KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARK OPERATÖRLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

HALİL ANAÇ

HAZİRAN 2014

ÖZET

FARK OPERATÖRLERİNİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

ANAÇ, Halil
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Ali OLGUN
Haziran 2014, 130 sayfa

Bu tez, ikisi açıklama biri de temel bölüm olmak üzere toplam üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin amacı ve kaynaklar hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak bazı temel kavramlar açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde lineer fark denklemleri ve çözüm yöntemleri ele alınmış, lineer fark denklemlerinin çeşitli alanlardaki uygulamaları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark Operatörü, Kaydırma Operatörü, Euler Toplam Formülü, Lineer fark denklemi, Casorati matrisi, Değişken katsayılı fark denklemi

ABSTRACT

BASIC PROPERTIES OF DIFFERENCE OPERATORS

ANAC, Halil
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assc.Prof. Ali OLGUN
June 2014, 130 pages

There are three chapters in this thesis, two of them are about explanations and one of them is about basic chapter.

Information about the purpose of the thesis and resources are given in the first chapter.

Some definitions used in the thesis are represented in the second chapter.

Linear difference equations and solutions methods are discussed, applications of difference equations in various fields are investigated in the third chapter.

Key Words: Difference Operator, Shift Operator, Euler Summation Formula, Linear Difference Equation, Matrix of Casorati, Equation with Variable Coefficients

TEŞEKKÜR

Hayatımın başlangıcından itibaren olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme, değerli dostlarıma, yüksek lisans öğreniminde ve tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı ve ilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Ali OLGUN'a ve kıymetli arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Δ	Fark operatörü
E	Kaydırma operatörü
$\lfloor t \rfloor$	Taban fonksiyonu
$\sum$	Toplam
I	Birim operatör
Γ	Gama fonksiyonu
Δ_t	t değişkenine göre fark operatörü
Δ_r	r değişkenine göre fark operatörü
$t^{\underline{a}}$	a değişkenine göre düşen kuvvet
$\prod$	Çarpım sembolü

1. GİRİŞ

Fark denklemleri, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin yanısıra mühendislik, fizik, biyoloji, iktisat gibi çeşitli alanlardaki matematiksel modellerde karşımıza çıkmaktadır. Bu denklemlerde bağımsız değişken tamsayılar kümesinde tanımlıdır. Fark denklemlerinde fonksiyonların türevi yerine farkları hesaplanır. Bundan ötürü fark denklemleri daha çok sürekli olmayan problemlerle ilgilenir.

Bu tezde amacımız temel matematik yöntemlerle çalışabildiğimiz fark denklemlerinin tanımları yardımıyla çeşitli uygulamalarını incelemektir. Tezde ilk iki bölüm ilgileneceğimiz konu için temel kavramları teşkil etmektedir. Analizdeki temel bilgiler fark denklemleri için önemlidir. İlk olarak fark analizindeki temel kavramlar, üreteç fonksiyonu ve Euler toplam formülünü vereceğiz. Daha sonra lineer fark denklemlerinin temel teorisini geliştirip, bu denklemlerin kapalı formdaki çözümlerini bulmak için çeşitli yöntemler olan; sıfırlayıcılar, üreteç fonksiyonları ve z-dönüşümlerini açıklayacağız. Arkasından da lineer fark denklemlerinin çeşitli alanlardaki uygulamalarının çözümlerini bulup analizlerini yapacağız. Bu incelemeler yapılırken fark denklemleri ile diferansiyel denklemler arasındaki ilişkiler gözönüne alınmış ve birçok kavramın benzerlik gösterdiği görülmüştür.

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için W. G. Kelley ve A. C. Peterson un “ Difference Equations ” ve H. Bereketoğlu’nun “ Fark Denklemleri ” adlı kitaplarından faydalanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında lineer fark denklemleri ve bu denklemlerin çeşitli yöntemlerle çözümleri incelenmiştir. Ayrıca çeşitli konulardaki problemlerin lineer fark denklemleri yardımıyla çözümleri elde edilip analizi yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Fark Operatörü

Tanım 2.1.1. (Fark Operatörü)

$y(t)$, t reel ya da kompleks değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

eşitliği ile tanımlanan Δ operatörüne fark operatörü denir. [1-2]

Bu tezde y nin tanım kümesi olarak genelde $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ doğal sayılar kümesi alınmaktadır. Bununla beraber bazı durumlarda t değişkeninin değeri $[0,\infty)$ aralığından ya da kompleks düzlem gibi sürekli kümelerden alınabilmektedir.

Fark operatörü tanımındaki bir birimlik adım boyu zorunlu değildir. Bunun yerine, $h > 0$ olmak üzere $\Delta z(s)$ operatörü;

$$\Delta z(s) = z(s+h) - z(s)$$

şeklinde ifade edilir. z değişkeni ile y değişkeni arasındaki ilişkiyi kurmak için, $y(t) = z(th)$ denir ve $s = th$ için,

$$z(s+h) = z(th+h) = z(h(t+1)) = y(t+1)$$

elde edilir. Böylece,

$$\Delta_h z(s) = z(s+h) - z(s) = y(t+1) - y(t) = \Delta y(t)$$

olur.

Bazen iki veya daha fazla değişkenli bir fonksiyona fark operatörünü uygulamak gerekebilir. Bu durumda, Δ operatöründe bir altsimge kullanılır. Bu simge hangi değişkenin değiştirileceğini göstermek için kullanılır. Örneğin;

$$\Delta_t te^n = (t+1)e^n - te^n = e^n$$

olur ki bu t nin değişken olarak kullanıldığını, buna karşın;

$$\Delta_n te^n = te^{n+1} - te^n = t(e-1)e^n$$

ise n nin değişken olarak kullanıldığını gösterir.

Fark operatörüne fark operatörü tekrar uygulanırsa ikinci dereceden fark operatörü,

$$\begin{aligned}\Delta^2 y(t) &= \Delta(\Delta y(t)) = \Delta(y(t+1) - y(t)) \\ &= y(t+1+1) - y(t+1) - [y(t+1) - y(t)] \\ &= y(t+2) - 2y(t+1) + y(t)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde n. dereceden fark formülü aşağıdaki gibidir. [1]

$$\begin{aligned}\Delta^n y(t) &= y(t+n) - ny(t+n-1) + \frac{n(n-1)}{2!} y(t+n-2) + \ldots + (-1)^n y(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k) \qquad (2.1)\end{aligned}$$

şeklinde verilir. n. dereceden fark formülünün doğruluğu tümevarım ile gösterilebilir. Gerçekten de,

n=1 için (2.1) ifadesi yazılırsa,

$$\Delta y(t)=\sum_{k=0}^{1}(-1)^k\binom{1}{k}y(t+1-k)=y(t+1)-y(t)$$

olur. Bu ise n=1 için fark operatörünün tanımıdır ve ifadenin doğruluğunu gösterir.

Şimdi kabul edelim ki n=m için (2.1) ifadesi doğru olsun. Yani,

$$\Delta^m y(t)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}y(t+m-k)$$

$$=y(t+m)-my(t+m-1)+\frac{m(m-1)}{2!}y(t+m-2)-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}y(t+m-3)$$

$$+\ldots+(-1)^{m-1}my(t+1)+(-1)^m y(t)$$

eşitliği sağlansın; bu eşitliğin her iki tarafına fark operatörünü uygularsak;

$$\Delta^{m+1}y(t)=y(t+m+1)-my(t+m)+\frac{m(m-1)}{2!}y(t+m-1)-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}y(t+\mathrm{m}-2)$$

$$+\ldots+(-1)^{m-1}my(t+2)+(-1)^m y(t+1)-\mathrm{y}(t+m)+my(t+m-1)-\frac{m(m-1)}{2!}y(t+m-2)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}y(t+m-3)-\ldots-(-1)^{m-1}my(t+1)-(-1)^m y(t)$$

$$=y(t+m+1)-(m+1)y(t+m)+\left(\frac{m(m-1)}{2!}+m\right)y(t+m-1)$$

$$-\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}+\frac{m(m-1)}{2!}\right)y(t+m-2)+\ldots+[(-1)^m-(-1)^{m-1}m]y(t+1)-(-1)^m y(t)$$

$$= y(t+m+1)-(m+1)y(t+m)+\frac{m(m+1)}{2!}y(t+m-1)$$

$$-\frac{m(m-1)(m+1)}{3!}y(t+m-2)+...+(m+1)(-1)^m y(t+1)+(-1)^{m+1}y(t)$$

olarak yazılabilir.

Burada $m+1=n$ denirse,

$$\Delta^{m+1}y(t)=\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\binom{m+1}{k}y(t+m+1-k)$$

eşitliği elde edilir ki bu istenilendir. Buna göre n. dereceden fark operatörü;

$$\Delta^n y(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}y(t+n-k)$$

olarak ifade edilir.

Fark operatörü ile kullanılan basit bir operatör de kaydırma operatörüdür. Bu operatör aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım2.1.2. (Kaydırma Operatörü)

$y(t)$, t reel ya da kompleks değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$Ey(t)=y(t+1)$$

eşitliği ile tanımlanan operatöre kaydırma operatörü adı verilir.

Kaydırma operatörü tanımından,

$$E^2(y(t))=E(E(y(t)))=E(y(t+1))=y(t+1+1)=y(t+2)$$

elde edilir. Buradan kolayca,

$$E^k y(t)=y(t+k)$$

eşitliğinin doğru olduğu gösterilebilir.

Iy(t)=y(t) eşitliğini sağlayan operatör birim operatör olarak bilinir. Buradan,

$$\Delta = E - I$$

yazılabilir.

(2.1) eşitliği Cebir'de bildiğimiz Binom Teoremi'ne benzemektedir. Bunun için buradaki hesaplamalar cebirdeki ifadeler ile benzer özelliklere sahiptir. Yani

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\begin{aligned}(E-I)^n y(t) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} I^k E^{n-k} y(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} I^k y(t+n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k) \\ &= \Delta^n y(t)\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\Delta^n y(t) = (E-I)^n y(t)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\Delta^n = (E-I)^n$$

olur.

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$ ifadesini gözönüne alırsak,

$$\Delta = E - I$$
$$E = \Delta + I$$
$$E^n = (\Delta + I)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^k \Delta^{n-k}$$

yazılabilir. Bu ifade gözönüne alınarak E^n operatörü $y(t)$ fonksiyonuna uygulanırsa,

$$E^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^k \Delta^{n-k} y(t)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} y(t)$$

olur. Böylece,

$$E^n y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} y(t)$$

elde edilir. Fark operatörünün temel özellikleri bir teorem olarak aşağıdaki gibi verilebilir. [1]

Teorem 2.1.1.

(a) $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $\Delta^m(\Delta^n y(t)) = \Delta^{m+n} y(t)$

(b) $\Delta(y(t) + z(t)) = \Delta y(t) + \Delta z(t)$

(c) c keyfi bir sabit olmak üzere, $\Delta(\mathrm{c}\, y(t)) = c\Delta y(t)$

(d) $\Delta(y(t)z(t)) = y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t)$

(e) $\Delta(\frac{y(t)}{z(t)}) = \frac{z(t)\Delta y(t) - y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat

İspatları yaparken fark operatörünün tanımını gözönüne alacağız.

(a) $\Delta = E - I$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$\Delta^m \Delta^n = (E-I)^m (E-I)^n = (E-I)^{m+n} = \Delta^{m+n}$$

elde edilir.

(b)

$$\begin{aligned}\Delta(y(t)+z(t)) &= y(t+1)+z(t+1)-[y(t)+z(t)]\\ &= y(t+1)+z(t+1)-y(t)-z(t)\\ &= y(t+1)-y(t)+z(t+1)-z(t)\\ &= \Delta y(t)+\Delta z(t)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{c}\, y(t)) &= cy(t+1)-cy(t)\\ &= c[y(t+1)-y(t)]\\ &= c\Delta y(t)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\Delta(y(t)z(t)) &= y(t+1)z(t+1)-y(t)z(t)\\ &= y(t+1)z(t+1)-y(t)z(t)-y(t)z(t+1)+y(t)z(t+1)\\ &= y(t)z(t+1)-y(t)z(t)+y(t+1)z(t+1)-y(t)z(t+1)\\ &= y(t)[z(t+1)-z(t)]+z(t+1)[y(t+1)-y(t)]\\ &= y(t)\Delta z(t)+Ez(t)\Delta y(t)\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{y(t)}{z(t)}\right) &= \frac{y(t+1)}{z(t+1)}-\frac{y(t)}{z(t)}\\ &= \frac{z(t)y(t+1)-y(t)z(t+1)}{z(t)z(t+1)}\\ &= \frac{z(t)y(t+1)-y(t)z(t+1)+y(t)z(t)-y(t)z(t)}{z(t)z(t+1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{z(t)[y(t+1)-y(t)]-y(t)[z(t+1)-z(t)]}{z(t)Ez(t)}$$

$$= \frac{z(t)\Delta y(t)-y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}$$

Bu teoremdeki toplama, çarpma ve bölme kuralları bildiğimiz analizle benzerdir. Buna karşın (d) ve (e) şıklarında kaydırma operatörünün işin içine girdiğine dikkat etmeliyiz.
Şimdi bazı basit fonksiyonlara fark operatörünün uygulanması sonucu elde edilen karşılıklarını bir teorem ile verelim.

Teorem 2.1.2. a keyfi bir sabit olmak üzere,

(a) $\Delta(a^t) = (a-1)a^t$

(b) $\Delta(\sin at) = 2\sin\frac{a}{2}\cos a(t+\frac{1}{2})$

(c) $\Delta(\cos at) = -2\sin\frac{a}{2}\sin a(t+\frac{1}{2})$

(d) $\Delta(\log at) = \log(1+\frac{1}{t})$

(e) $\Delta(\log\Gamma(t)) = \text{logt}$

(Burada $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dt$ olarak bilinen Gama fonksiyonudur.)

İspat

(a) $\Delta(a^t) = a^{t+1} - a^t = aa^t - a^t = a^t(a-1) = (a-1)a^t$

(b) $\Delta(\sin at) = \sin a(t+1) - \sin at$

$$= \sin at\cos a + \cos at\sin a - \sin at$$

$$= \sin at(\cos a - 1) + \cos at\sin a \qquad [\cos a - 1 = -2\sin^2\frac{a}{2}]$$

$$= -2\sin^2\frac{a}{2}\sin at + \sin a\cos at$$

$$= -2\sin^2\frac{a}{2}\sin at + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\cos at$$

$$= 2\sin\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2}\cos at - \sin\frac{a}{2}\sin at\right)$$

$$= 2\sin\frac{a}{2}\cos a\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

(c)

$$\Delta(\cos at) = \cos a(t+1) - \cos at$$

$$= \cos at\cos a - \sin at\sin a - \cos at$$

$$= \cos at(\cos a - 1) - \sin at\sin a \qquad [\cos a - 1 = -2\sin^2\frac{a}{2}]$$

$$= -2\sin^2\frac{a}{2}\cos at - 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin at$$

$$= -2\sin\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2}\cos at + \cos\frac{a}{2}\sin at\right)$$

$$= -2\sin\frac{a}{2}\sin a\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

(d)

$$\Delta(\log at) = \log a(t+1) - \log at$$

$$= \log\frac{a(t+1)}{at}$$

$$= \log\left(\frac{t+1}{t}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

(e) $$\Delta(\log\Gamma(t)) = \log\Gamma(t+1) - \log\Gamma(t) \qquad [\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)]$$

$$= \log\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)}$$

$$= \log\frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t)}$$

$$= \log t$$

Teorem 2.1.2 de t yerine $t+k$ alınırsa formüller yine geçerli kalır.

Teorem 2.1.1. ve Teorem 2.1.2. deki formüller kullanılarak çok daha karmaşık ifadelerin farkları bulunabilir. Bununla beraber bazı durumlarda tanımı uygulamak daha kolay olabilir. Örneğin a^{t+k} fonksiyonuna tanım uygulanırsa,

$$\Delta a^{t+k} = a^{t+1+k} - a^{t+k} = aa^{t+k} - a^{t+k} = (a-1)a^{t+k}$$

olur. [1]

Örnek 2.1.1.

$\Delta(\sec \pi t)$ ifadesini hesaplamak için Teorem 2.1.2 yi uygulayalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}
\Delta(\sec \pi t) &= \Delta\left(\frac{1}{\cos \pi t}\right) \\
&= \frac{\cos \pi t \Delta 1 - 1 \Delta \cos \pi t}{\cos \pi t E \cos \pi t} \\
&= \frac{-1[-2\sin\frac{\pi}{2}\sin \pi(t+\frac{1}{2})]}{\cos \pi t \cos \pi(t+1)} \\
&= \frac{2(\sin \pi t \cos\frac{\pi}{2} + \cos \pi t \sin\frac{\pi}{2})}{\cos \pi t \cos \pi(t+1)} \\
&= \frac{2\cos \pi t}{\cos \pi t \cos \pi(t+1)} \\
&= \frac{2}{\cos \pi t \cos \pi - \sin \pi \sin \pi t} \\
&= \frac{-2}{\cos \pi t} \\
&= -2\sec \pi t
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Gerçekten de, fark operatörünün tanımı kullanılarak ta bu sonuç elde edilebilir:

$$
\begin{aligned}
\Delta \sec \pi t &= \sec \pi(t+1) - \sec \pi t \\
&= \frac{1}{\cos \pi(t+1)} - \frac{1}{\cos \pi t} \\
&= \frac{1}{\cos \pi t \cos \pi - \sin \pi t \sin \pi} - \frac{1}{\cos \pi t} \\
&= \frac{-1}{\cos \pi t} - \frac{1}{\cos \pi t} \\
&= \frac{-2}{\cos \pi t} \\
&= -2 \sec \pi t
\end{aligned}
$$

olur.

Analizdeki temel formüllerden birisi bir üslü ifadenin türevinin hesabıdır ve bu;

$$
\frac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}
$$

dir. Fark analizinde bu durum biraz farklıdır ve maalesef çok kullanışlı değildir. Yani, fark operatöründe t^n nin farkı

$$
\begin{aligned}
\Delta_t t^n &= (t+1)^n - t^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k - t^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} t^k
\end{aligned}
$$

olur ki bu basit bir ifade değildir.

Tanım 2.1.3. (Düşen Faktöriyel Kuvvet)

r nin değerine göre düşen faktöriyel kuvvet $t^{\underline{r}}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır. [1]

(a) Eğer $r = 1, 2, 3, ...$ şeklinde bir pozitif tamsayı ise o takdirde,

$$t^{\underline{r}} = t(t-1)(t-2)...(t-r+1)$$

(b) Eğer $r = 0$ ise $t^{\underline{0}} = 1$

(c) Eğer $r = -1, -2, ...$ şeklinde negatif bir tamsayı ise,

$$t^{\underline{r}} = \frac{1}{(t+1)(t+2)...(t-r)}$$

(d) Eğer r bir tamsayı değilse,

$$t^{\underline{r}} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$$

olarak tanımlanır.

$t^{\underline{r}}$ nin yukarıdaki tanımından anlaşılmaktadır ki, yukarıdaki formüller t ve r nin değerlerine göre anlam kazanmaktadır.

Örneğin , $(-2)^{\underline{-3}}$ tanımlı değildir. Çünkü (c) şıkkını gözönüne alırsak payda sıfır olur.

$(-\frac{1}{2})^{\underline{\frac{3}{2}}}$ için (d) şıkkındaki formül anlamsızdır. Çünkü $\Gamma(-1)$ tanımsızdır.

(d) şıkkında verilen $t^{\underline{r}}$ ifadesinin r nin bir tamsayı olması durumunda Gama fonksiyonunu tanımsız yapan belirli t değerleri hariç (a), (b), (c) şıklarını verdiği kolayca görülebilir. r bir tamsayı ise, basitçe (a) , (b) ve (c) şıklarını verdiği görülebilir.

r pozitif bir tamsayı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} t^{\underline{r}} &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= \frac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= \frac{t(t-1)\Gamma(t-1)}{\Gamma(t-r+1)} \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{t(t-1)(t-2)...(t-r+1)\Gamma(t-r+1)}{\Gamma(t-r+1)}$$

$$= t(t-1)(t-2)...(t-r+1)$$

olur ki bu (a) nın (d) nin bir özel hali olduğunu gösterir.

Benzer bir yol izlenerek,

$t^{\underline{r}} = \dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$ ifadesinde $r = 0$ için,

$$t^{\underline{0}} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1)} = 1$$

olur ki bu da (b) şıkkının (d) şıkkının özel bir hali olduğunu gösterir.

r nin negatif bir tamsayı olması durumunda;

$$t^{\underline{r}} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)\Gamma(t-r)}$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)(t-r-1)\Gamma(t-r-1)}$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)(t-r-1)(t-r-2)\Gamma(t-r-2)}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)(t-r-1)...(t+2)(t+1)\Gamma(t+1)}$$

$$= \frac{1}{(t+1)(t+2)...(t-r-1)(t-r)}$$

olur ki bu da (c) nin (d) nin özel bir hali olduğunu gösterir.

$n,k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq k$ ise, $n^{\underline{k}}$, *n* nin *k* ya göre permütasyonlarının sayısını hesaplar.

n nin *k* ya göre kombinasyonlarının sayısının aşağıdaki binom katsayısı ile

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \tag{2.2}$$

verildiğini biliyoruz.

