KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ·İÇİN LOKAL VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Hakan ÖZTÜRK

Haziran 2014

Matematik Anabilim Dalında Hakan Öztürk tarafından hazırlanan LİNEER OLMAYAN KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ·İÇİN LOKAL VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ Adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan (Danışman)	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye	: Doç. Dr. Ali OLGUN	____________________
Üye	: Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	____________________

24/06/2014

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. E. Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

LİNEER OLMAYAN KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ ·İÇİN LOKAL VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ
ÖZTÜRK, Hakan
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA
Haziran 2014, 35 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin amacı, konunun güncelliği ve kaynaklar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde bir kompleks sınır değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği konusunda lokal bir inceleme yapılmıştır.

Üçüncü bölümde ise bir kompleks diferensiyel denklem sistemi vektörel diferensiyel denklem formuna dönüştürülerek çözümün varlık ve tekliği için sağlanması gereken koşullar ortaya konmuştur.

Son bölümde ise tezdeki sonuçlar hakkında kısa bilgi verilmiş ve ileri bir aşama olarak nelerin yapılabileceği açıklanmıştır.

Anahtar kelimeler: Kompleks kısmi türevli denklemler, Lokal varlık ve teklik teoremi, Hölder uzayı, Schwarz problemi

ABSTRACT

LOCAL EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREMS FOR COMPLEX PARTIAL SOLUTION OF NONLINEAR EQUATION

ÖZTÜRK, Hakan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA

June 2014, 35 pages

This thesis consists of four parts.

In the first part of the thesis goal and topicality of the subject is given information about the resources.

In the second part of a complex existence and uniqueness of solutions of boundary value problems has been evaluated on the local.

In the third part of a complex system of differential equations converted to vector form solutions of differential equations to be satisfied for the existence and uniqueness conditions have been revealed.

In the last part of the thesis results and provided brief information about what can be done in an advanced stage is described.

Key Words: Complex partial differential equations, Local existence and uniqueness theorem, Hölder space, Schwarz problem

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren, tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir zaman yardımını eksik etmeyen değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya, Arş. Gör. İlker GENÇTÜRK'e, çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili anneme ve babama teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

Anneme ve babama…

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem (z-düzlemi)
D	Kompleks düzlemin bir alt bölgesi
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
∂D	D alt bölgesinin sınırı
$Re\ z$	z kompleks sayısının reel kısmı
$Im\ z$	z kompleks sayısının sanal kısmı
L_p	p normlu fonksiyon uzayı
T_D	Cauchy tipi zayıf singülerliliğe sahip operatör
Π_D	Cauchy tipi kuvvetli singülerliğe sahip operatör
C^1	1. basamaktan kısmi türevleri sürekli fonksiyonlar sınıfı
$\frac{\partial}{\partial z}$	z ye göre kısmi türev operatörü
$C^{\alpha}(D;\mathbb{C})$	D üzerinde tanımlı Hölder sürekli kompleks değerli fonksiyonların sınıfı
$C^{\alpha,1}(D;\mathbb{C})$	1.basamaktan kısmi türevleri mevcut ve Hölder sürekli fonksiyonların sınıfı
mD	D bölgesinin Lebesque ölçümü
$C_0^k(D;\mathbb{C})$	D ye ait k.basamağa kadar türevlere sahip tüm test fonksiyonların sınıfı

1. GİRİŞ

Reel veya kompleks diferensiyel denklemler teorisinde en önemli konulardan birisi de denklemi çözmeden çözümlerin varlık ve tekliğinin araştırılmasıdır. Bunun için denklemde bilinen fonksiyonlar, denklemin katsayıları, başlangıç veya sınır koşulları, v.s. yardımıyla varlık ve teklik koşulları ortaya konmaktadır. Ortaya konulan koşulların gerekli veya yeterli olup olmadığı ayrı bir araştırma konusudur.
Sınır değer problemlerinin çözümlerinde verilen bölge değişmez. Çünkü verilen bölgenin sınırı üzerinde bilinmeyen fonksiyonunun değeri verilmektedir. Ancak sınır koşulu olmaksızın belli tipten kompleks diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği verilen bölgenin ölçüsüne de bağlı olabilir.

Bu tezde $\omega_{\overline{z}} = F(z, \omega, \omega_z)$ formundaki diferensiyel denklemin sınır koşulları olmaksızın çözümünün varlık ve tekliğinin herhangi bir bölgenin ölçüsüne nasıl bağlı olduğu ortaya konulmuştur. İnceleme Hölder uzayında yapılmıştır.

Çeşitli fen ve mühendislik alanında ortaya çıkan diferensiyel denklemlerin çözümleri genellikle integral denklemlerle veya integral denklem sistemleri ile ifade edilebilmektedir. Bu durumda diferensiyel denklemin çözümünün varlık ve tekliği integral denklemin veya integral denklem sisteminin çözümünün varlık ve tekliğine dönüştürülebilmektedir. Varlık ve Teklik teorisinin temelini ise operatör teoride Sabit Nokta Teoremleri oluşturmaktadır.

1.1. Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı, skaler ve vektörel formdaki $\omega_{\overline{z}} = F(z, \omega, \omega_z)$ kompleks diferensiyel denkleminin çözümlerinin var ve tek olması için denklemin tanımlandığı bölgenin ölçüsüne nasıl bağlı olduğunu araştırmak ve bunun için yeterli koşulları ortaya koymaktır. Diğer bir amaç ise incelenen problemin genelleştirilip yeni sonuçlar ortaya koyabilmenin temelini oluşturmaktadır.

1.2. Kaynak Özetleri

Öncelikle [1] kaynağından kompleks diferensiyel teorisinde çok kullanılan T_D ve Π_D operatörleri ve temel kavramlar öğrenilmiştir. Daha sonra aynı kaynağın 4. bölümünden (Sayfa 130 – 149) tezin esas konusu olan bölgenin ölçüsüne bağlı varlık ve teklik teoremleri incelenmiştir. Son kısımda [3] kaynağından kompleks ve vektörel formda bir diferensiyel denklem için tanımlanan sınır değer probleminin çözümünün varlık ve tekliği ele alınmıştır.

1.3. Temel Kavramlar

Tanım 1.1 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülebilir bir uzay ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $L_p(X)$ uzayı

$$L_p(X) = \left\{ f \mid f : X \to \mathbb{C} \text{ öyleki } \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır ve $f \in L_p(X)$ fonksiyonunun normu ise

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

şeklindedir.

Teorem 1.1 L_p uzayı $\|\cdot\|_p$ normuna göre tamdır.

İspat: İspatı için referans [7] bakınız.

Tanım 1.2 (Hölder Eşitsizliği) $p > 0$ ve q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlayan bir sayı olmak üzere her $f \in L_p[a,b]$, $g \in L_p[a,b]$ için

$$\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

dır.

Tanım 1.3 $D \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge olmak üzere, D de tanımlı kompleks değerli bir f fonksiyonu için

$$(T_D f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta, \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlı T_D operatörüne zayıf singülerliğe sahip Vekua integral operatörü denir.

Tanım 1.4 $D \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge olmak üzere, D de tanımlı kompleks değerli bir f fonksiyonu için

$$\left(\Pi_D f\right)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta d\eta, \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlı Π_D operatörüne kuvvetli singülerliğe sahip Vekua integral operatörü denir.

Tanım 1.5 Bir reel veya kompleks z değişkeninin bir f fonksiyonu verilmiş olsun. D bölgesinin tüm z_1, z_2 noktaları için

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq H\,|z_1 - z_2|^{\alpha}$$

olacak şekilde H ve $0 < \alpha < 1$ sabitleri mevcutsa, f ye D bölgesinde bir Hölder şartı sağlar veya D bölgesinde Hölder süreklidir denir. $H = H_\alpha(f) = H(f; D.\alpha)$ ya Hölder sabiti, α ya Hölder üssü denir. D bölgesinde Hölder sürekli fonksiyonların oluşturduğu uzaya da Hölder uzayı denir. Hölder uzayın da norm

$$\|f\|_{C^\alpha} = \sup_{z_1 \neq z_2 \in D} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\alpha}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.6 (Cauchy Dizisi) $(X, \mathbb{R})$ bir uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $|x_n - x_m| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyor ise o zaman bu uzaya Tam uzay denir.

Teorem 1.2 Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

Teorem 1.3 Her Cauchy dizisi yakınsaktır.

Teorem 1.4 Bir sayı dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeterli şart bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Teorem 1.5 Her Cauchy dizisi sınırlıdır. Fakat her sınırlı dizi, Cauchy dizisi değildir.

Tanım 1.7 $f : X \to \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in X$ çifti için $|f(x) - f(y)| < L\, |x - y|$ gerçeklenmek üzere bir $L \in \mathbb{R}^+$ sabiti varsa, f fonksiyonuna Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyon; L ye f nin Lipschitz sabiti denir.

Tanım 1.8 X bir normlu vektör uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$||Tx - Ty|| \leq \alpha ||x - y||$$

olacak şekilde bir $0 < \alpha < 1$ varsa T ye bir daralma(büzülme) fonksiyonu denir.

Teorem 1.6 $(X, ||.||)$ bir Banach uzayı olmak üzere $T : X \to X$ bir daralma fonksiyonu ise o zaman

(i) T nin bir ve yalnız bir sabit noktası vardır;

(ii) herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi, T nin bu sabit noktasına yakınsar; yani her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1}$ ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

2. VARLIK TEOREMLERİ

2.1. Kompleks Kısmi Türevli Denklem Sistemlerinin Çözüm Yapısı

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial \overline{z}} = f_j\left(z, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\right), \quad j = 1, 2, ..., m \tag{2.1}$$

sistemini gözününe alalım. Burada $\omega_j = \omega_j\left(z\right), j = 1, 2, ..., m$, m tane kompleks değerli fonksiyonları belirlenmeye çalışılacaktır. Önce bu sistemin çözüm yapısı ortaya konulacak, daha sonra çözümün tekliği ve tek anlamlılığı araştırılacaktır.(2.1) in sağındaki f_j fonksiyonların tümü özdeş olarak sıfır ise (2.1) sistemi

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial \overline{z}} = 0, \quad j = 1, 2, ..., m \tag{2.2}$$

sistemine indirgenir. Bu durumda $\omega_j\left(z\right)$ ler uygun bir $G \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde holomorf fonksiyonlar ise $\omega = \left(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\right)$, (2.2) sisteminin çözümü olur. O halde her holomorf bileşenli Vektör-değerli fonksiyonlar (2.2) sistemini sağlar.

(2.1) sisteminin çözümlerini ortaya koymadan önce

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j\left(t, y_1, y_2, ..., y_m\right), \quad j = 1, 2, ..., m \tag{2.3}$$

reel adi türevli diferensiyel denklem sistemini gözününe alalım.

Diferensiyel hesabın temel teoreminden $t = t_0$ noktasının uygun bir komşuluğunda (2.3) sisteminin bir çözümü

$$y_j\left(t\right) = C_j + \int\limits_{\tau=t_0}^{t} f_j\left(\tau, y_1\left(\tau\right), y_2\left(\tau\right), ..., y_m\left(\tau\right)\right) d\tau, \quad j = 1, 2, , ..., m \tag{2.4}$$

olarak yazılabilir. Burada C_j ler y_j lerin t_0 noktasındaki değeridir. Yani $C_j = y_j\left(t_0\right)$ dır.

Tersine (2.4) sisteminin her iki tarafının t ye göre türetilmesiyle (2.3) sisteminin sağlandığı gösterilebilir. f_j ler üzerine konulan uygun koşullar altında (2.4) integral denklem sisteminin tek anlamlı olarak çözülebilirliği gösterilebileceğinden (2.3) ün $\left(y_1, y_2, ..., y_m\right)$ şeklinde bir çözümü tek anlamlı olarak belirlenebilir. Böylece (2.3) sisteminin $y_j\left(t_0\right) = C_j$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\left(y_1, y_2, ..., y_m\right)$ tek anlamlı olur ve $t = t_0$ noktasında $\left(C_1, C_2, ..., C_m\right)$

değerini alır. O halde her bir çözüm (2.4) deki C_j sabitleri yardımıyla tespit edilebilir.

