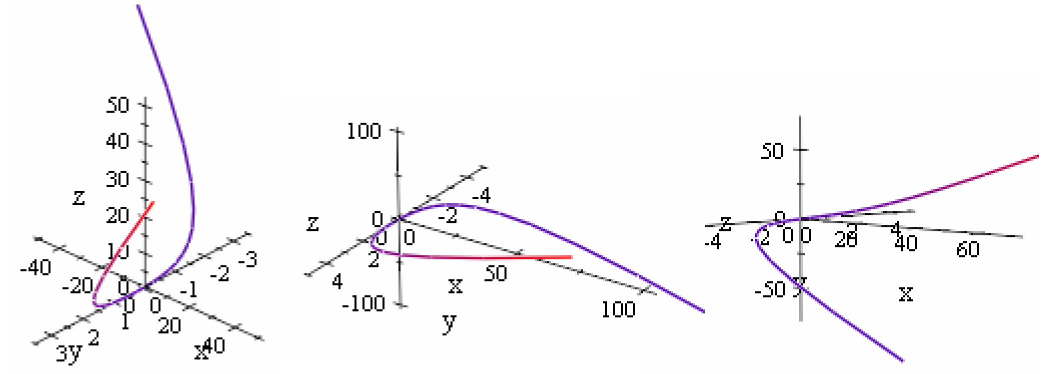
iii. $g(\alpha', \alpha') = 0$ ise α null eğri

olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.

R_1^3 de g'nin işareti $(-,+,+)$ olsun. $\alpha(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s, \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s\right)$eğrisi alınsın. α', α eğrisinin hız vektörü olmak üzere $\alpha'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh s, \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh s\right)$ bulunur. Buradan $g(\alpha', \alpha') = 1$ olup α eğrisi bir spacelike eğridir.

Yine R_1^3 de $\beta(s) = \left(s, \sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\sinh s\right)$ ve $\gamma(s) = (\cosh s, s, \sinh s)$ eğrilerini göz önüne alalım. β' ve γ' sırasıyla β ve γ eğrilerinin hız vektörleri olsunlar. Bu durumda, $g(\beta', \beta') = -1$ olduğundan β eğrisi timelike eğridir. $g(\gamma', \gamma') = 0$ olduğundan γ eğrisi null (lightlike) eğri olur. α, β ve γ eğrileri sırasıyla Şekil 2.3. de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. R_1^3 de spacelike, timelike ve null eğri

R_1^3'de g'nin işareti $(-,+,+)$ olsun. Minkowski 3-uzayında $\alpha(s) = (s^3 + s^2, s^3 + s^2, s)$ parametrik denklemiyle verilen α eğrisi ele alınırsa; α', α eğrisinin hız vektörü olmak üzere $\alpha'(s) = (\, 3s^2 + 2s\,, 3s^2 + 2s\,, 1\,)$ bulunur. Buradan Frenet çatısının vektörlerini şöyle elde ederiz:

$$T(s) = \alpha'(s) = (\, 3s^2 + 2s\,, 3s^2 + 2s\,, 1\,)$$

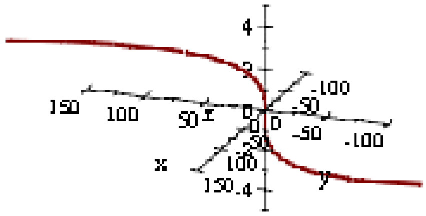
$$N(s) = \alpha''(s) = (6s + 2\,, 6s + 2\,, 0)$$

$$B(s) = \left(-\frac{(3s^2+2s)^2+1}{12s+4}, \frac{1-(3s^2+2s)^2}{12s+4}, -\frac{3s^2+2s}{6s+2}\right)$$

Burada her s için $T(s)$ spacelike, $N(s)$ ve $B(s)$ null vektörlerdir. Bu eğrinin κ ve τ eğrilikleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\kappa = 1$$

$$\tau = \frac{6}{6s+1}$$



Şekil 2.4. R_1^3'de bir pseudo null eğri

Tanım 2.18.

n- boyutlu R_q^n yarı-Öklid uzayına;

i. $q = 0$ ise Öklid uzay denir ve R^n ile,

ii. $q = 1$, $n \geq 2$ ise Minkowski n- uzay denir ve R_1^n ile,

iii. $q = 1$, $n = 4$ ise Minkowski uzay-zaman denir ve R_1^4 ile,

iv. $q = 2$, $n = 4$ ise 4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay denir ve R_2^4 ile gösterilir.

3. E_1^4 MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA EĞRİLER VE FRENET DENKLEMLERİ

E_1^4 Minkowski uzay-zaman , (x_1, x_2, x_3, x_4), E_1^4 in bir dik koordinat sistemi olmak üzere

$$g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

ile verilen non-dejenere metrik ile donatılmış E^4 Öklid 4-uzayıdır. Bir diğer ifadeyle $E_1^4 = (E^4, g)$ dir. Minkowski uzay-zamanda verilen keyfi bir $\vartheta \in E_1^4 \setminus \{0\}$ vektörü için sırasıyla $g(\vartheta, \vartheta) > 0$, $g(\vartheta, \vartheta) < 0$ ya da $g(\vartheta, \vartheta) = 0$ sağlanırsa, bu ϑ vektörü spacelike, timelike ya da null (lightlike) olarak adlandırılır. Özel olarak, $\vartheta = 0$ vektörü bir spacelike vektördür. Bir ϑ vektörünün normu $\|\vartheta\| = \sqrt{|g(\vartheta, \vartheta)|}$ olarak verilir, eğer $g(\vartheta, w) = 0$ ise ϑ ve w vektörlerinin ortogonal olduğu söylenir. E_1^4 üzerinde keyfi bir $\alpha(s)$ eğrisi, eğer bütün $\alpha'(s)$ hız vektörleri sırasıyla spacelike, timelike ya da null (lightlike) ise eğri spacelike, timelike ya da null (lightlike) olarak adlandırılır. Eğer $g\big(\alpha'(s), \alpha'(s)\big) = \pm 1$ ise bir $\alpha(s)$ spacelike ya da timelike eğrisi birim hızlıdır denir. $\alpha(s)$, Minkowski uzay-zamanda regüler bir eğri ve Frenet vektörleri $\{T, N, B_1, B_2\}$, sırasıyla tanjant, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal olarak adlandırılan vektör alanlarından oluşsun.

3.1 Timelike ve Spacelike Eğriler:

Bu başlık altında, E_1^4 Minkowski uzay-zamanda timelike ve spacelike eğrilerin oskülatör eğri olma şartları incelenecektir. Bu bölüm için temel referansımız İlarslan,K., Some special curves on non-Euclidean Manifolds, Doctoral Thesis, Ankara University, Graduate school of Natural and Applied Science, 2002 olacaktır [16].

$\alpha(s)$, E_1^4 de normalleri null olmayan timelike ve spacelike birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin Frenet vektörleri T, N, B_1, B_2 ve eğrilikleri $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ olmak üzere Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{-1,1\}$ olmak üzere,

$$g(T,T) = \varepsilon_1 \,,\quad g(N,N) = \varepsilon_2, \quad g(B_1,B_1) = \varepsilon_3 \,,\; g(B_2,B_2) = \varepsilon_4 \,, \tag{3.1}$$

ve

$$g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = g(B_1,B_2) = 0 \tag{3.2}$$

olmak üzere normalleri null olmayan bir timelike ve spacelike eğriye ait Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ -k_1\varepsilon_1 & 0 & k_2\varepsilon_3 & 0 \\ 0 & -k_2\varepsilon_2 & 0 & -k_3\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & -k_3\varepsilon_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Her $s \in I \ (I \subset R)$ için eğer $k_3(s) \neq 0$ ise α eğrisi tamamıyla E_1^4 de yatar.

3.2 Partially Null Pseudo Null Eğriler:

Bu bölümde, E_1^4 Minkowski uzay-zamanda partially null ve pseudo null eğrilerin oskülatör eğri olma şartları incelenecektir. Bu bölüm için temel referansımız Bonnor, W.B., Null curves in a Minkowski space-time, Tensor 20 (1969), 29-242. olacaktır [1].

İlk olarak E_1^4 uzay-zamanda partially null ve pseudo null eğrilerin Frenet denklemlerini verelim.

Eğer α eğrisi partially null ise Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

şeklindedir. Burada her s için üçüncü eğriliği $k_3(s) = 0$ dır. Bu şartları sağlayan $k_1(s)$, $k_2(s)$ eğriliklerine sahip eğri E_1^4 in lightlike hiperdüzleminde yatar ve Frenet vektörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$g(T,T) = g(N,N) = 1\,, g(B_1,B_1) = g(B_2,B_2) = 0\,,$$
$$g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = 0\,,\; g(B_1,B_2) = 1.$$

Eğer α eğrisi pseudo null ise Frenet denklemleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

ile verilir. Burada α eğrisi doğru ise $k_1(s) = 0$, diğer durumlarda ise $k_1(s) = 1$ dir. Bu şartları sağlayan, $k_2(s)$, $k_3(s)$ eğriliklerine sahip eğri aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$g(T,T) = g(B_1,B_1) = 1\,, g(N,N) = g(B_2,B_2) = 0\,,$$
$$g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(B_1,B_2) = 0\,, g(N,B_2) = 1\,.$$

3.3 Null Eğriler:

Bu bölümde, E_1^4 Minkowski uzay-zamanda null eğrilerin oskülatör eğri olma şartları incelenecektir. Bu bölüm için temel referansımız Bejancu, A., Lightlike curves in Lorentz Manifolds, Publ.Math.Debrecen, 44, (1996) no. f. 1-2, 145-155. [17] olacaktır.

$\alpha(s)$, E_1^4 de birim hızlı (yani $g\big(\alpha''(s),\alpha''(s)\big)=1$) bir null eğri olsun. α eğrisine ait Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_3 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$g(T,T)=g(B_1,B_1)=g(T,N)=g(T,B_2)=0$$

$$g(N,B_1)=g(N,B_2)=g(B_1,B_2)=0$$

$$g(N,N)=g(B_2,B_2)=g(T,B_1)=1$$

olarak verilir. Burada α bir doğru ise $k_1(\mathrm{s})=0$ dır, diğer tüm durumlarda $k_1(\mathrm{s})=1$ dir.

4. ÖKLİD UZAYINDA OSKÜLATÖR EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, Minkowski uzay-zamanda oskülatör eğrilere ait karakterizasyonlarla karşılaştırma yapılabilmesi için 4-boyutlu Öklid uzayındaki oskülatör eğrilere ait karakterizasyonlar verilecektir. Bu bölüm için ana kaynağımız İlarslan ve Nesovic (2008) tarafından yapılan çalışma olacaktır [12].

$\alpha: I \subset R \to E^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Birim hızlı α eğrisinin Frenet vektörleri T, N, B_1ve B_2 sırasıyla tanjant, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları olmak üzere Frenet denklemleri şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ fonksiyonları α eğrisinin sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü eğrilikleri olarak adlandırılır. Eğer her $s \in \mathrm{I} \subset R$ için $k_3 \neq 0$ ise α eğrisi tamamen E^4 de yatar.

İlk olarak Oskülatör uzayı tanımlayalım. E^4 deki standart iç çarpım $\langle .,. \rangle$ olmak üzere $B_1^{\perp} = \{\omega \in E^4 | \langle \omega, B_1 \rangle = 0\}$ cümlesine α eğrisinin Oskülatör uzayı denir. Açıktır ki $B_1^{\perp} = \mathrm{Sp}\{T, N, B_2\}$ dir. Buna göre 4-boyutlu Öklid uzayında bir oskülatör eğri konum vektörü her zaman kendi oskülatör uzayında kalan bir eğridir. Bir diğer ifadeyle $\lambda(s), \mu(s)$ ve $\vartheta(s)$, s yay parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \vartheta(s)B_1(s) \tag{4.2}$$

dir. (4.2) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (4.1) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$T = (\lambda' - \mu k_1)T + (\lambda k_1 + \mu')N + (\mu k_2 - \vartheta k_3)B_1 + \vartheta' B_2 \tag{4.3}$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\left.\begin{aligned} \lambda' - \mu k_1 &= 1, \\ \lambda k_1 + \mu' &= 0, \\ \mu k_2 - \vartheta k_3 &= 0, \\ \vartheta' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

eşitlikleri bulunur ve böylece, $c \in R_0$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \lambda(s) &= -c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)', \\ \mu(s) &= c\frac{k_3}{k_2}, \\ \vartheta(s) &= c \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

elde edilir. Bu durumda, (4.4) deki birinci denklem ve (4.5) bağıntısı kullanılarak

$$\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1 k_3}{k_2} = \frac{-1}{c}, \qquad c \in R_0 \tag{4.6}$$

denklemi elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki E^4 de keyfi bir birim hızlı α eğrisinin $k_1(s), k_2(s)$ve $k_3(s)$ eğrilikleri (4.6) denklemini sağlasın.

$$X(s) = \alpha(s) + c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' T - c\frac{k_3}{k_2} N - cB_2$$

eşitliğiyle verilen $X \in E^4$ vektörünü düşünelim. (4.1) ve (4.6) bağıntılarını kullanarak $X'(s) = 0$ olduğu kolaylıkla bulunur, bu da X in sabit bir vektör olduğu anlamına gelir. Bu α nın oskülatör bir eğriye denk olması demektir. Bu yolla, aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem 4.1:

α, E^4 de sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikli birim hızlı eğri olsun. O zaman α bir oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1 k_3}{k_2} = \frac{-1}{c}, \qquad c \in R_0 \qquad \text{dır.}$$

E^4 de keyfi α eğrisi, sabit eğrilik fonksiyonlarına sahip ise bir W-eğri olarak adlandırılır. Benzer eğrilerin Teorem 4.1 i sağladığı açıktır.