(2.2) eşitliği göz önüne alındığında tanım 2.1.3 ün (a) şıkkından,

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{\Gamma(k+1)}$$

olarak yazılabilir.

Binom katsayıları ve düşen faktöriyel kuvveti arasındaki bu ilişki yardımıyla aşağıdaki genişletilmiş binom katsayısı tanımı verilebilir. [1]

Tanım 2.1.4. (Binom Katsayısı)

$\binom{t}{r}$ binom katsayısı düşen faktöriyel kuvvet ifadesi kullanılarak,

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca binom katsayılarının aşağıdaki çok kullanışlı özdeşlikleri sağladığı bilinmektedir. [1]

(i) $\binom{t}{r} = \binom{t}{t-r}$ (simetri)

(ii) $\binom{t}{r} = \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1}$ (parantez dışına çıkarma)

(iii) $\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1}$ (ekleme formülü)

Gama fonksiyonlarının özellikleri, binom katsayılarının özellikleri, tanım 2.1.1 (d) şıkkı ve tanım 2.1.2 kullanılarak bu ifadelerin düşen faktöriyel kuvvet tanımı ile de verilebileceğini gösterelim.

İspat

(i)
$$\binom{t}{r} = \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(r+1)}}{\Gamma(t-r+1)} = \frac{\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-t+r+1)}}{\Gamma(t-r+1)}$$
$$= \frac{t^{\underline{t-r}}}{\Gamma(t-r+1)} = \binom{t}{t-r}$$

(ii)
$$\binom{t}{r} = \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\dfrac{t\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)}}{r\Gamma(r)} = \frac{t}{r}\,\frac{\dfrac{\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)}}{\Gamma(r)}$$
$$= \frac{t}{r}\,\frac{(t-1)^{\underline{r-1}}}{\Gamma(r-1+1)} = \frac{t}{r}\binom{t-1}{r-1}$$

(iii)
$$\binom{t}{r} = \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\dfrac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{t\Gamma(t)}{r\Gamma(r)(t-r)\Gamma(t-r)}$$

$$\binom{t-1}{r} = \frac{(t-1)^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\dfrac{\Gamma(t)}{\Gamma(t-r)}}{\Gamma(r+1)} = \frac{\Gamma(t)}{r\Gamma(r)\Gamma(t-r)} \tag{2.3}$$

$$\binom{t-1}{r-1} = \frac{(t-1)^{\underline{r-1}}}{\Gamma(r)} = \frac{\dfrac{\Gamma(t)}{\Gamma(t-r+1)}}{\Gamma(r)} = \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(r)\Gamma(t-r+1)} \tag{2.4}$$

(2.3) ve (2.4) ü taraf tarafa toplarsak;

$$\binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1} = \frac{\Gamma(t)}{r\Gamma(r)\Gamma(t-r)} + \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(r)(t-r)\Gamma(t-r)}$$
$$= \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(r)\Gamma(t-r)}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{t-r}\right) = \frac{t\Gamma(t)}{r(t-r)\Gamma(r)\Gamma(t-r)} = \binom{t}{r}$$

Böylece,

$$\binom{t}{r} = \binom{t-1}{r} + \binom{t-1}{r-1}$$

olarak bulunur.

Binom katsayılarının farkı ve bir kuvvetin farkını içeren formüller düşen faktöriyel kuvvet tanımı kullanılarak aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 2.1.3.

(a) $\Delta_t t^{\underline{r}} = r\, t^{\underline{r-1}}$

(b) $r \neq 0$ için $\Delta_t \binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$

(c) $\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t}{t+1}$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat

Genel durumları göz önüne almadan önce (a) şıkkının ispatını yapalım. Pozitif bir r tamsayısı için;

(a)

$$\begin{aligned}
\Delta_t t^{\underline{r}} &= (t+1)^{\underline{r}} - t^{\underline{r}} \\
&= (t+1)t\ldots(t-r+2) - t(t-1)\ldots(t-r+1) \\
&= [t(t-1)\ldots(t-r+2)][(t+1)-(t-r+1)] \\
&= r\, t^{\underline{r-1}}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi r keyfi bir sayı olsun. Tanım 2.1.1 in (d) şıkkından,

$$\Delta_t t^{\underline{r}} = \Delta_t \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} = \frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}$$

$$= \frac{(t+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{(t-r+1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)}$$

$$= [t+1-t+r-1]\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)}$$

olarak elde edilir.

(b)

$$\Delta_t \binom{t}{r} = \Delta_t \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{rt^{\underline{r-1}}}{\Gamma(r+1)} = \frac{rt^{\underline{r-1}}}{r\Gamma(r)} = \frac{t^{\underline{r-1}}}{\Gamma(r)} = \binom{t}{r-1}$$

(c)

$$\Delta_t \binom{r+t}{t} = \binom{r+t+1}{t+1} - \binom{r+t}{t} \qquad \text{(Ekleme Formülünden)}$$

$$= \binom{r+t}{t+1} + \binom{r+t}{t} - \binom{r+t}{t}$$

$$= \binom{r+t}{t+1}$$

olur.

Örnek 2.1.2. $y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = t(t-1)$ fark denkleminin bir çözümünü düşen kuvvet tanımından faydalanarak bulalım.

Yukarıdaki tanım ve teorem gözönüne alındığında bu fark denklemi,

$$\Delta^2 y(t) = t^{\underline{2}}$$

formunda yazılabilir.

Teorem 2.1.3 ten , $\Delta^2 t^{\underline{4}} = \Delta 4t^{\underline{3}} = 12t^{\underline{2}}$ dir. Böylece $y(t) = \frac{t^{\underline{4}}}{12}$ olur. Bu da fark denkleminin bir çözümüdür.

2.2. Toplam

Bu kısımda fark operatörünün tersi olarak tanımlanan belirsiz toplam kavramından bahsedeceğiz. [1]

Tanım 2.2.1.

$t \geq t_0$ için $\Delta F(t) = f(t)$ olsun. Bu durumda $t \geq t_0$ için,

$$\sum f(t) = F(t) + c(t)$$

şeklinde tanımlanan $\sum$ operatörüne ters fark operatörü veya belirsiz toplam denir. $F(t)$ fonksiyonuna da $f(t)$ nin ters farkı denir. (Burada $c(t)$ sabit bir fonksiyondur.)
y nin tanım kümesindeki tüm t ler için,

$$\Delta\left(\sum y(t)\right) = y(t)$$

dir.
Belirsiz toplam bildiğimiz diferensiyel kalkülüsteki belirsiz integrale benzer bir rol oynar. Biliyoruz ki,

$$\frac{d}{dt}\left(\int y(t)dt\right) = y(t)$$

dir. Ayrıca bir fonksiyonun belirsiz integralinin tek olmadığını biliyoruz. Örneğin,

$$\int \cos t dt = \sin t + c$$

ifadesi c nin her değeri için değişir. (c herhangi bir sabittir.)
Belirsiz toplamın da tek olmadığını aşağıdaki örnek ile açıklayalım.

Örnek 2.2.1. $\sum 6^t$ ifadesini bulalım.

Çözüm

Teorem 2.1.2 in (a) şıkkından,

$$\Delta 6^t = 5 6^t \Rightarrow \Delta \frac{6^t}{5} = 6^t$$

yazılabilir. Buradan görülmektedir ki, $\frac{6^t}{5}$ ifadesi 6^t nin bir belirsiz toplamıdır. Şimdi bundan başka nelerin olabildiğini belirleyelim. Bunun için;
$c(t)$ yi, 6^t nin tanım kümesiyle aynı olan ve $\Delta c(t) = 0$ olan bir fonksiyon olarak alalım. Bu durumda,

$$\Delta\left(\frac{6^t}{5} + c(t)\right) = \Delta\left(\frac{6^t}{5}\right) + \Delta c(t) = \frac{\Delta 6^t}{5} = \frac{5 6^t}{5} = 6^t$$

dir. Böylece, $\frac{6^t}{5} + c(t)$ de 6^t nin belirsiz bir toplamıdır. Bu durumda

$$\sum 6^t = \frac{6^t}{5} + c$$

olarak yazılabilir. (Burada *c* herhangi bir sabittir.)
Buna göre aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.2.1.

Eğer *z*(*t*), *y*(*t*) nin belirsiz bir toplamı ise, o takdirde *y*(*t*) nin belirsiz toplamları

$$\sum y(t) = z(t) + c(t)$$

şeklindedir. (Burada $c(t)$, $y(t)$ ile aynı tanım bölgesine sahiptir ve $\Delta c(t)=0$ dır.)

Örnek 2.2.2. (Süreklilik)

$c(t)$ fonksiyonunun nasıl bir fonksiyon olduğu, $y(t)$ nin tanım kümesine bağlıdır. Öncelikle, $c(t)$ nasıl bir fonksiyondur sorusunun cevabını bulalım. Bunun için, $c(t)$ tanım kümesi doğal sayılar olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\Delta c(t)=c(t+1)-c(t)=0$$

dır. Böylece, $t=1,2,...$ için

$$c(1)=c(2)=c(3)=...$$

elde edilir. Yani, $c(t)$ sabit bir fonksiyondur.
Diğer taraftan y nin tanım kümesi tüm reel sayılar kümesi ise; o takdirde

$$\Delta c(t)=c(t+1)-c(t)=0$$

olur ki bu her t için, $c(t+1)=c(t)$ olmasıdır. Bunun anlamı $c(t)$ nin 1-periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğudur. Örneğin, $c(t)=2\sin 2\pi t$ ve $c(t)=-5\cos 4\pi(t-\pi)$ fonksiyonlarını inceleyelim. [1]
$c(t)=2\sin 2\pi t$ için,

$$c(t+1)=2\sin 2\pi(t+1)=2\sin 2\pi t\cos 2\pi+2\sin 2\pi\cos 2\pi t=2\sin 2\pi t=c(t)$$

elde edilir. Böylece $c(t)=2\sin 2\pi t$ fonksiyonu, bir periyotlu periyodik bir fonksiyondur.
$c(t)=-5\cos 4\pi(t-\pi)$ için,

$$\begin{aligned}c(t+1)&=-5\cos 4\pi(t+1-\pi)\\&=-5\cos 4\pi(t-\pi)\cos 4\pi+5\sin 4\pi\sin 4\pi(t-\pi)\\&=-5\cos 4\pi(t-\pi)=c(t)\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $c(t) = -5\cos 4\pi(t-\pi)$ fonksiyonu, bir periyotlu periyodik bir fonksiyondur.

Buna göre aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2.1.

a herhangi bir reel sayı olmak üzere $y(t)$, $\{a, a+1, a+2, ...\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $z(t)$, $y(t)$ nin belirsiz bir toplamı olsun. $y(t)$ nin her belirsiz toplamı c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$\sum y(t) = z(t) + c$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.2.2.

a bir sabit ve $\Delta c(t) = 0$ olmak üzere,

(a) $\sum a^t = \dfrac{a^t}{a-1} + c(t)$, $(a \neq 1)$

(b) $\sum \sin at = \dfrac{-\cos a\left(t-\dfrac{1}{2}\right)}{2\sin\dfrac{a}{2}} + c(t)$, $(a \neq 2n\pi)$

(c) $\sum \cos at = \dfrac{\sin a\left(t-\dfrac{1}{2}\right)}{2\sin\dfrac{a}{2}} + c(t)$, $(a \neq 2n\pi)$

(d) $\sum \log t = \log\Gamma(t) + c(t)$, $(t > 0)$

(e) $\sum t^{\underline{a}} = \dfrac{t^{\underline{a+1}}}{a+1} + c(t)$, $(a \neq -1)$

(f) $\sum \binom{t}{a} = \binom{t}{a+1} + c(t)$

(g) $\sum \binom{a+t}{t} = \binom{a+t}{t-1} + c(t)$

dir.

İspat

(a)

$\sum a^t = F(t) + c(t)$ olsun. Her iki tarafın farkı alınırsa,

$$\begin{aligned} \Delta\left(\sum a^t\right) &= \Delta\left(F(t) + c(t)\right) \\ a^t &= \Delta F(t) + \Delta c(t) \\ &= \Delta F(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.1.2 nin (a) şıkkından $\Delta a^t = (a-1)a^t$ olduğundan,

$$a^t = \frac{\Delta a^t}{a-1}$$

$$a^t = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right)$$

olur. Dolayısıyla,

$$F(t) = \frac{a^t}{a-1}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\sum a^t = \frac{a^t}{a-1} + c(t)$$

olarak bulunur.

(b) $a \neq 2n\pi$ için $\sum \sin at = F(t) + c(t)$ olsun. Her iki tarafın farkı alınırsa,

$$\Delta\left(\sum \sin at\right) = \Delta\left(F(t) + c(t)\right)$$
$$\sin at = \Delta F(t) + \Delta c(t)$$
$$\sin at = \Delta F(t)$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.1.2 nin (c) şıkkından, $\Delta \cos at = -2\sin\frac{a}{2}\sin a\left(t+\frac{1}{2}\right)$ olduğu için,

$t = t - \frac{1}{2}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Delta \cos a\left(t-\frac{1}{2}\right) = -2\sin\frac{a}{2}\sin a\left(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\sin at = -\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\Delta\cos a\left(t-\frac{1}{2}\right)$$
$$\sin at = \Delta\left(-\frac{\cos a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}\right)$$
$$F(t) = \frac{-\cos a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}$$
$$\sum \sin at = -\frac{\cos a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + c(t)$$

elde edilir.

(c) $a \neq 2n\pi$ için $\sum \cos at = F(t) + c(t)$ olsun. Her iki tarafın farkı alınırsa,

$$\Delta\left(\sum \cos at\right) = \Delta\left(F(t) + c(t)\right)$$
$$\cos at = \Delta F(t) + \Delta c(t)$$
$$\cos at = \Delta F(t)$$

olur. Teorem 2.1.2 nin (b) şıkkından, $\Delta \sin at = 2\sin\frac{a}{2}\cos a\left(t+\frac{1}{2}\right)$ olduğunu biliyoruz.

$t = t - \frac{1}{2}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Delta \sin a\left(t-\frac{1}{2}\right) = 2\sin\frac{a}{2}\cos a\left(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

olur. Buradan,

$$\Delta \sin a\left(t-\frac{1}{2}\right) = 2\sin\frac{a}{2}\cos at$$
$$\cos at = \Delta\left(\frac{\sin a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}\right)$$
$$F(t) = \frac{\sin a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}}$$
$$\sum \cos at = \frac{\sin a\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + c(t)$$

şeklinde bulunur.

(d) $t>0$ için $\sum \log t = F(t) + c(t)$ olsun. Her iki tarafın farkı alınırsa,

$$\Delta\left(\sum \log t\right) = \Delta\left(F(t) + c(t)\right)$$
$$\log t = \Delta F(t) + \Delta c(t)$$

$$\log t = \Delta F(t)$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.1.2 nin (e) şıkkından $\Delta \log \Gamma(t) = \log t$ olduğundan,

$$F(t) = \log \Gamma(t)$$
$$\sum \log t = \log \Gamma(t) + c(t)$$

olarak elde edilir.

(e) $a \neq -1$ için $\sum t^{\underline{a}} = F(t) + c(t)$ olsun. Her iki tarafın farkı alınırsa,

$$\Delta\left(\sum t^{\underline{a}}\right) = \Delta\left(F(t) + c(t)\right)$$
$$t^{\underline{a}} = \Delta F(t) + \Delta c(t)$$
$$t^{\underline{a}} = \Delta F(t)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.1.3 ün (a) şıkkından, $\Delta_t t^{\underline{a}} = a t^{\underline{a-1}}$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$t^{\underline{a-1}} = \frac{\Delta_t t^{\underline{a}}}{a}$$
$$t^{\underline{a-1}} = \Delta_t \left(\frac{t^{\underline{a}}}{a} \right)$$

yazılabilir.

$a = a+1$ dönüşümü yapılırsa,

$$t^{\underline{a+1-1}} = \Delta_t \left(\frac{t^{\underline{a+1}}}{a+1} \right)$$

olur. Yani,

$$t^{\underline{a}} = \Delta_t \left(\frac{t^{\underline{a+1}}}{a+1} \right)$$

dir. Dolayısıyla,

$$F(t) = \frac{t^{\underline{a+1}}}{a+1}$$

olur. Buradan,

$$\sum t^{\underline{a}} = \frac{t^{\underline{a+1}}}{a+1} + c(t)$$

olarak bulunur.

(f) $\sum \binom{t}{a} = F(t) + c(t)$ olsun. Her iki tarafın farkı alınırsa,

$$\Delta\left(\sum \binom{t}{a} \right) = \Delta\big(F(t) + c(t)\big)$$

$$\binom{t}{a} = \Delta F(t) + \Delta c(t)$$

$$\binom{t}{a} = \Delta F(t)$$

olur.

Teorem 2.1.3 ün (b) şıkkından, $a \neq 0$ için $\Delta_t \binom{t}{a} = \binom{t}{a-1}$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\Delta_t \binom{t}{a+1} = \binom{t}{a+1-1}$$

$$\Delta_t \binom{t}{a+1} = \binom{t}{a}$$

elde edilir. Yani,

$$F(t)=\binom{t}{a+1}$$

$$\sum\binom{t}{a}=\binom{t}{a+1}+c(t)$$

olarak bulunur.

(g) $\sum\binom{a+t}{t}=F(t)+c(t)$ olsun. Her iki tarafın farkı alınırsa,

$$\Delta\left(\sum\binom{a+t}{t}\right)=\Delta\left(F(t)+c(t)\right)$$

$$\binom{a+t}{t}=\Delta F(t)$$

olur.

Teorem 2.1.3 ün (c) şıkkından, $\Delta_t\binom{a+t}{t}=\binom{a+t}{t+1}$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\Delta_t\binom{a+t}{t-1}=\binom{a+t}{t}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$F(t)=\binom{a+t}{t-1}$$

$$\sum\binom{a+t}{t}=\binom{a+t}{t-1}+c(t)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.2.2. $t=0$, 1 , 2 için $y(0)=-1$ ve $y(1)=3$ başlangıç değerleri ile birlikte $y(t+2)-2y(t+1)+y(t)=t^2$ fark denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
y(t+2)-2y(t+1)+y(t) &= y(t+2)-y(t+1)-y(t+1)+y(t) \\
&= [y(t+2)-y(t+1)]-[y(t+1)-y(t)] \\
&= \Delta y(t+1)-\Delta y(t) \\
&= \Delta(y(t+1)-y(t)) \\
&= \Delta(\Delta y(t)) \\
&= \Delta^2 y(t)
\end{aligned}
$$

Böylece $\Delta^2 y(t)=t^2$ olur. Sonuç 2.1.1 ve Teorem 2.2.2 nin (e) şıkkından, c ve d keyfi sabitler sabitler olmak üzere,

$$\Delta y(t)=\frac{t^3}{3}+c$$

olarak elde edilir. Buradan da c ve d keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(t)=\frac{t^4}{12}+ct+d$$

olur.

$t=0$ için,

$$y(0)=\frac{0^4}{12}+c0+d$$

$$d=-1$$

$$y(t)=\frac{t^4}{12}+ct-1$$

elde edilir.

$t=1$ için,

$$y(1)=\frac{1^4}{12}+c1-1$$
$$3=\frac{1(1-1)(1-2)(1-3)}{12}+c1-1$$
$$3+1=c$$
$$c=4$$

bulunur.

Böylece verilen problemin tek çözümü;

$$y(t)=\frac{t^4}{12}+4t-1$$

olarak bulunur.

Şimdi belirsiz toplamın genel özelliklerini bir teorem ile verelim. Bu teoremde yer alan (c) ve (d) şıkları kısmi toplam olarak bilinir.

Teorem 2.2.3.

$\Delta Y(t)=y(t)$ ve $\Delta Z(t)=z(t)$ olsun.

(a) $\sum(y(t)+z(t))=\sum y(t)+\sum z(t)$ (Lineerlik özelliği)

(b) a herhangi bir sabit olmak üzere, $\sum ay(t)=a\sum y(t)$

(c) $\sum(y(t)\Delta z(t))=y(t)z(t)-\sum Ez(t)\Delta y(t)+c(t)$

(d) $\sum(Ey(t)\Delta z(t))=y(t)z(t)-\sum z(t)\Delta y(t)+c(t)$

(Burada $c(t)$ sabit bir fonksiyondur.)

İspat

(a) Fark operatörünün lineerliğinden,

$$\Delta(Y(t)+Z(t)) = \Delta Y(t) + \Delta Z(t) = y(t) + z(t)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\sum (y(t)+z(t)) &= Y(t)+Z(t)+c(t)\\ &= \sum y(t) + \sum z(t)\end{aligned}$$

olur.

(b) a herhangi bir sabit olsun. Teorem 2.1.1. in (c) şıkkından,

$$\Delta aY(t) = a\Delta Y(t) = ay(t)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\sum ay(t) = aY(t) + c(t) = a\sum y(t)$$

olur.

(c) Teorem 2.1.1. in (d) şıkkından,

$$\Delta(y(t)z(t)) = y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t)$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 2.1.4 den,

$$\sum (y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t)) = y(t)z(t) + c(t)$$

elde edilir. Teorem 2.2.3. ün (a) şıkkından,

$$\sum (y(t)\Delta z(t)) + \sum (Ez(t)\Delta y(t)) = y(t)z(t) + c(t)$$

olur. Buradan,

$$\sum(y(t)\Delta z(t)) = y(t)z(t) - \sum(Ez(t)\Delta y(t)) + c(t)$$

olarak bulunur.