Şimdi benzer durumu

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial \overline{z}} = f_j\left(z, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\right), \quad j = 1, 2, ..., m$$

sistemi için ortaya koyalım. G sınırlı bir bölge olsun ve $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ (2.1) in $\overline{G}$ da sürekli verilmiş bir çözümü olsun. Bu durumda (2.1) diferensiyel denklem sisteminin $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ çözümü için

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left[\omega_j\left(z\right) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f_j\left(\zeta, \omega_1\left(\zeta\right), ..., \omega_m\left(\zeta\right)\right)}{\zeta - z} d\xi d\eta\right] = \frac{\partial \omega_j}{\partial \overline{z}} - f_j\left(z, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\right) = 0$$

eşitliği yazılabilir.

Böylece köşeli parantezin içi bir holomorf fonksiyon belirtir. O halde

$$\omega_j\left(z\right) = \Phi_j\left(z\right) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f_j\left(\zeta, \omega_1\left(\zeta\right), ..., \omega_m\left(\zeta\right)\right)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, ..., m \qquad (2.5)$$

olup burada $\Phi_j\left(z\right)$, G de tanımlanmış holomorf fonksiyonlardır.

Sonuç olarak (2.1) sisteminin $\overline{G}$ da sürekli her çözümü (2.5) integral denklem sistemini sağlar. Burada Φ_j ler G de holomorf, $\overline{G}$ da sürekli fonksiyonlardır. (2.5) integral denklem sistemi (2.4) integral denklem sistemine benzemektedir. (2.4) deki C_j sabitlerinin yerine (2.5) sisteminde Φ_j, holomorf fonksiyonları gelmiştir. Diğer bir ifadeyle holomorf fonksiyonlarda $\overline{z}$ ye göre türev sabit rolünü oynamaktadır.

Tersine Φ_j holomorf fonksiyonlar olmak üzere (2.5) integral denkleminin her çözümü (2.1) denklem sisteminin çözümü olur. (2.1) diferensiyel denklem sisteminin çözümlerini ortaya koymak için (2.5) integral denklem sistemini çözmemiz gerekmektedir. Bunun için f_j lerin üzerine konulacak uygun koşullar altında Banach Sabit Nokta Teoremi kullanılabilir. Bu durumda her m için G de holomorf, $\overline{G}$ da sürekli $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m$ fonksiyonları için (2.1) sisteminin bir $(\omega_1, ..., \omega_m)$ çözümü bulunur. O halde (2.1) denklem sisteminin $(\omega_1, ..., \omega_m)$ çözümleri, elemanları holomorf fonksiyonlar olan $(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m)$ vektör değerli fonksiyonları yardımıyla karakterize edilebilir.

Dikkate alınacak varlık teoremlerini ortaya koymak için önce

$$\frac{\partial \omega_j(z)}{\partial \overline{z}} = f_j(z, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m); \; j = 1, 2, ..., m$$

sistemindeki f_j fonksiyonları üzerine bazı koşullar koymamız gerekmektedir:

a) $z \in \overline{G}$ olmak üzere f_j ler $m+1$ tane $z, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$ değişkenlerinin fonksiyonları olarak sürekli olsun. Ayrıca her ω_j için $|\omega_j| \leq R$ ve $|f_j| \leq K_R$ olduğunu kabul edelim.

b) f_j ler, $|\omega_j| \leq R, |\widetilde{\omega}_j| \leq R$ olmak üzere her $z \in \overline{G}$ için

$$|f_j(z, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m) - f_j(z, \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, ..., \widetilde{\omega}_m)| \leq L_R \sum_{j=1}^{m} |\omega_j - \widetilde{\omega}_j| \tag{2.6}$$

düzgün Lipschitz koşulunun sağlandığını varsayalım. Burada L_R alışılmış Lipschitz sabitleridir.

Banach sabit nokta teoremini kullanabilmek için, (2.5) integral denklem sisteminin içinde bulunduğu Banach uzayını vermemiz gerekir.

$\omega_j = \omega_j(z)$, $\overline{G}$ da tanımlı sürekli, kompleks değerli fonksiyonlar olmak üzere $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m)$ formundaki vektör değerli fonksiyonların sınıfını $\mathcal{R}$ ile gösterelim. $\mathcal{R}$ deki norm $\sup\limits_{G} |\omega_j(z)|$ ifadelerinin en büyüğü olarak tanımlanırsa bu durumda

$$\|\omega\| = \max_{1 \leq j \leq m} \sup_{G} |\omega_j(z)|$$

normuna göre $\mathcal{R}$ sınıfı bir Banach uzayı olur.

Şimdi

$$M_{\mathcal{R}} = \{\omega \in \mathcal{R} : \|\omega\| \leq R\}$$

sınıfını tanımlayalım.

Lemma 2.1 $M_{\mathcal{R}}$ kümesi kapalıdır.

İspat. $\omega_* = (\omega_{*1}, ..., \omega_{*m})$, $M_{\mathcal{R}}$ nin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda ω_* noktasına yakınsayan ve $M_{\mathcal{R}}$ uzayından seçilen

$$\omega^{(k)} = \left(\omega_1^{(k)}, ..., \omega_m^{(k)}\right)$$

dizisi mevcuttur. $\mathcal{R}$ sınıfındaki yakınsaklık $\omega_j^{(k)}$ ların ω_{*j} ye düzgün yakınsaması anlamında olduğundan noktasal olarak her j ve $z \in \overline{G}$ için

$$\omega_j^{(k)}(z) \rightarrow \omega_{*j}(z), \ k \rightarrow \infty \tag{2.7}$$

olur. $\omega^{(k)} \in M_{\mathcal{R}}$ olduğundan $\left\|\omega^{(k)}\right\| \leq R$ dır. Ayrıca tanım nedeniyle $\left|\omega_j^{(k)}\right| \leq R$ dır. $\lim\limits_{k\rightarrow\infty} \omega_j^{(k)}(z) = \omega_{*j}(z)$ olması nedeniyle $|\omega_{*j}| \leq R$ yazılabilir. Böylece $\|\omega_*\| = \max \sup\limits_{G} |\omega_{*j}(z)|$ olur. Böylece $\omega_* \in M_{\mathcal{R}}$ dır. $M_{\mathcal{R}}$ kapalıdır.(2.1) diferensiyel denklem sisteminin sağındaki f_j fonksiyonları üzerine konulan (a) hipotezi nedeniyle bir elemanı $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m) \in M_{\mathcal{R}}$ olan

$$f_j(z, \omega_1(z), ..., \omega_m(z))$$

fonksiyonu yardımıyla tanımlanan bileşke fonksiyon da $\overline{G}$ da sürekli olur. Bu durumda her $\omega \in M_{\mathcal{R}}$ için

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} \frac{f_j(\zeta, \omega_1(\zeta), ..., \omega_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

integrali ile tanımlanan fonksiyon kompleks düzlemin tamamında tanımlı ve sürekli olur. Eğer $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m$ fonksiyonları G de holomorf ve $\overline{G}$ da sürekli iseler bu durumda

$$W_j(z) = \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} \frac{f_j(\zeta, \omega_1(\zeta), ..., \omega_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta \tag{2.8}$$

olmak üzere

$$W = (W_1, ..., W_m)$$

$\overline{G}$ da sürekli bir vektör fonksiyonu tanımlar. Sonuç olarak (2.8) dönüşümü her $\omega \in M_{\mathcal{R}}$ elemanı $W \in \mathcal{R}$ elemanına dönüştürür. Bu dönüşüm operatörünü

$$\begin{aligned} T_{\phi,f}: \ M_{\mathcal{R}} &\rightarrow \quad \mathcal{R} \\ \omega &\rightarrow T_{\phi,f}\omega = W = (W_1, ..., W_m) \end{aligned}$$

şeklinde gösterelim. Şimdi $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m)$ olmak üzere

$$\|\Phi\| \leq R' < R$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Diğer taraftan

$$\left|\iint\limits_{G} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}\right| \leq \iint\limits_{G} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} \leq 2\sqrt{\pi}\sqrt{mG}$$

Schmidt eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}|W_j(z)| &\leq |\Phi_j(z)| + \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{|f_j(\zeta,\omega_1(\zeta),...,\omega_m(\zeta))|}{|\zeta - z|} d\xi d\eta \\ &\leq R' + \frac{1}{\pi} 2\sqrt{\pi} K_R \sqrt{mG}\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\|W\| = \max_j \sup_G |W_j(z)| \leq R' + \frac{2}{\sqrt{\pi}} K_R \sqrt{mG}$$

olur. Eğer G bölgesinin mG ölçüsü $\frac{2}{\sqrt{\pi}} K_R \sqrt{mG} \leq R - R'$ eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilirse $\|W\| \leq R$ elde edilir. Bu durumda $W = T_{\phi,f}\omega$ görüntüsü $M_{\mathcal{R}}$ kümesi içine düşer. Böylece aşağıdaki lemma ispatlanmış oldu.

Lemma 2.2 Eğer

$$mG \leq \frac{\pi (R - R')^2}{4K_R^2} \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanırsa bu durumda $T_{\phi,f}$ operatörü $M_{\mathcal{R}}$ kümesini yine kendi içine dönüştürür. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} T_{\phi,f} &: \quad M_{\mathcal{R}} \to M_{\mathcal{R}} \\ \omega &\to \quad T_{\phi,f}\omega = W = (W_1,...,W_m), \ j = 1,2,...,m \\ W_j &= \phi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f_j(\zeta,\omega_1(\zeta),...,\omega_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta \end{aligned}$$

olarak tanımlanan $T_{\phi,f}$ operatörünün daralma dönüşümü olup olmadığını araştırmak için her $\omega, \widetilde{\omega} \in M_{\mathcal{R}}$ elemanlarının $W = T_{\phi,f}\omega, \widetilde{W} = T_{\phi,f}\widetilde{\omega}$ görüntülerini dikkate almak gerekir. Burada $\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_m)$, $\widetilde{W} = \left(\widetilde{W}_1,...,\widetilde{W}_m\right)$ dır. Tanım (2.8) den

$$W_j(z) - \widetilde{W}_j(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f_j(\zeta,\omega_1(\zeta),...,\omega_m(\zeta)) - f_j(\zeta,\widetilde{\omega}_1(\zeta),...,\widetilde{\omega}_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta \tag{2.10}$$

yazılabilir. (2.6) Lipschitz koşulu göz önüne alınırsa integrantın payı için

$$\begin{aligned} |f_j(\zeta,\omega_1(\zeta),...,\omega_m(\zeta)) - f_j(\zeta,\widetilde{\omega}_1(\zeta),...,\widetilde{\omega}_m(\zeta))| &\leq L_R \sum_{j=1}^{m} |\omega_j(\zeta) - \widetilde{\omega}_j(\zeta)| \\ &\leq mL_R \max_j \sup_G |\omega_j - \widetilde{\omega}_j| \\ &= mL_R d(\omega, \widetilde{\omega}) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.10) bağıntısına Schmidt eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\left|W_j(z)-\widetilde{W}_j(z)\right| \le \frac{m}{\pi} L_R d(\omega,\widetilde{\omega})\, 2\sqrt{\pi}\sqrt{mG} \le \frac{2m}{\sqrt{\pi}} L_R d(\omega,\widetilde{\omega})\sqrt{mG}$$

bulunur. Böylece

$$d(T_{\phi,f}\omega, T_{\phi,f}\widetilde{\omega}) \left\|W-\widetilde{W}\right\| = \max_j \sup_G \left|W_j(z)-\widetilde{W}_j(z)\right| \le \frac{2m}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mG} L_R d(\omega,\widetilde{\omega})$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda aşağıdaki Lemma verilebilir:

Lemma 2.3

$$mG < \frac{\pi}{4m^2 L_R^2}, \quad \left(\frac{2m}{\sqrt{\pi}} L_R \sqrt{mG} < 1\right) \tag{2.11}$$

eşitsizliği sağlanırsa $T_{\phi,f}$ operatörü daralma dönüşümüdür.