E^4 deki bir W-eğrinin karakterizasyonu oskülatör eğrilerle ilgili olarak aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.2:

E^4 de sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikli her birim hızlı W-eğri bir oskülatör eğriye denktir.

İspat:

İspatı Teorrem 4.1 den açıktır.

Örnek 4.1:

$$\rho(s)=\begin{pmatrix} a\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), a\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \\ b\cos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), b\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right) \end{pmatrix}$$ eğrisi E^4 üzerinde bir birim hızlı eğridir. Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi kolaylıkla ifade edilir.

$$T(s)=\begin{pmatrix} \frac{-b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \frac{b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \\ \frac{-ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \frac{ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right) \end{pmatrix},$$

$$k_1(s)=\frac{\sqrt{a^2r^2+b^2}}{a^2r^2+b^2}\ ,$$

$$N(s)=\begin{pmatrix} \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \frac{-b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right) \end{pmatrix}\ ,$$

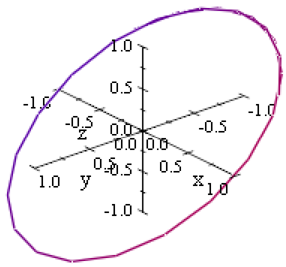
$$k_2(s)=\frac{abr(r^2-1)}{(a^2r^2+b^2)\sqrt{a^2r^4+b^2}}\ ,$$

$$B_1(s)=\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \frac{-b}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \\ \frac{-ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \frac{ar}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right) \end{pmatrix}\ ,$$

$$k_3(s)=\frac{r}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\ ,$$

$$B_1(s)=\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \frac{b}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \\ \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\cos\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right), \frac{-ar^2}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\sin\left(\frac{r}{\sqrt{a^2r^2+b^2}}s\right) \end{pmatrix}.$$

E^4 de $k_1(s)$ =sabit , $k_2(s)$ =sabit ve $k_3(s)$ =sabit olduğunda $\rho(s)$ bir W-eğridir. Teorem 4.2 ye göre, ρ E^4 de bir oskülatör eğriye denktir. $a=1$, $b=-1$ ve $r=\sqrt{2}$ için grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.1. ρ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü.

Böylece, örnekte verilen eğrinin konum vektörü aşağıdaki gibi verilir:

(4.6) denkleminden $c = \frac{-k_2(s)}{k_1(s)k_3(s)}$ ve $c = \frac{-ab(r^2-1)}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}$ olduğu elde edilir. (4.4) denkleminden

$$\lambda(s) = -c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' = 0\,,\ \mu(s) = c\frac{k_3}{k_2} = -\frac{1}{k_1} = \frac{-(a^2r^2+b^2)}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}\ ,\ \vartheta(s) = c = \frac{-ab(r^2-1)}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}$$

bulunur. (4.2) denkleminden eğrinin konum vektörü

$$\rho(s) = \frac{-(a^2r^2+b^2)}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}N(s) + \frac{-ab(r^2-1)}{\sqrt{a^2r^4+b^2}}B_2(s)$$

gibi yazılır.

Teorem 4.3:

α, E^4 de sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikli birim hızlı oskülatör eğri olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikleri $c \in R_0$ ve $c_1, c_2 \in R$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikle ifade edilir:

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \left(\frac{1}{c}\int sin(\int k_1(s)ds)ds + c_1\right) cos(\int k_1(s)ds)$$

$$+\left(-\frac{1}{c}\int cos(\int k_1(s)ds)ds + c_2\right) sin(\int k_1(s)ds) \qquad (4.7)$$

Eğrinin konum vektörünün tanjant bileşeni ve asli normal bileşeni sırasıyla

$$< \alpha(s), T(s) >= -c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' , < \alpha(s), N(s) >= c\frac{k_3}{k_2}, \quad c \in R_0 \qquad (4.8)$$

olarak verilir.

Eğrinin konum vektörünün ikinci binormal bileşeni sıfırdan farklı sabittir.

Tersine, E^4 de sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikli birim hızlı eğri ve (i), (ii) ya da (iii) ifadelerinden biri sağlanıyor ise, o zaman α bir oskülatör eğridir ya da bir oskülatör eğriye denktir.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki α , E^4 de sıfırdan farklı $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikli bir birim hızlı oskülatör eğri olsun. α eğrisinin konum vektörü (4.6) denklemi ile ifade edilir:

$$\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1 k_3}{k_2} = \frac{-1}{c}, \qquad c \in R_0 \ .$$

Burada $y(s) = \frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ ve $p(s) = \frac{1}{k_1(s)}$ olarak ifade edilirse, o zaman (4.6) denklemi

$$\frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{dy}{ds}\right)+\frac{y(s)}{p(s)}=\frac{-1}{c}\ , \qquad c\in R_0$$

gibi yazılır.

Yukarıdaki denklemde $t=\int\frac{1}{p(s)}ds$ gibi değişken değiştirme yapılırsa, o zaman

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\frac{-1}{ck_1}\ , \qquad\qquad c\in R_0$$

elde edilir, bu diferensiyel denklemin çözümü, $c\in R_0$ ve $c_1, c_2\in R$ olmak üzere ,

$$y=\left(\frac{1}{c}\int\frac{sint}{k_1}dt+c_1\right)cost+\left(\frac{-1}{c}\int\frac{cost}{k_1}dt+c_2\right)sint$$

dir.

Burada, $y(s)=\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ ve $dt=k_1(s)ds$ yazılırsa,

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)}=\left(\frac{1}{c}\int sin\left(\int k_1(s)ds\right)ds+c_1\right)cos\left(\int k_1(s)ds\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{c}\int cos\left(\int k_1(s)ds\right)ds+c_2\right)sin\left(\int k_1(s)ds\right)$$

elde edilir. Böylece (i) ifadesi ispatlanmış olur.

(4.2) ve (4.5) bağıntılarını kullanarak, eğrinin konum vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\alpha(s)=-c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'T(s)+c\frac{k_3}{k_2}N(s)+cB_2(s). \qquad (4.9)$$

(4.9) denkleminden

$< \alpha(s), T(s) >= -c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'$, $< \alpha(s), N(s) >= c\frac{k_3}{k_2}$ ve $< \alpha(s), B_2(s) >= c$,

$c \in R_0$ elde edilir. Böylece, (ii) ve (iii) ifadeleri ispatlanmış olur.

Tersine, kabul edelim ki (i) ifadesi sağlansın. O zaman $k_1(s), k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilik fonksiyonları

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \left(\frac{1}{c}\int sin\left(\int k_1(s)ds\right)ds + c_1\right)cos\left(\int k_1(s)ds\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{c}\int cos\left(\int k_1(s)ds\right)ds + c_2\right)sin\left(\int k_1(s)ds\right)$$

denklemiyle ifade edilir. Önceki denklemin s ye göre iki defa türevi alınırsa, $\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \frac{k_1k_3}{k_2} = \frac{-1}{c}$, $c \in R_0$ elde edilir, bu da Teorem 4.1 e göre α nın oskülatör eğriye denk olduğu anlamına gelir. (ii) ifadesi sağlansın.

$< \alpha(s), N(s) >= c\frac{k_3}{k_2}$ denkleminin s ye göre türevi alınır ve (4.1) bağıntısı kullanılırsa

$$-k_1 < \alpha, T > +k_2 < \alpha, B_1 >= c\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'$$

elde edilir.

$< \alpha(s), T(s) >= -c\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'$ ve $k_2 \neq 0$ olduğu kullanılarak, $< \alpha, B_1 > = 0$ eşitliği bulunur, bu da α nın bir oskülatör eğri olduğu anlamına gelir.

Eğer (iii) ifadesi sağlanırsa, $< \alpha(s), B_2(s) >= c$, $c \in R_0$ elde edilir. Buradan s ye göre türev alınır ve (4.1) bağıntısı kullanılırsa

$$-k_3 < \alpha, B_1 >= 0$$

olduğu bulunur. $k_3(s) \neq 0$ olduğundan $< \alpha, B_1 >= 0$ sonucuna ulaşılır. Bu ise α eğrisinin bir oskülatör eğri olduğunu gösterir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5. MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA TİMELİKE VE SPACELİKE OSKÜLATÖR EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, E_1^4 Minkowski uzay-zamanda birinci ve ikinci çeşit normalleri null olmayan timelike ve spacelike oskülatör eğrileri tanımlayacağız ve bu eğriler ile ilgili elde edilen karakterizasyonları vereceğiz. Bu bölüm için ana kaynak İlarslan ve Nesovic (2009) tarafından yapılan çalışma olacaktır [13].

3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de regüler bir eğrinin Oskülatör düzlemi, teğet ve normal vektör alanları T ve N nin gerdiği düzlemdir. Yani $Sp\{T,N\}$ dir. Bu düzlem binormal vektör alanlarının dik uzayı olarak da ifade edilebilir. Yani $B^{\perp}=Sp\{T,N\}$ dir. Benzer düşünceyi 4-boyutlu yarı-Öklidyen uzayı E_1^4 de normalleri null olmayan timelike ve spacelike bir eğriye taşıdığımızda, eğrinin Frenet vektörlerinden oluşan $\{T,N,B_1,B_2\}$ cümlesi ortonormal bir cümledir. Yani bu vektörler birbirlerine diktir. O halde bu eğri için oskülatör uzay kavramını şu şekilde tanımlayabiliriz:

$B_2^{\perp}=Sp\{T,N,B_1\}$ uzayına $\alpha(s)$ eğrisinin birinci çeşit Oskülatör uzayı,

$B_1^{\perp}=Sp\{T,N,B_2\}$ uzayına $\alpha(s)$ eğrisinin ikinci çeşit Oskülatör uzayı adını vereceğiz.

Eğer α , E_1^4 üzerinde normalleri null olmayan bir timelike ya da bir spacelike eğri ise sırasıyla $\{T,N,B_2\}$ ve $\{T,N,B_1\}$ tarafından gerilen, $B_2^{\perp}$ ve $B_1^{\perp}$ ortogonal bileşeni E_1^4 in non-dejenere hiperdüzlemleridir.

Sonuç olarak, α eğrisinin yay parametresi s nin diferensiyellenebilir fonksiyonları $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\vartheta(s)$ olmak üzere, birinci çeşit timelike ve spacelike oskülatör eğrinin (null olmayan N ve B_1 vektör alanlarıyla) konum vektörü,

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\vartheta(s)B_1(s) \tag{5.1}$$

denklemiyle tanımlanır ve ikinci çeşit timelike ve spacelike oskülatör eğrinin (null olmayan N ve B_1 vektör alanlarıyla) konum vektörü ,

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\vartheta(s)B_2(s) \tag{5.2}$$

denklemiyle tanımlanır.

5.1. Birinci Çeşit Timelike ve Spacelike Oskülatör Eğriler:

Bu bölümde, null olmayan N ve B_1 vektör alanlarıyla null olmayan bir eğri birinci çeşit oskülatör eğridir gerek ve yeter şart eğrinin tamamıyla E_1^4 in non-dejenere hiperdüzlemi üzerinde yattığı gösterilecek. Bu durum için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.1.1:

α , E_1^4 üzerinde null olmayan N ve B_1 vektör alanlı null olmayan bir eğri olsun. O zaman α birinci çeşit oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart her s için $k_3(s) = 0$ dır.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki, α E_1^4 üzerinde birinci çeşit oskülatör eğri olsun. O zaman α nın konum vektörü,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \vartheta(s)B_1(s)$$

bağıntısı ile ifade edilir. Bu bağıntının s ye göre türevi alınır ve (3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa, kolaylıkla $k_3(s) = 0$ olduğu bulunur.