(d) Teorem 2.1.1. in (d) şıkkından,

$$\Delta(z(t)y(t)) = z(t)\Delta y(t) + Ey(t)\Delta z(t)$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 2.1.4 den,

$$\sum(z(t)\Delta y(t) + Ey(t)\Delta z(t)) = z(t)y(t) + c(t)$$

elde edilir.Teorem 2.2.3. ün (a) şıkkından,

$$\sum(z(t)\Delta y(t)) + \sum(Ey(t)\Delta z(t)) = z(t)y(t) + c(t)$$

olur. Buradan,

$$\sum(Ey(t)\Delta z(t)) = z(t)y(t) - \sum(z(t)\Delta y(t)) + c(t)$$

$$\sum(Ey(t)\Delta z(t)) = y(t)z(t) - \sum(z(t)\Delta y(t)) + c(t)$$

elde edilir.

İntegral hesabı yapmak için kısmi integrasyon formülünü kullandığımız gibi toplamları hesaplamak için de kısmi toplam formülleri kullanılır. Üstelik bu formüller, fark denklemlerinin analizinde de büyük bir öneme sahiptir.

Örnek 2.2.3. $a \neq 1$ için $\sum ta^t$ ifadesini hesaplayalım.

Çözüm $y(t) = t$ ve $\Delta z(t) = a^t$ seçelim. Böylece,

$$z(t) = \frac{a^t}{a-1}$$

olur. Teorem 2.2.3. ün (c) şıkkından,

$$\sum ta^t = t\frac{a^t}{a-1} - \sum \frac{a^{t+1}}{a-1}\Delta t + c(t)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}\sum ta^t &= \frac{ta^t}{a-1} - \frac{a}{a-1}\sum a^t + c(t)\\ &= \frac{ta^t}{a-1} - \frac{a}{(a-1)^2}a^t + c(t)\end{aligned}$$

elde edilir. (Burada $\Delta c(t) = 0$ dır.)

Örnek 2.2.4. $\sum \binom{t}{5}\binom{t}{2}$ ifadesini hesaplayalım.

Çözüm $y(t) = \binom{t}{2}$ ve $\Delta z(t) = \binom{t}{5}$ olarak seçelim.

Teorem 2.2.1. in (f) şıkkından,

$$z(t) = \binom{t}{6}$$

olur. Teorem 2.2.3. ün (c) şıkkından,

$$\sum \binom{t}{5}\binom{t}{2} = \binom{t}{6}\binom{t}{2} - \sum \binom{t+1}{6}\binom{t}{1} + c(t)$$

olarak bulunur.

$y_1(t) = \binom{t}{1}$ ve $\Delta z_1(t) = \binom{t+1}{6}$ olarak seçilirse,

$$z_1(t)=\binom{t+1}{7}$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$\sum\binom{t+1}{6}\binom{t}{1}=\binom{t}{1}\binom{t+1}{7}-\sum\binom{t+2}{7}+c(t)$$

olur. Böylece,

$$\sum\binom{t}{5}\binom{t}{2}=\binom{t}{6}\binom{t}{2}-\binom{t+1}{7}t+\binom{t+2}{8}+c(t)$$

olarak elde edilir. (Burada $\Delta c(t)=0$ dır.)

Bu bölümün kalan kısmında, $y(t)$ nin tanım kümesini $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$ doğal sayılar kümesi olarak alacağız. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere, $y(t)$ fonksiyonu için dizi notasyonunu $y(t)\leftrightarrow\{y_n\}$ şeklinde kullanacağız. Ayrıca kullanımda uygunluk olması için, $a>b$ olduğu zaman $\sum_{k=a}^{b} y_k=0$ olarak alacağız. Bu durumda,

sabit bir m ve $n\geq m$ için $\Delta_n\left(\sum_{k=m}^{n-1} y_k\right)=y_n$, sabit bir p ve $p\geq n$ için

$$\Delta_n\left(\sum_{k=n}^{p} y_k\right)=\sum_{k=n+1}^{p} y_k-\sum_{k=n}^{p} y_k=-y_n$$

olur.

Sonuç 2.1.1. ifade etmektedir ki bazı c sabitleri için,

$$\sum y_n=\sum_{k=m}^{n-1} y_k+c \ ;(m\leq n) \tag{2.5}$$

eşitliği ve alternatif olarak bazı d sabitleri için,

$$\sum y_n = -\sum_{k=n}^{p} y_k + d \quad ; (n \leq p) \tag{2.6}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca, (2.5) ve (2.6) eşitlikleri belirli toplamlardan belirsiz toplamlara geçiş için bir yol göstermektedir.

Örnek 2.2.5. $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ belirli toplamını hesaplayalım.

Çözüm

$n = 2,3,...$ için (2.5) eşitliği ve Teorem 2.2.2 nin (a) şıkkından,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum\left(\frac{2}{3}\right)^n + c$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} + c$$

$$= -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + c$$

elde edilir. c yi hesaplamak için $n = 2$ alınırsa,

$$\frac{2}{3} = -3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + c$$

olur. Buradan, $c = 2$ bulunur. $n = 2,3,...$ için,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

bulunur.

Belirli toplamı hesaplamak için kalkülüsün temel teoremine benzeyen kullanışlı bir formül vardır. Şimdi bu formülü bir teorem ile ifade edelim.

Teorem 2.2.4.

z_n, y_n nin belirsiz bir toplamı ise, o takdirde

$$\sum_{k=m}^{n-1} y_k = [z_k]_m^n = z_n - z_m$$

dir.

Örnek 2.2.6. $\sum_{k=1}^{l} k^2$ yi hesaplayalım.

Çözüm Bunun için,

$$k^{\underline{1}} = k \text{ ve } k^{\underline{2}} = k(k-1)$$

eşitliklerinden faydalanalım. Bu durumda,

$$k^2 = k(k-1) + k = k^{\underline{1}} + k^{\underline{2}}$$

olacağından, ifadenin belirsiz toplamı

$$\sum k^2 = \sum (k^{\underline{1}} + k^{\underline{2}})$$

şeklinde yazılabilir. Belirsiz toplam lineer olduğundan,

$$\begin{aligned} \sum k^2 &= \sum k^{\underline{1}} + \sum k^{\underline{2}} \\ &= \frac{k^{\underline{2}}}{2} + \frac{k^{\underline{3}}}{3} + c \qquad \text{(Teorem 2.2.2. (c))} \end{aligned}$$

olur. Teorem 2.2.4. gereğince de ifadenin belirli toplamı;

$$\sum_{k=1}^{l} k^2 = [\frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3}]_1^{l+1}$$
$$= \frac{(l+1)^2}{2} + \frac{(l+1)^3}{3} - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}$$
$$= \frac{(l+1)l}{2} + \frac{(l+1)l(l-1)}{3}$$
$$= (l+1)l\left(\frac{1}{2} + \frac{l-1}{3}\right)$$
$$= \frac{(l+1)l(2l+1)}{6}$$

olarak elde edilir.

Aşağıdaki teoremde belirli toplamlarda kısmi toplam metodunun bir çeşidini vereceğiz.

Teorem 2.2.5. $m < n$ olmak üzere,

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \Delta b_k = [a_k b_k]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta a_k) b_{k+1}$$

dir.

İspat

Teorem 2.2.3. ün (c) şıkkından,

$$\sum a_n \Delta b_n = a_n b_n - \sum (\Delta a_n) b_{n+1}$$

olarak yazılabilir.

$y(n) = a_n$ ve $z(n) = b_n$ olarak seçilirse, eşitlik (2.6) dan,

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - \sum_{k=m}^{n-1} (\Delta a_k) b_{k+1} + c$$

olur. $n=m+1$ olarak alınırsa bu son eşitlik,

$$a_m\Delta b_m = a_{m+1}b_{m+1} - (\Delta a_m)b_{m+1} + c$$

olur. Buradan,

$$a_m b_{m+1} - a_m b_m = a_{m+1}b_{m+1} - a_{m+1}b_{m+1} + a_m b_{m+1} + c$$

yazılabilir. Bu ise,

$$c = -a_m b_m$$

olması demektir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} a_m\Delta b_m &= a_{m+1}b_{m+1} - (\Delta a_m)b_{m+1} - a_m b_m \\ a_m\Delta b_m &= a_{m+1}b_{m+1} - a_m b_m - (\Delta a_m)b_{m+1} \\ a_m\Delta b_m &= [a_k b_k]_m^{m+1} - (\Delta a_m)b_{m+1} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_k\Delta b_k = [a_k b_k]_m^n - \sum_{k=m}^{n-1}(\Delta a_k)b_{k+1}$$

yazılabilir. Bu ise istenilendir.

Uyarı 2.2.1.

Teorem 2.2.5 in eşdeğeri olarak verilen,

$$\sum_{k=m}^{n-1} c_k d_k = d_n \sum_{k=m}^{n-1} c_k - \sum_{k=m}^{n-1}\left(\sum_{i=m}^{k} c_i\right)\Delta d_k$$

ifadesi Abel toplam formülü olarak bilinir. [1]

Örnek 2.2.7.

$\sum_{k=1}^{n-1} k3^k$ ifadesini hesaplayalım.

Çözüm

Teorem 2.2.5. te,

$a_k = k$ ve $\Delta b_k = 3^k$ olarak alalım. Buradan,

$$b_k = \frac{3^k}{2}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k3^k = \left[k.\frac{3^k}{2}\right]_1^n - \sum_{k=1}^{n-1}\left(1.\frac{3^{k+1}}{2}\right)$$

olur. Teorem 2.2.4. ve Teorem 2.2.2. nin (a) şıkkından,

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \left[\frac{3^k}{2}\right]_1^n = \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3^n - 3}{2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k3^k = \left(\frac{n3^n}{2} - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3^n - 3}{2}\right)$$

$$= \frac{2n3^n - 6 - 33^n + 9}{4}$$

$$= \frac{(2n-3)3^n + 3}{4}$$

olarak bulunur.

Benzer sonuç, örnek 2.2.3. teki hesaplamadan da elde edilebilir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}\sum n3^n &= \frac{n3^n}{2} - \frac{3}{(3-1)^2}3^n + c \\ &= \frac{n3^n}{2} - \frac{3^{n+1}}{4} + c\end{aligned}$$

olur.

Teorem 2.2.4. ten,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k3^k &= \frac{n3^n}{2} - \frac{3^{n+1}}{4} - \left(\frac{3^1}{2} - \frac{3^2}{4}\right) \\ &= \frac{(2n-3)3^n + 3}{4}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.2.7. de kullanılan metodlar sayesinde, $p(n)$, n'e bağlı bir polinom olmak üzere, $p(n)\binom{n}{a}$, $p(n)\sin an$, $p(n)\cos an$, $p(n)a^n$ formundaki her belirli toplamı hesaplayabiliriz. Fakat p. dereceden polinomları hesaplamak için tekrar tekrar kısmi toplam almak zorundayız. Bir fonksiyonun n. dereceden farkı için eşitlik (2.1.1) e dayalı özel bir toplam metodu;

$$\begin{aligned}\Delta^n y(0) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(n-k) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} y(i)\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada, $i = n-k$ indis değiştirmesi yaptık ve $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ özelliğini kullandık.

Böylece,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y(i) = (-1)^n \Delta^n y(0) \qquad (2.7)$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.2.8.

$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{i+a}{m}$ ifadesini hesaplayalım.

Çözüm

(2.7) ifadesinde $y(i)=\binom{i+a}{m}$ olsun. Teorem (2.1.3.) ün (b) şıkkından,

$$\Delta^n\binom{i+a}{m}=\binom{i+a}{m-n}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\Delta^n y(0)=\binom{a}{m-n}$$

elde edilir.
Böylece (2.7) eşitliğinden,

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{i+a}{m}=(-1)^n\binom{a}{m-n}$$

olur.

2.3. Doğurucu Fonksiyon ve Yaklaşık Toplam

Klasik analizdeki çoğu integralde olduğu gibi fark analizinde de çoğu toplam basit fonksiyonlar cinsinden ifade edilemez. $y(t)=\frac{1}{t}$ gibi fonksiyonlar kolayca integrallenebilirdir. Şöyleki;

$b > a > 0$ olmak üzere,

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \log\frac{b}{a}$$

dır. Fakat $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ toplamına karşılık gelen basit bir formül yoktur.

İleride vereceğimiz Euler toplam formülü ilgili integral hesaplanabildiği takdirde, bize bir toplam için yaklaşık bir teknik verecektir. Bu sonucu formüle etmek için fark denklemlerinin analizinde önemli olan kendini üreten bir doğurucu fonksiyon ve Bernoulli polinomları olarak bilinen özel bir fonksiyon ailesini kullanacağız. [2]

Tanım 2.3.1.

$\{y_k(t)\}$ (genellikle terimleri sabit fonksiyon olan) bir fonksiyon dizisi olsun.

(a) Eğer $g(t,x)$, sıfırın açık aralığındaki tüm x ler için $g(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} y_k(t)x^k$ şeklinde açılıma sahip bir fonksiyon ise g ye $\{y_k(t)\}$ için doğurucu fonksiyon denir.

(b) Eğer $h(t,x)$, sıfırın açık aralığındaki tüm x ler için $h(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_k(t)x^k}{k!}$ şeklinde açılıma sahip bir fonksiyon ise h ye $\{y_k(t)\}$ için üstel doğurucu fonksiyon denir.

(c) Herbir t için $y_k(t)$, $x=0$ noktasında x'e karşılık gelen $g(t,x)$ in kuvvet serilerinde k. dereceden bir katsayıdır. Biliyoruz ki bu katsayılar aşağıdaki formülle hesaplanabilir.

$$y_k(t)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial x^k}g(t,0)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}h(t,0) \tag{2.8}$$

Örnek 2.3.1.

Bazı $f(t)$ fonksiyonları için $y_k(t)=(f(t))^k$ olsun. $y_k(t)$ için doğurucu bir fonksiyonu bulmak için $\sum_{k=0}^{\infty}(f(t))^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(f(t)x)^k$ serisini hesaplamak zorundayız.

Bu seri bir geometrik serisidir. $|f(t)x| < 1$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(f(t)x)^k = \frac{1}{1-f(t)x} = g(t,x)$$

dir. Her iki tarafın türevini alırsak,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-f(t)x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty}(f(t))^k x^k$$

Buradan,

$$\frac{f(t)}{(1-f(t)x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(f(t))^k x^{k-1}$$

$$\frac{xf(t)}{(1-f(t)x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(f(t))^k x^k$$

olur. Yani $\dfrac{xf(t)}{(1-f(t)x)^2}$, $\left\{k(f(t))^k\right\}$ dizisi için bir doğurucu fonksiyondur.

$\left\{(f(t))^k\right\}$ dizisi için üstel doğurucu fonksiyon ise;

$$e^{f(t)x} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(f(t))^k x^k}{k!}$$

dir.

Tanım 2.3.2.

$\dfrac{xe^{tx}}{e^x-1}$ fonksiyonu x in kuvvetleri cinsinden seriye açılırsa,

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(t)}{k!}x^k$$

olur. Buradaki $B_k(t)$ polinomlarına Bernoulli polinomları adı verilir ve $B_k(t)$ ile gösterilir.

Diğer bir deyişle $\frac{xe^{tx}}{e^x - 1}$, $B_k(t)$ dizisi için üstel doğurucu bir fonksiyondur.

Tanım 2.3.3.

Bernoulli sayıları, B_k ile gösterilir. $t = 0$ noktasında k. dereceden Bernoulli polinomunun değeri, $B_k = B_k(0)$ ile verilir.

İlk birkaç Bernoulli polinomunu hesaplamak için Tanım (2.3.2.) deki eşitliği kullanacağız. Önce eşitliğin her iki tarafını $\frac{e^x - 1}{x}$ ile çarpalım. Böylece,

$$e^{tx} = \frac{e^x - 1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(t)x^k}{k!}$$

olarak elde edilir.

Eşitliğin her iki tarafındaki üstel fonksiyonları sıfırın komşuluğunda Taylor serisine açıp, x in aynı kuvvetlerini biraraya toplarsak,

$$1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \ldots = \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right)\left(B_0(t) + \frac{B_1(t)}{1!}x + \frac{B_2(t)}{2!}x^2 + \ldots\right)$$

$$= B_0(t) + \left(\frac{B_1(t)}{1!} + \frac{B_0(t)}{2!}\right)x + \left(\frac{B_2(t)}{2!} + \frac{B_1(t)}{2!1!} + \frac{B_0(t)}{3!}\right)x^2 + \ldots$$

elde edilir. x in aynı kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyelim.

$B_0(t) = 1$, $B_1(t) + \frac{B_0(t)}{2} = t$, $\frac{B_2(t)}{2} + \frac{B_1(t)}{2} + \frac{B_0(t)}{6} = \frac{t^2}{2}$ ve böyle devam eder.

Buradan ilk birkaç Bernoulli polinomu;

$$B_0(t) = 1,\ B_1(t) = t - \frac{1}{2},\ B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6},\ B_3(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2} \tag{2.9}$$

olarak bulunur.

İlk dört Bernoulli sayısı ise,

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0 \tag{2.10}$$

olur. Bernoulli polinomunun birkaç özelliğini aşağıdaki teorem ile vereceğiz. [3]

Teorem 2.3.1.

(a) $k \geq 1$ için $B_k^{'}(t) = kB_{k-1}(t)$

(b) $k \geq 0$ için $\Delta_t B_k(t) = kt^{k-1}$

(c) $k \neq 1$ için $B_k = B_k(0) = B_k(1)$

(d) $m \geq 1$ için $B_{2m+1} = 0$

İspat

(a) $k \geq 1$ olsun. Tanım 2.3.2. de eşitliğin her iki tarafının t ye göre türevini alalım. Buradan,

$$\frac{x^2 e^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{'}(t)}{k!} x^k$$

$$x\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{'}(t)}{k!} x^k$$

$$x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(t)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{'}(t)}{k!} x^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(t)}{k!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{'}(t)}{k!} x^k$$

olur. Son eşitlikte ilk toplamda $k = k-1$ indis değiştirmesi yaparsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{k-1}(t)}{(k-1)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{'}(t)}{k!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k^{'}(t)}{k!} x^k$$

olur. Birinci toplam ile son toplamdaki katsayıları eşitlersek,

$$\frac{B_{k-1}(t)}{(k-1)!}=\frac{B_k^{'}(t)}{k!}$$

olur. Böylece,

$$B_k^{'}(t)=kB_{k-1}(t)$$

olarak elde edilir.

(b) $k\geq 0$ olsun. Tanım 2.3.2. de eşitliğin her iki tarafının farkını alalım.

Buradan,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_t B_k(t)}{k!}x^k &= \frac{x(e^{(t+1)x}-e^{tx})}{e^x-1} && \text{(Lineerlik özelliğinden)}\\ &=\frac{xe^{tx}(e^x-1)}{e^x-1}\\ &=xe^{tx}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k x^{k+1}}{k!} && \text{(Taylor serisinden)}\end{aligned}$$

elde edilir. Son toplamda $k=k-1$ indis değiştirmesi yaparsak,

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}x^k}{(k-1)!}$$

olur. Böylece,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta_t B_k(t)}{k!}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}x^k}{(k-1)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_t B_k(t)}{k!}x^k$$

elde edilir. Son eşitlikteki ikinci ve üçüncü toplamdaki katsayıları eşitlenirse,

$$\frac{\Delta_t B_k(t)}{k!}=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\frac{\Delta_t B_k(t)}{k(k-1)!} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\Delta_t B_k(t) = kt^{k-1}$$

olduğu görülür.

(c) $k \neq 1$ olsun. Teorem 2.3.1. in (b) şıkkından,

$$\Delta_t B_k(t) = kt^{k-1}$$

olduğunu biliyoruz. Fark operatörünün tanımından,

$$B_k(t+1) - B_k(t) = kt^{k-1}$$

olur.

$t = 0$ için, $B_k(1) - B_k(0) = k0^{k-1}$

$$B_k(1) - B_k(0) = 0$$

$$B_k(1) = B_k(0)$$

olarak elde edilir.

(d) $m \geq 1$ olsun. Teorem 2.3.1. in (b) şıkkından,

$$\Delta_t B_k(t) = kt^{k-1}$$

olduğunu biliyoruz.

$k = 2m+1$ alalım. Öyleyse,

$$\Delta_t B_{2m+1}(t) = (2m+1)t^{2m+1-1} = kt^{2m}$$

olur. Fark operatörünün tanımını kullanırsak,

$$B_{2m+1}(t+1) - B_{2m+1}(t) = (2m+1)t^{2m}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 2.3.1.

$k = 0,1,2,...$ için,

$$\sum t^k = \frac{1}{k+1} B_{k+1}(t) + c(t)$$

olur. (Burada $\Delta c(t) = 0$ dır.)