Sonuç 2.1

$mG < \dfrac{\pi (R-R')^2}{4K_R^2}, \quad \left(K_R = \sup\limits_G |f_j \zeta, \omega_1, ..., \omega_m|\right)$, ($M_{\mathcal{R}}$ yi kendi içine dönüştürmek için)

$mG < \dfrac{\pi}{4m^2 L_R^2}, \quad$ (L_R, f_j lere ilişkin Lipschitz sabitlerinin maksimumu) (daralma için)

eşitsizlikleri aynı anda sağlandığında $T_{\phi,f}$ operatörü $M_{\mathcal{R}}$ kapalı kümesinden yine kendi için bir daralma dönüşümüdür.

$$K = \min\left(\frac{\pi (R-R')^2}{4K_R^2}, \frac{\pi}{4m^2 L_R^2}\right)$$

dersek $mG < K$ eşitsizliği sağlandığında $T_{\phi,f} : \ M_{\mathcal{R}} \ \rightarrow \ M_{\mathcal{R}}$ dönüşümü daralma olur. Bu durumda Banach Sabit Nokta Teoremine göre $T_{\phi,f}$ operatörü, $M_{\mathcal{R}}$ sınıfında bir tek sabit noktaya sahiptir. O halde

$$T_{\phi,f}\omega = \omega$$

olacak şekilde tek anlamlı bir $\omega \in M_{\mathcal{R}}$ elemanı vardır. O halde $W = \omega$ için

$$W_j(z) = \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f_j(\zeta, \omega_1(\zeta), ..., \omega_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, ..., m$$

sağlanır. Bu durumda $W_j(z)$ gösterilimi ile

$$\omega_j(z) = \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f_j(\zeta, \omega_1(\zeta), ..., \omega_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

ifadesi özdeş olarak aynı olur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu:

Teorem 2.1 $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_m)$ G'de holomorf, $\overline{G}$ da sürekli olsun. Eğer G bölgesinin mG ölçüsü (2.9) ve (2.11) eşitsizlikleri sağlanacak şekilde yeterince küçük seçilirse bu takdirde

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial \overline{z}} = f_j\left(z, \omega_1(z), ..., \omega_m(z)\right),\ j = 1, 2, ..., m$$

diferensiyel denklem sisteminin dolayısıyla

$$\omega_j(z) = \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f_j\left(\zeta, \omega_1(\zeta), ..., \omega_m(\zeta)\right)}{\zeta - z} d\xi d\eta,\ j = 1, 2, ..., m$$

integral denklem sisteminin bir tek çözümü vardır.

Not 2.1 mG, (2.9) ve (2.11) koşullarını sağlamıyorsa, bu eşitsizlikler sağlanacak şekilde G bir alt bölgesi seçilebilir.

Not 2.2 $R_0 > R$ alınır ve $z \in \overline{G}$ için, $|\omega_j(z)| < R_0,\ j = 1, 2, ..., m$ olmak üzere $f_j = f_j\left(z, \omega_1(z), ..., \omega_m(z)\right)$ fonksiyonları sürekli türetilebilir, yani $\frac{\partial f_j}{\partial \omega_\nu}, \frac{\partial f_j}{\partial \overline{\omega}_\nu}$ kısmî türevlerine sahip ise bu takdirde f_j ler Lipschitz koşulunu da sağlarlar.

$\omega_\nu = u_\nu + iv_\nu$ olsun. Bu durumda kompleks kısmî türev tanımından

$$\frac{\partial f_j}{\partial u_\nu} = \frac{\partial f_j}{\partial \omega_\nu} + \frac{\partial f_j}{\partial \overline{\omega}_\nu},\ \frac{\partial f_j}{\partial v_\nu} = i\left(\frac{\partial f_j}{\partial \omega_\nu} - \frac{\partial f_j}{\partial \overline{\omega}_\nu}\right)$$

olup, buradan f_j nin u_ν ve u_v değişkenlerine göre de kısmı türevlerinininin var ve sürekli olduğu sonucu ortaya çıkar. Böylece u_ν ve u_v fonksiyonlarının da ilgili türevlerinin sürekli olduğu da elde edilmiş oldu.

Şimdi her $z \in \overline{G}$ ve $|\omega_\mu| \leq R$, $\mu = 1, 2, ..., m$ için

$$\frac{\partial}{\partial u_\nu} \operatorname{Re} f_j, \frac{\partial}{\partial u_\nu} \operatorname{Im} f_j, \frac{\partial}{\partial v_\nu} \operatorname{Re} f_j, \frac{\partial}{\partial v_\nu} \operatorname{Im} f_j$$

kısmi türevlerinin M ile sınırlı olduğunu kabul edelim. Yani her $z \in \overline{G}$ için

$$\left|\frac{\partial}{\partial u_\nu} \operatorname{Re} f_j\right| < M, \left|\frac{\partial}{\partial u_\nu} \operatorname{Im} f_j\right| < M, \left|\frac{\partial}{\partial v_\nu} \operatorname{Re} f_j\right| < M, \left|\frac{\partial}{\partial v_\nu} \operatorname{Im} f_j\right| < M$$

$|\omega_\mu| \leq R, \mu = 1, 2, ..., m$, $\widetilde{\omega}_\nu = \widetilde{u}_\nu + i\widetilde{v}_\nu$ olmak üzere türev için ortalama değer teoreminden

$$\operatorname{Re} f_j(z, \omega_1, ..., \omega_m) - \operatorname{Re} f_j(z, \widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m) = \sum_{\nu=1}^{m} \left[\frac{\partial \operatorname{Re} f_j}{\partial u_\nu}(u_\nu - \widetilde{u}_\nu) + \frac{\operatorname{Re} f_j}{\partial v_\nu}(v_\nu - \widetilde{v}_\nu)\right] \tag{2.12}$$

yazılabilir. Burada $\frac{\partial \operatorname{Re} f_j}{\partial u_\nu}, \frac{\operatorname{Im} f_j}{\partial v_\nu}$ türevleri, $(z, \omega_1, ..., \omega_m)$ ve $(z, \widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m)$ noktalarını birleştiren doğru üzerindeki bir noktada hesaplanmıştır.

Benzer şekilde (2.12) bağıntısı $\operatorname{Im} f_j$ için de yazılabilir.

Böylece tekrar f_j nin reel ve sanal kısımları birleştirilip

$$\begin{aligned} |u_\nu - \widetilde{u}_\nu| &\leq |\omega_\nu - \widetilde{\omega}_\nu| \\ |v_\nu - \widetilde{v}_\nu| &\leq |\omega_\nu - \widetilde{\omega}_\nu| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri de göz önüne alınırsa $L_R = 4M$ Lipschitz sabitleri olmak üzere

$$|f_j(z, \omega_1, ..., \omega_m) - f_j(z, \widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m)| \leq 4M \sum_{\nu=1}^{m} |\omega_\nu - \widetilde{\omega}_\nu|$$

eşitsizliği elde edilir. Çünkü

$$\begin{aligned}
& |f_j(z, \omega_1, ..., \omega_m) - f_j(z, \widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m)| \\
= \; & |\operatorname{Re} f_j(z, \omega_1, ..., \omega_m) - \operatorname{Re} f_j(z, \widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m) \\
& + i\left[\operatorname{Im} f_j(z, \omega_1, ..., \omega_m) - \operatorname{Im} f_j(z, \widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m)\right]| \\
\leq \; & |\operatorname{Re} f_j(z, \omega_1, ..., \omega_m) - \operatorname{Re} f_j(z, \widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m)| \\
& + |\operatorname{Im} f_j(z, \omega_1, ..., \omega_m) - \operatorname{Im} f_j(z, \widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m)| \\
= \; & \left|\sum_{\nu=1}^{m} \left[\frac{\partial \operatorname{Re} f_j}{\partial u_\nu}(u_\nu - \widetilde{u}_\nu) + \frac{\operatorname{Re} f_j}{\partial v_\nu}(v_\nu - \widetilde{v}_\nu)\right]\right| \\
& + \left|\sum_{\nu=1}^{m} \left[\frac{\partial \operatorname{Im} f_j}{\partial u_\nu}(u_\nu - \widetilde{u}_\nu) + \frac{\operatorname{Im} f_j}{\partial v_\nu}(v_\nu - \widetilde{v}_\nu)\right]\right| \\
\leq \; & \sum_{\nu=1}^{m} \left[\left|\frac{\partial \operatorname{Re} f_j}{\partial u_\nu}\right| |u_\nu - \widetilde{u}_\nu| + \left|\frac{\operatorname{Re} f_j}{\partial v_\nu}\right| |v_\nu - \widetilde{v}_\nu|\right] \\
& + \sum_{\nu=1}^{m} \left[\left|\frac{\partial \operatorname{Im} f_j}{\partial u_\nu}\right| |u_\nu - \widetilde{u}_\nu| + \left|\frac{\operatorname{Im} f_j}{\partial v_\nu}\right| |v_\nu - \widetilde{v}_\nu|\right] \\
\leq \; & \sum_{\nu=1}^{m} \left[M|\omega_\nu - \widetilde{\omega}_\nu| + M|\omega_\nu - \widetilde{\omega}_\nu|\right] \\
& + \sum_{\nu=1}^{m} \left[M|\omega_\nu - \widetilde{\omega}_\nu| + M|\omega_\nu - \widetilde{\omega}_\nu|\right] \\
= \; & 4M \sum_{\nu=1}^{m} |\omega_\nu - \widetilde{\omega}_\nu|
\end{aligned}$$

olur.

Not 2.3 $|\omega_\nu| \leq R$ olmak üzere ω_ν-düzlemindeki, f_j lerin tanımlı olduğu R yarıçaplı diskleri Φ lerin normları için $\|\Phi\| \leq R$ olması halinde teorem geçerlidir. Ancak $z \in \overline{G}$ ve herhangi ω_ν ler için f_j lerin tanımlı olması halinde herhangi bir Φ için de teorem geçerli olabilir.

Eğer $z \in \overline{G}$ ve $\omega_1, ..., \omega_m$ değişkenlerine göre $\frac{\partial f_j}{\partial \omega_\nu}$ kısmî türevleri var sürekli ve sınırlı ise bu takdirde Lipschitz koşulu daima sağlanır.

Φ herhangi bir şekilde seçilmek üzere $\|\Phi\| < R$ ve $\|\Phi\| = R'$ alınabilir. Bu durumda L_R Lipschitz sabiti tek olarak belirlenebilir.

$z \in \overline{G}$ ve $|\omega_\nu| \leq R$ olmak üzere $(z, \omega_1, ..., \omega_m)$ noktalarının kümesi kompakt olduğundan bu küme üzerinde $|f_j|$ ifadeleri sınırlıdır. Her $z \in \overline{G}$, $|\omega_\nu| \leq R$ için K_R sayıları $|f_j| \leq K_R$ olarak seçilir. Böylece mG nin bir üst sınırı için gerekli olan tüm sabitler tespit edilebilir. Bu durumda G bölgesi, mG ölçüsü (2.9) ve (2.11) eşitsizliklerini sağlayacak şekilde seçilebilir. Karşıt olarak G bölgesi, mG ölçüsü (2.9) ve (2.11) eşitsizliklerini sağlayacak şekilde küçültülebilir.

Şimdi K_R sayılarının ve L_R Lipschitz koşulunun, $f_j(z, \omega_1, ..., \omega_m)$ fonksiyonun da içinde tanımlı olduğu $\omega_\nu-$düzlemindeki diskin $R-$ yarıçapına nasıl bağlı olduğunu görmek için basit iki örnek verelim. Her iki örnek de $m = 1$ hali için verildi. Yani düzlemde $\omega = \omega(z)$ şeklindeki bir çözümün bulunması problemi ele alınacaktır.

$$f(z, \omega) = A(z)\, \omega^\sigma$$

olsun. Burada σ bir doğal sayı ve $|A(z)| \leq k$ dır. Bu durumda

$$|f(z, \omega)| \leq K_R = kR^\sigma, \ z \in \overline{G}, \ \ |\omega| \leq R$$

olup böylece

$$\begin{aligned} f(z, \omega) - f(z, \widetilde{\omega}) &= A\left(\omega^\sigma - (\widetilde{\omega})^\sigma\right), \ \sigma \in \mathbb{N} \\ &= A(z)(\omega - \widetilde{\omega})\left(\omega^{\sigma-1} + \omega^{\sigma-2}\widetilde{\omega} + ... + \widetilde{\omega}^\sigma\right) \end{aligned}$$

olduğundan, $|\omega| \leq R$, $|\widetilde{\omega}| \leq W$ için

$$|f(z, \omega) - f(z, \widetilde{\omega})| \leq k\sigma R^{\sigma-1} |\omega - \widetilde{\omega}|$$

yazılabilir. O halde $L_R = k\sigma R^{\sigma-1}$ elde edilir.

