KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

METRİK UZAYDA F-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI

Asuman HELVACI

OCAK 2014

Matematik Anabilim Dalında Asuman HELVACI tarafından hazırlanan METRİK UZAYDA F-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. İshak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Yrd. Doç. Hatice ASLAN HANÇER
Üye(Danışman)	: Doç. Dr. İshak ALTUN
Üye	: Yrd. Doç. Murat OLGUN

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. E. Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

METRİK UZAYDA F-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI

HELVACI, Asuman
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. İshak ALTUN
Ocak 2014, 45 sayfa

Bu tez çalışmasının giriş bölümünde sabit nokta teorinin kısa bir tarihi gelişimi ile bu teorinin önemi ve uygulamada nasıl kullanıldığı hakkında bir bilgi verilmiştir. Ardından materyal ve yöntem adı altında verilen ikinci bölümde, sabit nokta teorinin vazgeçilmez kavramı olan metrik uzay ile bu uzayın bazı temel kavramları göz önüne alınmıştır. Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda metrik uzayda büzülme dönüşümü, hemen hemen büzülme dönüşümü ve quasi büzülme dönüşümü kavramları detaylı bir şekilde incelenmiş, aralarındaki ilişkiler açıklanmış ve bu kavramların kullanıldığı bazı sabit nokta teoremleri ele alınmıştır. İkinci kısımda ise F-büzülme kavramı örneklerle incelenmiş, bilinen büzülme dönüşümlerinin F -büzülme dönüşümü olduğu vurgulanmış ve tam metrik uzayda her F -büzülme dönüşümünün tek sabit noktasının var olduğu gösterilmiştir. Yine burada tezin orijinal kısmını oluşturan Ciric tip genelleştirilmiş F -büzülme tanımı yapılmış ve bu yeni kavram kullanılarak bazı sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Son bölüm olan tartışma ve sonuç bölümünde, burada elde edilen sonuçların önemi ile bunların literatürdeki bazı sabit nokta teoremlerinin öz genelleştirmeleri olduğu vurgulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Tam Metrik Uzay, F-büzülmeler, Genelleştirilmiş F-Büzülmeler

ABSTRACT

FIXED POINT RESULTS FOR F-CONTRACTIONS ON METRIC SPACE

HELVACI, Asuman

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İshak ALTUN

January 2014, 45 pages

In the introduction section of this thesis, a brief history of the fixed point theory with the development and importance of this information is given about how to use the application. Then the second section under the name of materials and methods, the concepts of metric space, which is an indispensable concept of fixed point theory, and some basic properties of it are taken into consideration. The third section consist of two parts. In the first part, the concepts of contraction, almost contraction and quasi contraction mappings on metric space are detailed examined. Then the relationship between these concepts are explained and some fixed point theorems are considered. In the second part, the concept of F -contraction is examined with some examples. It is also highlighted that the ordinary contractions are F -contractions, then it has been shown that every F -contractions on complete metric space have a unique fixed point. Here again, it has been introduced the concept of Ciric type F -contraction, which is the original part of this thesis, and using this concept some fixed point theorems are obtained. In the discussion and conclusions section, which is the final section of this thesis, the significiance of the obtained results and they are proper generalizations of the fixed point results in the literature are emphasized.

Key Words: Fixed Point, Complete Metric Space, F -Contractions, Generalized F -Contractions.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımda bilgi ve desteğinden çokça yararlandığım değerli hocam Sayın Doç. Dr. İshak ALTUN'a, araştırma görevlisi arkadaşım Gülhan MINAK ve Gonca DURMAZ'a çalışmalarım esnasında benden desteğini ve ilgisini esirgemeyen sevgili aileme ve eşim Mustafa PELİT'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ özelliğini sağlayan $x \in X$ noktasına T nin bir sabit noktası denir. Yani, T dönüşümü altında değişmeyen bir nokta T nin sabit noktasıdır. Geometrik olarak reel değişkenli ve reel değerli bir dönüşümün sabit noktası, dönüşümün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktadır. Örneğin;

1) $X = [0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü $Tx = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlansın. O zaman 0, T nin bir sabit noktasıdır.
2) $X = \{a, b\}$ ve $T: X \to X$ dönüşümü $Ta = b$ ve $Tb = a$ şeklinde tanımlansın. O zaman T nin sabit noktası yoktur.
3) Ara değer teoreminin bir sonucu olarak sürekli her bir $T: [a, b] \to [a, b]$ dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir. Ancak sürekli olmayan bir T dönüşümü sabit noktaya sahip olmayabilir.

Sabit noktanın tanımında X kümesi veya T dönüşümü üzerinde hiçbir yapıya gerek olmadığı için, sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğunu araştırmaktadır. Dolayısıyla sabit nokta teori bir varlık teorisidir. Bu teoriler genellikle sabit noktanın ne olacağını belirtmemektedir. Ancak bazı sabit nokta teoremleri sabit noktanın varlığının yanı sıra tek olup olmadığını, tek ise nasıl bulunabileceğini de göstermektedir. Ayrıca sabit nokta teori matematiğin birçok dalı ile ilişkilidir ve halen üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Örneğin; nonlineer fonksiyonel analiz, optimizasyon teori, operatör teori ve genel topoloji bunlardan başlıcalarıdır.

Sabit nokta teori çalışmaları üç ana yönde gelişmektedir:

1) Topolojik Sabit Nokta Teori
2) Discrete Sabit Nokta Teori
3) Metrik Sabit Nokta Teori

Tarihsel olarak, bu üç ana alanlardaki sınır çizgileri, aşağıdaki üç ana teoremin keşfi ile belirlenmektedir:

1) Brouwer Sabit Nokta Teoremi
2) Tarski Sabit Nokta Teoremi
3) Banach Sabit Nokta Teoremi.

Topolojik Sabit Nokta Teori 1912 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer kendi adı ile alınan aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir:

Teorem 1. $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendisine tanımlı her sürekli dönüşümün sabit noktası vardır.

1909 yılında Brouwer bu teoremin ispatında 19. yüzyılın sonlarında eski bir problemin çözümü için ilk defa Poincare tarafından kullanılan yeni bir ispat yöntemini kullanmıştır ve $n = 3$ için teoremin ispatını yapmıştır. Daha sonra 1910 yılında Hadamart keyfi bir n için ilk ispatını vermiştir. Ardından 1912 yılında Brouwer farklı bir ispat vermiştir. Brouwer sabit nokta teoreminin reel eksende özel bir durumu şu şekildedir: $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ sürekli bir dönüşüm ise T nin bir sabit noktası vardır. Ayrıca Brouwer sabit nokta teoremi dönüşümün sabit noktasının tekliğini garanti etmemektedir. Örneğin $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ birim dönüşümünün sonsuz çoklukta sabit noktası vardır. Brouwer'ın bu teoreminin sonsuz boyutlu uzaylara genişletilmesi düşünülmüş fakat Kakutani bu teoremin sonsuz boyutlu uzaylarda geçerli olmadığını gösteren örnek vermiştir. Ancak yine de Brouwer sabit nokta teoremi bazı ek şartlarla birlikte 1930 yılımda Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara aşağıdaki şekilde genişletilmiştir:

Teorem 2. X bir Banach uzayı, C, X uzayının kompakt, konveks bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü C de en az bir sabit noktaya sahiptir.

Discrete sabit nokta teorisi çalışmaları 1955 yılında Tarski ile başlamıştır. $(X, \preccurlyeq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infimumu varsa $(X, \preccurlyeq)$ ikilisine bir latis (örgü) adı verilir.