Teorem 2.3.2. (Euler Toplam Formülü)

$y^{(2m)}(t)$, $y(t)$ nin $(2m)$. türevini göstersin. $y^{(2m)}(t)$ nin $m \geq 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere bazı tamsayılar için $[1, n]$ aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{n} y(k) = \int_1^n y(t)dt + \frac{y(n)+y(1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[y^{(2i-1)}(n) - y^{(2i-1)}(1)\right]$$
$$-\frac{1}{(2m)!}\int_1^n y^{(2m)}(t) B_{2m}(t - \lfloor t \rfloor)dt$$

dir. Burada $\lfloor t \rfloor$, t ye eşit veya t den küçük en büyük tamsayıdır. ($\lfloor t \rfloor$, taban fonksiyonu veya en büyük tamsayı fonksiyonu olarak bilinir.)

Teoremin ispatından önce bir örnek verelim.

Örnek 2.3.2.

$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{2}}$ toplamının yaklaşık değeri kaçtır?

Çözüm

$y(k)=k^{\frac{1}{2}}$ ve $m=1$ olsun. Teorem 2.3.2. ve (2.10) dan,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{2}} = \int_1^n t^{\frac{1}{2}}dt + \frac{n^{\frac{1}{2}}+1^{\frac{1}{2}}}{2} + \sum_{i=1}^{1} \frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[y^{(2i-1)}(n) - y^{(2i-1)}(1)\right] + \frac{1}{8}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}} B_2(t-\lfloor t\rfloor)dt$$

$$= \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2!}\left[y^{'}(n) - y^{'}(1)\right] + \frac{1}{8}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}} B_2(t-\lfloor t\rfloor)dt$$

$$= \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{6}}{2}\left[\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{8}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}} B_2(t-\lfloor t\rfloor)dt$$

$$= \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24}n^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}} B_2(t-\lfloor t\rfloor)dt$$

$$= \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{24}n^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{24} + \frac{1}{8}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}} B_2(t-\lfloor t\rfloor)dt$$

elde edilir. (2.9) dan,

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

olduğunu biliyoruz. $B_2(x)$ in, Maximum – minimum değerlerini bulalım.

$0 \le x \le 1$ için,

$$B_2^{'}(x) = \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^{'} = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

olur. $x=\frac{1}{2}$ için,

$$B_2(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{-1}{12}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{-1}{12}\le B_2(x)\le\frac{1}{6}$$

olur.

$\forall t$ için,

$$(t-\lfloor t\rfloor)_{\max}=1 \text{ ve } (t-\lfloor t\rfloor)_{\min}=0$$

dır. Yani $0\le t-\lfloor t\rfloor\le 1$ dir. Böylece,

$$\frac{-1}{96}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}}dt\le\frac{1}{8}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}}B_2(t-\lfloor t\rfloor)dt\le\frac{1}{48}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}}dt$$

yazılabilir. Buradan da,

$$\frac{-1}{96}\left(2-2n^{\frac{-1}{2}}\right)\le\frac{1}{8}\int_1^n t^{\frac{-3}{2}}B_2(t-\lfloor t\rfloor)dt\le\frac{1}{48}\left(2-2n^{\frac{-1}{2}}\right)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Yaklaşık toplamı hesaplamak için bu eşitsizlikler kullanılırsa,

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{16}n^{\frac{-1}{2}}-\frac{11}{48}\leq\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{1}{2}}\leq\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}$$

bulunur.

Şimdi teoremi ispatlayalım.

İspat

$$\int_{k}^{k+1}(t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2})y^{'}(t)dt=\int_{k}^{k+1}(t-k-\frac{1}{2})y^{'}(t)dt$$

olarak alabiliriz.

$\forall k$ için son eşitliğin sağ tarafındaki integrale kısmi integrasyon uygulayalım.

$u=t-k-\dfrac{1}{2}$ olsun. Böylece, $du=dt$ olur.

$dv=y^{'}(t)dt$ olsun. Böylece, $v=y(t)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\int_{k}^{k+1}(t-k-\frac{1}{2})y^{'}(t)dt&=\left[\left(t-k-\frac{1}{2}\right)y(t)\right]_{k}^{k+1}-\int_{k}^{k+1}y(t)dt\\&=\left(k+1-k-\frac{1}{2}\right)y(k+1)-\left(k-k-\frac{1}{2}\right)y(k)-\int_{k}^{k+1}y(t)dt\\&=\frac{1}{2}y(k+1)+\frac{1}{2}y(k)-\int_{k}^{k+1}y(t)dt\end{aligned}$$

$$= \frac{y(k+1)+y(k)}{2} - \int_{k}^{k+1} y(t)dt \tag{2.11}$$

olur.

(2.11) eşitliğinin sol tarafındaki integrale bakarsak,

$$t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2} = B_1(t - \lfloor t \rfloor)$$

olduğunu görürüz.

Benzer olarak $i = 1, 2, ..., 2m-1$ için,

$$\int_{k}^{k+1} B_i(t - \lfloor t \rfloor) y^{(i)}(t)dt = \int_{k}^{k+1} B_i(t-k) y^{(i)}(t)dt$$

olur.

Son eşitliğin sağ tarafındaki integrale bir defa daha kısmi integrasyon uygulayalım.

$u = y^{(i)}(t)$ olsun. Böylece, $du = y^{(i+1)}(t)dt$ olur.

$dv = B_i(t-k)dt$ olsun. Teorem 2.3.1. in (a) şıkkından, $v = \dfrac{B_{i+1}(t-k)}{i+1}$ olur.

Böylece Teorem 2.3.1. in (c) şıkkından,

$$\int_{k}^{k+1} B_i(t-k) y^{(i)}(t)dt = \left[y^{(i)}(t) \frac{B_{i+1}(t-k)}{i+1} \right]_{k}^{k+1} - \int_{k}^{k+1} \frac{B_{i+1}(t-k)}{i+1} y^{(i+1)}(t)dt$$

$$=\frac{B_{i+1}}{i+1}\left[y^{(i)}(k+1)-y^{(i)}(k+1)\right]-\frac{1}{i+1}\int_{k}^{k+1}B_{i+1}(t-\lfloor t\rfloor)y^{(i+1)}(t)dt \qquad (2.12)$$

olur.

k, 1 den $(n-1)$ e giderken (2.11) ve (2.12) denklemleri gözönüne alındığında,

$$\int_1^n B_1(t-\lfloor t\rfloor)y'(t)dt=\int_1^2 B_1(t-\lfloor t\rfloor)y'(t)dt+\int_2^3 B_1(t-\lfloor t\rfloor)y'(t)dt+\ldots+\int_{n-1}^{n} B_1(t-\lfloor t\rfloor)y'(t)dt$$

$$=\frac{y(2)+y(1)}{2}-\int_1^2 y(t)dt+\frac{y(3)+y(2)}{2}-\int_2^3 y(t)dt+...+\frac{y(n)+y(n-1)}{2}-\int_{n-1}^{n} y(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[y(1)+2y(2)+2y(3)+...+2y(n-1)+y(n)\right]-\int_1^n y(t)dt$$

$$\int_1^n B_1(t-\lfloor t\rfloor)y'(t)dt=\sum_{k=1}^{n}y(k)-\frac{y(n)+y(1)}{2}-\int_1^n y(t)dt \qquad (2.13)$$

$$\int_1^n B_i(t-\lfloor t\rfloor)y^{(i)}(t)dt=\frac{B_{i+1}}{i+1}\left[y^{(i)}(n)-y^{(i)}(1)\right]-\frac{1}{i+1}\int_1^n B_{i+1}(t-\lfloor t\rfloor)y^{(i+1)}(t)dt \qquad (2.14)$$

olarak yazılabilir.

Son olarak, (2.13) ve (2.14) eşitlikleri gözönüne alınarak ve Teorem 2.3.1. in (d) şıkkı kullanılarak,

$$\sum_{k=1}^{n}y(k)-\frac{1}{2}\left(y(1)+y(n)\right)-\int_1^n y(t)dt=\int_1^n B_1(t-\lfloor t\rfloor)y'(t)dt$$

$$=\frac{B_2}{2}\left[y'(n)-y'(1)\right]-\frac{1}{2}\int_1^n B_2(t-\lfloor t\rfloor)y^{(2)}(t)dt$$

$$=\frac{B_2}{2}\left[y'(n)-y'(1)\right]-\frac{1}{2}[\frac{B_3}{3}\left(y^{(2)}(n)-y^{(2)}(1)\right)-\frac{1}{3}\int_1^n B_3(t-\lfloor t\rfloor)y^{(3)}(t)dt]$$

$$=\frac{B_2}{2!}\left[y^{'}(n)-y^{'}(1)\right]-\frac{1}{3!}B_3\left(y^{(2)}(n)-y^{(2)}(1)\right)+\frac{1}{3!}[\frac{B_4}{3}\left(y^{(3)}(n)-y^{(3)}(1)\right)$$

$$-\frac{1}{4}\int_1^n B_4(t-\lfloor t\rfloor)y^{(4)}(t)dt]$$

…

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[y^{(2i-1)}(n)-y^{(2i-1)}(1)\right]-\frac{1}{(2m)!}\int_1^n B_{2m}(t-\lfloor t\rfloor)y^{(2m)}(t)dt$$

olarak elde ederiz. Buradan,

$$\sum_{k=1}^{n}y(k)=\int_1^n y(t)dt+\frac{1}{2}\left(y(1)+y(n)\right)+\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\left[y^{(2i-1)}(n)-y^{(2i-1)}(1)\right]$$

$$-\frac{1}{(2m)!}\int_1^n B_{2m}(t-\lfloor t\rfloor)y^{(2m)}(t)dt$$

olur ki bu istenilendir.

3. LİNEER FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde lineer fark denklemlerini inceleyeceğiz. Denklemlerin lineer olması veya lineer olmaması diferansiyel denklemlerdeki kullanıma tamamen benzerdir. Genellikle bir bağımlı ve bir bağımsız değişken içeren denklemleri inceleyeceğiz.

Uygulamada çözülmesi daha kolay olduğu için en fazla karşılaşılan denklem tipi lineer olduğundan lineer denklemlerin incelenmesi oldukça önemlidir. Lineer denklemlerin içerisinde özel olarak sabit katsayılı olanlar çözüm metodu olarak kolay olanları olup, geniş bir denklem ailesini temsil eder.

Lineer denklemlerin bu sınıfı, matris metodlar, operasyonel metodlar, dönüşümler, genelleştirilmiş fonksiyonlar ve diğer özel tekniklerin kullanımına izin veren cebirsel özelliklere sahiptir. Lineer olmayan denklemler için lineerleştirme ile denge kurma gibi belirli metodlar, lineer denklemler ile ilgili özelliklere bağlıdır.

3.1. Birinci Basamaktan Denklemler :

$\forall t$ için $p(t) \neq 0$ olmak üzere $p(t)$ ve $r(t)$ bilinen fonksiyonlar olsun. Birinci basamaktan lineer fark denklemi;

$$y(t+1) - p(t)y(t) = r(t) \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilir

$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$ birinci basamaktan fark operatöründe olduğu gibi (3.1.1) denklemi de sadece t ve $t+1$ noktalarında y nin değerlerini içerdiğinden (3.1.1) denklemine birinci basamaktan lineer fark denklemi adı verilir. Eğer $\forall t$ için $p(t) = 1$ ise (3.1.1) denklemi,

$$\Delta y(t) = r(t)$$

olur. Biliyoruz ki bu denklemin çözümü,

$$y(t) = \sum r(t) + c(t)$$

dir. (Burada $\Delta c(t)=0$ dır.)

Basitlik olması için $y(t)$ nin tanım kümesi $t=a,a+1,a+2,\ldots$ ayrık kümesi olsun. Önce homojen denklemi gözönüne alalım. Bu durumda denklem,

$$y(t+1)=p(t)y(t) \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin çözümü iterasyonla,

$$y(a+1)=p(a)y(a)$$
$$y(a+2)=p(a+1)y(a+1)=p(a+1)p(a)y(a)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$y(a+n)=y(a)\prod_{k=0}^{n-1}p(a+k)$$

olarak elde edilir. Bu çözüm daha uygun bir formla,

$$y(t)=y(a)\prod_{s=a}^{t-1}p(s)\ ;\ t=a,a+1,a+2,\ldots$$

olarak yazılabilir. (Buradan $\prod_{s=a}^{a-1}p(s)\equiv 1$ olduğu anlaşılır.)

$u(t)$, (3.2) denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olmak üzere, (3.1) denklemi $v(t)$ belirlenecek bir fonksiyon olmak üzere $y(t)=u(t)v(t)$ dönüşümü yapılarak çözülebilir.

$$u(t+1)v(t+1)-p(t)u(t)v(t)=r(t)$$

olur. (3.2) den,

$$u(t+1)v(t+1)-u(t+1)v(t)=r(t)$$

elde edilir. Buradan,

$$u(t+1)\Delta v(t)=r(t)$$

$$E(t)\Delta v(t)=r(t)$$

$$\Delta v(t)=\frac{r(t)}{E(t)}$$

$$v(t)=\sum\frac{r(t)}{E(t)}+c$$

olur. Böylece,

$$y(t)=u(t)\left(\sum\frac{r(t)}{E(t)}+c\right) \tag{3.3}$$

olarak bulunur.

$u(t)$, (3.2) denkleminin sıfırdan farklı herhangi bir çözümü ve c keyfi bir sabit olmak üzere, (3.3) ifadesi (3.1) denkleminin genel çözümüdür. Bu sonuçları aşağıdaki teoremde verilebilir.

Teorem 3.1.1.

$t=a,a+1,a+2,...$ için, $p(t)\neq 0$ olmak üzere $p(t)$ ve $r(t)$ bilinen fonksiyonlar olsun.

(a) $t=a,a+1,a+2,...$ için (3.2) denkleminin çözümleri,

$$u(t)=u(a)\prod_{s=a}^{t-1}p(s)$$

şeklinde ifade edilir.

(b) (3.1) denkleminin tüm çözümleri,

$$y(t)=u(t)[\sum\frac{r(t)}{Eu(t)}+c]$$

şeklindedir. (Burada c bir sabit , $u(t)$ (a) şıkkında sıfırdan farklı herhangi bir fonksiyondur.)

Örnek 3.1.1.

$t = 1, 2, 3, ...$ için $y(t+1) - ty(t) = (t+1)!$ denklemini $y(1) = 5$ başlangıç koşuluyla çözelim.

Çözüm

İlk olarak homojen denklemin çözümünü bulalım. Bunun için $y = u$ alalım.
Homojen denklem,

$$u(t+1) - tu(t) = 0 \qquad (3.4)$$

olup, teorem 3.1.1. in (a) şıkkından çözümü

$$u(t) = u(1)\prod_{s=1}^{t-1} s = u(1)(t-1)!$$

dir. Bu ifade (3.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(1)(t)! - tu(1)(t-1)! = 0$$

olur. Buradan,

$$u(1)[(t)! - (t)!] = 0$$

elde edilir. Burada, $u(1) = 1$ seçersek,

$$u(t) = (t-1)!$$

olur. Böylece teorem 3.1.1. in (b) şıkkından,

$$y(t) = (t-1)![\sum \frac{(t+1)!}{t!} + c]$$

olur. Buradan,

$$y(t) = (t-1)![\sum (t+1) + c]$$

elde edilir. Sonuç 2.3.1 den,

$$y(t) = (t-1)![\frac{B_2(t+1)}{2} + c]$$

$$y(t) = (t-1)![\frac{(t+1)t}{2} + c]$$

$$y(t) = \frac{(t+1)!}{2} + c(t-1)!$$

olarak bulunur.

$t = 1$ için,

$$5 = \frac{(1+1)!}{2} + c(1-1)! = 1 + c$$

$$c = 4$$

olarak bulunur. O halde $t = 1, 2, 3, \ldots$ için çözüm,

$$y(t) = \frac{(t+1)!}{2} + 4(t-1)!$$

olarak elde edilir ki çözümü kontrol edersek,

$$y(t+1) - ty(t) = \frac{(t+2)!}{2} + 4t! - \frac{t(t+1)!}{2} - 4t!$$

$$= \frac{(t+2)!}{2} - \frac{t(t+1)!}{2}$$

$$= \frac{(t+1)!}{2}(t+2-t)$$

$$= (t+1)!$$

olduğu görülür.

Örnek 3.1.2.

Bir bankaya her yılın başında yıllık %8 faizden 2000 dolar para yatırılsın, t. yılın sonunda bankada ne kadar para biriktiğini hesaplayalım. [1]

Çözüm

$y(t)$, t. yıl sonunda bankada biriken para olsun. Bu durumda bankada biriken paranın denklemi;

$$\begin{aligned} y(t+1) &= y(t) + (y(t)+2000)(0.08) + 2000 \\ &= 1.08y(t) + 2160 \end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. $y(t+1) - 1.08y(t) = 2160$ denklemi, birinci basamaktan bir lineer fark denklemidir.

Burada, $p(t) = 1.08$ ve $r(t) = 2160$ tır.

Denklemin homojen kısmı,

$$u(t+1) - 1.08u(t) = 0$$

olup, çözümü teorem 3.1.1 in (a) şıkkından,

$$\begin{aligned} u(t) &= u(0)\prod_{s=0}^{t-1} p(s) \\ &= u(0)\prod_{s=0}^{t-1} (1.08) \\ &= u(0)(1.08)^t \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Son eşitlik denklemin homojen kısmında yerine yazılırsa,

$$u(t+1) - 1.08u(t) = u(0)(1.08)^{t+1} - 1.08u(0)(1.08)^t$$

$$= u(0)(1.08)^{t+1} - u(0)(1.08)^{t+1}$$
$$= 0$$

elde edilir. $u(0) = 1$ alınırsa,

$$u(t) = (1.08)^t$$

olur. Teorem 3.1.1. in (b) şıkkından,

$$y(t) = u(t)[\sum \frac{r(t)}{Eu(t)} + c]$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$y(t) = (1.08)^t \left[\sum \frac{2160}{(1.08)^{t+1}} + c \right]$$
$$= (1.08)^t \left[\frac{2160}{1.08} \sum \left(\frac{1}{1.08} \right)^t + c \right]$$

olur. Teorem 2.2.1. in (a) şıkkından,

$$= (1.08)^t \left[\frac{2160}{1.08} \frac{\left(\frac{1}{1.08} \right)^t}{\left(\frac{1}{1.08} - 1 \right)} + c \right]$$
$$= -27000 + c(1.08)^t$$

elde edilir. Başlangıçta, $y(0) = 0$ olduğundan, $t = 0$ için, c nin değeri

$$y(0) = -27000 + c(1.08)^0$$
$$0 = -27000 + c$$
$$c = 27000$$

olarak bulunur. Böylece herhangi bir t yılında bankada biriken paranın miktarını veren fonksiyon,

$$y(t) = 27000\left[(1.08)^t - 1\right]$$

olarak bulunur. Örneğin yirminci yıl sonunda bankada,

$$y(20) = 27000\left[(1.08)^{20} - 1\right] \cong 98.845,84$$

dolar para birikmiş olur.

Aslında fark denkleminin çözümünü adım adım hesaplayarak bulmak ta mümkündür. Fakat burada yapılacak yuvarlama hatası ciddi bir problem oluşturabilir. Olası bir yuvarlama hatasının çarpıcı etkisi Gautschi tarafından aşağıdaki örnekte verilmiştir.

$y(t+1) - ty(t) = 1$ fark denklemini, $y(1) = 1 - e$ başlangıç koşuluyla çözelim.

Burada, $p(t) = t$ ve $r(t) = 1$ dir.

Denklemin homojen kısmı,

$$u(t+1) - tu(t) = 0$$

olup, çözümü teorem 3.1.1. in (a) şıkkından,

$$u(t) = u(a)\prod_{s=1}^{t-1} p(s) = u(a)(t-1)!$$

olur. Bu ifade homojen denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u(t+1) - tu(t) &= u(a)(t+1-1)! - tu(a)(t-1)! \\ &= u(a)t! - u(a)t! = 0 \end{aligned}$$

olur. Burada $u(a) = 1$ seçebiliriz. Böylece,

$$u(t) = (t-1)!$$

olarak bulunur. Teorem 3.1.1. in (b) şıkkından,

$$y(t) = u(t)\left[\sum \frac{r(t)}{Eu(t)} + c\right]$$

$$y(t) = (t-1)!\left[\sum \frac{1}{(t+1-1)!} + c\right]$$

$$= (t-1)!\left[\sum \frac{1}{t!} + c\right]$$

elde edilir. Buradan da,

$$y(t) = (t-1)!\left[\sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k!} + c\right]$$

olarak bulunur. $t = 1$ için,

$$y(1) = (1-1)!\left[\sum_{k=1}^{1-1} \frac{1}{k!} + c\right]$$

$$c = 1 - e$$

$$y(t) = (t-1)!\left[1 - e + \sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k!}\right]$$

olur.

Taylor serisinden $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ olduğunu biliyoruz.

$x = 1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ dir.

$x = 0$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0}{k!} = 1$ dir.

Buradan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0}{k!} = e - 1$$

bulunur. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k!} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$\sum_{k=1}^{t-1} \frac{1}{k!} < e-1$$

olur. Son eşitsizlikten dolayı, $\forall t$ için

$$\begin{aligned} y(t) &< (t-1)!\left[1-e+e-1\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Yani,

$$y(t) < 0$$

olur.