Diğer bir örnek olarak sağ taraftaki fonksiyonu

$$f(z, \omega) = A(z) \frac{\omega^\sigma}{1 + |\omega|^2}$$

şeklinde seçelim.$\sigma \in \mathbb{N}$, $\sigma \geq 2, z \in \overline{G}$, $|A(z)| \leq k$ olsun.

$$0 \leq (1 - |\omega|)^2 = 1 - 2|\omega| + |\omega|^2$$

olması nedeniyle ω nin bütün değerleri için

$$2|\omega| \leq 1 + \omega^2$$

olur. Böylece

$$\frac{|\omega|}{1 + |\omega|^2} \leq \frac{1}{2} \tag{2.13}$$

yazılabilir. Bu durumda her $z \in \overline{G}$, $|\omega| \leq R$ için

$$|f(z, \omega)| \leq K_R = \frac{1}{2} k R^{\sigma - 1}$$

elde edilir. Ayrıca $\frac{|\omega^2|}{1+|\omega|^2}$ olacağından $|f(z, \omega)| \leq K_R.1.R^{\sigma-2}$ de yazılabilir.

Diğer taraftan $|\omega^2| = \omega\overline{\omega}$ olması nedeniyle

$$\begin{aligned}
f(z,\omega) - f(z,\widetilde{\omega}) &= \frac{A(z)}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} \left[\omega^\sigma \left(1 + \widetilde{\omega}\overline{\widetilde{\omega}}\right) - \widetilde{\omega}^\sigma \left(1 + \omega\overline{\omega}\right)\right] \\
&= \frac{A(z)}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} \left[\omega^\sigma - \widetilde{\omega}^\sigma + \omega^\sigma \widetilde{\omega}\overline{\widetilde{\omega}} - \widetilde{\omega}^\sigma \omega\overline{\omega}\right] \\
&= \frac{A(z)}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} \left[\left(\omega^\sigma - \widetilde{\omega}^\sigma\right) + \omega\widetilde{\omega}\left(\omega^{\sigma-1}\overline{\widetilde{\omega}} - \overline{\omega}\widetilde{\omega}^{\sigma-1}\right)\right]
\end{aligned}$$

yazılabilir ve

$$\omega^\sigma - \widetilde{\omega}^\sigma = (\omega - \widetilde{\omega})\left(\omega^{\sigma-1} + \omega^{\sigma-2}\widetilde{\omega} + ... + \widetilde{\omega}^{\sigma-1}\right) \tag{2.14}$$

olmasından dolayı

$$\frac{|\omega^\sigma - \widetilde{\omega}^\sigma|}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} \leq \left[\frac{|\omega|^{\sigma-1}}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} + ... + \frac{|\widetilde{\omega}|^{\sigma-1}}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)}\right] |\omega - \widetilde{\omega}|$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan köşeli parantezde $|\omega|$ ve $|\widetilde{\omega}|$ nın çarpan olarak ayrılmasıyla ve

$$\frac{1}{1 + |\omega|^2} \leq 1, \ \frac{1}{1 + |\widetilde{\omega}|^2} \leq 1$$

olması nedeniyle, $|\omega| < R$, $|\widetilde{\omega}| < R$

$$\frac{|\omega^\sigma - \widetilde{\omega}^\sigma|}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} \leq \frac{1}{2} \sigma R^{\sigma-1} |\omega - \widetilde{\omega}| \tag{2.15}$$

bulunur. Ayrıca

$$\omega^{\sigma-1}\overline{\widetilde{\omega}} - \overline{\omega}\widetilde{\omega}^{\sigma-1} = \overline{\widetilde{\omega}}\left(\omega^{\sigma-1} - \widetilde{\omega}^{\sigma-1}\right) + \widetilde{\omega}^{\sigma-1}\left(\overline{\widetilde{\omega}} - \overline{\omega}\right) \tag{2.16}$$

yazılabilir. (2.14) de σ için yazılan ifade, (2.16) deki $\omega^{\sigma-1} - \widetilde{\omega}^{\sigma-1}$ için yazılırsa

$$\left|\overline{\widetilde{\omega}}\right| = \left|\widetilde{\omega}\right|, \left|\overline{\widetilde{\omega}} - \widetilde{\omega}\right| = \left|\widetilde{\omega} - \omega\right|, \left(\omega^{\sigma-1} - \widetilde{\omega}^{\sigma-1}\right) = \left(\omega - \widetilde{\omega}\right)\left(\omega^{\sigma-1} + \omega^{\sigma-2}\widetilde{\omega} + ... + \widetilde{\omega}^{\sigma-1}\right)$$

oldukları da gözönüne alınırsa $|\omega| < R$, $|\widetilde{\omega}| < R$

$$\frac{\omega\widetilde{\omega}\left(\omega^{\sigma-1}\overline{\widetilde{\omega}} - \overline{\omega}\widetilde{\omega}^{\sigma-1}\right)}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} \leq \frac{|\omega|}{1 + |\omega|^2}\frac{|\widetilde{\omega}|^2}{1 + |\widetilde{\omega}|^2}\left[(\sigma - 1) R^{\sigma-2}|\omega - \widetilde{\omega}| + R^{\sigma-2}|\omega - \widetilde{\omega}|\right] \tag{2.17}$$

elde edilir.

$$\frac{|\omega|}{1 + |\omega|^2} \leq \frac{1}{2} \text{ ve } \frac{|\widetilde{\omega}|^2}{1 + |\widetilde{\omega}|^2} \leq 1 \tag{2.18}$$

eşitsizlikleri gözününe alınırsa (2.17) nın sağ tarafı $\frac{1}{2}\sigma R^{\sigma-2}|\omega - \widetilde{\omega}|$ ile sınırlandırılabilir.Böylece (2.15) ve (2.18) den

$$|f(z,\omega) - f(z,\widetilde{\omega})| \leq k\sigma R^{\sigma-2}|\omega - \widetilde{\omega}|$$

elde edilir.Çünkü

$$\begin{aligned}
|f(z,\omega) - f(z,\widetilde{\omega})| &\leq \frac{A(z)}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)}\left[\left(\omega^{\sigma} - \widetilde{\omega}^{\sigma}\right) + \omega\widetilde{\omega}\left(\omega^{\sigma-1}\overline{\widetilde{\omega}} - \overline{\omega}\widetilde{\omega}^{\sigma-1}\right)\right] \\
&\leq \frac{A(z)\left|\omega^{\sigma} - \widetilde{\omega}^{\sigma}\right|}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} + \frac{A(z)\left|\omega\widetilde{\omega}\left(\omega^{\sigma-1}\overline{\widetilde{\omega}} - \overline{\omega}\widetilde{\omega}^{\sigma-1}\right)\right|}{\left(1 + |\omega|^2\right)\left(1 + |\widetilde{\omega}|^2\right)} \\
&\leq \frac{k\sigma R^{\sigma-2}|\omega - \widetilde{\omega}|}{2} + \frac{1}{2}\sigma R^{\sigma-2}|\omega - \widetilde{\omega}|
\end{aligned}$$

dır. Böylece Lipschitz sabiti $L_R = k\sigma R^{\sigma-2}$ olur.

Not 2.4 Bundan sonra $\frac{\partial\omega_j}{\partial\overline{z}} = f_j(z,\omega_1,...,\omega_m), j = 1,2,...,m$ sisteminde $f_j(z,\omega_1,...,\omega_m)$ fonksiyonunun her $z \in \overline{G}$ ve $\omega_1,...,\omega_m$ için tanımlı ve sürekli olduğunu kabul edeceğiz. Her $\zeta \in \overline{G}$ için $f_j(\zeta,\omega_1(\zeta),...,\omega_m(\zeta))$ fonksiyonu sürekli ve böylece sınırlı olduğundan herhangi bir $\omega \in \mathcal{R}$ elemanı için

$$W_j(z) = \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G}\frac{f_j(\zeta,\omega_1(\zeta),...,\omega_m(\zeta)) - f_j(\zeta,\widetilde{\omega}_1(\zeta),...,\widetilde{\omega}_m(\zeta))}{\zeta - z}d\xi d\eta,$$

$j = 1, 2, ..., m$ operatörü tanımlıdır. İkinci varsayım olarak her $z \in \overline{G}$ ve herhangi $\omega_1, ..., \omega_m$ için

$$\frac{\partial f_j}{\partial \omega_\nu}, \frac{\partial f_j}{\partial \overline{\omega}_\nu}$$

kısmî türevlerinin mevcut, sürekli ve sınırlı olduklarını varsayalım. Bu durumda her $z \in \overline{G}$ ve herhangi $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m), \widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_m)$ için Lipschitz koşulu sağlanır. Bu durumda L Lipschitz sabiti f_j lerin kısmî türevlerinin mutlak değerinin sınırı olarak tespit edilebilir.

(2.8) integral operatörü her $\omega \in \mathcal{R}$ için tanımlı olduğundan, Banach sabit nokta teoremi $\mathcal{R}$ uzayının tamamı için kullanılabilir. Çünkü $\mathcal{R}$ nin tamamı da yine $\mathcal{R}$ nin kapalı bir alt bölgesidir. Bu durumda (2.8) integral operatörünün daralma olmasını garanti eden G nin ölçüsü ile ilgili olan

$$mG < \frac{\pi}{4m^2 L_R^2}$$

eşitsizliğine ihtiyaç vardır. Ayrıca G nin ölçüsü ile ilgili (2.11) eşitsizliğinin, özel olarak önceden verilen $\Phi(z)$ holomorf fonksiyonundan bağımsız olduğu gösterilmelidir. Böylece G nin tamamında tanımlı her Φ holomorf fonksiyonu için ilgili çözüm oluşturulabilir.

Φ holomorf fonksiyonu ile ω çözümü arasındaki ilişkiyi araştırmak için diğer bir $\widetilde{\Phi}$ fonsiyonuna karşılık gelen bir başka $\widetilde{\omega}$ çözümünü gözönüne alalım.Bu durumda

$$T_{\phi,f}\omega = \omega, \; T_{\widetilde{\Phi},f}\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}$$

yazılabilir. Bu denklem her bir bileşen için yazılır ve karşılıklı bileşenler için fark oluşturulursa

$$\omega_j(z) - \widetilde{\omega} = \Phi_j(z) - \widetilde{\Phi}_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f_j(\zeta, \omega_1(\zeta), ..., \omega_m(\zeta)) - f_j(\zeta, \widetilde{\omega}_1(\zeta), ..., \widetilde{\omega}_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta,$$

elde edilir. Lipschitz koşulunun da gözönüne alınmasıyla buradan

$$\omega_j(z) - \widetilde{\omega}_j(z) \leq \left|\Phi_j(z) - \widetilde{\Phi}_j(z)\right| + \frac{L_R}{\pi}\iint\limits_G \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{m} |\omega_\nu(\zeta) - \widetilde{\omega}_\nu(\zeta)|}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

yazılabilir. $\mathcal{R}$ uzayındaki metrik tanımından

$$\left|\Phi_j(z) - \widetilde{\Phi}_j(z)\right| \leq d\left(\Phi_j, \widetilde{\Phi}_j\right); \quad |\omega_\nu(\zeta) - \widetilde{\omega}_\nu(\zeta)| \leq d(\omega, \widetilde{\omega})$$

yazılabilir. Böylece Schmidt eşitsizliğinin kullanılmasıyla,

$$\left|\omega_j(z)-\widetilde{\omega}_j(z)\right|\le d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)+\frac{mL}{\pi}d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right)2\sqrt{\pi}\sqrt{mG}$$

bulunur. $\frac{2mL\sqrt{mG}}{\sqrt{\pi}}=\alpha$ dersek

$$d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right)=\max_j\ \sup_G\left|\omega_j-\widetilde{\omega}_j\right|\le d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)+\alpha d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right) \tag{2.19}$$

yazılabilir. Şimdi G nin mG ölçüsünü öyle belirleyelim ki integral operatörü için (2.11) daralma koşulu sağlansın. Bu ise bize $\alpha<1$ olması gerektiğini söyler.