Örneğin $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen sıralamaya göre bir latistir. Eğer bir latisin boş olmayan her A kümesi bir supremuma ve bir infimuma sahipse bu latise tam latis denir. Örneğin, $[0,1]$ kümesi bilinen sıralamaya göre bir tam latistir. $(X, \preccurlyeq)$ bir kısmi sıralı küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $Tx \preccurlyeq Ty$ oluyorsa, T ye azalmayan dönüşüm denir. Tarski kendi adı ile anılan aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 3. $(X, \preccurlyeq)$ bir tam latis, $T: X \to X$ azalmayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Bu teoremin, matematikte bulunan pek çok uygulamasının yanı sıra semantik programlama dil teorisinde de birçok uygulaması bulunmaktadır. Tam latis olan kısmi sıralı bir kümenin, üzerinde verilen bir metrik ile birlikte tam metrik uzay olmayabilir. Örneğin $X = [0,1/2) \cup \{1\}$ kümesi bilinen sıralama ile birlikte tam latis olmasına rağmen tam metrik uzay değildir. Tarski teoremine göre $T: [0,1] \to [0,1]$ azalmayan bir dönüşümün bir sabit noktası vardır. Burada T dönüşümünün sürekli olması gerekmez. O halde Bruower sabit nokta teoremi ile Tarski sabit nokta teoremi birbirinden bağımsızdır. Ayrıca Tarski sabit nokta teoremindeki T nin azalmayan dönüşüm olması şartı kaldırılamaz. Örneğin $x \in [0, \frac{1}{2})$ için $Tx = 1$ ve $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ için $Tx = 0$ şeklinde tanımlı $T: X \to X$ dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur.

Diğer taraftan metrik sabit nokta teorisi çalışmaları 19. yüzyılın sonlarına doğru denklemlerin özellikle diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği için kullanılan ardışık yaklaşımlar metodu ile başlamıştır. 1922 yılında Banach [14], soyut kavramlarla bu yaklaşımı geliştirmesine rağmen bu yaklaşım metodu özellikle Picard'ın çalışması ile ilişkilendirilir. Banach, literatürde büzülme dönüşümü prensibi olarak ta adlandırılan ve ilk defa tezinde açık olarak belirttiği aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir:

Teorem 4. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü olsun. Yani her $x, y \in X$ için

$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$

olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ var olsun. O zaman T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik X deki herhangi bir başlangıç noktasından elde edilen Picard iterasyon dizisi T nin sabit noktasına yakınsar.

Brouwer sabit nokta teoremi ile Banach sabit nokta teoreminin bazı benzerlikleri olsa da aslında birbirinden farklı iki teoremdir. Örneğin, $Tx = 1 - x$ ile tanımlı $T: [0,1] \to [0,1]$ dönüşümü için $k = 1$ olduğundan Banach sabit nokta teoremi gereğince sabit noktasının varlığı garanti edilmezken, T dönüşümü $[0,1]$ de sürekli olduğundan Brouwer sabit nokta teoremi gereğince en az bir sabit noktasının varlığı garanti edilmektedir. Aynı şekilde $Tx = \frac{x}{2}$ ile tanımlı $T: [0, \infty) \to [0, \infty)$ dönüşümü için Brouwer sabit nokta teoremi uygulanamaz iken, $k = \frac{1}{2}$ olduğundan Banach sabit nokta teoremi gereğince sabit noktası var ve tektir.

Metrik uzayda büzülme dönüşümü, farklı iki noktanın görüntüleri arasındaki uzaklığın bu noktalar arasındaki uzaklıktan daha küçük olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla her bir büzülme dönüşümü süreklidir. Büzülme dönüşüm prensibi, matematikte çok önemli problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği için iyi bir araçtır. Bu öneminden dolayı bu prensip çoğu araştırmacılar tarafından genişletilmiş ve genelleştirilmiştir. Bunların en önemlileri 1968 yılında Kannan; 1971 yılında Reich; 1974 yılında Ciric; 1976 yılında Caristi tarafından verilmiştir. Daha sonra, 2004 yılında Berinde; 2008 yılında Suzuki; 2012 yılında Samet ve arkadaşları tarafından genelleştirmeleri yapılmıştır.

2012 yılında Wardowski bir çalışmasında aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 5. (X, d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. $d(Tx, Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ var olsun. O zaman T nin tek bir sabit z noktası vardır. Üstelik her $x_0 \in X$ için $\{\mathrm{T}^{\mathrm{n}} x_0\}$ dizisi T nin bu sabit z noktasına yakınsar.

Bu tez çalışmasında, Wardowski'nin bu teoremi dikkate alınarak tam metrik uzaylarda bazı genel sabit nokta teoremleri elde edilmiştir.

1.1. Kaynak özetleri

Tezin hemen hemen tamamında kullanılan temel metrik ve topolojik kavramlar için Koçak'ın "Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar", Mucuk'un "Topoloji ve Kategori" ve Soykan'ın "Fonksiyonel Analiz" adlı kitaplarından yararlanılmıştır [1,2,3]. Üçüncü bölümün ilk kısmında metrik uzayda büzülme dönüşümü kavramı ve onun literatürde bulunan bazı genelleştirmeleri ile ilgili bilgileri Agarwal, O'Regan ve Sahu'nun "Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications" adlı kitabı, Granas ve Dugundji'nin "Fixed Point Theory" adlı kitabı ve Istratescu'nun "Fixed Point Theory an Introduction" adlı kitabı kaynak olarak göz önüne alınmıştır [4,5,6]. Yine bu kısımda bahsedilen metrik uzayda hemen hemen büzülme kavramı ile literatürde bulunan Banach, Kannan, Chatterjea gibi büzülmelerin, hemen hemen büzülmenin birer özel halleri olduğunu gösteren önermeler için Berinde'nin "Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration" ve "Iterative Approximation of Fixed Points" adlı makaleleri ile Pacurar'ın "Iterative Methods for Fixed Points Approximation" adlı kitabından yararlanılmıştır [7,8,9]. Yine metrik uzayda quasi büzülme ve bunun bazı özellikleri için Ciric'in "A generalization of Banach's contraction principle" adlı temel makalesi ile "Fixed Point Theory Contraction Mapping Principle" adlı kitabı kullanılmıştır [10,11]. Üçüncü bölümün ikinci kısmında F-büzülmeler ile tam metrik uzayda her F-büzülmenin sabit noktasının var ve tek olduğunu gösteren teorem için Wardowski'nin "Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces" adlı makalesi incelenmiştir [12]. Bundan yararlanarak tezin orijinal kısmında metrik uzayda Ciric tip genelleştirilmiş F-büzülme dönüşümü tanımlanmış ve bu tip dönüşümlerin tam metrik uzaylarda sabit noktasının varlığı ve tekliği ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Mınak, Helvacı ve Altun tarafından "Ciric type generalized F-contractions on complete metric spaces and fixed point results" adlı çalışmada ele alınmıştır [13].

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında, 2012 yılında Wardowski tarafından tanımlanan metrik uzayda F-büzülme kavramı göz önüne alınarak bunun bazı genelleştirmelerinin tanımlanması ve bazı sabit nokta sonuçlarının elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu düşünce ile metrik uzayda Ciric tip genelleştirilmiş F-büzülme kavramı tanımlanmış ve bu tip dönüşümlerin tam metrik uzayda sabit noktasının var ve tek olduğunu gösteren bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Metrik ve Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme olmak üzere $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.2. (X, d) herhangi bir metrik uzay olsun. Bir $x_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı açık yuvar,

$$D(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) = r\}$$

kümesine x_0 merkezli *r* yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.1.3. (X, d) bir metrik uzay ve U da X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine açıktır denir.

Tanım 2.1.4. Bir (X, d) metrik uzayında bir A alt kümesi için $X \backslash A$ açık ise A ya kapalı küme denir.

Önerme 2.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda

i) (X, d) içindeki her açık yuvar açıktır.
ii) (X, d) içindeki her kapalı yuvar kapalıdır.

Tanım 2.1.5. (X, d) bir metrik uzay, A ve B de X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b): a \in A, b \in B\}$$

sayısına *A* ve *B* kümeleri arasındaki uzaklık denir. $x \in X$ olmak üzere

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a): a \in A\}$$

sayısına *x* noktasının *A* kümesine olan uzaklığı,

$$d(A) = \sup\{d(a, b): a, b \in A\}$$

sayısına *A* kümesinin çapı denir.

Eğer $d(A) < \infty$ ise *A* kümesine sınırlı küme, eğer $d(A) = \infty$ ise *A* kümesine sınırsız küme denir.