Yaklaşık başlangıç değeri $y(1) = -1718$ olmak üzere $y(8)$ i hesaplayalım.

$$y(2) = y(1) + 1 = -1718 + 1 = -0.718$$

$$y(3) = 2y(2) + 1 = 2\left(-0.718\right) + 1 = -0.436$$

$$y(4) = 3y(3) + 1 = 3\left(-0.436\right) + 1 = -0.308$$

$$y(5) = 4y(4) + 1 = 4\left(-0.308\right) + 1 = -0.232$$

$$y(6) = 5y(5) + 1 = 5\left(-0.232\right) + 1 = -0.16$$

$$y(7) = 6y(6) + 1 = 6\left(-0.16\right) + 1 = 0.04$$

$$y(8) = 7y(7) + 1 = 7\left(0.04\right) + 1 = 1.28$$

olarak bulunur.

$y(t)$ nin hesaplanan bu değerleri asıl değerlerine yakın olmadığı gibi, bu durum işleme devam edilirse daha da bozulacaktır. Dikkat edilmelidir ki yuvarlama hatası yalnız başlangıçtaki yaklaşım değerlerinde olmaktadır, diğer hesaplamalar tam çıkmaktadır.

Şimdi ayrık veya sürekli bir tanım kümesinden alınan bir t için (3.2) ve (3.1) denklemlerini çözelim.

$p(t) > 0$ olduğunu kabul edelim.

(3.2) denkleminin her iki tarafının logaritması alınırsa,

$$\log|u(t+1)| = \log|u(t)| + \log p(t)$$

$$\log|u(t+1)| - \log|u(t)| = \log p(t)$$

$$\Delta \log|u(t)| = \log p(t)$$

$$\log|u(t)| = \sum \log p(t) + d(t)$$

$$|u(t)| = e^{\sum \log p(t) + d(t)}$$

$$u(t) = c(t) e^{\sum \log p(t)} \qquad (3.5)$$

(Burada, $\Delta d(t) = 0$ ve $\Delta c(t) = 0$ dır.)

olur.

(3.5) denklemi, bize belirsiz toplamlar cinsinden (3.2) denkleminin bir çözümünü verir. (3.1) denkleminin $y(t)$ çözümü, $u(t)$ bilindiği zaman, $\Delta c(t) = 0$ olan keyfi bir c sabiti ve Teorem 3.1.1 in (b) şıkkı kullanılarak hesaplanabilir.

Örnek 3.1.3. $u(t+1) = a \dfrac{(t-r_1)...(t-r_n)}{(t-s_1)...(t-s_m)} u(t)$ denklemini çözelim. (Burada $a, r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_m$ sabitlerdir.)

Çözüm

$u(t)$ nin önündeki çarpanların hepsinin pozitif olduğunu kabul edelim. O halde

$$u(t) = c(t) e^{\sum \log\left[a \frac{(t-r_1)...(t-r_n)}{(t-s_1)...(t-s_m)} \right]}$$

olur. Buradan logaritma fonksiyonunun özellikleri gereğince,

$$u(t) = c(t)e^{\sum\left[\log a + \log(t-r_1) + ... + \log(t-r_n) - \log(t-s_1) - ... - \log(t-s_m)\right]}$$

$$= c(t)e^{\left[\sum\log a + \sum\log(t-r_1) + ... + \sum\log(t-r_n) - \sum\log(t-s_1) - ... - \sum\log(t-s_m)\right]}$$

yazılabilir. Teorem 2.2.1 in (d) şıkkından ise,

$$u(t) = c(t)e^{\left[t\log a + \log\Gamma(t-r_1) + ... + \log\Gamma(t-r_n) - \log\Gamma(t-s_1) - ... - \log\Gamma(t-s_m)\right]}$$

$$u(t) = c(t)e^{\left[\log a^t + \log\Gamma(t-r_1) + ... + \log\Gamma(t-r_n) - \log\Gamma(t-s_1) - ... - \log\Gamma(t-s_m)\right]}$$

$$u(t) = c(t)e^{\log\left[\frac{a^t\Gamma(t-r_1)...\Gamma(t-r_n)}{\Gamma(t-s_1)...\Gamma(t-s_m)}\right]}$$

$$u(t) = c(t)\left[\frac{a^t\Gamma(t-r_1)...\Gamma(t-r_n)}{\Gamma(t-s_1)...\Gamma(t-s_m)}\right]$$

olarak bulunur.

Gamma fonksiyonunun tanımlı olduğu $\forall t$ için bu çözümün verilen fark denklemini sağladığını görmek kolaydır. Şöyleki,

$$c(t+1)\frac{a^{t+1}\Gamma(t-r_1+1)...\Gamma(t-r_n+1)}{\Gamma(t-s_1+1)...\Gamma(t-s_m+1)} = a\frac{(t-r_1)...(t-r_n)}{(t-s_1)...(t-s_m)}c(t)\frac{a^t\Gamma(t-r_1)...\Gamma(t-r_n)}{\Gamma(t-s_1)...\Gamma(t-s_m)}$$

$$c(t+1)\frac{a^{t+1}\Gamma(t-r_1+1)...\Gamma(t-r_n+1)}{\Gamma(t-s_1+1)...\Gamma(t-s_m+1)} = c(t)\frac{a^{t+1}\Gamma(t-r_1+1)...\Gamma(t-r_n+1)}{\Gamma(t-s_1+1)...\Gamma(t-s_m+1)}$$

$$c(t+1)\frac{a^{t+1}\Gamma(t-r_1+1)...\Gamma(t-r_n+1)}{\Gamma(t-s_1+1)...\Gamma(t-s_m+1)} - c(t)\frac{a^{t+1}\Gamma(t-r_1+1)...\Gamma(t-r_n+1)}{\Gamma(t-s_1+1)...\Gamma(t-s_m+1)} = 0$$

$$\frac{a^{t+1}\Gamma(t-r_1+1)...\Gamma(t-r_n+1)}{\Gamma(t-s_1+1)...\Gamma(t-s_m+1)}\big(c(t+1)-c(t)\big) = 0$$

olur. $\Delta c(t) = 0$ olduğu için, $u(t)$ çözümünün verilen denklemi sağladığı görülür.

Eğer $p(t)$ rasyonel bir fonksiyon ise gamma fonksiyonu cinsinden (3.2) denkleminin çözülebilir olduğunu görelim. Örneğin,

$$u(t+1) = \frac{t}{2t^2+3t+1}u(t)$$

fark denklemini düşünelim. Katsayı fonksiyonunu çarpanlarına ayırırsak,

$$\frac{t}{2t^2+3t+1}=\frac{1}{2}\frac{t}{(t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right)}$$

olur.

Böylece bir önceki elde edilen çözümden;

$$u(t)=c(t)\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t+1)\Gamma(t+\frac{1}{2})}$$

elde edilir. Buradan,

$$u(t)=c(t)\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{\Gamma(t)}{t\Gamma(t)\Gamma(t+\frac{1}{2})}$$

$$=c(t)\left(\frac{1}{2}\right)^t\frac{1}{t\Gamma(t+\frac{1}{2})}$$

olur.

(3.1) denklemi ile sürekli kesirlerin artması arasında ilginç bir ilişki vardır. (3.1) denklemini kesirli formda yazarsak,

$$y(t)=\frac{-r(t)+y(t+1)}{p(t)}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$y(t+1)=\frac{-r(t+1)+y(t+2)}{p(t+1)}$$

olur.

$y(t+1)$ i $y(t)$ de yerine yazarsak,

$$y(t)=\frac{-r(t)+\dfrac{-r(t+1)+y(t+2)}{p(t+1)}}{p(t)}$$

elde edilir.

Böyle devam edilirse,

$$y(t)=\frac{-r(t)+\dfrac{-r(t+1)+\dfrac{-r(t+2)+\dfrac{-r(t+3)+...}{p(t+3)}}{p(t+2)}}{p(t+1)}}{p(t)}$$

$$y(t)=\frac{-r(t)}{p(t)}+\frac{-r(t+1)}{p(t)p(t+1)}+...$$

şeklinde sürekli bir kesir elde ederiz.

Son ifadeyi sonsuz toplamlar cinsinden yazarsak,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-r(t+k)}{p(t)...p(t+k)} \tag{3.6}$$

olur. Bu seri yakınsak ise (3.1) denkleminin bir çözümü olmak zorundadır.

Örnek 3.1.4.

$y(t+1)-ty(t)=-3^t$ denklemi için, $p(t)=t$ ve $r(t)=-3^t$ dir. (3.6) eşitliği gereğince;

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{t+k}}{t(t+1)...(t+k)}$$

olur. Böylece,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{t+k}}{t(t+1)...(t+k)}=\frac{3^t}{t}\sum_{k=0}^{\infty}3^k t^{\underline{-k}}$$

olur. Son seri bir faktöriyel serisidir.

Son serinin genel terimi $a_k = 3^k t^{-k}$ olduğundan D'alembert Oran Testi kullanılırsa $t\in\mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \lim_{k\to\infty}\frac{3^{k+1}t^{-k-1}}{3^k t^{-k}} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{3t(t+1)...(t+k)}{t(t+1)...(t+k)(t+k+1)} \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{3}{t+k+1} \\
&= 0 \\
&< 1
\end{aligned}$$

olur. Bu seri $\forall t\in\mathbb{Z}^+$ için D'alembert Oran Testi gereğince yakınsaktır.

Böylece bu seri, bu fark denkleminin bir çözümüdür.

Tanım 3.1.1.

Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin basamağı denir. [2]

Örneğin,

$$y(n+3)-4y(n+2)+5y(n+1)=0$$

fark denkleminin basamağı; $(n+3)-(n+1)=2$ dir.

Başka bir örnek olarak,

$$y(n+5)-y(n)y(n+1)=2$$

fark denkleminin basamağı; $(n+5)-n=5$ tir.

Ya da

$$y(n+6)=n(n-3)$$

fark denkleminin basamağı; $(n+6)-(n+6)=0$ dır.

3.2. Lineer Denklemler için Genel Sonuçlar :

$\forall t$ için $p_0(t)\neq 0$ ve $p_n(t)\neq 0$ olmak üzere n. basamaktan bir lineer denklem;

$$p_n(t)y(t+n)+...+p_0(t)y(t)=r(t) \tag{3.7}$$

şeklindedir. (Burada $p_0(t),\ldots,p_n(t)$ ve $r(t)$ bilinen fonksiyonlardır.)

Eğer $r(t)\neq 0$ ise (3.7) denklemine homojen olmayan denklem denir. Bu denklemin önce homojen kısmını çözümünü bulalım.

$$p_n(t)u(t+n)+...+p_0(t)u(t)=0 \tag{3.8}$$

(3.7) denklemini kaydırma operatörü ile,

$$\left(p_n(t)E^n+...+p_0(t)E^0\right)y(t)=r(t)$$

formunda yazabiliriz. Burada $E^0=I$ dır. $E=\Delta+I$ olduğu için (3.7) denklemini fark operatörü terimleri cinsinden yazmak mümkündür. Buna karşın, aşağıdaki örnek bu durumda denklemin basamağının bariz belli olmadığını gösteriyor.

Örnek 3.2.1.

$\Delta^3 y(t)+3\Delta^2 y(t)+\Delta y(t)-y(t)=r(t)$ fark denkleminin basamağı kaçtır?

Çözüm

$E = \Delta + I$ olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\Delta = E - I$$

olur.
Bu ifadeyi ve kuvvetlerini verilen denklemde yerine yazar ve gerekli düzenlemeyi yaparsak,

$$(E-I)^3 y(t) + 3(E-I)^2 y(t) + (E-I)y(t) - y(t) = r(t)$$
$$\left(E^3 - 3E^2I + 3EI^2 - I^3\right)y(t) + 3\left(E^2 - 2EI + I^2\right)y(t) + Ey(t) - Iy(t) - y(t) = r(t)$$
$$E^3 y(t) - 2Ey(t) = r(t)$$

olur. Böylece denklem,

$$y(t+3) - 2y(t+1) = r(t)$$

şeklini alır. Bu denklemin basamağı; $(t+3)-(t+1)=2$ dir.
Şimdi yalnız bir çözüme sahip olan (3.7) denklemi için başlangıç değer problemlerini temel olarak inceleyelim.

Teorem 3.2.1.

$\forall t$ için $p_0(t),...,p_n(t)$ katsayıları ile $r(t)$, $t \geq t_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde $p_0(t) \neq 0$, $p_n(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\{a, a+1, a+2,...\}$ kümesi üzerindeki herhangi bir t_0 ve herhangi y_0, y_1, y_2,…, y_{n-1} sayıları için (3.1.7) denklemini sağlayan yalnız bir $y(t)$ vardır ve $k = 0,1,...,n-1$ için,

$$y(t_0 + k) = y_k$$

dır. [1]

Aşağıdaki teoremlerde bir dizi aracılığıyla (3.7) denkleminin bir genel çözümünü tanımlayacağız.

Teorem 3.2.2.

(a) Eğer $u_1(t)$, $u_2(t)$ (3.1.8) denkleminin çözümleri ise, herhangi $c\ ve\ d$ sabitleri için,

$$cu_1(t)+du_2(t)$$

(3.8) denkleminin bir çözümüdür.
(b) Eğer $u(t)$ (3.8) denkleminin, $y(t)$ (3.7) denkleminin çözümleri ise,

$$u(t)+y(t)$$

(3.7) denkleminin bir çözümüdür.
(c) Eğer $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ (3.7) denkleminin iki çözümü ise,

$$y_1(t)-y_2(t)$$

(3.8) denkleminin bir çözümüdür.

İspat

(a) $u_1(t)$, (3.8) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$p_n(t)u_1(t+n)+...+p_0(t)u_1(t)=0 \tag{3.9}$$

olur.
$u_2(t)$, (3.8) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$p_n(t)u_2(t+n)+...+p_0(t)u_2(t)=0 \tag{3.10}$$

olur. (3.9) denklemini c ile (3.10) denklemini d ile çarpıp taraf tarafa toplayalım.

$$\left[cu_1(t+n)+du_2(t+n)\right]p_n(t)+...+\left[cu_1(t)+du_2(t)\right]p_0(t)=0$$

$cu_1(t)+du_2(t)$, (3.8) denkleminin bir çözümüdür.

(b) $u(t)$, (3.8) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$p_n(t)u(t+n)+...+p_0(t)u(t)=0 \qquad (3.11)$$

olur.

$y(t)$, (3.7) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$p_n(t)y(t+n)+...+p_0(t)y(t)=r(t) \qquad (3.12)$$

olur.

(3.11) ile (3.12) yi taraf tarafa toplarsak,

$$p_n(t)u(t+n)+p_n(t)y(t+n)+...+p_0(t)u(t)+p_0(t)y(t)=0+r(t)$$
$$\left[u(t+n)+y(t+n)\right]p_n(t)+...+\left[u(t)+y(t)\right]p_0(t)=r(t)$$

elde ederiz. Buradan da,

$$u(t)+y(t)$$

(3.7) denkleminin bir çözümüdür.

(c) $y_1(t)$, (3.7) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$p_n(t)y_1(t+n)+...+p_0(t)y_1(t)=r(t) \qquad (3.13)$$

$y_2(t)$, (3.7) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$p_n(t)y_2(t+n)+...+p_0(t)y_2(t)=r(t) \quad (3.14)$$

(3.13) ten (3.14) ü taraf tarafa çıkartırsak,

$$p_n(t)y_1(t+n)-p_n(t)y_2(t+n)+...+p_0(t)y_1(t)-p_0(t)y_2(t)=r(t)-r(t)$$
$$\left[y_1(t+n)-y_2(t+n)\right]p_n(t)+...+\left[y_1(t)-y_2(t)\right]p_0(t)=0$$

olur. Buradan,

$$y_1(t)-y_2(t)$$

(3.8) denkleminin bir çözümüdür.

Sonuç 3.2.1.

$z(t)$, (3.7) denkleminin bir çözümü olsun. (3.7) denkleminin her $y(t)$ çözümü;

$$y(t)=z(t)+u(t)$$

formunda yazılabilir. (Burada $u(t)$, (3.8) denkleminin bazı çözümleridir.) [1]

İspat

$z(t)$, (3.7) denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$p_n(t)z(t+n)+...+p_0(t)z(t)=r(t) \quad (3.15)$$

olur.
$u(t)$, (3.8) denkleminin çözümü olduğundan,

$$p_n(t)u(t+n)+...+p_0(t)u(t)=0 \quad (3.16)$$

olur.

(3.15) ve (3.16) yı taraf tarafa toplarsak,

$$p_n(t)z(t+n)+p_n(t)u(t+n)+...+p_0(t)z(t)+p_0(t)u(t)=r(t)+0$$

$$\left[z(t+n)+u(t+n)\right]p_n(t)+...+\left[z(t)+u(t)\right]p_0(t)=r(t) \tag{3.17}$$

olarak bulunur. $y(t)$, (3.7) denkleminin çözümü olduğundan,

$$y(t+n)p_n(t)+...+y(t)p_0(t)=r(t) \tag{3.18}$$

olur.

(3.17) ve (3.18) den,

$$y(t)=z(t)+u(t)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1.e göre (3.7) denkleminin tüm çözümlerini bulma problemi iki küçük probleme ayrılır:

(1) (3.8) denkleminin tüm çözümlerini bulma problemi,

(2) (3.7) denkleminin bir çözümünü bulma problemidir.

Şimdi birinci problemi analiz etmek için birkaç tanım vereceğiz. [1]

Tanım 3.2.1.

$\forall t \geq a$ için $c_1u_1(t)+c_2u_2(t)+...+c_mu_m(t)=0$ olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan c_1, c_2, … , c_m sabitleri varsa, $\{u_1(t),u_2(t),...,u_m(t)\}$ cümlesine $[a,\infty)$ kümesi üzerinde lineer bağımlıdır denir. $\forall n \geq n_0$ için sadece $c_1=c_2=...=c_m=0$ durumunda,

$$c_1u_1(t)+c_2u_2(t)+...+c_mu_m(t)=0$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)\}$ cümlesine, $[a,\infty)$ kümesi üzerinde lineer bağımsızdır denir.

Örnek 3.2.2.

$t = a, a+1, a+2, ...$ kümesi üzerinde 2^t, $t2^t$ ve $t^2 2^t$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu görelim.
$t = a, a+1, a+2, ...$ için,

$$c_1 2^t + c_2 t 2^t + c_3 t^2 2^t = 0$$

olsun. Eşitliğin her iki tarafını 2^t ile bölelim. Böylece,

$$c_1 + c_2 t + c_3 t^2 = 0$$

dır. Bu eşitlik ancak $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olmak şartıyla sağlanır. Bu ise, 2^t, $t2^t$, $t^2 2^t$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösterir.
Bununla birlikte, $t = 1, 2, 3, ...$ kümesi üzerinde $u_1(t) = 2$ ve $u_2(t) = 1 + \cos \pi t$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Öyleki,

$$2c_1 + c_2(1 + \cos \pi t) = 0$$

şartı ancak $c_1 = c_2 = 0$ için sağlanır. Fakat $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, ...$ kümesi üzerindeki $\forall t$ için $u_1(t) = 2$ ve $u_2(t) = 1 + \cos \pi t$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Öyleki $c_1 = 1$, $c_2 = -2$ seçilirse,

$$u_1(t) - 2u_2(t) = 2 - 2(1 + \cos \pi t) = 0$$

olarak bulunur.
Şimdi lineer fark denklemi çalışmasında kullanışlı bir matris tanımlayacağız.

Tanım 3.2.2.

$u_1,....,u_n$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere,

$$W(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & . & . & . & u_n(t) \\ u_1(t+1) & u_2(t+1) & . & . & . & u_n(t+1) \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ u_1(t+n-1) & u_2(t+n-1) & . & . & . & u_n(t+n-1) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matrise Casorati matrisi denir.

Casorati matrisinin determinantına Casoratyan denir ve Casoratyan, $\omega(t)=\det W(t)$ şeklinde gösterilir. Casoratyan, Wronskiyan determinantının lineer diferensiyel denklemlerde yaptığı işi lineer fark denklemlerinde yapar.

Teorem 3.2.2.

$t=a,a+1,...$ için $u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)$ (3.1.8) denkleminin çözümleri olsun. Öyleyse aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $t=a,a+1,...$ için $\{u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

(b) Bazı t ler için $\omega(t)=0$ olur.

(c) $\forall t$ için $\omega(t)=0$ olur.

İspat

İlk olarak, $\{u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)\}$ kümesi lineer bağımsız olsun. $t=a,a+1,...$ için öyle sıfırdan farklı $c_1,c_2,...,c_n$ sabitleri vardır ki;

$$c_1u_1(t)+c_2u_2(t)+...+c_nu_n(t)=0$$

$$c_1u_1(t+1)+c_2u_2(t+1)+...+c_nu_n(t+1)=0$$

$$\vdots$$

$$c_1u_1(t+n-1)+c_2u_2(t+n-1)+...+c_nu_n(t+n-1)=0$$

olur.

Bu homojen denklem sistemi $c_1, c_2, ..., c_n$ aşikar olmayan çözümlerine sahip olduğundan, $t=a, a+1, ...$ için $\omega(t)$ katsayılar matrisinin determinantı sıfırdır. Yani,

$$\omega(t)=0$$

olur.

Tersine,

$\omega(t_0)=0$ olduğunu kabul edelim. Öyle sıfırdan farklı $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitleri vardır ki;

$$c_1u_1(t_0)+c_2u_2(t_0)+...+c_nu_n(t_0)=0$$

$$c_1u_1(t_0+1)+c_2u_2(t_0+1)+...+c_nu_n(t_0+1)=0$$

$$\vdots$$

$$c_1u_1(t_0+n-1)+c_2u_2(t_0+n-1)+...+c_nu_n(t_0+n-1)=0$$

dır.