ω çözümünü belirleyen Φ, veya $\widetilde{\omega}$ çözümünü belirleyen $\widetilde{\Phi}$ holomorf fonksiyonları

$$T_{\phi,f}\omega=\omega,\ T_{\widetilde{\Phi},f}\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}$$

denklemlerinden Φ veya $\widetilde{\Phi}$ ya göre çözüm yapılarak bunların bileşenleri

$$\begin{aligned}\Phi_j(z) &= \omega_j(z)+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f_j\left(\zeta,\omega_1(\zeta),...,\omega_m(\zeta)\right)}{\zeta-z}d\xi d\eta,\\ \widetilde{\Phi}_j(z) &= \widetilde{\omega}_j(z)+\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{f_j\left(\zeta,\widetilde{\omega}_1(\zeta),...,\widetilde{\omega}_m(\zeta)\right)}{\zeta-z}d\xi d\eta,\ j=1,2,...,m\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan fark oluşturulup farkın mutlak değeri için aynı sınırlandırma metodu kullanılırsa

$$\left|\Phi_j(z)-\widetilde{\Phi}_j(z)\right|\le d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right)+\frac{1}{\pi}mL2\sqrt{\pi}\sqrt{mG}d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right)$$

ve buradan da

$$d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)\le(1+\alpha)\,d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right) \tag{2.20}$$

elde edilir.

$\omega=T_{\phi,f}\omega$ integral denkleminin Φ holomorf fonksiyonu yardımıyla oluşturulan ω çözümünü $\omega=\Lambda\Phi$ ve benzer şekilde $T_{\widetilde{\Phi},f}\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}$ integral denkleminin çözümünü de $\widetilde{\omega}=\Lambda\widetilde{\Phi}$ ile göstererek (2.19) ve (2.20) dan

$$\begin{aligned}d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right) &\le d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)+\alpha d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right)\\ d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right) &\le (1+\alpha)\,d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right)\\ d\left(\Lambda\Phi,\Lambda\widetilde{\Phi}\right) &\le d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)+\alpha d\left(\Lambda\Phi,\Lambda\widetilde{\Phi}\right)\\ (1-\alpha)\,d\left(\Lambda\Phi,\Lambda\widetilde{\Phi}\right) &\le d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)\\ d\left(\Lambda\Phi,\Lambda\widetilde{\Phi}\right) &\le \frac{d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)}{1-\alpha}\end{aligned}$$

ve ikinci denklemden

$$\frac{d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)}{1+\alpha}\leq d\left(\Lambda\Phi,\Lambda\widetilde{\Phi}\right)$$

olup son iki eşitsizliğin birleştirilmesiyle

$$\frac{d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)}{1+\alpha}\leq d\left(\Lambda\Phi,\Lambda\widetilde{\Phi}\right)\leq\frac{d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)}{1-\alpha} \tag{2.21}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\Phi_j^{(k)}$ ler $\overline{G}$ de sürekli G de holomorf fonksiyonlar olmak üzere $\left(\Phi^{(k)}\right)_1^{\infty}$ dizisini gözönüne alalım. Burada $\Phi^{(k)}=\left(\Phi_1^{(k)},...,\Phi_m^{(k)}\right)$ dır. $\left(\Phi^{(k)}\right)_1^{\infty}$ dizisinin $\mathcal{R}$ uzayındaki metriğe göre $\Phi=(\Phi_1,...,\Phi_m)$ vektör fonksiyonuna yakınsadığını varsayalım. Bu durumda $\mathcal{R}$, metriğe göre kapalı olduğundan $\Phi_1^{(k)}$ ler $k\to\infty$ için $\overline{G}$ da Φ_j ye düzgün yakınsar.

Fonksiyonlar Teorisinde holomorf fonksiyonlar için Weierstrass Yakınsaklık Teoremlerine göre Φ_j limit fonksiyonları holomorf olmak zorundadır.

Şimdi $\omega^{(k)}=\Lambda\Phi^{(k)}$, $\omega=\Lambda\Phi$ olsun.Bu durumda (2.21) eşitsizliğinden

$$d\left(\Lambda\Phi^{(k)},\Lambda\Phi\right)\leq\frac{1}{1-\alpha}d\left(\Phi^{(k)},\Phi\right) \tag{2.22}$$

yazılabilir. $k\to\infty$ için $\Phi^{(k)}\to\Phi$ olduğundan $k\to+\infty$ için $d\left(\Phi^{(k)},\Phi\right)\to 0$ olur. O halde (2.22) den $k\to+\infty$ için $d\left(\Lambda\Phi^{(k)},\Lambda\Phi\right)\to 0$ olup buradan $\Lambda\Phi^{(k)}=\omega^{(k)}$ dizisi $\Lambda\Phi=\omega$ ifadesine yakınsar. Bunların bir sonucu olarak Λ dönüşümünün sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Λ dönüşümü tek anlamlıdır. Çünkü $\overline{G}$ sürekli, verilen her $\omega=(\omega_1,...,\omega_m)$ çözümünde ω_j ler (2.5) integral denklem sistemini sağlar. Bu durumda her ω çözümüne karşılık $\Phi=(\Phi_1,...,\Phi_m)$ holomorf fonksiyonu tek anlamlı olarak belirlenebilir.

Tek anlamlılık nedeniyle Λ operatörünün Λ^{-1} tersi vardır. Bu ters dönüşüm her ω çözümüne $\Phi=\Lambda^{-1}\omega$ şeklinde bir holomorf fonksiyon karşılık getirir. ω çözümün ve Φ holomorf fonksiyonu $\omega=T_{\phi,f}\omega$ operatörü yardımıyla birbirine bağlıdır.

Eğer $\widetilde{\omega}=\Lambda\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{\Phi}=\Lambda^{-1}\widetilde{\omega}$ denirse o zaman (2.21) eşitsizliği

$$(1-\alpha)\,d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right)\leq d\left(\Lambda^{-1}\omega,\Lambda^{-1}\widetilde{\omega}\right)\leq(1+\alpha)\,d\left(\omega,\widetilde{\omega}\right)$$

formunda da yazılabilir

(2.21) eşitsizliğinden de Λ operatörünün sürekliliği elde edilir. Böylece son eşitsizlikten Λ^{-1} operatörünün de sürekli olduğu görülebilir.

G de holomorf, $\overline{G}$ de sürekli Φ fonksiyonların sınıfını $\mathcal{H}$ ile ve diferensiyel denklem sisteminin $\overline{G}$ de sürekli ω çözümlerinin sınıfını $\mathcal{W}$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{W}$, $\mathcal{R}$ sınıfının alt kümeleri olur. Ayrıca $\mathcal{H}$; Λ operatörü yardımıyla $\mathcal{W}$ sınıfı üzerine tek anlamlı olarak dönüştürülebilir. Tek anlamlılık ve Λ ve Λ^{-1} ın (iki taraflı) sürekliliğinden Λ bir topolojik dönüşümdür. Böylece aşağıdaki önerme elde edilmiş oldu:

Λ dönüşümü, Φ holomorf vektörlerin $\mathcal{H}$ kümesini, ω çözümler kümesine dönüştüren Topolojik bir dönüşümdür.

Not 2.5 Tutschke [4] çalışmasında, $\mathcal{H}$ üzerindeki sınırlandırılması Λ ile aynı olan ve $\mathcal{R}$ sınıfının yine kendi içine dönüştüren bir topolojik dönüşümün var olduğunu gösterdi.

Şimdi

$$\frac{1}{1+\alpha}d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)\leq d\left(\Lambda\Phi,\Lambda^{-1}\widetilde{\Phi}\right)\leq\frac{1}{1-\alpha}d\left(\Phi,\widetilde{\Phi}\right)$$

eşitsizliğinden aşağıdaki önermeyi (Yaklaşım Teoremini) verebiliriz:

Teorem 2.2 Eğer G de holomorf, $\overline{G}$ de sürekli $\Phi^{(k)}$ vektör fonksiyonları dizisi Φ, holomorf vektör fonksiyonuna düzgün olarak yakınsarsa bu takdirde $\Phi^{(k)}$ yardımıyla oluşturulan $\omega^{(k)}$ çözümler dizisi de Φ yardımıyla oluşturulan ω çözümüne düzgün olarak yakınsar.

Not 2.6 Bu teoremin ortaya çıkışında ve Not 2.5 in elde edilişinde Cauchy singülerliği olan katlı integral

$$\left|\iint_G\frac{h\left(\zeta\right)}{\zeta-z}d\xi d\eta\right|\leq\sup_G\left|h\right|2\sqrt{\pi}\sqrt{mG}$$

şeklinde Schmidt eşitsizliği yardımıyla sınırlandırıldı. Burada $h\left(z\right)$, G de tanımlı, sürekli ve sınırlı bir fonksiyondur. Ayrıca Teorem 1 in elde edilişinde ve Not 3 de h nın sınırlılığı h nın $\overline{G}$ daki sürekliliğinden ortaya çıkar. Çünkü G sınırlı bir bölge ve $\overline{G}$ kompakttı. Bu tip integraller için 2 ayrı sınırlandırma tekniği daha vardır. Önce G bölgesi için mG ölçüsü yerine G nin çapını kullanalım. Bunun için önce r, θ z- merkezli disk için kutupsal koordinatlar olmak üzere

$$\left| \iint_G \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \right| \leq \left| \iint_G \frac{h(\zeta)}{r} r dr d\theta \right| \leq \sup_G |h| \iint_G dr d\theta$$

yazılabilir.Eğer $z \in G$ ise $\zeta \in G$ noktalarının z ye olan uzaklıkları G nin $diamG$ yarıçapından daha büyük olmayacak şekilde seçilebilir.

Not 2.7 Bir kümenin çapı, G nin ikişer ikişer tüm noktaları arasındaki uzaklıkların supremumu olarak tanımlanır. Yani $diamG = \sup\limits_G |z_i - z_j|$, $z_i, z_j \in G$. Sınırlı bölge için $diamG$ daima sonludur. G nin açık olması nedeniyle G den seçilen sabit bir z için $\zeta \in G$ noktalarının z ye olan uzaklığı $diamG$ den kesin küçük olur.

Böylece her $z \in G$ için

$$\left| \iint_G \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \right| \leq \sup_G |h(z)| \, 2\pi diamG$$

bulunur.

Diğer bir sınırlandırma ise

$$\left| \iint_G h_1 h_2 d\xi d\eta \right| \leq \left(\iint_G |h_1|^p \, d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_G |h_2|^q \, d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklindeki Hölder eşitsizliğidir. Burada p, q

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.23}$$

eşitliğini sağlayan birbirinden farklı pozitif sayılardır. p, q sayılarına konjuge üsler denir.

$$h_1(\zeta) = h(\zeta), h(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$$

olmak üzere Cauchy-singülerliğine sahip katlı integrale Hölder-eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \iint_G \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \right| \leq \left(\iint_G |h(\zeta)|^p \, d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_G \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Sağ taraftaki ikinci integralde tekrar r,θ kutupsal koordinatlar kullanılırsa $q < 2$ olmak üzere

$$\iint_G \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^q} = \iint_G \frac{rdrd\theta}{r^q} = \iint_G r^{1-q} drd\theta \leq 2\pi \left[\frac{r^{2-q}}{2-q}\right]\Bigg|_0^{diamG} = \frac{2\pi}{2-q}(diamG)^{2-q}$$

bulunur. Böylece $q < 2$ koşulu altında $\iint_G \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^q}$ integralin mevcut olduğu görülmüş olur.

$q < 2$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olması nedeniyle $p > 2$ olmalıdır.

$$\left(\iint_G |h(\zeta)|^p \, d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}} = \|h\|_p$$

dersek bu eşitlik h fonksiyonunun L_p normu adını alır.

Sonuç olarak h fonksiyonu $p > 2$ olmak üzere L_p normuna sahipse bu durumda

$$\left|\iint_G \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\right| \leq \|h\|_p \left[\frac{2\pi}{2-q}(diamG)^{2-q}\right]$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu sınırlandırma, h fonksiyonunun sınırlı olmaması halinde de kullanılabilir. Yani bu son eşitsizlik sınırsız h fonksiyonları için de geçerli olabilir.