Tanım 2.1.6. (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ olduğunda $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi *x* noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.2. Metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat. (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin $x, y \in X$ gibi iki farklı noktaya yakınsadığını varsayalım. $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$ diyelim. Şimdi $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $z \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ olsun. Bu durumda $d(x, z) < \varepsilon$ ve $d(y, z) < \varepsilon$ olur. Buradan

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $2\varepsilon = d(x, y)$ olmasıyla çelişir. O halde $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olur. $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_0$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde vardır. Benzer şekilde $\{x_n\}$ dizisi y noktasına yakınsadığından bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı her $n \geq n_1$ için $x_n \in B(y, \varepsilon)$ olacak biçimde vardır. Bu durumda her $n \geq maks\{n_0, n_1\}$ için $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ olur. Bu ise $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $\{x_n\}$ dizisi tek bir noktaya yakınsar.

Tanım 2.1.7.(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$ dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Önerme 2.1.3. (X, d) bir metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Önerme 2.1.4. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\} \subseteq A$ ve $x_n \to x$ olduğunda $x \in A$ olmasıdır.

Tanım 2.1.8. (X, d) metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir. Eğer (X, d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir.

Önerme 2.1.5. Metrik uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

Önerme 2.1.6. (X, d) metrik uzayındaki her bir Cauchy dizisi sınırlıdır.

Önerme 2.1.7. (X, d) bir metrik uzay $\{\mathrm{x_n}\}$, X de bir dizi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat. $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{d}(\mathrm{x_n}, \mathrm{x_{n+1}}) < \infty$ ve $\sum_{\mathrm{i}=\mathrm{n}}^{\infty} \mathrm{d}(\mathrm{x_i}, \mathrm{x_{i+1}})$ de verilen serinin kalan terimi olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.9. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $T: X \to Y$ herhangi bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. *T* fonksiyonunun *x* noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul X içinde x e yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için, *Y* içindeki $\{Tx_n\}$ dizisinin *Tx* e yakınsak olmasıdır.

Tanım 2.1.10. Bir (X, d) metrik uzayında açık kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i : i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer açık örtünün

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}$$

olacak biçimde bir $\{G_{i_k} : k = 1,2, \cdots, n\}$ alt ailesi var ise, bu aileye $\{G_i : i \in I\}$ açık örtüsünün sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.11.(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompakt küme denir. Eğer X kompakt bir küme ise (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.12. X boş olmayan bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt sınıfı olsun. Eğer τ sınıfı,

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti τ ya aittir

iii) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ya aittir

koşullarını sağlıyorsa τ ya X üzerinde topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.13. (X, τ) bir topolojik uzay ve X in bazı açık alt kümelerinin bir sınıfı β olsun. X in her açık alt kümesi β nın elemanlarının herhangi bir sayıda birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ için bir taban denir.

Teorem. 2.1.1. X boş olmayan bir küme, β da X in alt kümelerinden oluşan bir sınıf olsun.

i) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$

ii) Her $B_1, B_2 \in \beta$ için $B_1 \cap B_2$ de β ya ait bir takım kümelerin birleşimidir.

şartları sağlanıyorsa β, X üzerinde tek bir topolojinin tabanıdır.

Tanım 2.1.14. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\tau_A = \{A \cap G : G \in \tau\}$ ailesi A üzerinde bir topolojidir. τ tarafından oluşturulan τ_A topolojisine τ dan indirgenen topoloji ve (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) topolojik uzayının alt uzayı denir.

Önerme 2.1.8. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\beta = \{\beta(X, \varepsilon) : x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ sınıfı X üzerinde bir topolojinin tabanıdır. Bu topoloji

$$\tau_d = \{U \subseteq X : \ U\,, (X, d)\ de\ açık\}$$

olup buna metrik topoloji denir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Büzülme dönüşümü ve genelleştirmeleri

Tanım 3.1.1. (X, d) bir metrik uzay $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak biçimde $\alpha \geq 0$ sayısı varsa, T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük α sayısına T nin Lipschitz sabiti denir. T Lipschitz dönüşümü için $\alpha < 1$ ise T ye büzülme dönüşümü, $\alpha = 1$ ise T ye genişlemeyen dönüşüm denir. $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ oluyorsa T ye büzülebilir dönüşüm denir.

Her Lipschitz fonksiyonu süreklidir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ iken $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) < \alpha\delta = \varepsilon$ olup T Lipschitz fonksiyonu süreklidir.

Teorem 3.1.1.(Banach) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir büzülme dönüşümü ise T nin X de bir tek sabit noktası vardır.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1} = T^nx_0, \cdots$$

biçiminde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) \\
&= [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}] d(x_0, x_1) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

bulunur ki bu $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ noktası vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T x_n = T \lim_{n\to\infty} x_n = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir. Şimdi $w \in X$ noktası T nin bir başka sabit noktası ise

$$0 < d(z, w) = d(Tz, Tw) \leq \alpha d(z, w) < d(z, w)$$

olur ki bu bir çelişkidir. Yani T nin sabit noktası tekdir.

Şimdi Berinde tarafından metrik uzaylarda verilen hemen hemen büzülme tanımını verelim.

Tanım 3.1.2. (X, d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$\mathrm{d(Tx, Ty)} \leq \delta \mathrm{d(x, y)} + \mathrm{Ld(y, Tx)} \tag{3.1}$$

olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sabiti varsa T ye hemen hemen büzülme denir. d metriğinin simetri özelliğinden dolayı hemen hemen büzülme şartı her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(x, Ty) \tag{3.2}$$

dualini de dolaylı olarak içerir. Dolayısıyla bir T dönüşümünün hemen hemen büzülme olduğunu göstermek için hem (3.1) hem de (3.2) şartını sağladığı gösterilmelidir.

Berinde; Banach, Kannan, Chatterjea ve Zamfirescu dönüşümlerinin hemen hemen büzülme dönüşümü olduğunu göstermiştir. Ayrıca Berinde hemen hemen büzülme dönüşümü kavramını kullanarak aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 3.1.2. (X, d) tam metrik uzay $T: X \to X$ bir hemen hemen büzülme dönüşümü olsun. T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \delta d(x_{n-1}, x_n) + Ld(x_n, Tx_{n-1}) = \delta d(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. Bu işlem devam ettirilirse

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \delta^n d(x_0, x_1)$$

bulunur. $m > n$ olsun.

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \delta^n d(x_0, x_1) + \cdots + \delta^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= \delta^n \frac{1 - \delta^{m-n}}{1 - \delta} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. (X, d) tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olup $lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde z ∈ X vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(z, Tz) &\leq d(z, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tz) \\ &= d(z, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tz) \\ &\leq d(z, x_{n+1}) + \delta d(x_n, z) + Ld(z, x_{n+1}) \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için $d(z, Tz) = 0$ olur. Yani $z = Tz$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Not 3.1.1. Hemen hemen büzülme dönüşümlerinde sabit noktanın tek olması gerekmez. Örneğin $X = [0,1]$ kümesi üzerinde d alışılmış metriğine göre $T: X \to X$, $Tx = x$ birim dönüşümü $L \geq 1 - \delta$ şartıyla hemen hemen büzülme dönüşümü olup X in her noktası bir sabit noktadır.

Tanım 3.1.3. (X, d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $b \in (0, \frac{1}{2})$ sayısı varsa T ye Kannan dönüşümü denir.

Önerme 3.1.1. Her Kannan dönüşümü bir hemen hemen büzülmedir.

İspat. (3.3) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \\ &\leq b\{[d(x, y) + d(y, Tx)] + [d(y, Tx) + d(Tx, Ty)]\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise

$$(1 - b)d(Tx, Ty) \leq bd(x, y) + 2bd(y, Tx)$$

olur. O halde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{b}{1-b} d(x, y) + \frac{2b}{1-b} d(y, Tx)$$

bulunur. $0 < b < \frac{1}{2}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\delta = \frac{b}{1-b} \quad \text{ve} \quad L = \frac{2b}{1-b}$$

dersek (3.1) sağlanır. Ayrıca (3.3), x ve y ye göre simetrik olduğundan (3.2) yi de sağlar. O halde her Kannan dönüşümü bir hemen hemen büzülmedir.

Tanım 3.1.4. (X, d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \tag{3.4}$$

olacak şekilde $c \in (0, \frac{1}{2})$ sayısı varsa T ye Chatterjea dönüşümü denir.

Önerme 3.1.2. Her Chatterjea dönüşümü bir hemen hemen büzülmedir.