Kabul edelim ki, $u(t)=c_1u_1(t)+c_2u_2(t)+...+c_nu_n(t)$ olsun. Öyleyse,

$u(t)$, (3.8) denkleminin bir çözümüdür. Yani,

$$u(t_0)=u(t_0+1)=...=u(t_0+n-1)=0$$

olur. Teorem 3.2.1. den, $\forall t$ için $u(t)=0$ dır. Böylece, $\{u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

(3.8) denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin önemi aşağıdaki teoremin bir sonucudur.

Teorem 3.2.3.

(3.8) denkleminin n-tane lineer bağımsız çözümü $u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)$ olsun. Bu durumda (3.8) denkleminin her $u(t)$ çözümü keyfi $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitleri için,

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + ... + c_n u_n(t)$$

formunda yazılabilir. [1]

İspat

$u(t)$, (3.8) denkleminin bir çözümü olsun. $\omega(t) \neq 0$ olduğundan, her bir $t = a, a+1, ..., a+n-1$ için aşağıdaki denklem sistemini oluşturalım.

$$\begin{gathered} c_1 u_1(a) + ... + c_n u_n(a) = u(a) \\ c_1 u_1(a+1) + ... + c_n u_n(a+1) = u(a+1) \\ . \\ . \\ . \\ c_1 u_1(a+n-1) + ... + c_n u_n(a+n-1) = u(a+n-1) \end{gathered}$$

olur. Bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı $W(u_1, u_2, ..., u_n)(a)$ Casoratyanı'na eşit olur. Bu Casoratyan'ın değeri sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla bu sistemin bir tek $c_1, c_2, ..., c_n$ çözümü vardır. (3.8) denkleminin çözümü $t = a, a+1, ..., a+n-1$ noktalarındaki değerlerinde tek olarak belli olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı, $\forall t$ için

$$u(t) = c_1 u_1(t) + ... + c_n u_n(t)$$

olur.

Örnek 3.2.3.

t nin tüm değerleri için,

$$u(t+3)-6u(t+2)+11u(t+1)-6u(t)=0$$

fark denkleminin çözümleri; $1, 2^t, 3^t$ dir. Bu fark denklemi için Casoratyan;

$$\omega(t)=\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \\ u_1(t+1) & u_2(t+1) & u_3(t+1) \\ u_1(t+2) & u_2(t+2) & u_3(t+2) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2^t & 3^t \\ 1 & 2^{t+1} & 3^{t+1} \\ 1 & 2^{t+2} & 3^{t+2} \end{vmatrix}$$

$$=26^t$$

olur. Yani,

$$\omega(t)\neq 0$$

dır. Sonuç olarak, $\{1, 2^t, 3^t\}$ kümesi lineer bağımsızdır ve bu denklemin tüm çözümleri,

$$u(t)=c_1+c_2 2^t+c_3 3^t$$

formunda yazılabilir.

3.3. Lineer Denklemlerin Çözümü:

(3.8) denkleminin tüm katsayılarının sabitler olması durumunda çözümünün nasıl elde edileceğini inceleyelim. Bunun için $p_n \neq 0$ iken, (3.8) denkleminin her iki tarafını p_n ile bölüp düzenlersek,

$$u(t+n)+p_{n-1}u(t+n-1)+...+p_0u(t)=0 \qquad (3.19)$$

denklemini elde ederiz. (Burada $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ sabitler ve $p_0 \neq 0$ dır.)

Tanım 3.3.1.

(a) $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + p_0$ polinomuna (3.19) denkleminin karakteristik polinomu denir.

(b) $\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + p_0 = 0$ denklemine, (3.19) denkleminin karakteristik denklemi denir.

(c) Karakteristik denklemin $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ çözümlerine, karakteristik denklemin kökleri denir.

(3.19) denkleminde, E kaydırma operatörünü kullanırsak, (3.19) denklemi karakteristik denkleme dönüşür ve aynı katsayılara sahip olur. Öyleki,

$$(E^n + p_{n-1}E^{n-1} + ... + p_0)u(t) = 0 \text{ veya } (E-\lambda_1)^{\alpha_1}(E-\lambda_2)^{\alpha_2}...(E-\lambda_k)^{\alpha_k}u(t) = 0 \qquad (3.20)$$

olur. (Burada $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$ dir ve katsayıların mertebesi önemsizdir.)

$p_0 \neq 0$ olduğu için her karakteristik kökün sıfırdan farklı olduğuna dikkat edelim.

Şimdi, $(E-\lambda_1)^{\alpha_1}u(t) = 0$ denklemini çözelim. (3.21)

Kesinlikle, (3.21) in her çözümü (3.20) nin bir çözümü olacaktır.

$\alpha_1 = 1$ ise (3.21) denklemi basitçe,

$$u(t+1) = \lambda_1 u(t)$$

olur ve bu denklemin bir çözümü;

$$u(t) = \lambda_1^{\,t}$$

dir. Eğer $\alpha_1 \geq 1$ ise, (3.21) denkleminde $u(t) = \lambda_1^{\,t} v(t)$ olsun. Bu durumda,

$$(E-\lambda_1)^{\alpha_1}\lambda_1^{\,t}v(t) = \sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}(-\lambda_1)^{\alpha_1-i}E^i\lambda_1^{\,t}v(t)$$

$$=\sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}(-\lambda_1)^{\alpha_1-i}\lambda_1^{t+i}E^i v(t)$$
$$=\lambda_1^{\alpha_1+t}\sum_{i=0}^{\alpha_1}\binom{\alpha_1}{i}(-1)^{\alpha_1-i}E^i v(t)$$

olur. $E-I=\Delta$ olduğundan,

$$=\lambda_1^{\alpha_1+t}(E-1)^{\alpha_1}v(t)$$
$$=\lambda_1^{\alpha_1+t}\Delta^{\alpha_1}v(t)=0$$

elde edilir. Buradan,

$$v(t)=1,t,t^2,...,t^{n-1}$$

bulunur. Buna göre, (3.19) denkleminin α_1 çözümleri;

$$\lambda_1^t, t\lambda_1^t,...,t^{\alpha_1-1}\lambda_1^t$$

olur. Örnek 3.2.2. de olduğu gibi bu çözümler lineer bağımsızdır. Burada yaptığımız işlem, (3.20) deki her çarpana $\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_k$ için uygulanırsa (3.19) nın n-tane lineer bağımsız çözümü elde edilir.

Teorem 3.3.1.

(3.19) denkleminin, sırasıyla $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_k$ çarpanları ile $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ karakteristik köklerine sahip olduğunu kabul edelim. (3.19) denkleminin $\lambda_1^t,...,t^{\alpha_1-1}\lambda_1^t,\lambda_2^t,...,t^{\alpha_2-1}\lambda_2^t,...,\lambda_k^t,...,t^{\alpha_k-1}\lambda_k^t$ olmak üzere n-tane lineer bağımsız çözümü vardır. [1]

Örnek 3.3.1.

$t=a,a+1,a+2,...$ için,

$$u(t+3)-7u(t+2)+16u(t+1)-12u(t)=0$$

denkleminin tüm çözümlerini bulalım.

Çözüm

Bu denklemin karakteristik denklemi;

$$\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0$$

dır. Bu ifadeyi çarpanlarına ayırırsak,

$$(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0$$

olur. Buradan,

$$\lambda_1=\lambda_2=2 \text{ ve } \lambda_3=3$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3.1. den bu fark denkleminin, $u_1(t)=2^t$, $u_2(t)=t2^t$ ve $u_3(t)=3^t$ olmak üzere üç bağımsız çözümü vardır.

$$\omega(t)=\det\begin{bmatrix} 2^t & t2^t & 3^t \\ 2^t & (t+2)2^t & 2.3^t \\ 2^t & (t+4)2^t & 4.3^t \end{bmatrix}$$

$$=3^t2^{2t}\det\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & (t+2) & 2 \\ 1 & (t+4) & 4 \end{bmatrix}$$

$$=3^t2^{2t+1}\neq 0$$

Casorati matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğu için çözümler, lineer bağımsızdır. Öyleyse, bu fark denkleminin genel çözümü;

$$u(t) = c_1 2^t + c_2 t 2^t + c_3 3^t$$

dir. (Burada c_1, c_2, c_3 keyfi sabitlerdir.)

Eğer karakteristik kökler $\lambda = a \pm ib$ şeklinde bir kompleks çift içerirse, (3.19) denkleminin reel çözümleri $\lambda = re^{\pm i\theta} = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ kutupsal formu kullanılarak bulunabilir. Burada,

$$a^2 + b^2 = r^2 \text{ ve } \tan\theta = \frac{b}{a}$$

dır. Böylece,

$$\lambda^t = re^{\pm i\theta t} = r^t(\cos t\theta \pm i\sin t\theta)$$

olur.

Çözümlerin lineer birleşimleri ayrıca çözüm olduğundan, $r^t c\text{os}\, t\theta$ ve $r^t \sin t\theta$ reel bağımsız çözümlerini elde ederiz. Benzer yolla tekrarlayan kompleks kökler için lineer bağımsız çözümler elde edilebilir.

Örnek 3.3.2.

$u(t+2) - 2u(t+1) + 4u(t) = 0$ denkleminin bağımsız reel çözümlerini bulalım.

Çözüm

Bu denklemin karakteristik denklemi;

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

dır. Buradan karakteristik kökler;

$$\lambda_1 = 1 - i\sqrt{3} \text{ ve } \lambda_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

olur. Kutupsal koordinatlar;

$$r=\sqrt{1+3}=2 \text{ ve } \theta=\tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

elde edilir. Böylece iki bağımsız reel çözüm;

$$u_1(t)=2^t\cos\frac{\pi}{3}t \quad \text{ve } u_2(t)=2^t\sin\frac{\pi}{3}t$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}\omega(t)&=\begin{vmatrix} 2^t\cos\frac{\pi}{3}t & 2^t\sin\frac{\pi}{3}t \\ 2^{t+1}\cos\frac{\pi}{3}(t+1)-2^t\cos\frac{\pi}{3}t & 2^{t+1}\sin\frac{\pi}{3}(t+1)-2^t\sin\frac{\pi}{3}t \end{vmatrix}\\ &=4^t\sqrt{3}\neq 0\end{aligned}$$

olduğundan çözümler lineer bağımsızdır. Böylece denklemin genel çözümü,

$$u(t)=c_1 2^t\cos\frac{\pi}{3}t+c_2 2^t\sin\frac{\pi}{3}t$$

olur.

$n.$ basamaktan sabit katsayılı denklemin genel şekli;

$$y(t+n)+p_{n-1}y(t+n-1)+\ldots+p_0 y(t)=r(t) \tag{3.22}$$

dir. $r(t)$ sabit katsayılı homojen denklemlerin bir çözümü ise (3.22) denklemi sıfırlayıcı metod ile çözülebilir. Şimdi sıfırlayıcı metod ile ilgili bir teorem verelim.

Teorem 3.3.2.

$y(t)$, (3.22) denkleminin çözümü olsun. Yani,

$$(E^n + p_{n-1}E^{n-1} + ... + p_0)y(t) = r(t)$$

sağlansın, ayrıca $r(t)$ fonksiyonu da

$$(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + ... + q_0)y(t) = 0$$

denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda $y(t)$,

$$(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + ... + q_0)(E^n + p_{n-1}E^{n-1} + ... + p_0)y(t) = 0$$

denkleminin bir çözümüdür. [1]

İspat

(3.22) denkleminin her iki tarafına,

$$(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + ... + q_0)$$

operatörünü uygularsak,

$$(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + ... + q_0)(y(t+n) + p_{n-1}y(t+n-1) + ... + p_0 y(t)) = (E^m + q_{m-1}E^{m-1} + ... + q_0)r(t)$$

elde edilir. Kabülden dolayı denklemin sağ tarafı sıfırdır. Bu durumda,

$$(E^m + q_{m-1}E^{m-1} + ... + q_0)(E^n + q_{n-1}E^{n-1} + ... + p_0)y(t) = 0$$

olur. Bu da istenilendir.
Şimdi bu teoreme bir örnek verelim.

Örnek 3.3.3.

$y(t+2) - 7y(t+1) + 6y(t) = t$ denklemini çözelim.

Çözüm

Öncelikle denklem operatör formda yazılırsa,

$$(E^2-7E+6)y(t)=t$$

olur. Bu ifadeyi çarpanlarına ayırırsak,

$$(E-6)(E-1)y(t)=t$$

olur. Denklemin sağ tarafındaki t fonksiyonu, $(E-1)^2 t=\Delta^2 t=0$ homojen denklemini sağlar. Teorem 3.3.1. den $y(t)=c_1 6^t+c_2$ fonksiyonu,

$$(E-1)^3(E-6)y(t)=0$$

denkleminin bir çözümüdür. (Burada $(E-1)^2$, denklemin sağ tarafındaki sıfırdan farklı fonksiyonu sıfır yaptığı için sıfırlayıcıdır.)
Bu homojen denklemin çözümü;

$$y(t)=c_1 6^t+c_2+c_3t+c_4t^2$$

dir. Katsayıları belirlemek için orijinal denklemde $y(t)$ nin bu ifadesini yerine yazarız. Burada $c_1 6^t+c_2$ denklemin homojen kısmını sağladığı için, $y(t)=c_3t+c_4t^2$ yi orijinal denklemde yerine yazmak yeterlidir. Böylece,

$$y(t+2)-7y(t+1)+6y(t)=c_3(t+2)+c_4(t+2)^2-7c_3(t+1)-7c_4(t+1)^2+6c_3t+6c_4t^2$$

$$t^2[c_4-7c_4+6c_4]+t[4c_4+c_3-14c_4-7c_3+6c_3]+4c_4+2c_3-7c_4-7c_3=t$$

$$t[4c_4+c_3-14c_4-7c_3+6c_3]+4c_4+2c_3-7c_4-7c_3=t$$

elde edilir.
Karşılıklı aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse;

$$-10c_4 = 1 \Rightarrow c_4 = \frac{-1}{10}$$

$$-3c_4 - 5c_3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{10} = 5c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{3}{50}$$

olur. Buradan genel çözüm;

$$y(t) = c_1 6^t + c_2 + \frac{3}{50}t - \frac{1}{10}t^2$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3.4.

$t = a, a+1, \ldots$ için,

$$\Delta y(t) = 3^t \sin\frac{\pi}{2}t$$

fark denklemini çözelim. [1]

Çözüm

$3^t \sin\frac{\pi}{2}t$ fonksiyonu, komplex karakteristik köklere sahip bir denklemi sağlamak zorundadır. Örnek 3.3.2. den, bu köklerin kutupsal koordinatları,

$$r = 3,\ \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece karakteristik denklemin kökleri,

$$\lambda_{1,2} = 3e^{\pm i\frac{\pi}{2}}t = \pm 3i$$

olur. Bu durumda $3^t \sin\frac{\pi}{2}t$ fonksiyonu,

$$\left(E-3i\right)\left(E+3i\right)u(t)=\left(E^2+9\right)u(t)=0$$

denklemini sağlar. O halde teorem gereğince $y(t)=c_1+c_2 3^t \sin\frac{\pi}{2}t+c_3 3^t \cos\frac{\pi}{2}t$ fonksiyonu,

$$\left(E^2+9\right)\left(E-1\right)y(t)=0$$

denkleminin bir çözümüdür. (Burada $\Delta=E-I$ bağıntısını kullandık.)

Bu genel çözümü orijinal denklemde yerine yazarsak,

$$c_1+c_2 3^{t+1}\sin\frac{\pi}{2}\left(t+1\right)+c_3 3^{t+1}\cos\frac{\pi}{2}\left(t+1\right)-\left(c_1+c_2 3^t\sin\frac{\pi}{2}t+c_3 3^t\cos\frac{\pi}{2}t\right)=3^t\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$3c_2 3^t\cos\frac{\pi}{2}t-3c_3 3^t\sin\frac{\pi}{2}t-c_2 3^t\sin\frac{\pi}{2}t-c_3 3^t\cos\frac{\pi}{2}t=3^t\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$\left(3c_2-c_3\right)3^t\cos\frac{\pi}{2}t+\left(-3c_3-c_2\right)3^t\sin\frac{\pi}{2}t=3^t\sin\frac{\pi}{2}t$$

olur. Buradan karşılıklı katsayıların eşitlenmesiyle,

$$3c_2-c_3=0\Rightarrow c_3=3c_2$$

$$-3c_3-c_2=1$$

elde edilir. Buradan,

$$c_3=\frac{-3}{10}\ \text{ve}\ c_2=\frac{-1}{10}$$

olarak bulunur. Nihai olarak, verilen fark denkleminin genel çözümü;

$$y(t)=c_1-\frac{3^t}{10}\left(\sin\frac{\pi}{2}t+3\cos\frac{\pi}{2}t\right)$$

olarak elde edilir. (Burada, c_1 keyfi bir sabittir.)

Şimdi birinci basamaktan sistemler için bazı bilgileri verebiliriz.

$y(t)$ ve $z(t)$ bilinmeyen fonksiyonlar, L,M,P,Q polinomlar olmak üzere iki bilinmeyenli iki fark denkleminden oluşan

$$\left.\begin{array}{l} L(E)y(t)+M(E)z(t)=r(t) \\ P(E)y(t)+Q(E)z(t)=s(t) \end{array}\right\}$$

şeklindeki sistemlerde yok etme metodu yardımıyla çözülebilir. Bunun için, $Q(E)$ yi birinci denkleme, $M(E)$ yi ikinci denkleme uygulayıp birinci denklemden ikinci denklemi çıkartırsak,

$$\left[Q(E)L(E)-M(E)P(E)\right]y(t)+\left[Q(E)M(E)-M(E)Q(E)\right]z(t)=Q(E)r(t)-M(E)s(t)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem de düzenlenirse,

$$\left[Q(E)L(E)-M(E)P(E)\right]y(t)=Q(E)r(t)-M(E)s(t)$$

olur. Bu denklem sabit katsayılı lineer bir denklemdir. Bu denklemden $y(t)$ yi bulup denklem sisteminde herhangi bir denklemde yerine yazarak $z(t)$ bulunur.

Örnek 3.3.5.

$$\left.\begin{array}{l} y(t+2)-3y(t)+z(t+1)-z(t)=5^t \\ y(t+1)-3y(t)+z(t+1)-3z(t)=25^t \end{array}\right\}$$ lineer fark denklem sistemini çözelim.

Çözüm

Verilen denklemleri operatör formda yazarsak,

$$\left(E^2-3\right)y(t)+\left(E-1\right)\mathrm{z}(t)=5^t,$$
$$\left(E-3\right)y(t)+\left(E-3\right)\mathrm{z}(t)=25^t$$

olur.

Birinci denkleme $\left(E-3\right)$ operatörünü ve ikinci denkleme $\left(E-1\right)$ operatörünü uygulayıp taraf tarafa çıkartırsak,

$$\left[\left(E^2-3\right)\left(E-3\right)-\left(E-3\right)\left(E-1\right)\right]y(t)=\left(E-3\right)5^t-2\left(E-1\right)5^t$$
$$\left[\left(E-3\right)\left(E-2\right)\left(E+1\right)\right]y(t)=55^t-35^t-105^t+25^t$$
$$=-65^t$$

elde edilir.

$\left(E-5\right)$ operatörü son denklemin sıfırlayıcısıdır. Sıfırlayıcı metod ile,

$$y(t)=c5^t$$

alınabilir. $y(t)$ yi son denklemde yerine yazarsak,

$$\left[\left(E-3\right)\left(E-2\right)\left(E+1\right)\right]\left(c5^t\right)=-65^t$$
$$\left[E^3-4E^2+E+6\right]\left(c5^t\right)=-65^t$$
$$c5^{t+3}-45^{t+2}+c5^{t+1}+6c5^t=-65^t$$
$$36\,\mathrm{c}\,5^t=-65^t$$
$$c=\frac{-1}{6}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$y(t)=c_1 3^t+c_2 2^t+c_3\left(-1\right)^t-\frac{5^t}{6}$$

olur. $y(t)$ yi, ikinci denklemde yerine yazarsak,

$$\left(E-3\right)z(t)=25^t-3c_1 3^t-2c_2 2^t+c_3\left(-1\right)^t+\frac{5}{6}5^t+3c_1 3^t+3c_2 2^t+3c_3\left(-1\right)^t-\frac{3}{6}5^t$$

$$\left(E-3\right)z(t)=c_2 2^t+4c_3\left(-1\right)^t+\frac{7}{3}5^t$$

olur. Son denklemde sıfırlayıcı metodu kullanalım. Bu denklemin sıfırlayıcısı;

$$\left(E^3-6E^2+3E+10\right)$$

dur. Buradan,

$$z(t)=c_4 3^t-c_2 2^t-c_3\left(-1\right)^t+\frac{7}{6}5^t$$

olarak bulunur.