Vekua kendi kitabında [[5]] bu sınırlandırma tekniğini sistematik olarak kullandı. Kesim 1.3 deki Lemma 1'in ispatında bu metodla

$$\iint_G \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^q} \leq \frac{2\pi}{2-q}\left(\frac{mG}{\pi}\right)^{1-\frac{q}{2}}$$

eşitsizliği elde edildi.

Not 2.8 (2.5) integral denklem sisteminin tek anlamlı olarak çözülebilirliği Banach Sabit nokta teoremi yardımıyla hesaplanabilir. Ancak İntegral operatörün daralma olmasını sağlamak için G bölgesinin mG ölçüsünün (2.11) eşitsizliğini sağlaması gerektiğini gördük. Ancak H. MEDEN [6] çalışmasında gösterdiği gibi eğer Schauder Sabit Nokta Teoremi yardımıyla çözümün varlığı ve Liouville Teoremi yardımıyla tekliği ispatlanabilirse ölçüsü büyük olan G bölgeleri için de benzer sınırlandırmalar yapılabilir.

Şimdi $m = 1$ için Liouville teoremini kullanarak sınırlandırmayı görelim:

$f = f(z, \omega(z))$, fonksiyonu her $z \in \overline{G}$ ve uygun ω değişkenleri için tanımlı, sürekli ve sınırlı olmak üzere

$$\omega(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta, \omega(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta \tag{2.24}$$

integral denklemi gözönüne alalım. $f = f(z, \omega)$ sınırlı olduğundan her $z \in \overline{G}$ için

$$|f(z, \omega)| \leq K \tag{2.25}$$

olacak şekilde K sabiti vardır.

Φ fonksiyonu G de holomorf, $\overline{G}$ da sürekli ve G nin de sınırlı bir bölge olduğunu kabul edelim.

(2.24) ün sağ tarafı, $\overline{G}$ da sürekli bir $\omega = \omega(z)$ fonksiyonu (2.8) de olduğu gibi

$$W(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta, \omega(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

şeklinde bir $W = W(z)$ fonksiyonuna karşılık getiren bir $T_{\phi,f}$ operatörü olarak tanımlanabilir. $W = W(z)$ fonksiyonu $z-$ düzleminin tamamında özellikle de $\overline{G}$ da tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur. Schmidt eşitsizliğinin tekrar kullanılmasıyla $W(z) - \Phi(z)$ farkı için

$$|W(z) - \Phi(z)| \leq \frac{1}{\pi} K 2\sqrt{\pi}\sqrt{mG} \leq \frac{2K}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mG}$$

yazılabilir ve böylece

$$d(W, \Phi) = \sup_G |W - \Phi| \leq \frac{2K}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mG} \tag{2.26}$$

elde edilir.

$$\frac{2K}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mG} = R$$

diyelim. $\overline{G}$ da tanımlı, sürekli $\omega = \omega(z)$ fonksiyonlarının Banach uzayını $\mathcal{R}$ ile gösterelim.

$\mathcal{R}$ den seçilen ve $\mathcal{R}$ deki metriğe göre Φ fonksiyonuna olan uzaklığı R den küçük kalan ω fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ ile gösterelim. Yani

$$\mathcal{M}_{\Phi,R} = \{\omega \in \mathcal{R} : d(\Phi, \omega) \leq R\}$$

olsun. (2.26) eşitsizliği, her $\omega \in \mathcal{R}$ için $W = T_{\phi,f}$ elamanının; $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ sınıfına ait olduğun gösterir. Özellikle $T_{\phi,f}$, (2.26) eşitsizliğinden dolayı $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ sınıfını yine kendi içine dönüştürür.

Böylece her $\omega \in \mathcal{M}_R$ için tanıma uygun olarak

$$d(\Phi, \omega) = \|\omega - \Phi\| \leq R$$

yazılabilir. $\omega - \Phi = \omega_0$ dersek $\|\omega_0\| \leq R$ olup buradan $\omega_0 \in \mathcal{M}_R$ olduğu görülür.Buna göre $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ nin ω elemanı $\omega_0 \in \mathcal{M}_R$ olmak üzere $\omega = \Phi + \omega_0$ formunda yazılabilir.Tersine eğer $\omega_0 \in \mathcal{M}_R$ ise $\Phi + \omega_0$ elamanı $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ sınıfına aittir. Sonuç olarak, $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ sınıfı , $\mathcal{M}_R$ nin elamanlarının bir holomorf fonksiyon ile toplamından elde edilen elemanlardan oluşmaktadır.

Diğer taraftan $\mathcal{M}_R$ sınıfı Lemma1 nedeniyle kapalı olduğundan $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ sınıfı da kapalıdır.

$\omega', \omega'' \in \mathcal{R}$ ve $0 < \lambda < 1$ olsun. Bu durumda $\lambda\omega' + (1-\lambda)\omega''$ elemanı ω', ω'' elemanlarını birbirine bağlayan doğru parçası olarak tanımlanır.

Ayrıca $\omega', \omega'' \in \mathcal{M}_{\Phi,R}$ ise o zaman $\|\omega' - \Phi\| \leq R$ ve $\|\omega'' - \Phi\| \leq R$ olup böylece

$$\begin{aligned} \|[\lambda\omega' + (1-\lambda)\omega''] - \Phi\| &= \|\lambda(\omega' - \Phi) + (1-\lambda)(\omega'' - \Phi)\| \\ &\leq \lambda\|\omega' - \Phi\| + (1-\lambda)\|\omega'' - \Phi\| \\ &\leq \lambda R + (1-\lambda)R = R \end{aligned}$$

olur. O halde $\omega', \omega'' \in \mathcal{M}_{\Phi,R}$ elemanlarını birbirine bağlayan doğru parçası yine $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ sınıfına aittir. Yani $\omega', \omega'' \in \mathcal{M}_{\Phi,R}$ için $0 < \lambda < 1$ olmak üzere $\lambda\omega' + (1-\lambda)\omega'' \in \mathcal{M}_{\Phi,R}$ olur.

Eğer bir lineer uzaydaki bir kümenin elamanlarının ikişer ikişer birleştirilmesiyle oluşan doğru parçaları yine bu kümeye aitse bu kümeye konvekstir denir.

Buna göre $\mathcal{M}_{\Phi,R}$ konveks ve kapalı bir kümedir.

Şimdi ilave olarak her $z \in \overline{G}$ için $f(z,\omega)$ nın

$$|f(z,\omega) - f(z,\widetilde{\omega})| \leq L|\omega - \widetilde{\omega}| \tag{2.27}$$

Lipschitz koşulunu sağladığını kabul edelim.

Not 2.9 Not 2.2 deki Lipschitz koşulu yerine uygun bir bölgede $\frac{\partial f}{\partial \omega}, \frac{\partial f}{\partial \overline{\omega}}$ türevlerinin var, sürekli ve sınırlı oldukları hipotez olarak alınabilir. Bu koşullar yeterlidir. Alışılmış olduğu gibi $\omega, \overline{\omega} \in \mathcal{M}_{\Phi,R}$ olduğunu kabul etmemiz yeterlidir.

$\omega, \widetilde{\omega} \in \mathcal{M}_{\Phi,R}$ olmak üzere $W = T_{\phi,f}\omega, \widetilde{W} = T_{\phi,f}\widetilde{\omega}$ görüntü elemanları için (Schmidt eşitsizliğinin de kullanılmasıyla)

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{W}(z) - W(z)\right| &= \frac{1}{\pi}\left|\iint\limits_G \frac{f(\zeta, \widetilde{\omega}(\zeta)) - f(\zeta, \omega(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta\right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} L \left\|\widetilde{\omega} - \omega\right\| 2\sqrt{\pi}\sqrt{mG} \\ &= \frac{2L}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mG} d(\omega, \widetilde{\omega}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$d\left(\widetilde{W}, W\right) = \left\|\widetilde{W} - W\right\| = \sup_G \left|\widetilde{W}(z) - W(z)\right| \leq \frac{2L}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mG} d(\widetilde{\omega}, \omega)$$

olur.

Eğer $k \to +\infty$ için $d\left(\omega^{(k)}, \omega\right) \to 0$ olacak şekilde bir $\left(\omega^{(k)}\right)_1^\infty$ dizisi oluşturulursa o zaman bu sınırlandırmaya göre $W^{(k)} = T_{\phi,f}\omega^{(k)}, W = T_{\phi,f}\omega$ görüntü elemanları için

$$d\left(W^{(k)}, W\right) \leq \frac{2L}{\sqrt{\pi}}\sqrt{mG} d\left(\omega^{(k)}, \omega\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. O halde $k \to \infty$ için $d\left(T_{\phi,f}\omega^{(k)}, T_{\phi,f}\omega\right) \to 0$ olur.Bu ise $T_{\phi,f}$ operatörünün sürekli olduğunu gösterir.

Not 2.10 Eğer $h_k = h_k(z)$ fonksiyonları $\overline{G}$ de tanımlı, sürekli ve $|h_k| \leq m$ şeklinde düzgün sınırlı ise bu takdirde

$$H_k(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{h_k(z)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

integrali de $\overline{G}$ da düzgün sınırlı ve bütün noktalarda aynı dereceden süreklidir.

Not 2.11 $|h_k| \leq m$ olduğunda her H_k ların tümü aynı zamanda sınırlı ise buna aynı dereceden süreklidir denir.

Böylece aşağıdaki önerme geçerlidir:

$\left(\omega^{(k)}\right)_1^\infty \subset \mathcal{M}_{\Phi,R}$ dizisi verilsin. Bu takdirde $\left\{T_{\phi,f}\omega^{(k_\nu)}\right\}_{\nu=1}^\infty$ görüntüleri yakınsak olan $\left\{\omega^{(k_\nu)}\right\}$ alt dizisi vardır.

Not 2.12 $T_{\phi,f}$ operatörü $\mathcal{R}$ sınıfının tamamında tanımlıdır. Aynı sonuç nedeniyle sınırlı herhangi bir dizinin (yani her k için $\left\|\omega^{(k)}\right\| \leq M$) bir alt dizisi vardır ve bu dizinin $T_{\phi,f}$ operatörü altındaki görüntüsü de yakınsak olur. Diğer bir ifade şekli ile $T_{\phi,f}$ operatörü tamdır.

(2.25) hipotezinden dolayı her $z \in \overline{G}$ ve her $k = 1, 2, \ldots$ için

$$\left|f\left(z, \omega^{(k)}\right)\right| \leq K$$

olur. Diğer taraftan $W^{(k)} = T_{\phi,f}\omega^{(k)}$ olması yani diğer bir ifadeyle

$$W^{(k)} = \Phi\left(z\right) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f\left(\zeta, \omega^{(k)}\left(\zeta\right)\right)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

olması nedeniyle $\left(W^{(k)}\right)_1^\infty$ dizisi düzgün sınırlı ve aynı dereceden süreklidir.

Arzela – Ascoli Teoreminden $\left(W^{(k)}\right)_1^\infty$ dizisinin düzgün yakınsak özellikle de $\mathcal{R}$ deki metriğe göre de düzgün yakınsak olan $\left\{W^{(k_\nu)}\right\}_{\nu=1}^\infty$ alt dizisi vardır. Diğer taraftan $W^{(k)} = T_{\phi,f}\omega^{(k_\nu)}$ olmak üzere $T_{\phi,f}$ operatörü $\left\{\omega^{(k_\nu)}\right\}_{\nu=1}^\infty$ yakınsak alt dizisi yine yakınsak $\left\{T_{\phi,f}\omega^{(k_\nu)}\right\}_{\nu=1}^\infty$ alt dizisine dönüştürür.

$\mathcal{M}_{\Phi,R}$ ve $T_{\phi,f}$ nin ortaya konulan özellikleri nedeniyle Schauder Sabit Nokta Teoremi kullanılabilir. Böylece $T_{\phi,f}$ operatörünün sabit noktası

$$\omega = T_{\phi,f}\omega$$

eşitliğini sağlar.

Bu durumda ω sabit noktası (2.24) integral denkleminin çözümü olur ve Φ nin holomorf bir fonksiyon olması nedeniyle ω, G bölgesinde

$$\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}} = f\left(z, \omega\right)$$

diferensiyel denklemini sağlar.