İspat. Üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$d(x, Ty) \leq d(x, y) + d(y, Tx) + d(Tx, Ty)$$

olduğundan, bunu (3.4) te kullanırsak

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)] \\ &\leq c[d(x, y) + d(y, Tx) + d(Tx, Ty) + d(y, Tx)] \end{aligned}$$

olur. Buradan ise

$$d(Tx,Ty) \leq \frac{c}{1-c}d(x,y) + \frac{2c}{1-c}d(y,Tx)$$

elde edilir. $0 < c < \frac{1}{2}$ olduğu göz önüne alınırsa $\delta = \frac{c}{1-c}$ ve $L = \frac{2c}{1-c}$ dersek (3.1) sağlanır. Ayrıca (3.4), x ve y ye göre simetrik olduğundan (3.2) yi de sağlar. O halde her Chatterjea dönüşümü bir hemen hemen büzülmedir.

Tanım 3.1.5. (X,d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda M(x,y) \tag{3.5}$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1)$ varsa T ye quasi büzülme denir. Burada

$$M(x,y) = maks\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\}$$

dir. Quasi büzülmeler için ilk sabit nokta teoremi 1972 de Ciric tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.3. (X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir quasi büzülme olsun. Bu durumda;

a) T dönüşümü bir tek $u \in X$ sabit noktasına sahiptir.

b) Herhangi $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} T^n x = u$ dur.

c) $d(T^n x, u) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x,Tx)$ dir.

İspat. $x \in X$ keyfi bir eleman olsun. Aşağıdaki kısaltmaları kullanacağız.

$$\begin{aligned} &0(x,n) = \{x, Tx, T^2x, \cdots, T^n x\}, \\ &\alpha(x,n) = d(0(x,n)), \\ &0(x) = \{x, Tx, \cdots, T^n x, \cdots\},\ \alpha(x) = d(0(x)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

İlk olarak;

$$\alpha(Tx, n-1) \leq \lambda\alpha(x, n) \tag{3.7}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $\alpha(Tx, n-1) = d(T^j x, T^k x)$ olacak şekilde $1 \leq j < k \leq n$ vardır. T dönüşümü quasi büzülme olduğundan

$$\begin{aligned}
\alpha(Tx, n-1) \quad &= d(TT^{j-1}x, TT^{k-1}x) \\
&\leq \lambda max\{d(T^{j-1}x, T^{k-1}x), d(T^{j-1}x, T^j x), d(T^{k-1}x, T^k x)\} \\
&\leq \lambda d(\{T^{j-1}x, T^j x, T^{j+1}x, \cdots, T^k x\}) \\
&\leq \lambda d(\{x, Tx, T^2 x, \cdots, T^n x\}) \\
&= \lambda\alpha(x, n)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.7) eşitsizliği ispatlanmış olur. Bazı $k \leq n$ için

$$\alpha(x, n) = d(x, T^k x) \tag{3.8}$$

olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $\alpha(x, n) = 0$ ise eşitliğinin sağlandığı görülür. $1 \leq j < k \leq n$ için $\alpha(x, n) > 0$ ve $\alpha(x, n) = d(T^j x, T^k x)$ olduğunu kabul edelim. (3.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\alpha(x, n) \quad &= d(T^j x, T^k x) \\
&= \alpha(T^j x, n-j) \\
&= \alpha(T(T^{j-1}x), n-j) \\
&\leq \lambda\alpha(T^{j-1}x, n-j+1) \\
&\leq \lambda\alpha(x, n)
\end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece (3.8) eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi $\alpha(x)$ in sınırlı olduğunu gösterelim. (3.7), (3.8) ve üçgen eşitsizliğinden

$$\alpha(x,n) = d(x,T^k x) \le d(x,Tx) + d(Tx,T^k x)$$
$$\le d(x,Tx) + \alpha(Tx,n-1) \le d(x,Tx) + \lambda\alpha(x,n)$$

elde edilir. Buradan,

$$\alpha(x,n) \le \frac{1}{1-\lambda} d(x,Tx). \tag{3.9}$$

elde edilir. $\alpha(x,n)$ tanımı dikkate alındığında $\{\alpha(x,n)\}$ dizisi azalmayandır ve ayrıca $lim_{n\to\infty}\, \alpha(x,n) = \alpha(x)$ dir. Böylece (3.9) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\alpha(x) \le \frac{1}{1-\lambda} d(x,Tx). \tag{3.10}$$

olur ki bu bize $\alpha(x)$ in sınırlı olduğunu gösterir.

Şimdi $\{T^n x\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $n = 0,1,2,\cdots$ için

$$\beta_n(x) = \alpha(T^n x)$$

olsun. Bu durumda $0 \le \beta_n(x) \le \alpha(x)$ ve $\{\beta_n(x)\}$ dizisi artmayan ve alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır. Böylece $\lim_{n\to\infty} \beta_n(x) = \beta(x)$ vardır ve her $n \ge 0$ için $\beta(x) \le \beta_n(x)$ dır. Şimdi (3.7) den $n \to \infty$ için

$$\alpha(Tx) \le \lambda\alpha(x) \tag{3.11}$$

olur. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\beta_{n+1}(x) = \alpha(T^{n+1}x) = \alpha(TT^n x) \le \lambda\alpha(T^n x) = \lambda\beta_n(x)$$

elde edilir. Her $n \ge 0$ için $\beta_n(x) \le \beta_{n+1}(x)$ olduğundan

$$\beta(x) \le \lambda\beta_n(x)$$

olup buradan $n \to \infty$ için

$$\beta(x) \leq \lambda\beta(x)$$

elde edilir. Böylece $\lambda < 1$ olduğundan $\beta(x) = 0$ olmalıdır ki bu $\{T^n x\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X in tamlığından

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = u$$

olacak şekilde $u \in X$ vardır. (3.5) den

$$d(Tu, TT^n x) \leq \lambda max\{d(u, T^n x), d(u, Tu), d(T^n x, T^{n+1}x), d(u, T^{n+1}x), d(T^n x, Tu)\}$$

olur. Buradan $n \to \infty$ için;

$$d(Tu, u) \leq \lambda d(u, Tu)$$

bulunur. $\lambda < 1$ olduğundan $d(Tu, u) = 0$ olur. O halde $Tu = u$ elde edilir. (3.7) den sabit noktanın tekliği görülür. Böylece (a) ve (b) şıkları ispatlanmış oldu. (3.11) de aynı işlem n kez yapılırsa

$$\begin{aligned}\alpha(T^n x) &= \alpha(TT^{n-1}x) \\ &\leq \lambda\alpha(T^{n-1}x) = \lambda\alpha(TT^{n-2}x) \\ &\leq \lambda^2\alpha(T^{n-2}x) = \lambda^2\alpha(TT^{n-3}x) \\ &\leq \lambda^n\alpha(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra (3.10) eşitsizliğini kullanırsak

$$\alpha(T^n x) \leq \lambda^n \frac{1}{1-\lambda} d(x, Tx)$$

olur. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$d(T^n x, T^m x) \leq \alpha(T^n x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x, Tx)$$

olup $m \to \infty$ için (c) nin de sağlandığı görülür.

Önerme 3.1.3. T dönüşümü sabit noktaya sahip bir quasi büzülme dönüşümü olsun. O zaman bu T dönüşümü bu noktada süreklidir.

İspat. u, T nin bir sabit noktası ve $\{y_n\}$ dizisi de u ya yakınsayan bir dizi olsun. Biz $Ty_n \to Tu = u$ olduğu göstermeliyiz. (3.5) den

$$\begin{aligned} d(Ty_n, Tu) &\leq \lambda maks\{d(y_n, u), d(y_n, Ty_n), d(u, Tu), d(y_n, Tu), d(u, Ty_n)\} \\ &\leq maks\{d(y_n, u), d(y_n, Ty_n), d(u, Ty_n)\} \\ &\leq \lambda\, d(y_n, u) + \lambda d(u, Ty_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$d(Ty_n, Tu) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(y_n, u)$$

olur. Böylece $\lim_{n\to\infty} Ty_n = Tu$ olup ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.1.1. $X = [0,3] \cup [4,5]$ kümesi üzerinde alışılmış metrik verilsin. $T: X \to X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0,3] \\ 3 & , \quad x \in [4,5] \end{cases}$$

şeklinde tanımlasın. Bu durumda herhangi $x \in [4,5]$ için

$$d(x, Tx) \leq 2\ , \ d(Tx, T^2x) = 3$$

olur. Buradan

$d(Tx, T^2x) > d(x, Tx)$

dır. Yani herhangi $x \in X$ için $d(Tx, T^2x) < d(x, Tx)$ sağlanmaz.