$y(t)$ ve z(t) yi verilen birinci denklemde yerine yazarsak,

$$\left(E^2-3\right)y(t)+\left(E-1\right)z(t)=\left(6c_1 3^t+c_2 2^t-2c_3\left(-1\right)^t-\frac{11}{3}5^t\right)+\left(2c_4 3^t-c_2 2^t+2c_3\left(-1\right)^t+\frac{14}{3}5^t\right)$$

$$5^t=\left(6c_1+2c_4\right)3^t+5^t$$

$$5^t=\left(6c_1+2c_4\right)3^t+5^t$$

$$c_4=-3c_1$$

olur. Böylece genel çözüm;

$$y(t)=c_1 3^t+c_2 2^t+c_3\left(-1\right)^t-\frac{5^t}{6}\ \text{ ve }\ \mathrm{z}(t)=-3c_1 3^t-c_2 2^t-c_3\left(-1\right)^t+\frac{7}{6}5^t$$

olarak elde edilir.

Şimdi tekrar homojen olmayan genel denkleme dönelim. Bu denklemin genel şeklinin,

$$p_n(t)y(t+\mathrm{n})+...+p_0(t)y(t)=r(t) \tag{3.7}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemin homojen kısmı ise,

$$p_n(t)y(t+\mathrm{n})+...+p_0(t)y(t)=0 \tag{3.8}$$

olduğunu biliyoruz.

(3.7) ve (3.8) denklemlerini daha önce inceledik. (3.7) denkleminin bir çözümü için parametrelerin değişimi metodu başka bir yöntemdir. Eğer (3.8) denkleminin n-tane lineer bağımsız çözümü biliniyorsa, bu çözümler yardımıyla (3.7) denkleminin n - tane belirsiz toplam kullanılarak tüm çözümleri bulunabilir. Biz burada $n=2$ için metodu genel olarak açıklayacağız.

Kabul edelim ki u_1 ve u_2, (3.8) denkleminin bağımsız çözümleri olsun. (3.7) denkleminin, a_1 ve a_2 belirlenecek sabitler olmak üzere,

$$y(t)=a_1(t)u_1(t)+a_2(t)u_2(t)$$

formunda bir çözümünü arayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} y(t+1) &= a_1(t+1)u_1(t+1)+a_2(t+1)u_2(t+1) \\ &= a_1(t)u_1(t+1)+a_2(t)u_2(t+1)+\Delta a_1(t)u_1(t+1)+\Delta a_2(t)u_2(t+1) \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte üçüncü ve dördüncü terimleri yok etmek için a_1 ve a_2 uygun seçilirse,

$$\Delta a_1(t)\,\mathrm{u}_1(t+1)+\Delta a_2(t)\,\mathrm{u}_2(t+1)=0 \tag{3.23}$$

olur. Bu denklem $t=t+1$ için,

$$\begin{aligned} y(t+2) &= a_1(t+1)u_1(t+2)+a_2(t+1)u_2(t+2) \\ &= a_1(t)u_1(t+2)+a_2(t)u_2(t+2)+\Delta a_1(t)\big(u_1(t+2)\big)+\Delta a_2(t)\big(u_2(t+2)\big) \end{aligned}$$

haline gelir.

(3.7) denkleminde $y(t)$, $y(t+1)$ ve $y(t+2)$ yi yerine yazıp $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ ortak parantezine alırsak,

$$p_2(t)y(t+2)+p_1(t)y(t+1)+p_0(t)y(t)=a_1(t)\left[p_2(t)u_1(t+2)+p_1(t)u_1(t+1)+p_0(t)u_1(t)\right]$$
$$+a_2(t)\left[p_2(t)u_2(t+2)+p_1(t)u_2(t+1)+p_0(t)u_2(t)\right]+p_2(t)\left[u_1(t+2)\Delta a_1(t)+u_2(t+2)\Delta a_2(t)\right]$$

olur.

u_1 ve u_2, (3.8) denkleminin çözümleri olduğu için eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki ifade sıfırdır. Böylece,

$$r(t)=p_2(t)\left[u_1(t+2)\Delta a_1(t)+u_2(t+2)\Delta a_2(t)\right]$$

olur. Buradan,

$$u_1(t+2)\Delta a_1(t)+u_2(t+2)\Delta a_2(t)=\frac{r(t)}{p_2(t)} \tag{3.24}$$

olarak bulunur. Buna göre, $\Delta a_1(t)$ ve $\Delta a_2(t)$, (3.23) ve (3.24) lineer denklemlerini sağlıyorsa,

$$y(t)=a_1(t)u_1(t)+a_2(t)u_2(t)$$

(3.7) denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 3.2.2. den dolayı $W(t+1)$ sıfırdan farklı olduğu için bu lineer denklem sisteminin çözümü tektir.

n. basamaktan denklem için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.3.

$u_1(t)$, $u_2(t)$, … , $u_n(t)$ (3.8) denkleminin bağımsız çözümleri olsun.

$a_1, a_2, ..., a_n \quad W(t+1)\begin{bmatrix} \Delta a_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ \Delta a_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{r(t)}{p_n(t)} \end{bmatrix}$ matris denklemini sağlasın. Bu durumda,

$$y(t) = a_1(t)u_1(t) + ... + a_n(t)u_n(t)$$

(3.7) denkleminin bir çözümüdür.

Örnek 3.3.6.

$y(t+2) - 7\,y(t+1) + 6y(t) = t$ fark denklemlerinin tüm çözümlerini bulalım.

Çözüm

Örnek 3.3.3. te bu problemi sıfırlayıcı metod kullanarak çözdük. Şimdi ise parametrelerin değişimi yöntemi ile çözelim. Homojen denklemin iki bağımsız çözümü;

$$u_1(t) = 1 \text{ ve } u_2(t) = 6^t$$

olarak elde edilmiştir. Bu durumda (3.23) ve (3.24) denklemleri sırasıyla;

$$\Delta a_1(t) + 6^{t+1}\Delta a_2(t) = 0,$$
$$\Delta a_1(t) + 6^{t+2}\Delta a_2(t) = t$$

olur. Buradan,

$$\Delta a_1(t) = \frac{-t}{5} \Rightarrow a_1(t) = \sum\left(\frac{-t}{5}\right) + c$$

olur. Teorem 2.2.1. in (e) şıkkından,

$$a_1(t) = \frac{-t^2}{10} + c$$

$$= \frac{-t(t-1)}{10} + c$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\Delta a_2(t) = \frac{t}{30} 6^{-t}$$

$$a_2(t) = \frac{1}{30} \sum t \left(\frac{1}{6}\right)^t + d$$

$$= \frac{1}{30}\left[t\left(\frac{-6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^t - \sum \left(\frac{-6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{t+1} \right] + d$$

$$= \frac{1}{30}\left[\frac{-6}{5} t \left(\frac{1}{6}\right)^t + \left(\frac{6}{5}\right)\frac{1}{6}\left(\frac{-6}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^t \right] + d$$

$$a_2(t) = \frac{-t}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^t - \frac{1}{125}\left(\frac{1}{6}\right)^t + d$$

şeklinde elde edilir. Böylece fark denkleminin genel çözümü,

$$y(t) = a_1(t)u_1(t) + a_2(t)u_2(t)$$

$$= a_1(t)1 + a_2(t)6^t$$

$$= \frac{-t(t-1)}{10} + c - \frac{t}{25} - \frac{1}{125} + d6^t$$

$$= c + d6^t - \frac{t^2}{10} + \frac{3t}{50} - \frac{1}{125}$$

$$= f + d6^t - \frac{t^2}{10} + \frac{3t}{50}$$

olarak bulunur.

$n = 2$ durumunda teorem 3.3.3. ve $y(a) = \mathrm{y}(a+1) = 0$ ile (3.7) denkleminin $y(t)$ çözümünün aşikar bir gösterimini elde etmek için kullanılabilir.

Sonuç 3.3.1.

$n=2$ durumunda, $y(a)=y(a+1)=0$ ’ı sağlayan (3.7) denkleminin tek çözümü parametrelerin değişimi metodu ile,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{t-1}\frac{u_1(k+1)u_2(t)-u_2(k+1)u_1(t)}{p_2(k)\omega(k+1)}r(k)$$

şeklinde verilir. (Burada u_1 ve u_2 (3.8) denkleminin bağımsız çözümleridir.)

Uyarı 3.3.1.

$y(t)$ nin önceki ifadesinden $y(a)=0$ ı elde etmek için, bir toplamın en düşük limitinin en yüksek limitinden daha büyük olması gerekir.

3.4. Uygulamalar :

Sabit katsayılı lineer fark denklemleri, fark denklemlerinin çok kısıtlı bir sınıfını temsil etmesine rağmen çeşitli uygulamalar mevcuttur. Şimdi bunların birkaçını inceleyelim. [1]

Alıştırma 3.4.1. (Fibonacci Sayı Dizisi)

Fibonacci sayı dizisinde her tamsayı, kendinden önceki iki tamsayının toplamıdır. Fibonacci sayı dizisi; $1,1,2,3,5,8,13,21,...$ şeklindedir. Ayçiçekleri ve çam kozalakları üzerindeki spiral desenler gibi bazı doğa olaylarında bu dizi görülür. Ayrıca bu sayılar algoritma analizini oluşturur.
$n=1,2,...$ için F_n, Fibonacci sayı dizisinin $n.$ $t$erimini göstersin. F_n ’e, $n.$ Fibonacci sayısı denir ve F_n, aşağıdaki başlangıç değer problemini sağlar.

$$\left.\begin{array}{l} F_{n+2}-F_{n+1}-F_n=0,(n=1,2,...) \\ F_1=1,F_2=1 \end{array}\right\}$$

Şimdi bu problemi çözelim.

Çözüm

Verilen denklemin karakteristik denklemi;

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

olup, kökleri

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

dır. Bu durumda problemde verilen fark denkleminin çözümü;

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

dır. Bu çözüm için $n = 1$ olduğunda,

$$F_1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1$$

$$1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$c_1 \left(1+\sqrt{5}\right) + c_2 \left(1-\sqrt{5}\right) = 2 \tag{3.25}$$

olur. $n = 2$ olduğunda,

$$F_2 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

$$1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$c_1\left(6+2\sqrt{5}\right)+c_2\left(6-2\sqrt{5}\right)=4 \tag{3.26}$$

olur.

(3.25) ve (3.26) dan,

$$c_1 = -c_2$$

elde edilir.

(3.25) te $c_1 = -c_2$ yazılırsa,

$$-c_2\left(1+\sqrt{5}\right)+c_2\left(1-\sqrt{5}\right)=2$$

$$-2c_2\sqrt{5}=2$$

$$c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

olur. Buradan,

$$c_1 = -c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olarak bulunur.

$n = 1, 2, \ldots$ için,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

olur.

Bu formülde $\sqrt{5}$ baskın olmasına rağmen, Fibonacci dizisinin özelliği gereğince tüm bu sayılar tamsayı olmak zorundadır.

$n \to \infty$ için,

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

olur.

Bu oran altın oran olarak bilinir. Eski Yunanlılar bu oranı, bir dikdörtgenin uzunluğunun genişliğine oranı olarak düşünmüşlerdir.

Alıştırma 3.4.2. (Baykuş-Fare Modeli)

Belirli bir tarım bölgesinde, normal koşullar altında baykuş ve fare popülasyonları arasında av-avcı ilişkisi vardır. Bu bölgede, K bin – tane baykuş ve L milyon – tane fare popülasyonu var olsun. Buna karşın, aşırı kış koşulları baykuş popülasyonunu şiddetle azaltabilir. Aşağıdaki modelde, baykuş ve fare popülasyonları tekrar dengeye gelirler.

$x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla baykuş ve fare popülasyonlarındaki değişimi göstersin. t. yılın başlangıcındaki popülasyonların genel seviyeleri; baykuşların popülasyonu $\mathrm{K} + x(t)$ (binlerde), farelerin popülasyonu $\mathrm{L} + y(t)$ (milyonlarda) dir. Kabul edelim ki modelimiz,

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= -0.1x(t) + 0.2y(t) \\ \Delta y(t) &= -0.1x(t) - 0.4y(t) \end{aligned}$$

şeklinde olsun.

Baykuş popülasyonunda bir azalma olması $(x(t) < 0)$, herbir baykuş başına daha çok yemek ve daha az baykuşun fare yemesi demektir. Bu durum her iki popülasyona da pozitif bir etki yapar $(-0.1x(t) > 0)$. Diğer taraftan, fare popülasyonlarındaki bir azalma $(\mathrm{y}(t) < 0)$, herbir baykuş başına daha az yemek ve fareler arasında yemek için daha az rekabet demektir. Bu durum baykuş popülasyonları üzerinde negatif bir etki $(-0.2\,\mathrm{y}(t) < 0)$ ve fare popülasyonları üzerinde $(-0.4\,\mathrm{y}(t) > 0)$ oluşturur. Başlangıçtaki değerler;

$$x(0)=-5 \text{ ve } y(0)=0$$

olsun. Yukarıdaki sistemi operatör formda yazarsak,

$$(E-0.9)\,x(t)-0.2\,y(t)=0 \tag{3.27}$$

$$0.1x(t)+(E-0.6)\,y(t)=0 \tag{3.28}$$

olur. Kısım 3.3 teki metodları kullanarak, birinci denklemi -0.1 ile çarpıp ikinci denkleme $(E-0.9)$ operatörünü uygulayıp taraf tarafa toplarsak,

$$0.02y(t)+\left(E^2-1.5E+0.54\right)y(t)=0$$

$$\left(E^2-1.5E+0.56\right)y(t)=0$$

$$(E-0.8)(E-0.7)\,y(t)=0$$

$$y(t)=A(0.7)^t+B(0.8)^t$$

elde edilir. $y(t)$ yi ikinci denklemde yerine yazarsak,

$$0.1x(t)+(E-0.6)\left[A(0.7)^t+B(0.8)^t\right]=0$$

$$-0.1x(t)=A(0.7)^{t+1}+B(0.8)^{t+1}-0.6A(0.7)^t-0.6B(0.8)^t$$

$$x(t)=-A(0.7)^t-2B(0.8)^t$$

olur. $t=0$ için, $x(0)=-5$ olduğundan

$$-5=-A(0.7)^0-2B(0.8)^0$$

$$A+2B=5 \tag{3.29}$$

olur. $t=0$ için, $y(0)=0$ olduğundan

$$0=A(0.7)^0+B(0.8)^0$$

$$A+B=0$$
$$A=-B$$

bulunur. $A=-B$ ifadesi (3.29) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-B+2B=5$$
$$B=5$$

olur. Buradan,

$$A=-5$$

olarak bulunur.
t yıl sonra popülasyonların değişimleri;

$$x(t)=5(0.7)^t-10(0.8)^t,$$
$$y(t)=-5(0.7)^t+5(0.8)^t$$

olarak elde edilir.

Alıştırma 3.4.3. (Chebyshev Polinomları)

Birinci çeşit n. dereceden Chebyshev polinomu, $n\geq 0$ için,

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}(x))$$

şeklinde ifade edilir.
$T_0(x)=1$ ve $T_1(x)=x$ olduğuna dikkat edelim. Şimdi $\theta=\cos^{-1}(x)$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için,

$$\begin{aligned}T_{n+2}(x)-2xT_{n+1}(x)+T_n(x)&=\cos(n+2)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta+\cos n\theta\\&=\cos n\theta\cos 2\theta-\sin n\theta\sin 2\theta-2\cos n\theta\cos^2\theta+2\sin n\theta\cos\theta\sin\theta+\cos n\theta\end{aligned}$$

$$= \cos n\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right) - \sin n\theta \sin 2\theta - 2\cos n\theta \cos^2\theta + \sin n\theta \sin 2\theta + \cos n\theta$$

$$= 2\cos n\theta \cos^2\theta - \cos n\theta - \sin n\theta \sin 2\theta - 2\cos n\theta \cos^2\theta + \sin n\theta \sin 2\theta + \cos n\theta$$

$$= 0$$

olur. Sonuç olarak, $T_n(x)$ fonksiyonu sabit x ile n nin fonksiyonu olduğundan sabit katsayılı homojen lineer fark denklemini sağlar.

Chebyshev polinomları bu denklemden yararlanılarak hesaplanabilir.

Gerçekten de, $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ rekürans bağıntısından $n = 0$ için,

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x)$$

$$T_2(x) = 2xx - 1$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$n = 1$ için,

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x)$$

$$T_3(x) = 2x\left(2x^2 - 1\right) - x$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

olur.

Basit bir tümevarım ispatı, $T_n(x)$ in n. dereceden bir polinom olduğunu gösterir.

$\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olsun. Burada $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonudur.

$m \neq n$ için,

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\cos^{-1}x)\cos(m\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\left[\begin{array}{c} \theta = \cos^{-1}(x) \\ d\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{array}\right]$$

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\omega(x)dx = -\int_{\pi}^{0} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m} + \frac{\sin(n-m)\theta}{n-m}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m} + \frac{\sin(n-m)\pi}{n-m} - \frac{\sin(n+m)0}{n+m} - \frac{\sin(n-m)0}{n-m}\right]$$

$$= 0$$

bulunur.

Böylece Chebyshev polinomlarının, $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonu ile $[-1,1]$ aralığı üzerinde ortogonal olduğu gösterilmiş oldu. Bu özelliği ve birkaç başka özelliğinden dolayı Chebyshev polinomları, polinom tipli sürekli fonksiyonların yaklaşımını inceleyen yaklaşım teorisi dalında temel bir öneme sahiptir. Ayrıca bu denklemler ortogonal polinomların hesaplanmasında da genel bir faydaya sahiptir.

Alıştırma 3.4.4. (Topraktaki Suyun Ayarlanması)

Su tayınlamasından dolayı, bir kişi çimenlerini sadece akşam 9 dan sabah 9 a kadar sulayabilmektedir. Varsayalım ki bu kişi bu periyotta tarım toprağına q -miktar su ekleyebilsin. Fakat tarım toprağındaki toplam su miktarının yarısı, sabah 9 dan akşam 9 a kadar ki periyot sırasında emilme ya da buharlaşma aracılığıyla kaybolur.

Farz edelim ki tarım toprağı,ilk gün tayınlamasında akşam 9 da I başlangıç miktarı kadar su içersin. $y(t)$, t. 12-saatlik periyodun sonunda toprakta biriken su miktarı olsun. Bu durumda; eğer t tek sayı ise,

$$y(t+2) = \frac{1}{2}y(t) + q$$

veya t çift sayı ise,

$$y(t+2)=\frac{1}{2}y(t)+\frac{q}{2}$$

eşitlikleri sağlanır. Genel olarak ise,

$$y(t+2)-\frac{1}{2}y(t)=\frac{q}{4}\left(3-(-1)^t\right) \tag{3.30}$$

denklemi sağlanır. Bu denklemin homojen kısmı,

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

karakteristik köklerine sahip olduğundan homojen kısmın çözümü;

$$c\left(\sqrt{2}\right)^{-t}+d\left(-\sqrt{2}\right)^{-t}$$

olur.

Sıfırlayıcı metod ile homojen olmayan denklemin bir özel çözümü;

$$A+B(-1)^t$$

olarak elde edilir.

$$\left.\begin{aligned} y_1(t)&=A+B(-1)^t \\ y_1(t+2)&=A+B(-1)^{t+2} \end{aligned}\right\}\text{ eşitliklerini}$$

(3.30) denkleminde yerine yazarsak,

$$A+B(-1)^{t+2}-\frac{1}{2}\left(A+B(-1)^t\right)=\frac{q}{4}\left(3-(-1)^t\right)$$

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}(-1)^t=\frac{q}{4}\left(3-(-1)^t\right)$$

$$\frac{A}{2}=\frac{3q}{4}\Rightarrow A=\frac{3q}{2},$$

$$\frac{B}{2}=\frac{-q}{4}\Rightarrow B=\frac{-q}{2}$$

elde edilir. Böylece genel çözüm,

$$y(t)=\mathrm{c}\left(\sqrt{2}\right)^{-t}+d\left(-\sqrt{2}\right)^{-t}+\frac{q}{2}\left[3-(-1)^{t}\right]$$

olarak bulunur. Bu çözümde $y(0)=I$ ve $y(1)=I+q$ başlangıç koşullarını kullanalım.

$t=0$ için,

$$y(0)=c+d+\frac{q}{2}\left[3-(-1)^{0}\right]$$

$$I=c+d+\frac{q}{2}2$$

$$I=c+d+q$$

$$I-q=c+d \tag{3.31}$$

$t=1$ için,

$$y(1)=c\frac{1}{\sqrt{2}}+d\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{q}{2}\left[3-(-1)^{1}\right]$$

$$I+q=c\frac{1}{\sqrt{2}}+d\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)+2q$$

$$c-d=\sqrt{2}\left(I-q\right) \tag{3.32}$$

elde edilir.

(3.31) ile (3.32) yi tarafa toplarsak,

$$c=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)I-\left(\sqrt{2}+1\right)q}{2}$$

olur. c yi (3.31) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)I-\left(\sqrt{2}+1\right)q}{2}+d=I-q$$

$$d=I\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)+q\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$y(t)=\frac{I-q}{2}\left(\sqrt{2}\right)^{-t}\left\{\sqrt{2}\left[1-(-1)^t\right]+\left[1+(-1)^t\right]\right\}+\frac{q}{2}\left[3-(-1)^t\right]$$

olur. (Burada $t=0,1,2,...$)

t nin en geniş değerleri için $y(t)$, q ve $2q$ arasında değerler alır.

Alıştırma 3.4.5. (Bir Tridiagonal Determinant)

$$D_n=\det\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & & & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & & . & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & c & a \end{bmatrix}_{n\times n}$$

olsun.