Tersine, her s için $k_3(s) = 0$ olduğunu kabul edelim. α nın konum vektörü $\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal çatısı ile tekrar

$$\alpha(s) = \varepsilon_1 g(\alpha, T)T + \varepsilon_2 g(\alpha, N)N + \varepsilon_3 g(\alpha, B_1)B_1 + \varepsilon_4 g(\alpha, B_2)B_2 \qquad (5.3)$$

olarak yazılabilir. Buradan $k_3(s) = 0$, (3.3) bağıntısı B_2 nin sabit bir vektör ve $g(\alpha, B_2)$ =sabit olduğunu gösterir. Bunlar (5.3) eşitliğinde kullanılarak, α nın birinci çeşit oskülatör eğriye denk olduğu bulunur.

Sonuç 5.1.1:

Null olmayan N ve B_1 vektör alanlarıyla E_1^4 in spacelike ya da timelike hiperdüzleminde tamamıyla yatan her null olmayan eğri birinci çeşit oskülatör eğridir.

5.2. İkinci Çeşit Timelike ve Spacelike Oskülatör Eğriler:

Bu bölümde, eğriliklerine bağlı olarak null olmayan N ve B_1 vektör alanlı E_1^4 üzerinde null olmayan ikinci çeşit oskülatör eğrileri karakterize edeceğiz. $\alpha = \alpha(s)$, null olmayan N ve B_1 vektör alanlı ve sıfırdan farklı $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilikli E_1^4 üzerinde birim hızlı null olmayan ikinci çeşit oskülatör eğri olsun. Tanıma göre α eğrisinin konum vektörü, $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\vartheta(s)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere (5.2) denklemi ile ifade edilir. (5.2) denkleminin s ye göre türevi alınır ve (3.3) Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$T = (\lambda' - \varepsilon_1 \mu k_1)T + (\varepsilon_2 \lambda k_1 + \mu')N + (\varepsilon_3 \mu k_2 - \varepsilon_3 \vartheta k_3)B_1 + \vartheta' B_2$$

elde edilir. Buradan

$$\left.\begin{aligned} \lambda' - \varepsilon_1 \mu k_1 &= 1, \\ \varepsilon_2 \lambda k_1 + \mu' &= 0, \\ \mu k_2 - \vartheta k_3 &= 0\,, \\ \vartheta' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

ve böylece $c \in R_0$ olmak üzere ,

$$\left.\begin{aligned} \lambda(s) &= -c\varepsilon_2 \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)', \\ \mu(s) &= c\,\frac{k_3}{k_2}\,, \\ \vartheta(s) &= c\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

bulunur. Bu yolla, α eğrisinin konum vektörünün $k_1(s)$, $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilik fonksiyonlarına bağlı olarak $\lambda(s)$, $\mu(s)$ ve $\vartheta(s)$ fonksiyonları elde edilir. Böylece, (5.4) deki birinci denklem ve (5.5) kullanılarak, bir eğrinin ikinci çeşit oskülatör eğri olmasını ifade eden ve $k_1(s)$,$k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğriliklerine bağlı

$$\varepsilon_2\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \varepsilon_1\frac{k_1k_3}{k_2} = \frac{-1}{c}\ ,\ c \in R_0$$

denklemi kolaylıkla bulunur. Bu yolla, aşağıdaki teorem ifade edilir:

Teorem 5.2.1:

$\alpha(s)$, tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan, null olmayan N ve B_1 vektör alanlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. O zaman α ikinci çeşit öskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart

$$\varepsilon_2\left(\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)'\right)' + \varepsilon_1\frac{k_1k_3}{k_2} = \frac{-1}{c}\ ,\ c \in R_0 \tag{5.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki α, E_1^4 üzerinde ikinci çeşit öskülatör eğriye denk olsun. (5.5) bağıntısı ve (5.4) bağıntısının birinci denklemi kullanılarak, (5.6) eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla gösterilebilir.

Tersine, kabul edelim ki (5.6) denklemi sağlansın. $X \in E^4$ vektörü ,

$$X(s) = \alpha(s) + c\varepsilon_2\frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' T(s) - c\frac{k_3}{k_2}\,N(s) - cB_2(s)$$

olarak düşünülsün. (3.3) ve (5.6) bağıntıları kullanılarak $X'(s) = 0$ olduğu kolaylıkla bulunur, bu da X vektörünün bir sabit vektör olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak, α ikinci çeşit oskülatör eğriye denktir.

E_1^4 üzerinde birim hızlı null olmayan bir α eğrisi eğer sabit eğrilik fonksiyonlarına sahip ise bu eğri bir W- eğri olarak adlandırılır. Oskülatör eğrilere bağlı olarak E_1^4 üzerinde null olmayan W-eğrilerin karakterizasyonu aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 5.2.2:

Tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan, null olmayan N ve B_1vektör alanlı her null olmayan W-eğri, ikinci çeşit oskülatör eğriye denktir.

İspat:

İspat teorem 4.1 den açıktır.

Teorem 5.2.3:

$\alpha(s)$, tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan, null olmayan N ve B_1 vektör alanlı birim hızlı null olmayan bir eğri olsun. Eğer α , ikinci çeşit oskülatör eğri ise, aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) α nın konum vektörünün tanjant ve asli normal bileşenleri sırasıyla

$$< \alpha(s), T(s) >= -c\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' \quad , \quad < \alpha(s), N(s) >= c\varepsilon_2 \frac{k_3}{k_2} \quad , \; c \in R_0 \qquad (5.7)$$

ile verilir.

(ii) α nın konum vektörünün ikinci binormal bileşeni sıfırdan farklı bir sabittir, yani;

$$< \alpha(s), B_2(s) >= c \quad , c \in R_0 \qquad (5.8)$$

dır.

Tersine, eğer α tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan, null olmayan N ve B_1 vektör alanlı, birim hızlı null olmayan bir eğri ve (i) ya da (ii) ifadelerinden birisi sağlanırsa, o zaman α ikinci çeşit oskülatör eğriye denktir.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki α, E_1^4 üzerinde ikinci çeşit oskülatör eğriye denk olsun. (5.2) ve (5.5) bağıntıları kullanılarak, α nın konum vektörü

$$\alpha(s) = -c\varepsilon_2 \frac{1}{k_1}\left(\frac{k_3}{k_2}\right)' T(s) + c\frac{k_3}{k_2} N(s) + cB_2(s) \tag{5.9}$$

olarak yazılabilir. (5.9) bağıntısı kolaylıkla (5.7) ve (5.8) bağıntılarının sağlandığını gösterir, bu da (i) ve (ii) ifadelerini ispatlar.

Tersine, (i) ifadesinin sağlandığını kabul edelim. $<\alpha(s), N(s)>= c\varepsilon_2\frac{k_3}{k_2}$ denkleminin s ye göre türevini alınarak ve (3.3) denklemi kullanılarak $<\alpha(s), B_1(s)>= 0$ eşitliği elde edilir, bu da α nın ikinci çeşit oskülatör eğriye denk olduğu anlamına gelir.

Eğer (ii) ifadesi sağlanırsa, aynı yolla α nın ikinci çeşit oskülatör eğriye denk olduğu kolaylıkla bulunur.

Teorem 5.2.4:

$\alpha(s)$, tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan, timelike asli normal N ve spacelike birinci binormal B_1 vektör alanlı, birim hızlı bir timelike eğri ya da spacelike eğri olsun. O zaman α ikinci çeşit oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart $c \in R_0$, $c_1, c_2 \in R$ olmak üzere,

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \frac{\varepsilon_1}{2c}\left(\int e^{-\int k_1(s)ds} ds + c_1\right)e^{\int k_1(s)ds} + \frac{\varepsilon_2}{2c}\left(\int e^{\int k_1(s)ds} ds + c_2\right)e^{-\int k_1(s)ds} \tag{5.10}$$

dır.

İspat:

Öncelikle $\alpha(s)$ in E_1^4 üzerinde timelike asli normal N vektör alanlı birim hızlı timelike ya da spacelike eğri olduğunu kabul edelim. Teorem 4.1 den dolayı α nın eğrilik fonksiyonları (5.6) denklemi ile ifade edilir. $y(s) = \frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ ve $p(s) = \frac{1}{k_1(s)}$ olduğunu kullanarak (5.6) denklemi,

$$\varepsilon_2 \frac{d}{ds}\left(p(s)\frac{dy}{ds}\right) + \varepsilon_1 \frac{y(s)}{p(s)} = \frac{-1}{c} \quad , \; c \in R_0$$

gibi yazılabilir. Daha sonra $t(s) = \int \frac{1}{p(s)} ds$ değişken değiştirme işlemiyle

$$\varepsilon_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \varepsilon_1 y = \frac{-p(t)}{c} \quad , \quad c \in R_0$$

eşitliği bulunur. Bu diferensiyel denklemin çözümü $c \in R_0$, $c_1, c_2 \in R$ olmak üzere,

$$y = \frac{\varepsilon_1}{2c}\left(\int e^{-t} p(t)dt + c_1\right)e^{t} + \frac{\varepsilon_2}{2c}\left(\int e^{t} p(t)dt + c_2\right)e^{-t} \quad ,$$

olarak verilir. Son olarak, $y(s) = \frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ ve $t(s) = \int k_1(s)ds$ eşitliklerinden dolayı

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \frac{\varepsilon_1}{2c}\left(\int e^{-\int k_1(s)ds} ds + c_1\right)e^{\int k_1(s)ds} + \frac{\varepsilon_2}{2c}\left(\int e^{\int k_1(s)ds} ds + c_2\right)e^{-\int k_1(s)ds} \qquad (5.11)$$

eşitliği elde edilir.

Tersine, eğer (5.10) bağıntısı sağlanırsa , bu bağıntının s ye göre iki defa türevi alınarak (5.6) bağıntısının sağlandığı elde edilir. Sonuç olarak Teorem 4.1 sağlanır, bu da α nın ikinci çeşit oskülatör eğriye denk olmasıdır.

Aynı yolla aşağıda verilen teorem ispatlanabilir.

Teorem 5.2.5:

$\alpha(s)$, tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan, spacelike asli normal N ve null olmayan birinci binormal B_1 vektör alanlı birim hızlı spacelike bir eğri olsun. O zaman α, ikinci çeşit oskülatör eğridir gerek ve yeter şart $\phi(s) = \int k_1\,(s)ds$, $c \in R_0$, $c_1, c_2 \in R$ olmak üzere,

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \frac{-1}{c}\left(\int sin\phi(s)ds + c_1\right)cos\phi(s) + \frac{1}{c}\left(\int cos\phi(s)ds + c_2\right)sin\phi(s)$$

dır.

Örnek 5.1:

E_1^4 üzerinde bir birim hızlı spacelike α eğrisi,

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}coshs, \sqrt{\frac{3}{5}}sinhs, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}sin2s, \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}cos2s\right)$$

olarak verilsin. Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi kolaylıkla elde edilir:

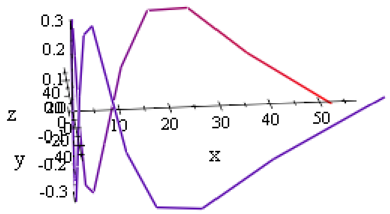
$$T(s) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}sinhs, \sqrt{\frac{3}{5}}coshs, \sqrt{\frac{2}{5}}cos2s, \sqrt{\frac{2}{5}}sin2s\right),$$

$$N(s) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}coshs, \sqrt{\frac{3}{5}}sinhs, -2\sqrt{\frac{2}{5}}sin2s, 2\sqrt{\frac{2}{5}}cos2s\right),$$

$$B_1(s) = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}sinhs, \frac{\sqrt{10}}{5}coshs, \frac{-\sqrt{15}}{5}cos2s, \frac{-\sqrt{15}}{5}sin2s\right),$$

$$B_2(s) = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}coshs, \frac{2\sqrt{10}}{5}sinhs, \frac{-\sqrt{15}}{5}sin2s, \frac{\sqrt{15}}{5}cos2s\right),$$

$k_1(s) = 1$, $k_2(s) = \sqrt{6}$ ve $k_3(s) = 2$. Buradan $g(\alpha, B_1) = 0$ olup, α ikinci çeşit oskülatör eğriye denktir.



Şekil.5.1. α eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü.