Şimdi T dönüşümünün (3.7) şartını sağlandığını gösterelim. $x \in [0,3]$ ve $y \in [4,5]$ olsun. Bu durumda $d(Tx, Ty) = 3$, $d(y, Tx) \geq 4$ olur. Buradan

$$d(Tx, Ty) = \frac{3}{4}4 \leq \frac{3}{4}maks\{d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olur. Böylece her $x, y \in X$ için $\lambda = \frac{3}{4}$ ile birlikte T dönüşümü (3.5) deki yeterli koşulu sağlar.

Örnek 3.1.2.$f: [0,1] \to [0,1]$ dönüşümü

$$fx = \begin{cases} \frac{2x}{3} & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{2x+1}{3} & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f, $\delta = \frac{2}{3}$ ve $L = 6$ için hemen hemen büzülmedir. Ayrıca f nin sabit noktaları 0 ve 1 dir. Ancak f, Banach, Kannan, Chatterjea ve Quasi büzülme dönüşümü değildir.

Kabul edelim ki $x, y \in [0, \frac{1}{2})$ olsun. Bu durumda $fx = \frac{2x}{3}$, $fy = \frac{2y}{3}$ olup,

$$d(fx, fy) = \left|\frac{2x}{3} - \frac{2y}{3}\right| = \frac{2}{3}|x - y| = \frac{2}{3}d(x, y) \leq \frac{2}{3}d(x, y) + 6d(y, fx)$$

olur. $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$ olsun.

$$d(fx, fy) = \left|\frac{2x + 1}{3} - \frac{2y + 1}{3}\right| = \frac{2}{3}d(x, y) + 6d(y, fx)$$

$x \in [0, \frac{1}{2})$, $y \in [\frac{1}{2}, 1)$ olsun.

$$d(fx, fy) = \left|\frac{2x}{3} - \frac{2y+1}{3}\right| = \left|\frac{2}{3}(x-y) - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{2}{3}|x-y| + \frac{1}{3}$$
$$d(fx, fy) \leq \frac{2}{3} d(x, y) + 6d(y, fx)$$

dır. Diğer taraftan, bu dönüşümün iki tane sabit noktası olduğundan ve $[0,1]$ tam olduğundan bu dönüşüm Banach, Kannan, Chatterjea ve Quasi dönüşümü değildir.

Lemma. $h \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her quasi büzülme hemen hemen büzülmedir.

İspat. i) $M(x, y) = d(x, y)$ ise

$$d(fx, fy) \leq hM(x, y) = hd(x, y) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, fx)$$

$\delta = h \in [0, \frac{1}{2})$, $L \geq 0$ olduğundan f hemen hemen büzülmedir.

ii) $M(x, y) = d(x, fx)$ ise

$$d(fx, fy) \leq hM(x, y) = hd(x, fx)$$
$$\leq hd(x, y) + hd(y, fx) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, fx)$$

$\delta = h \in [0, \frac{1}{2})$, $L = h \geq 0$ olduğundan f hemen hemen büzülmedir.

iii) $M(x, y) = d(y, fy)$ ise

$$d(fx, fy) \leq hM(x, y) = hd(y, fy) \leq hd(y, fx) + hd(fx, fy)$$
$$\leq \frac{h}{1-h} d(y, fx)$$
$$\leq \delta d(x, y) + Ld(y, fx)$$

$\delta \in [0,1)$,$L \geq \frac{h}{1-h}$ olduğundan f hemen hemen büzülmedir.

iv) $M(x,y) = d(x, fy)$ ise

$$
\begin{aligned}
d(fx, fy) &= hd(x, fy) \\
&\leq hM(x,y) \\
&\leq hd(x,y) + hd(y,fx) + hd(fx,fy) \\
&\leq \frac{h}{1-h} d(x,y) + \frac{h}{1-h} d(y,fx) \\
&\leq \delta d(x,y) + Ld(y,fx)
\end{aligned}
$$

$\delta = \frac{h}{1-h} < 1$, $L \geq \frac{h}{1-h} \geq 0$ olduğundan f hemen hemen büzülmedir.

v) $M(x,y) = d(y, fx)$ ise

$$d(fx,fy) \leq hM(x,y) = hd(y,fx) \leq \delta d(x,y) + Ld(y,fx)$$

$1 > \delta \geq 0$, $L \geq \frac{h}{1-h} \geq 0$ olduğundan f hemen hemen büzülmedir.

3.2. F-büzülmeler

$\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ olmak üzere $F: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ olan dönüşümlerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{F}$ aşağıdaki şartları sağlar.

$(F1)$ F kuvvetli artandır. Yani her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ için $\alpha < \beta$ iken $F(\alpha) < F(\beta)$ dır.
$(F2)$ Pozitif sayıların her $\{\alpha_n\}$ dizisi için $lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ olması için gerek ve yeter şart $lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty$ dır.
$(F3)$ $lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır.

Tanım 3.2.1. (X,d) metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)) \tag{3.12}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne bir F-büzülme adı verilir.

Aşağıda $\mathcal{F}$ ailesine ait örnekler verilmiştir. Bu örnekler yardımıyla literatürde bulunan bazı büzülme dönüşümlerinin bir F −büzülme oldukları görülebilir.

Örnek 3.2.1. $F_1: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_1(\alpha) = ln\, \alpha$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_1 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. $T: X \to X$ dönüşümü bir F_1-büzülme ise o zaman $d(Tx, Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y) \tag{3.13}$$

sağlanır. Aynı zamanda $Tx = Ty$ şartını sağlayan $x, y \in X$ için de (3.13) eşitsizliği sağlanır. Yani T dönüşümü $L = e^{-\tau}$ olmak üzere bir Lipschitz dönüşümüdür. $L = e^{-\tau} < 1$ olduğundan T bir büzülme dönüşümüdür. Dolayısıyla her büzülme F_1 büzülmedir.

Örnek 3.2.2. $F_2: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_2(\alpha) = ln\, \alpha + \alpha$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_2 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. $T: X \to X$ dönüşümü bir F_2-büzülme ise o zaman $d(Tx, Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)} e^{d(Tx,Ty) - d(x,y)} \leq e^{-\tau} \tag{3.14}$$

sağlanır.

Örnek 3.2.3. $F_3: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_3(\alpha) = -1/\sqrt{\alpha}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_3 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. $T: X \to X$ dönüşümü bir F_3-büzülme ise o zaman $d(Tx, Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{\left(1 + \tau\sqrt{d(x, y)}\right)^2} d(x, y)$$

sağlanır. Burada $d(Tx,Ty) \leq \alpha\big(d(x,y)\big)d(x,y)$ tipindeki lineer olmayan büzülmesinin özel bir durumu elde edilir.

Örnek 3.2.4. $F_4: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü $F_4(\alpha) = ln(\alpha^2 + \alpha)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $F_4 \in \mathcal{F}$ olduğu açıktır. $T: X \to X$ dönüşümü bir F_4-büzülme ise o zaman $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{d(Tx,Ty)(d(Tx,Ty)+1)}{d(x,y)(d(x,y)\ +1)} \leq e^{-\tau}$$

sağlanır.

Not 3.2.1. $(F1)$ ve (3.12) den her F-büzülme, bir büzülebilir dönüşümdür. Yani T bir F-büzülme ise, $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) < d(x,y)$$

olur. Bu yüzden her F-büzülme sürekli bir dönüşümdür.

Not 3.2.2. H_1ve $H_2 \in \mathcal{F}$ olsun. Eğer her $\alpha > 0$ için $H_1(\alpha) \leq H_2(\alpha)$ ve $G = H_2 - H_1$ azalmayan bir dönüşüm ise o zaman her H_1-büzülme bir H_2-büzülmedir. Gerçekten Not 3.2.1 den $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$G(d(Tx,Ty)) \leq G(d(x,y))$$

olur. O zaman $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}\tau + H_2(d(Tx,Ty)) &= \tau + H_1(d(Tx,Ty)) + G(d(Tx,Ty))\\ &\leq H_1\big(d(x,y)\big) + G\big(d(x,y)\big)\\ &= H_2(d(x,y))\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi 2012 yılında Wardowski tarafından verilen teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.2.1. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü F-büzülme olsun. O zaman T dönüşümü X de bir tek z sabit noktasına sahiptir. Üstelik her bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi z ye yakınsar.