Bu determinant önce $(n+2)\times(n+2)$ tipine genişletilip sonra birinci satıra göre açılırsa,

$D_{n+2}=aD_{n+1}-bcD_n$ homojen fark denklemi elde edilir.

Bu homojen fark denkleminin karakteristik denklemi;

$$\lambda^2-a\lambda+bc=0$$

dır. Bu denklemin karakteristik kökleri;

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$$

olarak bulunur.

$a^2 - 4bc < 0$ olduğu durumu düşünürsek,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{i\sqrt{4bc - a^2}}{2}$$

olarak elde edilir.

Bu komplex kökler için kutupsal koordinata geçersek,

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4bc - a^2}{4}} = \sqrt{bc}$$

$$x = r\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

$$y = r\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{4bc - a^2}}{2\sqrt{bc}}$$

olur.

Böylece,

$$\lambda = \sqrt{bc}\left(\cos\theta \pm i\sin\theta\right)$$

elde edilir. Buradan genel çözüm;

$$D_n = \left(c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta\right)\left(bc\right)^{\frac{n}{2}}$$

olarak bulunur.

a ve $D_2 = a^2 - bc$ olduğu için c_1 ve c_2 sabitlerini bulabiliriz.

$n=1$ için,

$$a=\left(c_1\cos\theta+c_2\sin\theta\right)\left(bc\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.33}$$

olup $n=2$ için,

$$a^2-bc=\left(c_1\cos 2\theta+c_2\sin 2\theta\right)\left(bc\right) \tag{3.34}$$

olur. Birinci denklemdeki a değerini ikinci denklemde yerine yazarsak,

$$\left(c_1\cos\theta+c_2\sin\theta\right)^2\left(bc\right)-bc=\left(c_1\cos 2\theta+c_2\sin 2\theta\right)\left(bc\right)$$

$$\left(c_1^2\cos^2\theta+2c_1c_2\sin\theta\cos\theta+c_1^2\sin^2\theta\right)\left(bc\right)-bc=\left(c_1\cos 2\theta+c_2\sin 2\theta\right)\left(bc\right)$$

$$c_1=1 \text{ ve } c_2=\cot\theta$$

bulunur.

$n\geq 1$ için,

$$D_n=\left(bc\right)^{\frac{n}{2}}\left(\cos n\theta+\cot\theta\sin n\theta\right)$$

$$D_n=\left(bc\right)^{\frac{n}{2}}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

olur. Belirli durumlarda D_n nin değerleri periyodiktir. Örneğin,

$a=b=c=1$ ise,

$$\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{1.1}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$n\geq 1$ için,

$$D_n = 1\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n+1)\frac{\pi}{3}$$

olur.

$n=1$ için, $D_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(1+1)\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

$n=2$ için, $D_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2+1)\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}0 = 0$

$n=3$ için, $D_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(3+1)\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -1$

$n=4$ için, $D_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4+1)\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -1$

$n=5$ için, $D_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(5+1)\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}0 = 0$

Böylece, D_n $1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \ldots$ dizisini verir. Yani, D_n periyodiktir.

Alıştırma 3.4.6. (Epidemiyoloji)

x_n, belirli bir nüfustaki bir salgının, n. günündeki hastalanan bireylerin sayısının kesirle ifadesini gösterirse, aşağıdaki denklem hastalığın yayılmasının olası bir modelini ifade eder.
$n \geq 0$ için,

$$\log\frac{1}{x_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n}\left(1+\varepsilon - x_{n-k}\right)A_k$$

dır. (Burada A_k, k. günde hasta bireylerdeki bulaşıcılığın ölçüsüdür. ε küçük pozitif bir sabittir.)
$x_n = e^{-z_n}$ olursa, z_n için denklem;

$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(1+\varepsilon - e^{-z_n - k}\right) A_k$$

olur. Bu denklem lineer olmayan bir denklemdir. Dikkat edelim ki x_n salgının erken aşamalarında 1 e yaklaşırken, z_n sıfıra yaklaşır.

$e^{-z_n - k}$ 'nın yerine yaklaşık değeri aynı olan $1 - z_{n-k}$ yı alırsak, $y_0 = 0$ başlangıç değeri ile $n \geq 0$ için $y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\varepsilon - y_{n-k}\right) A_k$ lineer denklemi elde edilir. Bu denklem sabit katsayılı lineer denklem olmasına karşın herbir y_{n+1}, $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ dizisinin önceki elemanlarının tümüne bağlı olduğu için bundan önce çalıştığımız hiçbir tipten değildir. Fakat doğurucu fonksiyonlar metodu, Konvolüsyon tipteki bir toplam olarak bilinen $\sum_{k=0}^{n} y_{n-k} A_k$ toplamının özel bir formu olduğundan burada kullanışlıdır.

$\{y_n\}$ dizisi için bir $Y(t)$ doğurucu fonksiyonu arayalım.

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_n t^n \text{ ve ayrıca } A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^{n+1} \text{ dir.}$$

Kuvvet serilerinin çarpımı yöntemi (Cauchy çarpımı) ile,

$$\begin{aligned} A(t)\,\mathrm{Y}(t) &= \mathrm{y}_0\, A_0 t + \left(\mathrm{y}_1\, A_0 + \mathrm{y}_0\, A_1\right) t^2 + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} y_{n-k} A_k \right) t^{n+1} \end{aligned}$$

yazılabilir.

y_n li fark denkleminin her iki tarafını t^{n+1} ile çarpıp toplarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} t^{n+1} = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} A_k \right) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} y_{n-k} A_k \right) t^{n+1}$$

olur. Denklemin sol tarafının toplamı $y_0 = 0$ olduğundan $Y(t)$ ye eşittir. Denklemin sağ tarafının ikinci toplamı $A(t)Y(t)$ ye eşittir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$\mathrm{Y}(t) = \varepsilon A(t)\frac{1}{1-t} + A(t)\,\mathrm{Y}(t)$$

elde edilir. Buradan da,

$$\mathrm{Y}(t) = \frac{\varepsilon A(t)}{(1-t)(1-A(t))},$$

$\{\mathrm{y}_n\}$ için doğurucu bir fonksiyon olarak bulunur.

Birkaç özel durumda, $\{\mathrm{y}_n\}$ dizisi aşikar olarak hesaplanabilir. Örneğin, $0 < \alpha < 1$ iken, $A_k = c\alpha^k$ olsun. Bu durumda,

$$A(t) = \frac{ct}{1-\alpha t} \text{ ve } \mathrm{Y}(t) = \frac{\varepsilon ct}{(1-t)(1-at-ct)}$$

dir.

Kısmi kesirlerle ifade edersek,

$$\frac{\varepsilon ct}{(1-t)(1-\alpha t-ct)} = \frac{\varepsilon c}{1-(\alpha+c)}\left[\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1-(\alpha+c)t}\right]$$

elde edilir. Buradan da,

$$Y(t) = \frac{\varepsilon c}{1-(\alpha+c)}\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+c)^n t^n\right]$$

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon c}{1-(\alpha+c)}\left[1-(\alpha+c)^n\right]\right)t^n$$

$$y_n = \frac{\varepsilon c}{1-(\alpha+c)}\left[1-(\alpha+c)^n\right]$$

olur.

$\alpha + c < 1$ ise, y_n tüm n ler için oldukça küçük kalacaktır. Bu durumda salgın etkisiz olacaktır.

3.5. Değişken Katsayılı Denklemler :

Değişken katsayılı ikinci ve daha yüksek basamaktan lineer fark denklemleri çoğu kez kapalı formda çözülemez. Bunun için bu tarzdaki denklemlerin çözümü için bir genelleme yapamayacağız. Sadece bu denklemleri çözmek için birkaç kullanışlı metod vereceğiz. Bu metodlar belirli durumlarda aşikar çözümlere imkan sağlayacaktır. [1]

n. basamaktan lineer fark denklemi operatör formda;

$$\left(p_n(t)E^n + \ldots + p_0(t)\right)y(t) = r(t)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Eğer $y(t)$ nin önündeki operatör, sabit katsayılı lineer denklemlerdeki gibi birinci basamaktan lineer çarpanlarına ayrılırsa, buradan elde edilen birinci basamaktan denklemler seriler yardımıyla çözülürek istediğimiz çözümleri buluruz.

Örnek 3.5.1.

$\left(E^2 - (t+1)E - (t+1)\right)y(t) = 0$ denklemini çözelim.

Çözüm

Operatörü çarpanlarına ayırırsak,

$$(E+1)\left(E-(t+1)\right)y(t) = 0$$

olur. $\left(E-(t+1)\right)y(t) = v(t)$ denirse, denklem

$$\left(E+1\right)v(t)=0$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$v(t)=c\left(-1\right)^{t}$$

olarak elde edilir. $v(t)$ nin bu değeri yerine yazılırsa,

$$\left(E-\left(t+1\right)\right)y(t)=c\left(-1\right)^{t}$$

olur. Homojen denklemin genel çözümü önceki bilgilerimizi kullanırsak,

$$d\Gamma(t+1)$$

olur. Teorem 3.1.1. den dolayı da,

$$y(t)=d\Gamma(t+1)+c\Gamma(t+1)\sum\frac{\left(-1\right)^{t}}{\Gamma(t+2)}$$

olarak bulunur.

Eğer t, $\{0,1,2,...\}$ kümesinden değerler alırsa,

$$y(t)=Dt!+Ct!\sum_{k=0}^{t-1}\frac{\left(-1\right)^{k}}{(k+1)!}$$

elde edilir. (Burada c ve d keyfi sabitlerdir.)

Bazen homojen denklemin sıfırdan farklı bir özel çözümünü bulabiliriz. Bu durumlarda, denklemin basamağını bir azaltabiliriz. İkinci basamaktan bir denklem için, birinci çözümünden bağımsız ikinci çözümü bulmak mümkündür.

Lemma 3.5.1.

$p_n(t)u(t+n)+...+p_0(t)u(t)=0$ denkleminin çözümleri; $u_1(t),...,u_n(t)$ olsun. $\omega(t)$, bu denklemin Casoratyan'ı olsun. Öyleyse $\omega(t)$,

$$\omega(t+1)=\left(-1\right)^n \frac{p_0(t)}{p_n(t)}\omega(t) \tag{3.35}$$

denklemini sağlar. [1]

İspat

$\omega(t+1)$ in son satırını, $(n.\ \text{satır})+\frac{p_1}{p_n}\times(1.\ \text{satır})+\ ...+\frac{p_{n-1}}{p_n}\times[(n-1).\,\text{satır}]$ şeklinde yazarsak, determinantın bilinen özelliği gereğince $\omega(t+1)$ in değeri değişmez.

Fark denklemi yeni son satırı göstermek için kullanılabilir. Yeni son satır;

$$\left[\frac{-p_0}{p_n}u_1(t),...,\frac{-p_0}{p_n}u_n(t)\right]$$

olur. Bu durumda $\omega(t+1)$ i yeniden düzenlersek,

$$\omega(t+1)=\det\begin{bmatrix} u_1(t+1) & . & . & . & u_{n-1}(t+1) & u_n(t+1) \\ . & . & & & . & . \\ . & & . & & . & . \\ . & & & . & . & . \\ u_1(t+n-1) & & & & u_{n-1}(t+n-1) & u_n(t+n-1) \\ \frac{-p_0}{p_n}u_1(t) & . & . & . & \frac{-p_0}{p_n}u_{n-1}(t) & \frac{-p_0}{p_n}u_n(t) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\omega(t+1)=\left(-1\right)^n \frac{p_0(t)}{p_n(t)}\omega(t)$$

olur.

Kabul edelim ki $u_1(t)$,

$$p_2(t)u(t+2)+p_1(t)u(t+1)+p_0(t)u(t)=0 \tag{3.36}$$

denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun. $u_2(t)$ de (3.36) denkleminin diğer çözümü olsun. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\Delta\frac{u_2(t)}{u_1(t)}&=\frac{u_1(t)\Delta u_2(t)-u_2(t)\Delta u_1(t)}{u_1(t)u_1(t+1)}\\&=\frac{\omega(t)}{u_1(t)u_1(t+1)}\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$u_2(t)=u_1(t)\sum\frac{\omega(t)}{u_1(t)u_1(t+1)} \tag{3.37}$$

olarak elde edilir.

Basamak İndirgeme:

$u_1(t)$, (3.36) nın sıfırdan farklı bir çözümü ve $p_0(t)$, $p_2(t)$ sıfırdan farklı olsun. O halde (3.37), (3.36) nın bağımsız bir çözümünü verir. Burada $\omega(t)$, (3.35) in sıfırdan farklı bir çözümüdür. [1]

Örnek 3.5.2.

$u(t+2)-u(t+1)-\frac{1}{t+1}u(t)=0$ denklemini çözelim.

Çözüm

$u_1(t) = t+1$ verilen denklemin bir çözümüdür.

$\omega(t)$, $\omega(t+1) = -\frac{1}{t+1}\omega(t)$ denklemini sağlar. Burada,

$$\omega(t) = \frac{(-1)^t}{t!}$$

olarak seçebiliriz. Buradan,

$$u_2(t) = (t+1)\sum_{k=0}^{t-1}\frac{(-1)^k}{(k+2)!}$$

elde edilir. Böylece bu denklemin genel çözümü;

$$u(t) = (t+1)\left(c + d\sum_{k=0}^{t-1}\frac{(-1)^k}{(k+2)!}\right)$$

olarak bulunur.

Örnek 3.5.3.

$t(t+1)\Delta^2 u(t) + at\Delta u(t) + bu(t) = 0$ denklemi Cauchy-Euler diferensiyel denklemine benzerdir. (Burada a, b sabittir.) Bu denklemi çözelim. [1]

Çözüm

Denklemin $u(t) = (t+r-1)^{\underline{r}}$ şeklinde bir özel çözümünü arayalım. Bu çözümü denklemde yerine yazarsak,

$$t(t+1)r(r-1)(t+r-1)^{\underline{r-2}} + atr(t+r-1)^{\underline{r-1}} + b(t+r-1)^{\underline{r}} = 0$$

olur.

$$t(t+r-1)^{\underline{r-1}} = (t+r-1)^{\underline{r}} \qquad (3.38)$$

$$t(t+1)(t+r-1)^{\underline{r-2}} = (t+r-1)^{\underline{r}} \qquad (3.39)$$

olduklarından (3.38) ve (3.39) ifadeleri yerlerine yazılırlarsa,

$$r(r-1)(t+r-1)^{\underline{r}} + ar(t+r-1)^{\underline{r}} + b(t+r-1)^{\underline{r}} = 0$$

elde edilir. Buradan da,

$$r^2 + (a-1)r + b = 0 \qquad (3.40)$$

bulunur.
(3.40) denklemi farklı r_1, r_2 reel köklerine sahipse, fark denklemi $i = 1,2$ için,

$$u_i(t) = (t + r_i - 1)^{\underline{r_i}}$$

bağımsız çözümlerine sahiptir.
(3.36) denklemindeki p_0, p_1, p_2 katsayıları polinom ise, (3.36) nın bir çözümü için bir doğurucu fonksiyonun fonksiyon aileleri ile çözülebilen bir diferensiyel denklemi sağladığını gösterir. Bu, diferensiyel denklemlerin çözümlerini kuvvet serileri yardımıyla bulmak için bir metoddur.

Örnek 3.5.4.

$n = 0,1,2,...$ için,

$$(n+2)u_{n+2} - (n+3)u_{n+1} + 2u_n = 0$$

denklemini çözelim. [1]

Çözüm

u_n için bir doğurucu fonksiyon,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

olsun.

İlk olarak, denklemin herbir terimini x^n ile çarpıp 0 dan ∞ a kadar toplamını alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) u_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+3) u_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 0$$

elde ederiz.

Birinci toplamda $n = n-2$ ve ikinci toplamda $n = n-1$ indis değiştirmesi yaparsak,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n u_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+2) u_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = 0 \qquad (3.41)$$

elde ederiz.

$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1}$ olduğu için (3.41) deki birinci toplam;

$$\sum_{n=2}^{\infty} n u_n x^{n-2} = \frac{1}{x}(g'(x) - u_1)$$

haline gelir. (3.41) deki ikinci toplam ise;

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+2) u_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^{n-1} = g'(x) + \frac{2}{x}(g(x) - u_0)$$

olur.

Bu ifadeleri (3.41) deki yerlerine yazarsak,

$$\frac{1}{x}(g^{'}(x)-u_1)-g^{'}(x)-\frac{2}{x}(g(x)-u_0)+2g(x)=0$$

$$g^{'}(x)-2g(x)=\frac{u_1-2u_0}{1-x}$$

olarak bulunur.

$u_1=2u_0$ için son denklemin çözümü,

$$g(x)=\mathrm{e}^{2x}$$

tir. Buradan,

$$g(x)=\mathrm{e}^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$$

olarak yazılabilir. Böylece $n=0,1,2,...$ için,

$$u_n=\frac{2^n}{n!}$$

olur.

Bu hesaplamada denklemin katsayı fonksiyonları birinci dereceden olduğu için $g(x)$ in sadece birinci türevini kullandık. Genellikle, diferensiyel denklemin basamağı en yüksek dereceli polinomun derecesine eşittir.

İkinci çözüm basamak indirgeme kullanılarak kolayca bulunabilir. (3.35) ten,

$$\omega(n+1)=\frac{2}{n+2}\omega(n)$$

bulunur. Böylece,

$$\omega(n)=\frac{2^n}{(n+1)!}$$

olarak seçebiliriz. Buradan ikinci çözüm;

$$v_n = \frac{2^n}{n!}\sum \frac{\dfrac{2^n}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n 2^{n+1}}{n!(n+1)!}}$$

$$= \frac{2^n}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{2^{k+1}}$$

olur.

Örnek 3.1.4.te, bazı birinci basamaktan denklemlerin çözümlerinin faktöriyel serileri yardımıyla yapıldığını gördük. Daha yüksek basamaktan denklemlerin de bu tür çözümleri vardır.

Bu tarz denklemlerde $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\underline{-k}}$ gibi özel seriler denklemde yerine yazılıp a_k katsayıları bulunur. Aslında bu hesaplamalar epeyce karışıktır. Buna rağmen aşağıdaki örnek oldukça basittir.

Örnek 3.5.5.

$2u(t+2) + (t+2)(t+1)u(t+1) - (t+2)(t+1)u(t) = 0$ denkleminin faktöriyel serisi ile çözümünü bulunuz. [1]

Çözüm

Bu denklem,

$$2u(t+2) + (t+2)(t+1)\Delta u(t) = 0$$

olarak yazılabilir. Denklemin $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\underline{-k}}$ şeklinde çözüm arayalım. Bu ifadeyi son denklemde yerine yazarsak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2a_k (t+2)^{\underline{-k}} + (t+2)(t+1)\sum_{k=1}^{\infty} a_k (-k) t^{\underline{-k-1}} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2a_k (t+2)^{\underline{-k}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-k)(t+2)(t+1) t^{\underline{-k-1}} = 0$$

olur.

$$(t+2)(t+1)t^{\underline{-k-1}} = (t+2)^{\underline{-k+1}}$$

eşitliğini son ifadede yerine yazarsak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2a_k (t+2)^{\underline{-k}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-k)(t+2)^{\underline{-k+1}} = 0$$

elde edilir.

İkinci seride $k = k+1$ indis değiştirmesi yapıp tek bir seri halinde yazarsak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[2a_k - (k+1)a_{k+1} \right] (t+2)^{\underline{-k}} = 0$$

olur.

Keyfi a_0 ve $k \geq 0$ için,

$$a_{k+1} = \frac{2}{k+1} a_k$$

elde edilir. Buradan da,

$$a_k = \frac{2^k}{k!} a_0$$

bulunur. Böylece verilen denklemin faktöriyel serisi ile çözümü;

$$u(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} t^{-k}$$

olur. Bu seri oran testi gereğince negatif olmayan $\forall t$ için yakınsaktır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin başlangıcında fark denklemleri için temel özellikler ele alındı ve bu özellikler incelendi. Daha sonra bu temel tanım ve özelliklerin fark denklemlerinde nasıl kullanıldığı açıklandı. Tezin ilerleyen bölümlerinde sabit katsayılı lineer fark denklemleri ve başlangıç değer problemlerinin çözümleri verildi. Bunlarla ilgili özel problemler ele alındı ve çözümleri incelendi. Son kısımda ise değişken katsayılı lineer fark denklemleri özel durumlar için incelendi.

Bu tezde amaçlanan fark denklemlerinin temel kavramları için bir kaynak oluşturmaktır. Elbette fark denklemleri bu tezdeki konularla sınırlı değildir. Ancak incelenen kısım itibarı ile okuyucuya yararlı olacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

[1] W. G. Kelley and A. C. Peterson, Difference Equations, Harcourt Academic Press, 2001.

[2] H. Bereketoğlu and V. Kutay, Fark Denklemleri, Gazi Kitabevi, Ankara, 2012.

[3] K. Miller, Linear Difference Equations, W.A. Benjamin Inc., New York, 1968.

[4] R. Mickens, Difference Equations, 2^{nd} ed, CRC Press, Boca Raton, 1991.

[5] M. Spiegel, Calculus of Finite Differences and Difference Equations, Schaum's Outline Series, Mcgraw – Hill, New York, 1971.

[6] D. Sherbert, Difference equations with applications, UMAP, Unit 332, 1-34, 1979.