Örnek 5.2:

E_1^4 üzerinde bir birim hızlı timelike β eğrisi,

$$\beta(s) = \left(\sqrt{2}sinhs, \sqrt{2}coshs, sins, coss\right)$$

olarak verilsin. Frenet vektörleri ve eğrilikleri aşağıdaki gibi kolaylıkla elde edilir:

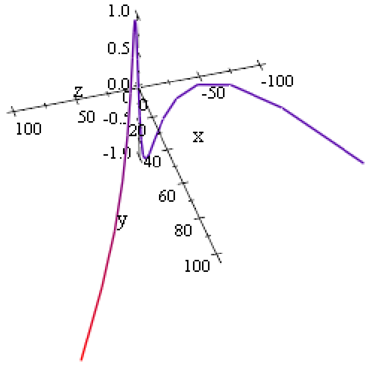
$$T(s) = \left(\sqrt{2}coshs, \sqrt{2}sinhs, coss, -sins\right),$$

$$N(s) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}sinhs, \frac{\sqrt{6}}{3}coshs, -\frac{\sqrt{3}}{3}sins, -\frac{\sqrt{3}}{3}coss\right),$$

$$B_1(s) = \left(-coshs, -sinhs, -\sqrt{2}coss, \sqrt{2}sins\right),$$

$$B_2(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}sinhs, \frac{\sqrt{3}}{3}coshs, \frac{\sqrt{6}}{3}sins, \frac{\sqrt{6}}{3}coss\right),$$

$k_1(s) = \sqrt{3}$, $k_2(s) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ve $k_3(s) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dır. Buradan $g(\beta, B_1) = 0$ olduğu kolaylıkla elde edilir, bu da β nın ikinci çeşit oskülatör eğriye denk olduğu anlamına gelir.



Şekil.5.2. β eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü.

6. MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA NULL OSKÜLATÖR EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, Minkowski uzay-zamanda bir null α eğrisinin konum vektörünün her zaman kendi oskülatör uzayında yatması için hangi şartları sağlaması gerektiğini ifade edeceğiz. Bu bölüm için ana kaynağımız İlarslan ve Nesovic (2012) tarafından yapılan çalışma olacaktır [14].

E_1^4 uzayında, Cartan çatılı bir null α eğrisi için eğrinin konum vektörü (seçilen orijine göre) her zaman sırasıyla $B_2^{\perp}$ veya $B_1^{\perp}$ Oskülatör uzaylarında kalıyorsa α eğrisine sırasıyla birinci çeşit veya ikinci çeşit oskülatör eğri adı verilir.

Buna göre, birinci çeşit ve ikinci çeşit null oskülatör eğrinin konum vektörü, $\lambda(s), \mu(s)$ ve $\vartheta(s)$ pseudo-yay parametresi s nin diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \vartheta(s)B_1(s) \tag{6.1}$$

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_1(s) + \vartheta(s)B_2(s) \tag{6.2}$$

denklemleri ile ifade edilir.

6.1. Birinci Çeşit Null Oskülatör Eğriler:

Bu bölümde, Minkowski uzay-zamanda birinci çeşit null oskülatör eğrileri karakterize edeceğiz. Göstereceğiz ki E_1^4 üzerinde bir null eğri, birinci çeşit bir oskülatör eğridir gerek ve yeter şart tamamıyla E_1^4 in timelike hiperdüzleminde yatar. Bu duruma bağlı olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.1.1:

$\alpha,\ E_1^4$ üzerinde Cartan çatılı bir null eğri olsun. O zaman α birinci çeşit oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart her s için üçüncü eğriliği $k_3(s)$ sıfıra eşittir.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki $\alpha,\ E_1^4$ üzerinde birinci çeşit bir oskülatör eğri olsun. O zaman eğrinin konum vektörü $\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\vartheta(s)B_1(s)$ bağıntısıyla ifade edilir. (6.1) bağıntısının s ye göre türevi alınır ve (3.6) bağıntısı kullanılırsa $k_3(s)=0$ olduğu kolaylıkla bulunur.

Tersine, kabul edelim ki her bir s için $k_3(s)=0$ olsun. O zaman (3.6) bağıntısından $B_2(s)$ sabit bir vektör ve ayrıca $g(\alpha,B_2)$ nın sabit bir fonksiyon olduğu elde edilir. Böylece α nın konum vektörü

$$\alpha(s)=g(\alpha,B_1)T+g(\alpha,N)N+g(\alpha,T)B_1+g(\alpha,B_2)B_2$$

olarak tanımlanabilir ve $g(\alpha,B_2)$ sabit bir vektördür, bu da α nın birinci çeşit oskülatör eğriye denk olduğunu gösterir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Bir sonuç olarak aşağıdaki iki ifade kolaylıkla yazılabilir.

Sonuç 6.1.1:

E_1^4 üzerinde Cartan çatılı bir αnulleğrisi olsun. α , tamamıyla E_1^4 in timelike hiperdüzleminde yatar gerek ve yeter şart birinci çeşit bir oskülatör eğridir.

Sonuç 6.1.2:

E_1^4 üzerinde pseudo-yay parametresi s ile parametrelendirilmiş Cartan çatılı bir null α eğrisi olsun. O zaman α birinci çeşit oskülatör eğridir gerek ve yeter şart eğrinin konum vektörü aşağıdaki forma sahiptir

$$\alpha(s) = \big(\vartheta(s)k_2(s) - \vartheta''(s)\big)T(s) + \vartheta'(s)N(s) + \vartheta(s)B_1(s)\ .$$

Burada, $\vartheta(s) = g(\alpha(s), T(s)) \neq 0$ keyfi bir diferensiyel denklemdir, bu denklem

$$\vartheta'''(s) - 2\vartheta' k_2(s) - \vartheta(s)k_2'(s) + 1 = 0$$

olarak ifade edilir.

6.2. İkinci Çeşit Null Oskülatör Eğriler:

Bu bölümde, kendi konum vektörleri ve eğrilik fonksiyonlarının bileşenlerini kullanarak tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan ikinci çeşit null oskülatör eğrileri karakterize edeceğiz. α, pseudo-yay parametresi s ile parametrelendirilmiş ve her bir s için üçüncü eğriliği $k_3(s) \neq 0$ olan E_1^4 üzerinde ikinci çeşit bir null oskülatör eğri olsun. O zaman ikinci eğriliği $k_2(s)$ sıfıra eşit olabilir ya da sıfırdan farklı olabilir. Bu nedenle iki durum göz önüne alınır:

(A) $k_2(s) = 0$ ve (B) $k_2(s) \neq 0$ dır.

Durum (A):

$k_2(s) = 0$ olsun.

(6.2) bağıntısının s ye göre türevi alınarak ve (3.6) bağıntısı kullanılarak, burada $\lambda = g(\alpha, N)$, $\mu = g(\alpha, T)$ ve $\vartheta = g(\alpha, B_2)$ sırasıyla eğrinin konum vektörünün asli normal, tanjant ve ikinci binormal bileşeni olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \mu'(s) - \lambda(s) &= 0, \\ \lambda'(s) &= 0, \\ -\vartheta(s)k_3(s) &= 1, \\ \vartheta'(s) + \mu k_3(s) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

denklem sistemi elde edilir. (6.3) bağıntısının ikinci denkleminden $\lambda(s) = c \in R$ elde edilir. Böylece (A.1) $\lambda(s) = 0$ ve (A.2) $\lambda(s) = c \in R_0$ olacak şekilde iki alt duruma ayrılabilir:

(A.1) $\lambda(s) = 0$ olsun. Bu alt durumda, (6.3) ün ilk denklemi $\mu = g(\alpha, T)$ tanjant bileşeninin bir reel sabit olduğunu gösterir, böylece tekrar (A1.1) $\mu(s) = 0$ ve (A1.2) $\mu(s) = a$, $a \in R_0$ olacak şekilde iki alt duruma daha ayrılabilir:

(A1.1) $\mu(s) = 0$ olsun. Bu alt durumda konum vektörünün tanjant bileşeni sıfır olan E_1^4 üzerindeki null eğrinin ikinci çeşit oskülatör eğri olması için gerekli ve yeterli durumların verildiği aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 6.2.1:

α , E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş, $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli Cartan çatılı bir null eğri olsun. Eğer α, tanjant bileşeni $g(\alpha, T) = 0$ olan ikinci çeşit bir oskülatör eğri ise o zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) Üçüncü eğriliği $k_3(s)$ sıfırdan farklı bir sabittir.

(ii) α , $S_1^3(r)$, $r \in R_0^+$ pseudo küresi üzerinde yatar.

(iii) Eğrinin konum vektörünün ikinci binormal bileşeni $g(\alpha, B_2)$ sıfırdan farklı bir sabittir.

Tersine, eğer α, E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş, $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli Cartan çatılı bir null eğri ve (i), (ii) ya da (iii) ifadelerinden birisi sağlanırsa α bir ikinci çeşit oskülatör eğridir.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki α, tanjant bileşeni $g(\alpha, T) = 0$ olan ikinci çeşit bir oskülatör eğri olsun. (6.3) denklem sistemi kullanılarak

$$\lambda(s) = 0 \ , \quad -\vartheta(s)k_3(s) = 1 \ , \quad \vartheta'(s) = 0$$

elde edilir.

Buradan $\vartheta(s) = c \in R_0$ ve böylece $k_3(s) = \frac{-1}{c}$ =sabit olduğu bulunur, bu da (i) ifadesini ispatlar. Buradan eğrinin konum vektörü

$$\alpha(s) = cB_2 \ , c \in R_0$$

olarak verilir. Böylece kolaylıkla $g(\alpha, \alpha) = c^2$, $g(\alpha, B_2) = c$ olduğu elde edilir, bu da (ii) ve (iii) ifadelerini ispatlar.

Tersine, kabul edelim ki (i) ifadesi sağlansın. $k_3(s) = c$, $c \in R_0$ ve (3.6) bağıntısını kullanarak

$$\frac{d}{ds}\left(\alpha + \frac{1}{c}B_2\right) = 0$$

olduğu bulunur. Böylece α, ikinci çeşit null oskülatör eğriye denktir. (ii) ifadesi sağlansın. Buradan, $g(\alpha, \alpha) = r^2$, $r \in R_0^+$ denkleminin üç defa s ye göre türevi alınarak ve (3.6) Frenet denklemleri kullanılarak $g(\alpha, B_1) = 0$ olduğu elde edilir, bu da α nın ikinci çeşit oskülatör eğri olduğu anlamına gelir. Eğer (iii) ifadesi sağlanırsa, $g(\alpha, B_2)$ =sabit$\neq 0$ denkleminin s ye göre türevi alınarak ve (3.6) bağıntısı kullanılarak $g(\alpha, B_1) = 0$ olduğu bulunur, bu da teoremi ispatlar.

(A1.2) $\mu(s) = a$, $a \in R_0$ olsun. Bu alt durumda, Teorem 6.2.1 in sağlandığı gibi aynı yolla ispatlanabilen aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 6.2.2:

α , E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş, $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli Cartan çatılı bir null eğri olsun. Eğer α, tanjant bilşeni $g(\alpha, T) = a \in R_0$ olan ikinci çeşit bir oskülatör eğri ise, o zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) Üçüncü eğrilik $k_3(s)$

$k_3(s) = \frac{1}{\sqrt{2as+b}}$, $a \in R_0$, $b \in R$ eşitliğiyle verilir.

(ii) Eğrinin konum vektörünün asli normal bileşeni sıfırdır, yani; $g(\alpha, N) = 0$ dır.

(iii) Uzunluk fonksiyonu $\rho = \|\alpha\|$, $\rho^2 = |c_1 s + c_2|$, $c_1 \in R_0$, $c_2 \in R$ olarak ifade edilir.

Tersine, eğer α, E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş, $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli Cartan çatılı bir null eğri ve (i), (ii) ya da (iii) ifadelerinden biri sağlanırsa, o zaman α ikinci çeşit bir oskülatör eğridir.

(A.2) $\lambda(s) = c \in R_0$ olsun. Bu alt durumda, konum vektörünün asli normal bileşeni sabit olan E_1^4 üzerindeki null eğrinin ikinci çeşit oskülatör eğri olması için gerekli ve yeterli durumların verildiği aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.2.3:

α , E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş, $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli Cartan çatılı bir null eğri olsun. Eğer α , asli normal bileşeni $g(\alpha, N) = c \in R_0$ olan ikinci çeşit bir oskülatör eğri ise, o zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) Üçüncü eğrilik $k_3(s)$,

$k_3(s) = \frac{1}{\sqrt{as^2+bs+c}}$, $a \in R_0$, $b \in R$ ile verilir.

(ii) Eğrinin konum vektörünün tanjant bileşeni

$g(\alpha, T) = as + b$, $a \in R_0$, $b \in R$ ile verilir.