Şimdi tespit edilen bir $\Phi\left(z\right)$ holomorf fonksiyonuna karşılık (2.24) integral denkleminin ω çözümünün tek olup olmadığını araştıralım.

Bunun (2.24) integral denkleminin ω başka $\overline{G}$ de sürekli diğer bir çözümün $\widetilde{\omega}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\widetilde{\omega}(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta, \widetilde{\omega}(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

olup buradan $\omega - \widetilde{\omega}$ farkı Φ dan bağımsız olarak

$$\omega(z) - \widetilde{\omega}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta, \omega(\zeta)) - f(\zeta, \widetilde{\omega}(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta \tag{2.28}$$

şeklinde elde edilir.

Cauchy singülerliğine sahip katlı integral $z-$ düzleminin tamamında tanımlı sürekli ve sınırlı bir fonksiyon tanımlandığından, (2.28) önce yalnızca G de tanılanmış $\omega - \widetilde{\omega}$ fonksiyonunun tüm kompleks düzleme genişletmesi olarak düşünülebilir. Bu şekilde genişletilmiş fonksiyon $\omega - \widetilde{\omega}$ olsun. (2.28) nin sağ tarafı $\overline{G}$ ın dışında holomorf bir fonksiyon tanımladığından $\omega - \widetilde{\omega}$, $\overline{G}$ nın dışında holomorftur.

Böylece G bölgesinde

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\omega - \widetilde{\omega}) = f(z, \omega) - f(z, \widetilde{\omega})$$

olur. $f = f(z, \omega)$ Lipschitz koşulunu sağladığından

$$\left| \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\omega - \widetilde{\omega}) \right| = L\left|\omega - \widetilde{\omega}\right|$$

yazılabilir. O halde $\omega - \widetilde{\omega}$, G de (1.1).den

$$\omega - \widetilde{\omega} = \psi e^{\omega}$$

formunda yazılabilir. Burada ψ, G de holomorf bir fonksiyondur. ω ise (1.1) de anlatılan, Cauchy-singülerliğine sahip ve katlı integralle tanımlanan bir fonksiyondur. Yani

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}}, & \omega \neq 0 \\ 0 \quad , & \omega = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$ dır.

ω ve $\omega - \widetilde{\omega}$ fonksiyonları kompleks düzlemin tamamında sürekli ve sınırlı olduklarından ψ holomorf fonksiyonu kompleks düzlemde bir sürekli genişletmeye sahiptir.

ω ve $\omega - \widetilde{\omega}$ fonksiyonları $\overline{G}$ ın dışında holomorf olup ve böylece ψ de $\overline{G}$ ın dışında holomorf fonksiyondur. G ve $\overline{G}$ nın dışında holomorf olan sürekli bir fonksiyon olan

$$\psi = (\omega - \widetilde{\omega}) \exp(-\omega) \tag{2.29}$$

fonksiyonu kompleks düzlemin tamamında holomorf olmak zorundadır.

ω ve $\omega - \widetilde{\omega}$ fonksiyonlarının sınırlığından dolayı ψ fonksiyonu da sınırlıdır. Klasik fonksiyonlar teorisindeki Liouville Teoreminden ψ sabit olmak zorundadır. Böylece (2.28) den $z \to \infty$ için $\omega(z) - \widetilde{\omega}(z) \to 0$ olur.

Diğer taraftan ω fonksiyonunun sınırlı olması $z \to \infty$ için $\psi(z) \to 0$ olmasını gerektirir. O halde kompleks düzlemde sabit bir fonksiyon olan $\psi(z)$, kompleks düzlemde sıfır olmak zorundadır. O halde her z için özellikle de $z \in \overline{G}$ için $\omega(z) - \widetilde{\omega}(z) = 0$ olur. O halde (2.24) integral denkleminin G de birbirinden farklı iki çözümü olamaz.

3. BİR KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEM SİSTEMİ İÇİN SCHWARZ PROBLEMİ

$G \subset \mathbb{C}$ basit irtibatlı, düzgün sınıra sahip bir bölge olmak üzere, G de

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial \bar{z}} = F_j\left(z, \omega_1, ..., \omega_m\right); \; j = 1, 2, ..., m; \; z \in G \tag{3.1}$$

$$\operatorname{Re} \omega_j|_{\partial G} = \varphi_j; \;\; \operatorname{Im} \omega_j\left(z_0\right) = c_j; \;\; z_0 \in \overline{G}; \;\; \varphi_j \in C_\lambda^1\left(\overline{G}, \mathbb{R}\right), \;\; 0 < \lambda < 1 \tag{3.2}$$

sınır-değer problemini göz önüne alalım. Burada c_j reel sabitler ve $C_\lambda^1\left(\overline{G}, \mathbb{R}\right)$ $\overline{G} = G \cup \partial G$ üzerinde türetilebilir Hölder-sürekli reel değerli fonksiyonların sınıfıdır.

(3.1) sistemindeki $F_j, \; j = 1, 2, ..., m$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

(a) $z \in \overline{G}$ olmak üzere F_j ler $m+1$ tane $z, \omega_1 ..., \omega_m$ değişkenlerine göre sürekli ve

$$\left|\omega_j(z)\right| \leq R, \;\; \left|F_j\left(z, \omega_1(z), ..., \omega_m(z)\right)\right| \leq K(R) \tag{3.3}$$

olacak şekilde R ve $K(R)$ sabitleri mevcut olsun.

(b) $\left|\omega_j(z)\right| \leq R, \left|\omega_j^*(z)\right| \leq R$ olmak üzere her $z_1, z_2 \in \overline{G}$ için F_j ler

$$\left|F_j\left(z, \omega_1, ..., \omega_m\right) - F_j\left(z, \omega_1^*, ..., \omega_m^*\right)\right| \leq L_R \left[\left|z_1 - z_2\right|^\lambda + \sum_{i=1}^m \left|\omega_i - \omega_i^*\right|\right] \tag{3.4}$$

düzgün Lipschitz koşulunu sağlasın. Burada L_R, alışılmış Lipschitz sabitlerinin maksimumudur.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi} &= \left(\varphi_1, ..., \varphi_m\right); \\
\mathbf{c}_0 &= \left(c_1, ..., c_m\right); \\
\mathbf{w} &= \left(\omega_1, ..., \omega_m\right) = \left(u_1 + iv_1, ..., u_m + iv_m\right) \\
&= \left(u_1, ..., u_m\right) + i\left(v_1, ..., v_m\right) =: \mathbf{u} + i\mathbf{v}
\end{aligned}$$

olmak üzere, (3.1) – (3.2) sınır değer problemi

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{z}} = \mathbf{F}\left(z, \mathbf{w}\right), \;\; z \in G, \;\; \mathbf{w} = \left(\omega_1, ..., \omega_m\right), \;\; \mathbf{F} = \left(F_1, ..., F_m\right) \\
&\mathbf{u}|_{\partial G} = \mathbf{\Phi}, \;\; \mathbf{v}\left(z_0\right) = \mathbf{c}_0, \;\; z_0 \in \overline{G}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde vektörel formda yazılabilir. (3.1) sisteminden

$$\begin{aligned} \omega_j(z) &= f_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{F_j(\zeta, \omega_1(\zeta), ..., \omega_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta, \ \zeta = \xi + i\eta \\ &= f_j(z) + T_G F_j(z, \omega_1(z), ..., \omega_m(z)), \ j = 1, 2, ..., m \end{aligned} \tag{3.6}$$

olur. Burada f_j ler G de keyfi holomorf fonksiyonlar ve

$$T_G F_j(z, \omega_1(z), ..., \omega_m(z)) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{F_j(\zeta, \omega_1(\zeta), ..., \omega_m(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

dır. Böylece (3.5) deki vektörel denklemin bir çözüm gösterimi

$$\mathbf{w}(z) = \mathbf{f}(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{\mathbf{F}(\zeta, \mathbf{w}(\zeta))}{\zeta - z} d\xi d\eta = \mathbf{f}(z) + T_G \mathbf{F}(z, \mathbf{w}) \tag{3.7}$$

olarak, vektörel integral denklem formunda yazılabilir. Burada $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_m)$ ve

$$T_G \mathbf{F}(z, \mathbf{w}) = (T_G F_1(z, \omega_1(z), ..., \omega_m(z)), ..., T_G F_m(z, \omega_1(z), ..., \omega_m(z)))$$

dir. $\mathbf{w}$ vektörel fonksiyonunun ∂G sınırındaki davranışı ile $\mathbf{f}$ keyfî holomorf fonksiyonunun sınırdaki davranışı arasındaki bağıntıyı ortaya çıkarmak için önce $\mathbf{f}$ fonksiyonunun $\mathbf{f} = \mathbf{\Psi} + \mathbf{f}_w$ şeklinde iki holomorf fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabildiğini kabul edelim. Ayrıca $\mathbf{\Psi}$ ve $\mathbf{f}_w$ holomorf fonksiyonları sırasıyla

$$\operatorname{Re} \mathbf{w}|_{\partial G} = \mathbf{u}|_{\partial G} = \operatorname{Re} \mathbf{\Psi}|_{\partial D} = \mathbf{\Phi}, \ \operatorname{Im} \mathbf{w}(z_0) = \mathbf{v}(z_0) = \operatorname{Im} \mathbf{\Psi}(z_0) \tag{3.8}$$

$$\operatorname{Re} \mathbf{f}_w|_{\partial G} = -\operatorname{Re} T_G \mathbf{F}(., \mathbf{w})|_{\partial G}, \ \operatorname{Im} \mathbf{f}_w(z_0) = -\operatorname{Im} T_G \mathbf{F}(., \mathbf{w})(z_0) \tag{3.9}$$

sınır koşullarını sağlasın. Böylece (3.7) çözümü

$$\mathbf{w}(z) = \mathbf{\Psi} + \mathbf{f}_w + T_G \mathbf{F}(z, \mathbf{w}) \tag{3.10}$$

şekline gelir.

Teorem 3.1 Eğer (3.10) daki $\mathbf{\Psi}$ ve f_w holomorf fonksiyonları sırasıyla (3.8)−(3.9) sınır koşullarını sağlarsa bu takdirde (3.10) ile tanımlanan $\mathbf{w}$ fonksiyonu (3.5) Schwarz probleminin çözümü olur.

$\omega_j \in C_\lambda(\overline{G})$ olmak üzere ω_j skaler fonksiyonunun normunu

$$\|\omega_j\|_\lambda = \max\left\{\sup_G |\omega_j(z)|, \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\omega_j(z_2) - \omega_j(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda}\right\} \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $C_\lambda\left(\overline{G}\right)$, $\overline{G}$ ta kompleks değerli Hölder-sürekli fonksiyonların sınıfıdır. Bu norma göre $C_\lambda\left(\overline{G}\right)$ sınıfı bir Banach uzayıdır.

Şimdi

$$\mathcal{K}=\left\{\mathbf{w}=(\omega_1,...,\omega_m):\omega_j\in C_\lambda\left(\overline{G}\right);\ j=1,...,m\right\}$$

sınıfını tanımlayalım. Bu sınıftaki bir normu

$$\|\mathbf{w}\|_\lambda=\max_{j=1,2,\ldots,m}\|\omega_j\|_\lambda \tag{3.12}$$

şeklinde verebiliriz. Bu norma göre de $\mathcal{K}$ sınıfı bir Banach uzayıdır. $\mathcal{K}$ sınıfının bir alt sınıfı olan

$$\mathcal{R}=\{\mathbf{w}=(\omega_1,...,\omega_m)\in\mathcal{K}:\|\mathbf{w}\|_\lambda\le R\}\subset\mathcal{K};\ 0<R<+\infty \tag{3.13}$$

sınıfını göz önüne alalım. Eğer $\mathbf{w}\in\mathcal{R}$ ise $F_j\left(z,\omega_1(z),...,\omega_m(z)\right)$ fonksiyonu $\overline{G}$ ta tanımlı bir fonksiyon olur. Bu şekilde $\overline{G}$ ta tanımlı bileşke fonksiyonların sınıfını $F_j(.,\mathbf{w})$ ile gösterelim.

Teorem 3.2 $\mathbf{w}\in\mathcal{R}$ ise (3.4) koşulu altında $F_j(.,\mathbf{w})\in C_\lambda\left(\overline{G}\right)$ dır.