İspat. İlk olarak eğer varsa T nin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Gerçekten z ile w T nin farklı iki sabit noktası olsun. O zaman $d(Tz, Tw) > 0$ olduğundan (3.12) eşitsizliğinden

$$\tau \leq F(d(z, \mathrm{w})) - F(d(Tz, Tw)) = 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Şimdi T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Bunun için keyfi bir $x_0 \in X$ noktasını alalım. Her $n = 0,1, \cdots$ için $x_{n+1} = Tx_n$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi oluşturabiliriz. $n = 0,1 \cdots$ için $\gamma_n = d(x_{n+1,}x_n)$ olsun. Eğer $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, o zaman $Tx_{n_0} = x_{n_0}$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olduğunu kabul edelim. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n > 0$ olduğundan (3.12) den

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(\gamma_0) - n\tau \qquad (3.15)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.15) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

elde ederiz. $(F2)$ den

$$lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0 \tag{3.16}$$

olur. Dolayısıyla $(F3)$ den

$$lim_{n\to\infty}{\gamma_n}^k F(\gamma_n) = 0 \tag{3.17}$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır. Ayrıca (3.15) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$${\gamma_n}^k F(\gamma_n) - {\gamma_n}^k F(\gamma_0) \le {\gamma_n}^k F(\gamma_0) - n\tau) - {\gamma_n}^k F(\gamma_0) = -{\gamma_n}^k n\tau \le 0 \tag{3.18}$$

elde ederiz. (3.18) de $n \to \infty$ için limit alırsak ayrıca (3.16) ve (3.17) i kullanarak

$$lim_{n\to\infty} n\,{\gamma_n}^k = 0 \tag{3.19}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla (3.19) dan her $n \ge n_1$ için $n{\gamma_n}^k \le 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sonuç olarak her $n \ge n_1$ için

$$\gamma_n \le \frac{1}{n^{1/k}} \tag{3.20}$$

elde edilir.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermek için $m > n \ge n_1$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden ve (3.20) den

$$d(x_m, x_n) \le \gamma_{m-1} + \gamma_{m-2} + \cdots + \gamma_n < \sum_{\mathrm{i=n}}^{\infty} \gamma_{\mathrm{i}} \le \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$$

elde ederiz. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olur. X in tamlığından $lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Son olarak, T nin sürekliliğinden

$$d(Tz, z) = \lim_{n\to\infty} d(Tx_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.1 ve Örnek 3.2.2 de tanımlı F_1ve F_2 fonksiyonlarını göz önüne alalım. O zaman $F_1(\alpha) < F_2(\alpha)$ ve $F_2 - F_1$ dönüşümü kesin artan olduğundan Not 3.2.2 gereği (3.13) şartını sağlayan her büzülme, (3.14) şartını da sağlar. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.2.4. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1+2 \\ &\vdots \\ S_n &= 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\,, \qquad n \in \mathbb{N} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$X = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ olsun. O zaman (X,d) tam bir metrik uzay olur. $T: X \to X$ dönüşümü

$$T(S_n) = \begin{cases} S_1 & , \quad n = 1 \\ S_{n-1} & , \quad n > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Örnek 3.2.1 de tanımlanan $F_1 \in \mathcal{F}$ için T, F_1-büzülme değildir. Yani, T dönüşümü Banach büzülme değildir. Gerçekten,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(T(S_n),T(S_1))}{d(S_n,S_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n-1}-1}{S_n-1} = 1$$

dir. Diğer yandan Örnek 3.2.2 de tanımlanan $F_2 \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\tau_1 = 1$ için T dönüşümü F_2-büzülmedir. Bunun için aşağıdaki durumları göz önüne alalım. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$T(S_m) \neq T(S_n) \Leftrightarrow \big((m > 2 \wedge n = 1) \vee (m > n > 1)\big)$$

dir. Bu durumda $m > 2$ olacak şekildeki her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\frac{d(T(S_m),T(S_1))}{d(S_m,S_1)}e^{d(T(S_m),T(S_1))-d(S_m,S_1)} &= \frac{S_{m-1}-1}{S_m-1}e^{S_{m-1}-S_m}\\ &= \frac{m^2-m-2}{m^2+m-2}e^{-m} < e^{-m} < e^{-1}\end{aligned}$$

olur. Yine $m > n > 1$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\frac{d(T(S_m),T(S_n))}{d(S_m,S_n)}e^{d(T(S_m),T(S_n))-d(S_m,S_n)} &= \frac{S_{m-1}-S_{n-1}}{S_m-S_n}e^{S_n-S_{n-1}+S_{m-1}-S_m}\\ &= \frac{m+n-1}{m+n+1}e^{n-m} < e^{n-m} \leq e^{-1}\end{aligned}$$

olur.

Tanım 3.2.2. (X,d) bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $F \in \mathcal{F}$ olsun. $d(Tx,Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$M(x,y) = maks\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}[d(x,Ty)+d(y,Tx)]\right\}$$

olmak üzere

$$\tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(M(x,y)) \tag{3.21}$$

olacak şekilde bir $\tau > 0$ sayısı varsa T dönüşümüne Ciric tip genelleştirilmiş F-büzülme denir. Eğer $F_1(\alpha) = ln\,\alpha$ olarak göz önüne alınırsa her Ciric tip genelleştirilmiş büzülme aynı zamanda Ciric tip genelleştirilmiş F-büzülmedir.

Teorem 3.2.2. (X,d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ Ciric tip genelleştirilmiş F-büzülme olsun. Eğer T veya F sürekli ise o zaman T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $n \in \{1,2,\cdots\}$ için $x_n = Tx_{n-1}$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Eğer en az bir $n_0 \in \{0,1,\cdots\}$ için $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ ise

$Tx_{n_0} = x_{n_0}$ olup bu T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterir. Şimdi her $n \in \{0,1,\cdots\}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olsun. Ayrıca her $n \in \{0,1,\cdots\}$ için $\gamma_n = d(x_{n+1}, x_n)$ diyelim. O zaman her $n \in \{0,1,\cdots\}$ için $\gamma_n > 0$ dır. (3.21) den

$$\begin{aligned} F(\gamma_n) &= F\big(d(x_{n+1}, x_n)\big) \\ &= F(d(Tx_n, Tx_{n-1})) \\ &\leq F\big(M(x_n, x_{n-1})\big) - \tau \\ &= F(maks\{d(x_n, x_{n-1}), d(x_n, x_{n+1})\}) - \tau \\ &= F\big(maks\{\gamma_{n-1,}\gamma_n\}\big) - \tau \end{aligned} \tag{3.22}$$

elde ederiz. Eğer en az bir $n \in \{1,2,\cdots\}$ için $\gamma_n \geq \gamma_{n-1}$ ise yukarıdan $F(\gamma_n) \leq F(\gamma_n) - \tau$ elde edilir ki bu $\tau > 0$ olması ile çelişir. O zaman her $n \in \{1,2,\cdots\}$ için $\gamma_n < \gamma_{n-1}$ dır. Böylece

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau$$

olur. Buradan ise

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(\gamma_0) - n\tau \tag{3.23}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.23) de $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

olur. Dolayısıyla (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

elde edilir. O halde $(F3)$ den

$$\lim_{n\to\infty} {\gamma_n}^k F(\gamma_n) = 0$$

olacak şekilde bir $k \in (0,1)$ vardır. Ayrıca (3.23) kullanılarak her $n \in \{1,2,\cdots\}$ için

$$\gamma_n{}^k F(\gamma_n) - \gamma_n{}^k F(\gamma_0) \leq \gamma_n{}^k F(\gamma_0) - n\tau) - \gamma_n{}^k F(\gamma_0) = -\gamma_n{}^k n\tau \leq 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) te $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$lim_{n\to\infty} n\,\gamma_n{}^k = 0 \tag{3.25}$$

olur. Dolayısıyla (3.25) eşitsizliğinden her $n \geq n_1$ için $n\gamma_n{}^k \leq 1$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Sonuç olarak her $n \geq n_1$ için

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{3.26}$$

elde edilir.