(iii) Uzunluk fonksiyonu $\rho = \|\alpha\|$, $\rho^2 = |ds^2 + es + f|$, $d \in R_0$, $e, f \in R$ olarak ifade edilir.

Tersine, eğer α , E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş, $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli bir null Cartan eğri ve (i), (ii) ya da (iii) ifadelerinden biri sağlanırsa, o zaman α ikinci çeşit bir oskülatör eğridir.

Teorem 6.2.3 ün ispatı, Teorem 6.2.1 in ispatıyla aynıdır.

Durum (B):

$k_2(s) \neq 0$ olsun.

(6.2) bağıntısının s ye göre türevi alınıp ve (3.6) bağıntısı kullanılarak,

$$\left.\begin{aligned} \lambda k_2 - \vartheta k_3 &= 1, \\ \lambda' &= \mu k_2, \\ \mu' &= \lambda, \\ \vartheta' + \mu k_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

denklem sistemi elde edilir. (6.4) bağıntısının ilk ve son denklemleri kullanılarak,

$$\left(\frac{\lambda k_2 - 1}{k_3}\right)' + \mu k_3 = 0$$

elde edilir. (6.4) bağıntısının ikinci ve üçüncü denklemleri kullanılarak,

$$\mu' \left(\frac{k_2}{k_3}\right)' + \frac{\mu(k_2^2 + k_3^2)}{k_3} - \left(\frac{1}{k_3}\right)' = 0 \tag{6.5}$$

diferensiyel denklem ortaya çıkar.

O zaman iki alt durum elde edilir. (B.1) $\left(\frac{k_2}{k_3}\right)' = 0$ ve (B.2) $\left(\frac{k_2}{k_3}\right)' \neq 0$

(B.1) $\left(\frac{k_2}{k_3}\right)' = 0$ olsun. $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilik fonksiyonlarının oranı bir sabittir, yani; $\frac{k_2(s)}{k_3(s)} = a \in R_0$ dır, böylece yine iki alt durumla karşılaşılır: (B.1.1) $k_3(s) = c \in R_0$ ve (B.1.2) $k_3(s) \neq$sabit .

(B.1.1) $k_3(s) = c \in R_0$ olsun. O zaman $k_3(s) = a.c \in R_0$ dır, bu da α nın bir null helis olduğu anlamına gelir. Ayrıca (6.6) bağıntısı $c\mu(s)(a^2+1) = 0$ şeklinde olur.

Son denklem, tanjant bileşeninin $\mu = 0$ olduğunu gösterir. Aynı yolla, aşağıdaki gibi ikinci çeşit null oskülatör helisler karakterize edilir.

Teorem 6.2.4:

α, E_1^4 üzerinde Cartan çatılı bir null helis olsun. O zaman α, tanjant bileşeni $g(\alpha, T) = 0$ olan ikinci çeşit bir oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart α, E_1^4 üzerinde bir $S_1^3(r)$ pseudo küresi üzerinde yatar.

Teorem 6.2.1 in ispatına benzerliğinden dolayı bu teoremin ispatı verilmeyecek.

(B.1.2) $k_3(s)$ ≠sabit olsun. Bu alt durumda aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 6.2.5:

α , E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş ve $k_1(s) = 1$, $k_2(s) = ak_3(s)$, $a \in R_0$ ve $k_3(s)$ ≠sabit eğrilikli Cartan çatılı bir null eğri olsun. O zaman α ikinci çeşit bir oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart üçüncü eğriliği $k_3(s)$,

$$9k_3''(s)k'(s)k_3(s) - k_3'''(s)k_3^2(s) - 12\left(k_3'(s)\right)^3 + ak_3'(s)k_3^3(s) = 0, \ a \in R_0 \quad (6.6)$$

diferensiyel denklemi ile ifade edilir.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki, α ikinci çeşit oskülatör eğriye denk olsun. (6.6) bağıntısı kullanılarak,

$$\mu = \frac{k_3'}{k_3^3(a^2+1)} \tag{6.7}$$

elde edilir.

Daha sonra, (6.7) bağıntısı ve (6.4) bağıntısının üçüncü denklemi kullanılarak,

$$\lambda = \frac{3(k_3')^2 - k_3''k_3}{k_3^4(a^2+1)} \tag{6.8}$$

elde edilir. (6.4) bağıntısının birinci denkleminde (6.8) bağıntısı yerine yazılırsa,

$$\vartheta = \frac{a\left(3(k_3')^2 - k_3''k_3\right) - k_3^3(a^2+1)}{k_3^4(a^2+1)} \tag{6.9}$$

elde edilir.

Aynı yolla, α konum vektörünün bütün bileşenleri $k_3(s)$ üçüncü eğriliğine bağlı olarak ifade edilir. Bundan başka, (6.7), (6.8) ve (6.4) bağıntısının ikinci denklemi kullanılarak $k_3(s)$ in (6.6) bağıntısını sağladığı bulunur.

Tersine, kabul edelim ki $k_3(s)$ üçüncü eğriliği (6.6) bağıntısını sağlasın. $X \in E_1^4$ vektörü aşağıdaki eşitlikle verilsin:

$$X = \alpha - \frac{3(k_3')^2 - k_3''k_3}{k_3^4(a^2+1)} N + \frac{k_3'}{k_3^3(a^2+1)} B_1 - \frac{a\left(3(k_3')^2 - k_3''k_3\right) - k_3^3(a^2+1)}{k_3^4(a^2+1)} B_2.$$

(3.6) ve (6.6) bağıntıları kullanılarak $X' = 0$ olduğu bulunur, bu da X in sabit bir vektör olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak α ikinci çeşit oskülatör eğriye denktir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

(B.2) $\left(\frac{k_2}{k_3}\right)' \neq 0$ olsun. O zaman $\frac{k_2}{k_3} \neq 0$ dır. Böylece iki alt durum ile karşılaşılır:

(B.2.1) $k_2 \neq$sabit , $k_3 =$sabit$\neq 0$ ve (B.2.2) $k_2 \neq 0$, $k_3 \neq$sabit

(B.2.1) k_2 ≠sabit , k_3 =sabit≠ 0 olsun. Bu alt durumda Teorem 6.2.5 gibi aynı yolla ispatlanabilen aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 6.2.6:

α, E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş ve $k_1(s) = 1$, $k_2(s)$ ≠sabit ve $k_3(s) = a \in R_0$ eğrilikli bir Cartan çatılı null eğri olsun. O zaman α ikinci çeşit bir oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart ikinci eğriliği $k_2(s)$,

$$(k_2^2(s) + a^2)k_2''(s) - 3k_2(s)\big(k_2'(s)\big)^2 + (k_2^2(s) + a^2)^2 = 0 \qquad (6.10)$$

diferensiyel denklemi ile ifade edilir.

(B.2.2) $k_2 \neq 0$, k_3 ≠sabit olsun. Bu son durumda da aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 6.2.7:

α, E_1^4 üzerinde s pseudo yayı ile parametrelendirilmiş ve $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s)$ ≠sabit eğrilikli Cartan çatılı bir null eğri olsun. O zaman α ikinci çeşit bir oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilik fonksiyonları aşağıdaki bağıntılarla ifade edilir.

$$e^{-\int p(s)ds}\Big(c + \int q(s)e^{\int p(s)ds}ds\Big) = \frac{p(s)q(s) - q'(s)}{p^2(s) - p'(s) - k_2(s)} \ , \ c \in R$$

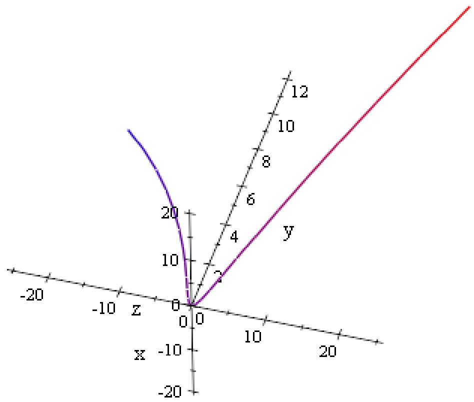
burada $p(s) = \frac{k_3(s)\left(k_2^2(s) + k_3^2(s)\right)}{k_2'(s)k_3(s) - k_2(s)k_3'(s)}$ ve $q(s) = \frac{k_3'(s)}{k_2'(s)k_3(s) - k_2(s)k_3'(s)}$ dır.

6.3. Minkowski Uzay- zamanda Null Oskülatör Eğrilere Bazı Örnekler:

E_1^4 üzerinde $\gamma(s) = \left(\frac{1}{6}s^3 + s, \frac{1}{2}s^2, \frac{1}{6}s^3, s\right)$ denklemiyle verilen null cubic eğrisi alınsın. Böylece eğrilik fonksiyonları da

$$k_1(s) = 1\,,\ k_2(s) = 0\,,\ \ k_3(s) = 0$$

olarak elde edilir. Teorem 6.1.1 den γ nın birinci çeşit oskülatör eğri olduğu bulunur.



Şekil 6.1. γ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

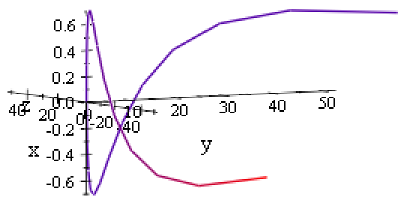
Null oskülatör eğrinin ikinci örneği olarak, E_1^4 üzerinde bu δ eğrisi

$$\delta(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}sinhs, \frac{1}{\sqrt{2}}coshs, \frac{1}{\sqrt{2}}sins, \frac{1}{\sqrt{2}}coss\right)$$

denklemiyle düşünülsün. δ nın eğrilik fonksiyonları da

$$k_1(s) = 1\,,\ k_2(s) = 0\,,\ \ k_3(s) = -1$$

olarak kolaylıkla elde edilir. Böylece, δ pseudoküre üzerinde yatan bir null helistir. Teorem 6.2.4 e göre δ, ikinci çeşit bir oskülatör eğridir.

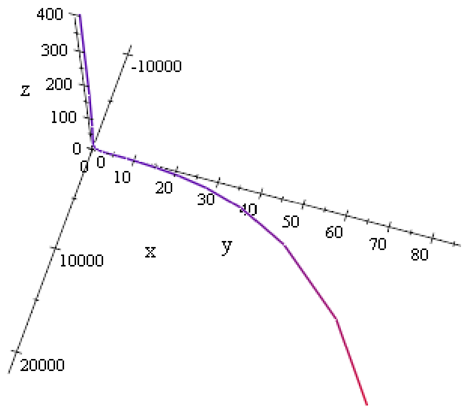


Şekil 6.2. δ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Başka bir örnek olarak, E_1^4 üzerinde $a, c \in R_0$ olmak üzere,

$$\theta(s) = \left(e^{as} + \frac{1}{c}\cos(cs) - \frac{1}{2a^2}e^{-as}, e^{as} + \frac{1}{c}cos(cs), \frac{1}{2a^2}e^{-as} - \frac{1}{c}cos(cs), \frac{1}{c}sin(cs)\right)$$

denklemiyle verilen null eğri alınsın. Böylece $T(s) = \theta'(s)$ olan tanjant vektörünün $g(\theta, T) = 0$ denklemini sağladığı gösterilebilir. Teorem 6.2.2 den dolayı bu θ nın ikinci çeşit oskülatör eğriye bir örnek olduğu ifade edilir. Burada $a = 2$ ve $c = 2$ alınarak aşağıdaki grafik elde edilir.



Şekil 6.3. δ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

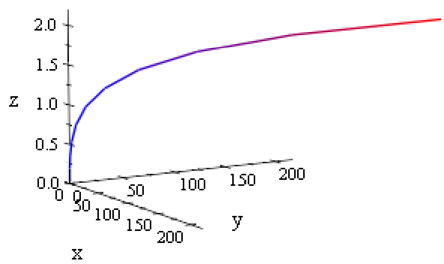
Son olarak, E_1^4 üzerinde s bir pseudo yay parametresi olmak üzere,

$$\mu(s)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{56}}\left(\frac{s^{2+\frac{3\sqrt{6}}{2}}}{2+\frac{3\sqrt{6}}{2}}+\frac{s^{2-\frac{3\sqrt{6}}{2}}}{2-\frac{3\sqrt{6}}{2}}\right),\frac{1}{\sqrt{56}}\left(\frac{s^{2+\frac{3\sqrt{6}}{2}}}{2+\frac{3\sqrt{6}}{2}}-\frac{s^{2-\frac{3\sqrt{6}}{2}}}{2-\frac{3\sqrt{6}}{2}}\right), \\ \frac{2s^2}{9\sqrt{14}}\left(2cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(s)\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(s)\right)\right), \\ \frac{2s^2}{9\sqrt{14}}\left(2sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(s)\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}ln(s)\right)\right) \end{pmatrix}$$

denklemiyle verilen null eğri düşünülsün. Burada, μ nün eğrilik fonksiyonları

$$k_1(s)=1\,,\,k_2(s)=\frac{6}{s^2}\,,\;\;k_3(s)=\frac{6}{as^2}$$

olarak bulunur. Ayrıca, bu eğrilik fonksiyonlarının (6.6) bağıntısını sağladığı kolaylıkla elde edilir. Teorem 6.2.7 ye göre, μ nün ikinci çeşit bir oskülatör eğriye denk olduğu bulunur.



Şekil 6.4. μ eğrisinin $x_4=0$ uzayına dik izdüşümü

7. MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA PARTİALLY NULL VE PSEUDO NULL OSKÜLATÖR EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde, Minkowski uzay-zamanda partially null ve pseudo null bir α eğrisinin konum vektörünün her zaman kendi oskülatör uzayında yatması için hangi şartları sağlaması gerektiğini ifade edeceğiz. Bu bölüm için ana kaynağımız İlarslan ve Nesovic (2011) tarafından yapılan çalışma olacaktır [15].

$\alpha, \{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısı boyunca, sırasıyla tanjant, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarından ibaret olan E_1^4 üzerinde bir eğri olsun.

Tekrar ifade edilirse, keyfi bir α eğrisi E_1^4 üzerinde, eğer konum vektörü (seçilen orijine bağlı olarak) daima sırasıyla ortogonal bileşenleri $B_2^{\perp}$ ya da $B_1^{\perp}$ üzerinde yatıyorsa birinci ya da ikinci çeşit oskülatör eğri olarak adlandırılır.

Eğer α birinci çeşit partially null oskülatör eğri ise,o zaman konum vektörü $g\big(\alpha(s), B_2(s)\big) = 0$ olarak ifade edilir. Bu durumda, birinci çeşit partially null oskülatör eğrinin konum vektörü $\lambda(s) = g(\alpha, T)$ ve $\mu(s) = g(\alpha, N)$ yay uzunluğu fonksiyonu s üzerinde keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki denklemle verilir:

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) \tag{7.1}$$

Ayrıcı, eğer α ikinci çeşit partially null oskülatör eğri ise, o zaman konum vektörü $g\big(\alpha(s), B_1(s)\big) = 0$ denklemi ile ifade edilir. Sonuç olarak, ikinci çeşit partially null oskülatör eğrinin konum vektörü, $\lambda(s) = g(\alpha, T)$, $\mu(s) = g(\alpha, N)$ ve $\vartheta(s) = g(\alpha, B_2)$ yay uzunluğu fonksiyonu s üzerinde keyfi diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \vartheta(s)B_1(s) \tag{7.2}$$

bağıntısı ile ifade edilir.

Eğer α pseudo null eğri ise, $B_2^{\perp}$ ortogonal bileşeni $\{T, B_1, B_2\}$ tarafından gerilen E_1^4 in bir lightlike (dejenere) hiperdüzlemidir ve $B_1^{\perp}$ de $\{T, N, B_2\}$ tarafından gerilen E_1^4 in bir non-dejenere hiperdüzlemidir. Sonuç olarak, sırasıyla birinci çeşit ve ikinci çeşit pseudo null oskülatör eğrinin konum vektörü $\lambda(s), \mu(s)$ ve $\vartheta(s)$ yay uzunluğu fonksiyonu s üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki denklemlerle ifade edilir:

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s) + \vartheta(s)B_2(s) \tag{7.3}$$

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \vartheta(s)B_2(s) \tag{7.4}$$

7.1. Birinci Çeşit Partially Null Oskülatör Eğriler:

Partially null düz doğrular, birinci çeşit partially null oskülatör eğrilerin basit örnekleridir. Aşağıdaki teoremde, E_1^4 üzerinde her düzlemsel partially null eğrinin birinci çeşit partially null oskülatör eğri olduğu gösterilecek.

Teorem 7.1.1:

α , E_1^4 üzerinde birinci eğriliği $k_1(s) \neq 0$ olan birim hızlı bir partially null eğri olsun. O zaman α birinci çeşit oskülatör eğridir gerek ve yeter şart her s için ikinci eğriliği $k_2(s) = 0$ dır.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki α birinci çeşit partially null oskülatör eğri olsun. O zaman eğrinin konum vektörü (7.1) bağıntısı ile ifade edilir. (7.1) bağıntısının s ye göre türevi alınır ve (3.4) Frenet denklemleri kullanılarak

$$\left.\begin{array}{c} \lambda(s) - \mu(s)k_1(s) = 1, \\ \mu'(s) + \lambda(s)k_1(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0. \end{array}\right\} \tag{7.5}$$

denklem sistemi elde edilir. (7.5) denklem sisteminin üçüncü denklemi $\mu(s) = 0$ ya da $k_2(s) = 0$ olduğunu gösterir. Eğer $\mu(s) = 0$ ise (7.5) bağıntıları ile bir çelişki elde edilir. Bu yüzden $\mu(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ dır.

Tersine, kabul edelim ki her s için $k_2(s) = 0$ olsun. (3.4) Frenet denklemleri kullanılarak, $\alpha'(s) = T(s)$, $\alpha''(s) = k_1(s)N(s)$, $\alpha'''(s) = k_1'(s)N(s) - k_1^2(s)T(s)$ eşitlikleri elde edilir. Böylece, α nın bütün yüksek mertebeden türevleri T ve N vektörlerinin lineer birleşimidir. α için Maclaurin eşitliği,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)s + \alpha''(0)\frac{s^2}{2!} + \alpha'''(0)\frac{s^3}{3!} + \cdots$$

olarak verilir, $\{T, N\}$ tarafından gerilen spacelike 2-uzayı üzerinde tamamen yattığı kanısına varılır. Böylece, eğrinin konum vektörü (7.1) bağıntısı ile ifade edilir, bu da teoremi ispatlar.

Teorem 7.1.2:

α, E_1^4 üzerinde birinci eğriliği $k_1(s) \neq 0$ olan birim hızlı bir partially null eğri olsun. O zaman α birinci çeşit oskülatör eğridir gerek ve yeter şart eğrinin konum vektörü,

$$\alpha(s) = -\frac{\mu'(s)}{k_1(s)} T(s) + \mu(s)\, N(s) \tag{7.6}$$

ile verilir, burada $\mu(s) \neq 0$ ve

$$\mu''(s)k_1(s) - \mu'(s)k_1'(s) + \mu(s)k_1^3(s) + k_1^2(s) = 0 \tag{7.7}$$

diferensiyel denklemi ile ifade edilen keyfi bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki α birinci çeşit partially null oskülatör eğri olsun. Teorem 7.1.1 in ispatından dolayı, $\mu(s) \neq 0$ olmak üzere (7.5) bağıntısı sağlanır. (7.5) bağıntısının ikinci denkleminden,

$$\lambda(s) = -\frac{\mu'(s)}{k_1(s)} \tag{7.8}$$

elde edilir. (7.1) bağıntısında (7.8) denklemi yerine yazılırsa, α nın konum vektörü (7.6) deki gibi elde edilir. Ayrıca, (7.5) nin birinci ve ikinci denklemleri kullanılarak $\mu(s)$ fonksiyonunun (7.7) bağıntısı gibi ifade edildiği kolaylıkla elde edilir.

Tersine, α partially null eğrisinin konum vektörü (7.6) bağıntısı ile ifade edilsin, kolaylıkla $g\big(\alpha(s), B_2(s)\big) = 0$ olduğu bulunur, bu da α nın birinci çeşit partially null oskülatör eğri olduğu anlamına gelir. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Açıkça, (7.7) diferensiyel denkleminin çözümü, birinci eğrilik $k_1(s)$in denklemine bağlıdır. Teorem 7.1.1 den her birinci çeşit partially null α oskülatör eğrisi tamamıyla E_1^4 in spacelike 2-uzayında yatar, böylece birinci eğrilik $k_1(s)$ in bilinen denklemi ile verilen eğrinin parametrik denkleminin determinantını elde etmek mümkündür. E_1^4 e izometrik olan α nın parametrik denklemi

$$\alpha(s) = \int_0^s T(s)ds + C = \int_0^s \frac{1}{k_1(\phi)}(cos\phi e_2 + sin\phi e_3)d\phi + C$$

olarak yazılabilir, burada $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $k_1(s) = \phi'(s)$, $C \in E_1^4$ sabit vektör ve $\phi(s)$, spacelike $T(s)$ ve e_2 vektörleri arasındaki açıdır.

Örnek 7.1.1:

E_1^4 üzerinde

$$\sigma(s) = \left(0, \sqrt{2s}sin\left(\sqrt{2s}\right) + \cos\left(\sqrt{2s}\right), \sin\left(\sqrt{2s}\right) - \sqrt{2s}\cos\left(\sqrt{2s}\right), 0\right)$$

denklemiyle verilen partially null eğrisini düşünelim. (3.4) Frenet denklemlerini kullanarak, σ nın Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$T(s) = \left(0, cos\left(\sqrt{2s}\right), sin\left(\sqrt{2s}\right), 0\right)$$

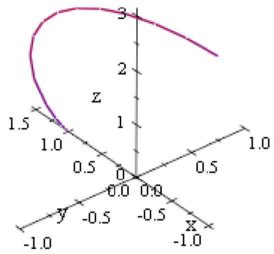
$$N(s) = \left(0, -sin\left(\sqrt{2s}\right), cos\left(\sqrt{2s}\right), 0\right)$$

$$B_1(s) = (1,0,0,1)$$

$$B_2(s) = \left(-\frac{1}{2}, 0,0, \frac{1}{2}\right)$$

$$k_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}}, k_2(s) = k_3(s) = 0$$

olarak bulunur. Özellikle, (7.7) bağıntısını kullanılarak $\mu(s) = -\sqrt{2s}$ olarak elde edilir. σ nın grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 7.1. σ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Teorem 7.1.2 ye göre σ nın konum vektörü

$$\sigma(s) = T(s) - \sqrt{2s}N(s)$$

olarak yazılabilir. Son denklemden $g\big(\sigma(s), B_2(s)\big) = 0$ olduğu elde edilir, bu da σ nın birinci çeşit partially null oskülatör eğri olduğu anlamına gelir.

Tekrar ifade edilirse, E_1^4 üzerinde keyfi α eğrisi, konum vektörü, seçilen orijine bağlı olarak daima bu eğrinin T tanjant vektör alanının (N asli normal vektör alanının) ortogonal bileşeni üzerinde yatar ise, normal eğri (rektifiyen eğri) olarak adlandırılır. Sonraki teorem, birinci çeşit partially null eğriler ve partially null normal eğriler arasındaki basit bağıntıyı verir.

Teorem 7.1.3:

Birinci eğriliği $k_1(s) \neq 0$ ve tanjant bileşeni $g(\alpha, T)$ sıfır olan birinci çeşit her partially null oskülatör eğri, partially null normal eğridir, bu nedenle bir çemberdir.

Bu teoremin ispatı, sadece E_1^4 üzerinde partially null rektifiyen eğrilerin, partially null düz doğru olmalarından açıktır. Böylece aşağıdaki teorem sağlanır.

7.2. İkinci Çeşit Partially Null Oskülatör Eğriler:

Bu bölümde, E_1^4 üzerinde her s için $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ eğrilik fonksiyonları ile ikinci çeşit partially null oskülatör eğriler karakterize edilecek. Aşağıdaki teorem, teorem 7.1.2 deki gibi benzer yolla ispat edilebileceğinden ispatı yapılmayacak.