Şimdi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için $m > n \geq n_1$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Üçgen eşitsizliğinden ve (3.26) den

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \gamma_n + \gamma_{n+1} + \cdots + \gamma_{m-1} \\ &= \sum_{\mathrm{i=n}}^{\mathrm{m-1}} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisinin yakınsaklığı göz önüne alındığında yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(x_n, x_m) \to 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$

dizisi bir Cauchy dizisidir. X in tamlığından $lim_{n\to\infty} x_n =$ z olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Eğer T sürekli ise o zaman

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T\, x_n = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = Tz$$

olur. Dolayısıyla z, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi F sürekli olsun. Bu durumda $z = Tz$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten bunu göstermek için aksini kabul edelim. Yani $z \neq Tz$ olsun. Bu durumda $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı ve $\{x_n\}$ dizisinin bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi var öyle ki her $n_k \geq n_0$ için $d(Tx_{n_k}, Tz) > 0$ dır. (Eğer böyle olmazsa her $n \geq n_1$ için $x_n = Tz$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise $x_n \to Tz$ demektir. $z \neq Tz$ olduğu için bu bir çelişkidir.) Her $n_k \geq n_0$ için $d(Tx_{n_k}, Tz) > 0$ olup (3.21) eşitsizliğinden

$$\tau + F\left(d\left(x_{n_k+1}, Tz\right)\right) = \tau + F\left(d\left(Tx_{n_k}, Tz\right)\right) \leq F(M(x_{n_k}, z))$$

olur. $k \to \infty$ için limit alınırsa, F nin sürekliliği ve

$$M\left(x_{n_k}, z\right) = maks\left\{d\left(x_{n_k}, z\right), d\left(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\right), d(z, Tz), \frac{1}{2}\left[d\left(x_{n_k}, Tz\right) + d\left(z, x_{n_{k+1}}\right)\right]\right\}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\tau + F\big(d(z, Tz)\big) \leq F(d(z, Tz))$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla iddia doğrudur. Yani $z = Tz$ dir. Şimdi T nin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Gerçekten z ile w, T nin farklı iki sabit noktası olsun. O zaman $d(Tz, Tw) > 0$ olduğundan (3.21) den

$$\tau \leq F\big(M(z, w)\big) - F\big(d(Tz, Tw)\big) = F\big(d(z, w)\big) - F\big(d(Tz, Tw)\big) = 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Örnek 3.2.5. $X = \left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ ve $d(x,y) = |x-y|$ olsun. O zaman (X,d) tamdır. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)^2} & , \quad x = \dfrac{1}{n^2} \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathrm{F}_1(\alpha) = \ln \alpha$ olarak alırsak T, Ciric tip genelleştirilmiş F_1-büzülme değildir. Gerçekten

$$sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d(Tx,Ty)}{M(x,y)} = 1$$

dır. Diğer taraftan $F_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$F_2(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{ln\,\alpha}{\sqrt{\alpha}} & , \quad 0 < \alpha < e^2 \\ \alpha - e^2 + \dfrac{2}{e} & , \quad \alpha \geq e^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $k = \frac{2}{3}$ için $F_2 \in \mathcal{F}$ dir. Ayrıca dikkat edelim ki F_2 süreklidir. $\tau = ln\, 2$ için T genelleştirilmiş F_2-büzülmedir. Gerçekten bunu görmek için aşağıdaki tahminleri göz önüne alacağız. Burada dikkat edelim ki $sup_{x,y \in X} d(x,y) = 1 < e^2$ dır.

$\tau = ln\, 2$ için de T, Ciric tip genelleştirilmiş F_2-büzülmedir ancak ve ancak $d(Tx,Ty) > 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$ln\, 2 + F_2 d(Tx,Ty) \leq F_2(M(x,y)) \tag{3.27}$$

dır. Bu eşitsizlik için aşağıdakileri göstermek yeterlidir.

$d(Tx,Ty) = |Tx - Ty| > 0$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$ln\, 2 + F_2(d(Tx,Ty)) \leq F_2(d(x,y))$

$$\Leftrightarrow \; d(Tx,Ty)^{\frac{1}{\sqrt{d(Tx,Ty)}}} d(x,y)^{-\frac{1}{\sqrt{d(x,y)}}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \; |Tx - Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|Tx-Ty|}}} |x - y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} \leq \frac{1}{2}.$$

$m > n$ için $x = \frac{1}{n^2}$, $y = \frac{1}{m^2}$alırsak,

$$|Tx - Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|Tx-Ty|}}} |x - y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}}$$

$$= \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(m+1)^2}}}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)^{-\frac{1}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}}$$

$$= \left(\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2-(n+1)^2}}} \left(\frac{m^2 - n^2}{n^2m^2}\right)^{-\frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}}}$$

$$= \left(\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2-(n+1)^2}}} \left(\frac{m^2 - n^2}{n^2m^2} \frac{m+n+2}{m+n+2}\right)^{-\frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}}}$$

$$= \left(\frac{(m+1)^2-(n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2-(n+1)^2}}} \times$$

$$\left(\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2} \frac{(m+1)(n+1)^2(m+1)^2}{(m+n+2)n^2m^2}\right)^{-\frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}}}$$

$$= \left(\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2-(n+1)^2}} - \frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}}} \times$$

$$\left(\frac{(m+n+2)n^2m^2}{(n+1)^2(m+1)^2(m+n)}\right)^{\frac{nm}{\sqrt{m^2-n^2}}}$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{(m+1)^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2(m+1)^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{(n+1)(m+1)}{\sqrt{(m+1)^2 - (n+1)^2}} - \frac{nm}{\sqrt{m^2 - n^2}} \geq 1$$

ve

$$\frac{(m+n+2)n^2m^2}{(n+1)^2(m+1)^2(m+n)} < 1$$

olduğu için

$$|Tx-Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|Tx-Ty|}}}|x-y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} \leq \frac{1}{2}$$

olur. Dolayısıyla bu şart sağlanır. Eğer $x=\frac{1}{n^2}$ ve $y=0$ ise

$$\begin{aligned}|Tx-Ty|^{\frac{1}{\sqrt{|Tx-Ty|}}}|x-y|^{-\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}} &= \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right|^{\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right|}}}\left|\frac{1}{n^2}\right|^{-\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{1}{n^2}\right|}}} \\ &= \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2(n+1)}} \\ &= \frac{n^{2(n+1)}}{(n+1)^{2(n+1)}}\frac{1}{n^2} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2(n+1)}\frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda (3.27) şartı sağlanır. Dolayısıyla Teorem 3.2.2 nin tüm şartları sağlanır. Bu yüzden T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Berinde'nin hemen hemen büzülme dönüşümünden yola çıkarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.2.3. (X,d) bir metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $F\in\mathcal{F}$ olsun. $d(Tx,Ty)>0$ şartını sağlayan her $x,y\in X$ için

$$\tau+F(d(Tx,Ty))\leq F(d(x,y)+L(d(y,Tx))) \tag{3.28}$$

olacak şekilde bir $\tau>0$ ve $L\geq 0$ sabiti varsa T dönüşümüne hemen hemen F-büzülme denir.

T dönüşümünün hemen hemen F-büzülme olduğunu göstermek için (3.28) ve her $x, y \in X$ için

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y) + L(d(x, Ty))) \qquad (3.29)$$

kontrol edilmelidir.

$F_1(\alpha) = \ln \alpha$ olarak göz önüne alınırsa her hemen hemen büzülmeler aynı zamanda hemen hemen F-büzülmedir. Ama bunun tersi doğru olmayabilir. Örnek 3.2.5 i göz önüne alırsak $x = \frac{1}{n^2}$ ve $y = \frac{1}{(n+1)^2}$ için alırsak $d(y, Tx) = 0$ ve

$$sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{d(T\frac{1}{n^2}, T\frac{1}{(n+1)^2})}{d(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2})} = 1$$

olur. Dolayısıyla (3.1) i sağlayan $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sabiti yoktur. Yani T bir hemen hemen büzülme değildir, fakat T bir hemen hemen F-büzülmedir. Hemen hemen F-büzülme kavramını kullanarak aşağıdaki sabit nokta teoremini verebiliriz. Ancak bu teoremde dikkat edelim ki T veya F nin sürekli olması gerekmemektedir.

Teorem 3.2.3. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ hemen hemen F-büzülme olsun. O zaman T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $n \in \{1,2, \cdots\}$ için $x_n = Tx_{n-1}$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Eğer bazı $n_0 \in \{0,1, \cdots\}$ için $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ ise $Tx_{n_0} = x_{n_0}$ olup bu T nin bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterir. Şimdi her $n \in \{0,1, \cdots\}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olsun. Ayrıca her $n \in \{0,1, \cdots\}$ için $\gamma_n = d(x_{n+1}, x_n)$ olsun. O zaman her $n \in \{0,1, \cdots\}$ için $\gamma_n > 0$ dır. (3.28) den

$$\begin{aligned} F(\gamma_n) &= F\big(d(x_n, x_{n+1})\big) \\ &= F\big(d(Tx_{n-1}, Tx_n)\big) \\ &\leq F(d(x_{n-1}, x_n)) - \tau \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \cdots \leq F(\gamma_0) - n\tau$$

olur. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$$

elde ederiz. (F2) den

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

olur. Teorem 3.2.2 nin ispatındaki gibi devam edersek $\{x_n\}$ nin (X, d) de bir Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. X in tamlığından $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

Öte yandan $(F2)$ ve (3.24) den $d(Tx, Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) + Ld(y, Tx) \tag{3.30}$$

sağlanır. Buradan (3.30) dan

$$\begin{aligned} d(Tz, x_{n+1}) &= d(Tz, Tx_n) \\ &\leq d(x_n, z) + Ld(z, Tx_n) \end{aligned}$$

$$= d(x_n, z) + Ld(z, x_{n+1})$$

olur. $n \to \infty$ iken $d(z, Tz) = 0$ dır bu ise $z = Tz$ demektir.

Örnek 3.2.6. $X = [0,1] \cup \{2,3\}$ ve $d(x,y) = |x - y|$ olsun. O zaman (X, d) tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1-x}{2} & , \quad x \in [0,1] \\ x & , \quad x \in \{2,3\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $d(T2, T3) = 1 = d(2,3)$ olduğundan her $F \in \mathcal{F}$ ve her $\tau > 0$ için

$$\tau + F\big(d(T2, T3)\big) > F(d(2,3))$$

olur. Bu nedenle T dönüşümü F- büzülme değildir. Dolayısıyla Teorem 3.2.1 bu örneğe uygulanamaz. Şimdi $F(\alpha) = \ln \alpha$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda T dönüşümü, $\tau = ln\,2$ ve $L = 4$ ile birlikte bir hemen hemen F-büzülmedir. Şimdi bunun doğru olduğunu görelim. $d(Tx, Ty) > 0$ ise $x \neq y$ olduğu açıktır. O zaman

$$\forall x, y \in X\ [d(Tx, Ty) > 0) \Rightarrow \tau + F\big(d(Tx, Ty)\big) \leq F\big(d(x,y)\big) + Ld(y, Tx)]$$

ifadesi

$$\forall x, y \in X\ [x \neq y \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x,y) + Le^{-\tau} d(y, Tx)]$$

ve buradan da

$$\forall x, y \in X\ [x \neq y \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \tfrac{1}{2} d(x,y) + 2d(y, Tx)] \tag{3.31}$$

ifadesine denktir. Şimdi aşağıdaki durumları göz önüne alalım.

1.durum. $x, y \in [0,1]$ olsun. O zaman $d(Tx, Ty) = \frac{1}{2}|x - y|$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $d(y, Tx) = \left|\frac{2y+x-1}{2}\right|$ olur. Dolayısıyla (3.31) eşitsizliği sağlanır.

2.durum. $x, y \in \{2,3\}$ olsun. O zaman $d(Tx, Ty) = |x - y|$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $d(y, Tx) = |x - y|$ olur. Dolayısıyla (3.31) eşitsizliği sağlanır.

3.durum. $x \in [0,1]$ ve $y \in \{2,3\}$ olsun. O zaman $d(Tx, Ty) = \left|\frac{2y+x-1}{2}\right|$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $d(y, Tx) = \left|\frac{2y+x-1}{2}\right|$ olur. Dolayısıyla (3.31) eşitsizliği sağlanır.

4.durum. $y \in [0,1]$ ve $x \in \{2,3\}$ olsun. O zaman $d(Tx, Ty) = \left|\frac{2x+y-1}{2}\right|$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $d(y, Tx\ ) = |x - y|$ olur. Dolayısıyla (3.31) eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.3 de, eğer T hemen hemen F-büzülme olması durumunda sabit noktaya sahip olduğu gösterildi. Ancak T nin sabit noktasının tekliğini garanti değildir. Sabit noktanın tekliği için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.4. (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşümü hemen hemen F-büzülme olsun. Ayrıca $G \in \mathcal{F}$ olmak üzere $d(Tx, Ty) > 0$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau_1 + G(d(Tx, Ty)) \leq G(d(x, y) + L_1(d(x, Tx))) \tag{3.32}$$

olacak şekilde bir $\tau_1 > 0$ ve $L_1 \geq 0$ sabitlerinin var olduğunu kabul edelim. O zaman T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat*:* Yukarıdaki teoremin ispatındaki gibi T nin sabit noktasının olduğu görülebilir. Şimdi T nin sabit noktasının tek olduğunu gösterelim. Gerçekten z ile w, T nin farklı iki sabit noktası olsun. O zaman $d(z, w) > 0$ olup (3.31) den

$$
\begin{aligned}
\tau_1 + G\big(d(z,w)\big) &= \tau_1 + G(d(Tz,Tw)) \\
&\leq G\big(d(z,w)\big) + L_1 d(z,Tz) \\
&= G\big(d(z,w)\big)
\end{aligned}
$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla T nin sabit noktası tektir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında temel sabit nokta teoremlerinden Banach sabit nokta teoremi, hemen hemen büzülme dönüşümler için sabit nokta teoremi ve quasi büzülmeler için sabit nokta teoreminin ispatı detaylı bir şekilde incelenmiştir. Buradaki ispat metotları ile Wardowski tarafından ortaya atılan F-büzülme kavramı yardımıyla elde edilen sabit nokta teoreminin ispatı karşılaştırılmıştır. F -büzülme kavramının bilinen büzülmeden daha genel olduğu örneklerle ortaya konmuştur. Wardowski'nin bu düşüncesi genelleştirilmiş büzülmelere uygulanarak metrik uzayda Ciric tip genelleştirilmiş F -büzülme dönüşümü tanımlanmış ve bu tip dönüşümler için bazı sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların metrik uzayda küme değerli versiyonları ile fuzzy metrik uzay, quasi metrik uzay ve düzgün uzaylarda ki versiyonları elde edilebilir. Ayrıca bu sonuçların uygulamada nasıl kullanılabileceği de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Koçak. M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir, 2009.

[2] Soykan, Y.,Metrik Uzaylar ve Topolojisi, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2012.

[3] Mucuk, O., Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 2010.

[4] Granas, A., Dugundji, J., Fixed Point Theory, Sprinter, New York, 2003.

[5] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sahu, D. R., Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications, Springer, New York, 2009.

[6] Berinde, V., Approximating fixed points of weak contractions using the Picard Iteration, Nonlinear Analysis Forum, 9(2004), 43-53.

[7] Istratescu, V. I., Fixed Point Theory and Introduction, D. Reidel Publishing Company, Dorthrecht, 1981.

[8] Berinde, V., Iterative Approximation of fixed points, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.

[9] Pacurar, M., Iterative Methods for Fixed Point Approximation, Riso-print, Cluj-Napoca, 2009.

[10] Ciric, Lj. B., A generalization of Banach's contraction principle, Procceding of the American Mathematical Society, 45 (1974), 267-273.

[11] Ciric, Lj. B., Fixed Point Theory Contraction Mapping Principle, C-Print, Beograd, 2003.

[12] Wardowski, D., Fixed Point of a new type of contractive mappings in complete metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2012, 2012:94, 6 pp.

[13] Mınak, G., Helvacı, A., Altun, I., Ciric type generalized F -contractions on complete metrik spaces and fixed point results, Filomat, In Press.

[14] Banach, S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales, Fundamenta Mathematicae, 3 (1922), 133-181.