Teorem 7.2.1:

α, E_1^4 üzerinde $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ eğrilikli birim hızlı partially null eğri olsun. O zaman, α ikinci çeşit oskülatör eğridir gerek ve yeter şart eğrinin konum vektörü,

$$\alpha(s) = -\frac{\mu'(s)}{k_1(s)}T(s) + \mu(s)N(s) - \int \mu(s)k_2(s)ds B_1(s) \tag{7.9}$$

denklemiyle verilir, burada $\mu(s) \neq 0$, (7.7) bağıntısı ile ifade edilen keyfi bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

Bir sonuç olarak, aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 7.2.2:

α , E_1^4 üzerinde $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ eğrilikli birim hızlı partially null eğri olsun. Eğer, α ikinci çeşit oskülatör eğri ise, o zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) Konum vektörünün sırasıyla tanjant ve asli normal bileşeni,

$$g(\alpha(s), T(s)) = -\frac{\mu'(s)}{k_1(s)} \quad , \quad g(\alpha(s), N(s)) = \mu(s)$$

olarak verilir, burada $\mu(s)$, (7.7) bağıntısında ifade edilen keyfi bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

(ii) Konum vektörünün sırasıyla tanjant ve ikinci binormal bileşeni,

$$g\big(\alpha(s), T(s)\big) = -\frac{\mu'(s)}{k_1(s)} \quad , \; g\big(\alpha(s), B_2(s)\big) = -\int \mu(s) k_2(s) ds$$

olarak verilir, burada $\mu(s)$, (7.7) bağıntısında ifade edilen keyfi bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

(iii) Konum vektörünün tanjant bileşeni ve uzaklık fonksiyonu $\rho(s) = \|\alpha(s)\|$, sırasıyla

$$g\big(\alpha(s), T(s)\big) = -\frac{\mu'(s)}{k_1(s)} \quad , \; \rho^2(s) = \frac{\mu'^2(s)}{k_1^2(s)} + \mu^2(s)$$

olarak verilir, burada $\mu(s)$, (7.7) bağıntısında ifade edilen keyfi bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

Tersine, eğer α, E_1^4 üzerinde $k_1(s) \neq 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ eğrilikli birim hızlı partially null eğri ve (i), (ii) ya da (iii) ifadelerinden biri sağlanırsa, o zaman α ikinci çeşit oskülatör eğridir.

İspat:

Kabul edelim ki α , ikinci çeşit partially null oskülatör eğri olsun. (7.9) bağıntısı kullanılarak, kolaylıkla (i), (ii) ve (iii) ifadelerinin sağlandığı elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (i) ifadesi sağlansın. $g(\alpha, N) = \mu$ bağıntısının s ye göre türevi alınarak ve (3.4) bağıntısı kullanılarak $g(\alpha, B_1) = 0$ olduğu elde edilir, bu da α nın ikinci çeşit oskülatör eğri olduğu anlamına gelir. Eğer (ii) ifadesi sağlanırsa, $g(\alpha, B_2) = -\int \mu k_2 ds$ denkleminin s ye göre iki defa türevi alınarak ve (3.4) bağıntısı kullanılarak $g(\alpha, B_1) = 0$ olduğu bulunur. Böylece α ikinci çeşit oskülatör eğridir. Son olarak (iii) ifadesi sağlanırsa, o zaman $g(\alpha, \alpha) = g(\alpha, T)^2 + \mu^2$ dir. Bu son denklemin s ye göre iki defa türevi alınarak ve (3.4) bağıntısı kullanılarak, $g(\alpha, B_1) = 0$ olduğu elde edilir, bu da teoremin ispatını tamamlar.

Aşağıdaki teorem, ikinci çeşit partially null oskülatör eğriler ve partially null normal eğriler arasındaki basit bağıntıyı verir.

Örnek 7.2.1:

$\varphi(s) = \left(s, s, \frac{1}{c}\cos(cs), \frac{1}{c}\sin(\mathrm{cs})\right)$, $c \in R_0^+$ denklemiyle verilen partially null helisi düşünülsün. φ nın Frenet vektörleri ve eğrilikleri

$$T(s) = \big(1,1, -sin(cs), cos(cs)\big) ,$$

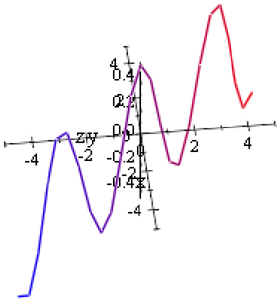
$$N(s) = \big(0,0, -cos(cs), -sin(cs)\big) ,$$

$$B_1(s) = (c, c, 0,0) ,$$

$$B_2(s) = \left(-\frac{1}{c}, 0, \frac{1}{c} sin(cs), -\frac{1}{c} cos(cs)\right),$$

$$k_1(s) = c \ , k_2(s) = 1 \ , k_3(s) = 0 \ , c \in R_0^+$$

denklemleriyle verildiği bulunur. Bununla kolaylıkla $g\big(\varphi(s), B_1(s)\big) = 0$ olduğu ifade edilebilir, böylece φ ikinci çeşit partially null oskülatör eğridir.



Şekil 7.2. φ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

Üstelik, teorem 7.2.1 kullanılarak $\mu(s) = -\frac{1}{c}$ olduğu bulunur. Daha sonra, (7.9) bağıntısı ve teorem 7.2.1 den φ nın konum vektörü

$$\varphi(s) = -\frac{1}{c}N(s) + \frac{s}{c}B_1(s)$$

olarak yazılabilir.

Örnek 7.2.2:

$\omega(s) = \left(e^s, e^s, \frac{1}{c}cos(cs), \frac{1}{c}sin(cs)\right)$, $c \in R_0^+$ denklemiyle verilen partially null eğrisi düşünülsün. ω nın Frenet çatısı,

$$T(s) = \left(e^s, e^s, -sin(cs), cos(cs)\right),$$

$$N(s) = \frac{1}{c}\left(e^s, e^s, -ccos(cs), -csin(cs)\right),$$

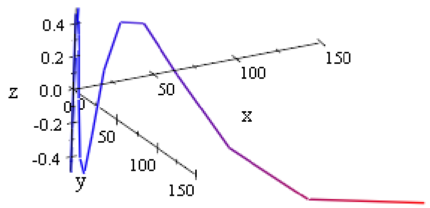
$$B_1(s) = \frac{1+c^2}{c}(1,1,0,0),$$

$$B_2(s)=\left(-\frac{e^{2s}}{2c}-\frac{c}{2(1+c^2)},-\frac{e^{2s}}{2c}+\frac{c}{2(1+c^2)},\frac{e^s}{1+c^2}\big(cos(cs)+csin(cs)\big),\frac{e^s}{1+c^2}\big(sin(cs)-ccos(cs)\big)\right)$$

olarak elde edilir, ayrıca eğrilik fonksiyonları da

$$k_1(s)=c\ ,\ k_2(s)=e^s\ ,\ k_3(s)=0\ ,\ c\in R_0^+$$

olarak verilir. Kolaylıkla $g\big(\omega(s),B_1(s)\big)=0$ olduğu gösterilebilir, bu da ω nın ikinci çeşit partially null oskülatör eğri olduğu anlamına gelir.



Şekil 7.3. ω eğrisinin $x_4=0$ uzayına dik izdüşümü

Özellikle, teorem 7.2.1 e göre ω nın konum vektörü de

$$\omega(s)=-\frac{1}{c}N(s)+\frac{e^s}{c}B_1(s)\ ,\ \ c\in R_0^+$$

olarak yazılabilir.

7.3. Birinci Çeşit Pseudo Null Oskülatör Eğriler:

$\alpha: I \to E_1^4$, $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ eğrilikli ve üçüncü eğriliği $k_3(s)$ sıfıra eşit ya da sıfırdan farklı olan birinci çeşit pseudo null oskülatör eğri olsun. Bu durumda, α nın konum vektörü (7.3) bağıntısı ile ifade edilir, (7.3) bağıntısının s ye göre türevi alınarak ve (3.5) Frenet denklemleri kullanılarak

$$\left.\begin{aligned} \lambda'(s) - \vartheta(s) = 1, \\ \vartheta'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s) + \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) - \vartheta(s)k_3(s) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

denklem sistemi bulunur. Buradan iki durum elde edilir:

(A) $k_3(s) = 0$ ve (B) $k_3(s) \neq 0$.

(A) $k_3(s) = 0$. Bu durumda (7.10) denklem sistemi

$$\left.\begin{aligned} \lambda(s) = 0, \\ \mu(s) = 0, \\ \vartheta(s) = -1, \\ \mu'(s) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

olur. (7.11) bağıntısı (7.3) bağıntısında yerine yazılırsa, α nın konum vektörü aşağıdaki denklem ile ifade edilir:

$$\alpha(s) = -B_2(s) \tag{7.12}$$

Bu yolla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 7.3.1:

α , tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) = 0$ eğrilikli pseudo null eğri olsun. Eğer α , birinci çeşit oskülatör eğri ise, o zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) Konum vektörünün tanjant bileşeni $g(\alpha, T)$ sıfırdır.

(ii) Konum vektörünün asli normal bileşeni $g(\alpha, N) = -1$ olarak verilir.

(iii) Konum vektörünün birinci binormal bileşeni $g(\alpha, B_1)$ sıfırdır.

(iv) α, bir light koni üzerinde yatar.

Tersine, eğer α, tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) = 0$ eğrilikli pseudo null eğri ve (i), (ii), (iii) ve (iv) ifadelerinden biri sağlanırsa, o zaman α ikinci çeşit oskülatör eğridir.

Teorem 7.3.1, teorem 7.2.2 gibi benzer yolla ispatlanabilir. Bu yüzden bu teoremin ispatı verilmeyecek.

Örnek 7.3.1:

$$\vartheta(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2c}}cosh(\sqrt{cs}), \frac{1}{\sqrt{2c}}sinh(\sqrt{cs}), \frac{1}{\sqrt{2c}}sin(\sqrt{cs}), -\frac{1}{\sqrt{2c}}cos(\sqrt{cs})\right),$$

$c \in R_0^+$

denklemiyle verilen pseudo null eğrisi düşünülsün. Buradan ϑ nın Frenet vektörleri

$$T(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}sinh(\sqrt{cs}), \frac{1}{\sqrt{2}}cosh(\sqrt{cs}), \frac{1}{\sqrt{2}}cos(\sqrt{cs}), \frac{1}{\sqrt{2}}sin(\sqrt{cs})\right),$$

$$N(s) = \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}cosh(\sqrt{c}), \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}sinh(\sqrt{c}), -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}sin(\sqrt{c}), \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}cos(\sqrt{c})\right),$$

$$B_1(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}sinh(\sqrt{cs}), \frac{1}{\sqrt{2}}cosh(\sqrt{cs}), -\frac{1}{\sqrt{2}}cos(\sqrt{cs}), -\frac{1}{\sqrt{2}}sin(\sqrt{cs})\right),$$

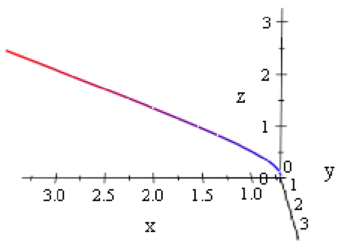
$B_2(s) =$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2c}}cosh(\sqrt{cs}), -\frac{1}{\sqrt{2c}}sinh(\sqrt{cs}), -\frac{1}{\sqrt{2c}}sin(\sqrt{cs}), \frac{1}{\sqrt{2c}}cos(\sqrt{cs})\right),$$

olarak elde edilir, eğrilik fonksiyonları da

$$k_1(s) = c\ , k_2(s) = e^s\ , k_3(s) = 0\ , c \in R_0^+$$

olarak verilir. Kolaylıkla $g(\vartheta(s), B_2(s)) = 0$ olduğu gösterilebilir, bu da ϑ nın birinci çeşit pseudo null oskülatör eğri olduğu anlamına gelir.



Şekil 7.4. ϑ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

(B) $k_3(s) \neq 0$. Bu durumda (7.12) denklem sistemi

$$\left.\begin{array}{c} (1 + k_3^2(s))\mu'(s) + k_3(s)k_3'(s)\mu(s) + k_3(s) = 0, \\ \lambda(s) = -k_3(s)\mu(s), \\ \vartheta'(s) = k_2(s)\mu(s), \\ \vartheta(s) = \frac{\mu'(s)}{k_3(s)} \end{array}\right\} \tag{7.13}$$

olur. (7.13) denklem sisteminin birinci denklemi, genel çözümü

$$\mu(s) = \frac{1}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}\left(c - \int \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}ds\right), \quad c \in R \tag{7.14}$$

olarak verilen lineer diferensiyel denklemidir. (7.13) ve (7.14) bağıntıları kullanılarak, aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 7.3.2:

α, tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli pseudo null eğri olsun. Eğer α birinci çeşit oskülatör eğri ise o zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) Konum vektörünün tanjant bileşeni,

$$g\big(\alpha(s), T(s)\big) = -\frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}\left(c - \int \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}ds\right), \quad c \in R$$

olarak verilir.

(ii) Konum vektörünün asli normal bileşeni,

$$g\big(\alpha(s), N(s)\big) = -\frac{1}{1+k_3^2(s)} - \frac{k_3'(s)}{\big(1+k_3^2(s)\big)^{\frac{3}{2}}}\left(c - \int \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}ds\right), \quad c \in R$$

olarak verilir.

(iii) Konum vektörünün birinci binormal bileşeni,

$$g\big(\alpha(s), B_1(s)\big) = \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}\left(c - \int \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}ds\right), \quad c \in R$$

olarak verilir.

Tersine, eğer α tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli pseudo null eğri ve (i), (ii) ve (iii) ifadelerinden biri sağlanırsa, o zaman α birinci çeşit oskülatör eğridir.

Teorem 7.3.3:

α, tamamıyla E_1^4 üzerinde yatan $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli pseudo null eğri olsun. O zaman α birinci çeşit oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilik fonksiyonları

$$3k_3(s)k_3'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}\left(c - \int \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}ds\right)\left[k_2(s)\left(1+k_3^2(s)\right)^2 - 3k_3(s)k_3'^2(s) + k_3''(s)\left(1+k_3^2(s)\right)\right], c \in R \quad (7.15)$$

diferensiyel denklemi ile ifade edilir.

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki, α birinci çeşit oskülatör eğriye denk olsun. Teorem 7.3.2 ve (7.13) denklem sisteminin üçüncü denklemi kullanılarak $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğriliklerinin (7.15) bağıntısı ile ifade edildiği bulunur.

Tersine, kabul edelim ki $k_2(s)$ ve $k_3(s)$ eğrilik fonksiyonları (7.15) bağıntısı ile ifade edilsin. $X(s) \in E_1^4$ vektörü ,

$$X(s) = \alpha(s) + \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}\left(c - \int \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}ds\right)T(s) - \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}\left(c - \int \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}ds\right)B_1(s) + \frac{1}{1+k_3^2(s)} - \frac{k_3'(s)}{\left(1+k_3^2(s)\right)^{\frac{3}{2}}}\left(c - \int \frac{k_3(s)}{\sqrt{1+k_3^2(s)}}ds\right)B_2(s)\ ,\ c \in R$$

olarak verilsin. (3.5) ve (7.15) bağıntıları kullanılarak, $X'(s) = 0$ olduğu bulunur. Sonuç olarak, $X(s)$, E_1^4 üzerinde bir sabit vektördür, bu da α nın birinci çeşit oskülatör eğriye denk olduğu anlamına gelir. Bu da teoremi ispatlar.

7.4. İkinci Çeşit Pseudo Null Oskülatör Eğriler:

α, E_1^4 üzerinde $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s)$, burada $k_3(s)$ sıfıra eşit ya da sıfırdan farklı olabilir, eğrilikli ikinci çeşit pseudo null oskülatör eğri olsun. (7.4) bağıntısının s ye göre türevi alınarak ve (3.5) Frenet denklemleri kullanılarak,

$$\left.\begin{array}{c} \lambda'(s) - \vartheta(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) - \vartheta(s)k_3(s) = 0, \\ \vartheta'(s) = 0, \end{array}\right\} \tag{7.16}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan da iki durumla karşılaşılabilir:

(A) $k_3(s) = 0$ ve (B) $k_3(s) \neq 0$.

(A) $k_3(s) = 0$ olsun. Bu durumda (7.16) denklem sistemi

$$\left.\begin{array}{c} \lambda(s) = 0, \\ \mu(s) = 0, \\ \vartheta(s) = -1, \\ \vartheta'(s) = 0, \end{array}\right\} \tag{7.17}$$

olarak bulunur. (7.4) bağıntısında (7.17) bağıntısı yerine yazılırsa, ikinci çeşit pseudo null oskülatör eğrinin konum vektörü

$$\alpha(s) = -B_2(s)$$

bağıntısı olarak bulunur, bu da (7.12) bağıntısına denktir. Bu yolla aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 7.4.1:

$k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$ ve $k_3(s) = 0$ eğrilikli her ikinci çeşit pseudo null oskülatör eğri, birinci çeşit pseudo null oskülatör eğridir ve bu karşılıklı olarak sağlanır.

(B) $k_3(s) \neq 0$ olsun. Bu durumda (7.16) denklem sisteminin son eşitliğinden $\vartheta \in R$ elde edilir.Eğer $\vartheta = 0$ ise (7.16) bağıntısı kullanılarak bir çelişki elde edilir. Bu durumda $\vartheta = c_0 \in R_0$ dır. Özellikle (7.16) bağıntısında $\vartheta = c_0$ yerine yazılırsa,

$$\left.\begin{aligned} \lambda(s) &= -c_0\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)', \\ \mu(s) &= c_0\frac{k_3(s)}{k_2(s)}, \\ \vartheta(s) &= c_0, \\ \lambda'(s) - c_0 &= 1, \end{aligned}\right\} \quad ,c_0 \in R_0 \qquad (7.18)$$

olarak bulunur. Bundan sonra, iki durumla karşılaşılabilir:

(B.1) $\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ =sabit ve

(B.2) $\frac{k_3(s)}{k_2(s)} \neq$sabit

(B.1) $\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = c_1 \in R_0$ olsun. O zaman (7.18) bağıntısından konum vektörü,

$$\alpha(s) = -c_1 N(s) - B_2(s), \quad c_1 \in R_0 \qquad (7.19)$$

olarak elde edilebilir. Böylece aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 7.4.2:

α, E_1^4 üzerinde $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli ve konum vektörünün tanjant bileşeni $g(\alpha, T)$ sıfır olan birim hızlı pseudo null eğri olsun. O zaman α, ikinci çeşit oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart üçüncü ve ikinci eğriliklerinin oranı sabit bir fonksiyondur,

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = c_1\ ,\ c_1 \in R_0 \qquad (7.20)$$

İspat:

Öncelikle kabul edelim ki, α ikinci çeşit oskülatör eğriye denk olsun. $g(\alpha, T) = 0$ olduğundan (7.18) bağıntısının ilk denklemi kullanılarak (7.20) bağıntısının sağlandığı elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki üçüncü ve ikinci eğrilikler (7.20) bağıntısını sağlasın.

$$X(s) = \alpha(s) + c_1 N(s) + B_2(s)\ ,\quad c_1 \in R_0$$

olarak verilen $X \in E_1^4$ vektörü alınsın. Bu bağıntının s ye göre türevi alınarak ve (3.5) bağıntısı kullanılarak $X'(s) = 0$ olduğu bulunur. Böylece X sabit bir vektördür, bu da α nın ikinci çeşit oskülatör eğriye denk olduğu anlamına gelir.

Örnek 7.4.1:

$\tau(s) = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{9}cosh(3s), \frac{1}{9}sinh(3s), sin(s), -cos(s)\right)$ denklemiyle verilen pseudo null eğrisi alınsın. τ nun Frenet çatısı,

$$T(s) = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{3}sinh(3s), \frac{1}{3}cosh(3s), cos(s), sin(s)\right),$$

$$N(s) = \frac{3}{\sqrt{10}}\left(cosh(3s), sinh(3s), -sin(s), cos(s)\right),$$

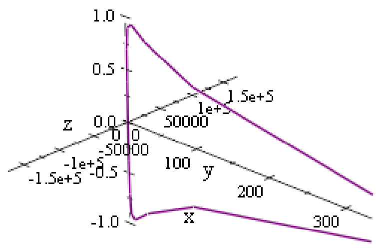
$$B_1(s) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3sinh(3s), 3cos(3s), -cos(s), -sin(s)\right),$$

$$B_2(s) = \frac{5}{3\sqrt{10}}\left(-cosh(3s), -sinh(3s), -sin(s), cos(s)\right)$$

olarak verilir. τ nun eğrilikleri

$$k_1(s) = 1, \; k_2(s) = 3, \; k_3(s) = \frac{4}{3}$$

olarak elde edilir.



Şekil 7.5. τ eğrisinin $x_4 = 0$ uzayına dik izdüşümü

$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \frac{4}{9}$ olduğundan, (7.21) bağıntısından konum vektörü

$$\tau(s) = -\frac{4}{9}N(s) - B_2(s)$$

olarak ifade edilir. Son denklem kullanılarak, $g\big(\tau(s), T(s)\big) = 0$ olduğu kolayca bulunur. Teorem 7.4.2 ye göre τ ikinci çeşit pseudo null oskülatör eğridir.

(B.2) $\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$ ≠sabit olsun. O zaman (7.18) bağıntısından α eğrisinin konum vektörü,

$$\alpha(s) = -c_0\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right)' T(s) + c_0\left(\frac{k_3(s)}{k_2(s)}\right) N(s) + c_0 B_2(s)\ ,\ \ c_0 \in R_0$$

olarak verilir. Bu durumda Teorem 7.4.2 deki gibi aynı yolla ispatlanabilen son teorem elde edilir.

Teorem 7.4.4:

α, E_1^4 üzerinde $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ eğrilikli ve konum vektörünün tanjant bileşeni $g(\alpha, T)$ sıfırdan farklı olan birim hızlı pseudo null eğri olsun. O zaman α ikinci çeşit oskülatör eğriye denktir gerek ve yeter şart $a, b, c \in R$ ve a, b ikisi birlikte sıfıra eşit olmamak üzere üçüncü ve ikinci eğriliklerin oranı,

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = as^2 + bs + c$$

bağıntısı ile ifade edilir.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

2003 yılında B.Y.Chen tarafından tanımlanan rektifiyen eğri kavramı daha sonra Minkowski 3-uzayında İlarslan .K. (2003) tarafından çalışılmıştır. İlarslan ve Nesovic (2008) rektifiyen eğri kavramı 4-boyutlu Öklid uzayında ve 4- boyutlu Minkowski uzay-zamanda tanımlamış ve detaylı bir şekilde çalışmışlardır. Yapılan bu tez çalışmasında yukarıda adı geçen yazarların çalışmalarına paralel olarak oskülatör eğri kavramı 4-boyutlu 1-indeksli Minkowski uzay-zamanda tekrar tanımlanarak bir pseudo null ve partially null eğrinin oskülatör eğri olma şartları elde edilmiştir. Elde edilen çalışmalar 01-05Temmuz 2013 tarihinde Ordu Üniversitesi tarafından düzenlenen XI. Geometri Sempozyumunda bir bildiri olarak sunulacak ve daha sonra yayınlanmak üzere hakemli bir dergiye sunulacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Bonnor, W.B., Null curves in a Minkowski space-time, Tensor 20 (1969), 29-242.

[2] Bonnor, W.B., Curves with null normals in Minkowski space-time, random talk in relativity and cosmology, Wiley Easten Limited, (1985), 33-47.

[3] Carmo, Perdigao do, M. Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-HallInc., Brazil, 1976.

[4] Chen, B.Y., When does the position vector of a space curve always lie in its rectifiying plane? , Amer. Math. Monthly, 2003.

[5] Chen, B.Y., Dillen F., Rectifiying curves as centrodes and extremal curves, Bull. Inst. Math. AcademiaSinica, 2005.

[6] Duggal, K.L. and Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds and Applications, Klower Academic Publishers , London , 1996.

[7] Hacısalihoğlu, H.H., Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara , 2000.

[8] Kuhnel, W., Differential Geometry Curves – Surfaces - Manifolds, Student Mathematical Library Volume 16, American Mathematical Society , 2006.

[9] Milman, R. S.,Elements of Differential Geometry, California State University, Prentice-HallInc. , California, 1977.

[10] O’Neill, B., Semi-RiemannianGeometrywith Applications toRelativity, AcademicPress , New York, 1983.

[11] Sabuncuoğlu, A., Diferensiyel Geometri , Nobel yayın dağıtım , Ankara, 2004.

[12] İlarslan, K., Nesovic, E.,Some characterizations of Osculating curves in the Euclidean Spaces, Demonstratio Mathematica, Vol.XLI (4), 931-939 (2008).

[13] İlarslan, K., Nesovic, E., The fist kind and second kind osculating curves in Minkowski space-time, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 62(6), 677-686 (2009).

[14] İlarslan,K., Nesovic, E., Some characterizations of null osculating curves in the Minkowski space-time, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 61(1), 1-8, (2012).

[15] İlarslan,K., Nesovic, E., Some characterizations of pseudo and partially null osculating curves in Minkowski space-time, Int.Electron. J. Geom. 4(2011), no.2, 1-12.

[16] İlarslan,K., Some special curves on non-Euclidean Manifolds, Doctoral Thesis, Ankara University, Graduate school of Natural and Applied Science, 2002.

[17] Bejancu, A., Lightlike curves in Lorentz Manifolds, Publ.Math.Debrecen, 44, (1996) no. f. 1-2, 145-155.

[18] İlarslan, K., Nesovic, E., Torgasev, Petrovic., Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space, Novi Sad J. Math, 2003

[19] O'Neill, B., Elementary Differential Geometry , Elsevier Inc., New York 2006.