İspat. $\mathbf{w}=(\omega_1,...,\omega_m)\in\mathcal{R}$ olsun. olsun. Bu takdirde olup $\omega_i\in C_\lambda\left(\overline{G}\right)$, $i=1,...,m$ olup buradan her $z_1,z_2\in\overline{G}$ için

$$|\omega_i(z_2)-\omega_i(z_1)|\le\|\omega_i\|_\lambda|z_2-z_1|^\lambda$$

yazılabilir. (3.4) koşulunun göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}|F_j(z_2,\mathbf{w}(z_2))-F_j(z_1,\mathbf{w}(z_1))| &\le L_R\left[|z_2-z_1|^\lambda+\sum_{i=1}^m|\omega_i(z_2)-\omega_i(z_1)|\right]\\ &\le L_R\left[1+\sum_{i=1}^m\|\omega_i\|_\lambda\right]|z_2-z_1|^\lambda\end{aligned}$$

olur. Bu da $F_j(.,\mathbf{w})\in C_\lambda\left(\overline{G}\right)$ olduğunu gösterir.

Lemma 3.1 $\mathcal{R}$ sınıfı (3.12) normuna göre kapalıdır.

İspat. Göz önüne alınan hipotezler altında, $\mathcal{R}$'nin bir $\mathbf{w}^*$ yığılma noktasına yakınsayan ve R'den seçilen her $(\mathbf{w}_n)_1^\infty$ Cauchy dizisi için $\mathbf{w}^* \in \mathcal{R}$ olduğu gösterilebilir.

(3.4) koşulunun yanında ilave olarak $\mathbf{F} = (F_1, ..., F_m)$ fonksiyonunun her $\mathbf{w}, \widetilde{w} \in \mathcal{R}$ için

$$\|\mathbf{F}(., \mathbf{w}) - \mathbf{F}(., \widetilde{w})\|_\lambda \leq L_1 \|\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{w}}\|_\lambda \tag{3.14}$$

Hölder-Lipshitz koşulunu sağladığını varsayalım. Diğer taraftan

$$\|\mathbf{F}(., \mathbf{0})\|_\lambda = M, \; M \in \mathbb{R}^+ \tag{3.15}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(., \mathbf{w})\|_\lambda &\leq \|\mathbf{F}(., \mathbf{w}) - \mathbf{F}(., \mathbf{0})\|_\lambda + \|\mathbf{F}(., \mathbf{0})\|_\lambda \\ &\leq L_1 \|\mathbf{w}\|_\lambda + M \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece, eğer $\mathbf{w} \in \mathcal{R}$ ise

$$\|\mathbf{F}(., \mathbf{w})\|_\lambda \leq L_1 \|\mathbf{w}\|_\lambda + M \leq L_1 R + M \tag{3.16}$$

olur. Diğer taraftan T_G operatörünün

$$T_G : C_\lambda\left(\overline{G}\right) \to C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. $\mathbf{F}(., \mathbf{w}) \in C_\lambda\left(\overline{G}\right)$ olduğundan $T_G\mathbf{F}(., \mathbf{w}) \in C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$. Burada $C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$, birinci basamaktan türetilebilir Hölder-sürekli kompleks değerli fonksiyonların sınıfıdır.

Lemma 3.2 $\mathbf{f}_w$ holomorf fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathbf{f}_\mathbf{w}|_{\partial G} &= -\operatorname{Re} T_G\mathbf{F}(., \mathbf{w})|_{\partial G} \\ \operatorname{Im} \mathbf{f}_\mathbf{w}(z_0) &= -\operatorname{Im} T_G\mathbf{F}(., \mathbf{w})(z_0), \; z_0 \in \overline{G} \end{aligned}$$

sınır koşullarının sağlandığım varsayalım. Eğer $T_G\mathbf{F}(., \mathbf{w}) \in C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$ ise bu takdirde

$$\|\mathbf{f}_\mathbf{w}\|_\lambda \leq K_1(\lambda) \|T_G\mathbf{F}(., \mathbf{w})\|_\lambda \tag{3.17}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $K_1(\lambda)$ sabiti vardır.

İspat. Bu lemmanın ispatı için [1] kaynağına bakılabilir.

Eğer $\mathbf{\Psi}$ holomorf fonksiyonu (3.8) sınır koşullarını sağlarsa ve $\operatorname{Re}\mathbf{\Psi}|_{\partial G} = \mathbf{\Phi}$ koşulundaki $\mathbf{\Phi}$ fonksiyonu ∂G sınırında $C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$ sınıfına aitse, bu takdirde $\mathbf{\Psi} \in C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$ olur. Bu durumda önceden verilen her $\mathbf{\Phi}$ ve $\mathbf{c}_0$ için

$$\|\mathbf{\Psi}\|_\lambda \leq K_2 \tag{3.18}$$

olacak şekilde bir K_2 sabiti bulunabilir. Ortaya konulan hipotezler altında (3.10) daki $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{f_w}$ fonksiyonları $C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$ sınıfına ait olur.

Şimdi

$$\begin{array}{rcll} T: \mathcal{R} & \rightarrow & \mathcal{K} & \\ \mathbf{w} & \rightarrow & \mathbf{W} & = \mathbf{\Psi} + \mathbf{f}_w + T_G\mathbf{F}(z,\mathbf{w}) \end{array}$$

operatörünü tanımlayalım. $\mathbf{\Psi}, \mathbf{f_w}, T_G\mathbf{F}(.,\mathbf{w}) \in C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\mathbf{W} \in C_\lambda^1\left(\overline{G}\right)$,dir. (3.14) , (3.15) , (3.16) nın göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}\|_\lambda &\leq \|\mathbf{\Psi}\|_\lambda + \|\mathbf{f}_w\|_\lambda + \|T_G\mathbf{F}(.,\mathbf{w})\|_\lambda \\ &\leq K_2 + K_1(\lambda)\|T_G\mathbf{F}(.,\mathbf{w})\|_\lambda + \|T_G\mathbf{F}(.,\mathbf{w})\|_\lambda \\ &= K_2 + [K_1(\lambda)+1]\|T_G\mathbf{F}(.,\mathbf{w})\|_\lambda \\ &\leq K_2 + [K_1(\lambda)+1]\|T_G\|\,\|\mathbf{F}(.,\mathbf{w})\|_\lambda \\ &\leq K_2 + [K_1(\lambda)+1]\|T_G\|(L_1R+M) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 3.3 Eğer

$$K_2 + [K_1(\lambda)+1]\|T_G\|(L_1R+M) \leq R \tag{3.19}$$

eşitsizliği sağlanırsa, T operatörü $\mathcal{R}$ sınıfını yine kendi içine dönüştürür.

(3.19) koşulunun gerçeklendiğini varsayalım. Bu takdirde T operatörü

$$\begin{array}{rcll} T: \mathcal{R} & \rightarrow & \mathcal{K} & \\ \mathbf{w} & \rightarrow & \mathbf{W} & = \mathbf{\Psi} + \mathbf{f}_w + T_G\mathbf{F}(z,\mathbf{w}) \end{array}$$

şekline gelir.

Şimdi T operatörünün hangi koşullar altında daralma operatörü olduğunu gösterelim.

$\mathbf{W} \in \mathcal{R}$ elemanından başka bir $\widetilde{\mathbf{W}} \in \mathcal{R}$ elamanını göz önüne alalım. Buradan

$$\mathbf{W}-\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{f}_w-\mathbf{f}_{\widetilde{w}} + T_G\left[\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right] \tag{3.20}$$

yazılabilir. Burada $\widetilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{R}$ için

$$\widetilde{\mathbf{W}}= \mathbf{\Psi} + \mathbf{f}_{\widetilde{\mathbf{w}}}+T_G\mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)$$

dır. Diğer taraftan $\mathbf{f}_w-\mathbf{f}_{\widetilde{\mathbf{w}}}$ holomorf fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\mathbf{f}_{\mathbf{w}}-\mathbf{f}_{\widetilde{\mathbf{w}}}\right]\big|_{\partial G} &= \operatorname{Re}\left[T_G\left(\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right)\right]\big|_{\partial G} \\ \operatorname{Im}\left[\mathbf{f}_{\mathbf{w}}-\mathbf{f}_{\widetilde{\mathbf{w}}}\right]\left(z_0\right) &= \operatorname{Im}\left[T_G\left(\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right)\right]\left(z_0\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

sınır koşulları sağlanır. (3.21) koşullarını sağlayan holomorf fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{f}_{\mathbf{w}}-\mathbf{f}_{\widetilde{\mathbf{w}}}\right\|_\lambda &\leq K_1\left(\lambda\right)\left\|T_G\left(\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right)\right\|_\lambda \\ &\leq K_1\left(\lambda\right)\left\|T_G\right\|\left\|\left(\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right)\right\|_\lambda \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece (3.16) nın göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{W}-\widetilde{\mathbf{W}}\right\|_\lambda &\leq \left\|\mathbf{f}_{\mathbf{w}}-\mathbf{f}_{\widetilde{\mathbf{w}}}\right\|_\lambda + \left\|T_G\left(\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right)\right\|_\lambda \\ &\leq K_1\left(\lambda\right)\left\|T_G\right\|\left\|\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right\|_\lambda \\ &\quad + \left\|T_G\right\|\left\|\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right\|_\lambda \\ &= \left[K_1\left(\lambda\right)+1\right]\left\|T_G\right\|\left\|\mathbf{F}\left(z,\mathbf{w}\right) - \mathbf{F}\left(z,\widetilde{\mathbf{w}}\right)\right\|_\lambda \\ &\leq \left[K_1\left(\lambda\right)+1\right]\left\|T_G\right\| L_1\left\|\mathbf{w}-\widetilde{\mathbf{w}}\right\|_\lambda \end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafı $\left\|T_G\mathbf{w} - T_G\widetilde{w}\right\|_\lambda$ dır.

Sonuç 3.1 Eğer

$$\left[K_1\left(\lambda\right)+1\right]\left\|T_G\right\| L_1 < 1 \tag{3.23}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $T : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ operatörü bir daralma dönüşümüdür.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.3 $K_1\left(\lambda\right), K_2, L_1, R, M$ pozitif reel sabitleri sırasıyla (3.17), (3.18), (3.14), (3.13) ve (3.15)'teki gibi olmak üzere, (3.19) ve (3.23) eşitsizliklerinin sağlandığını varsayalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} T: \ \mathcal{R} \ &\rightarrow \ \mathcal{K} \\ \mathbf{w} \ &\rightarrow \ \mathbf{W} \ = T_G\mathbf{w} = \mathbf{\Psi} + \mathbf{f_w} + T_G\mathbf{F}(z, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan operatörün $T\mathbf{w} = \mathbf{w}$ şeklinde bir tek sabit noktası vardır

Sonuç 3.2 (3.12) normuna göre $\mathcal{R}$ sınıfı bir Banach uzayıdır. (3.19) eşitsizliğinin sağlanması durumunda $T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{K}$ operatörü $\mathcal{R}$ sınıfını kendi içine dönüştürür. (3.23) eşitsizliği sağlanırsa, T operatörü bir daralma dönüşümü olur. Böylece Banach Sabit Nokta Teoremi'ne göre $T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ operatörünün $T_G\mathbf{w} = \mathbf{w}$ şeklinde bir tek $\mathbf{w} \in \mathcal{R}$ sabit noktası vardır. Bu $\mathbf{w}$ sabit noktası (3.5) sınır-değer probleminin çözümüdür. Dolayısıyla $\mathbf{w} = (\omega_1, ..., \omega_m)$ çözümünün bileşenleri için (3.1) sistemi ve (3.2) koşulları sağlanır. Böylece (3.1) sisteminin (3.2) koşullarını sağlayan çözümü var ve tektir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez, iki temel problemden oluşmaktadır. İlk kısımda bir kompleks diferensiyel denklemin çözümünün varlık ve tekliğinin bölgenin ölçüsüne nasıl bağlı olduğunu Hölder normu kullanarak incelenmiştir. Dolayısıyla bu bir lokal problemdir. Kompleks düzlemde incelenen bu problem kompleks diferensiyel denklem sistemine ve $n-$ boyutlu kompleks uzaya da uygun koşullar altında genişletilebilir. Bu durum henüz incelenmemiştir. Ayrıca Hölder uzayında Hölder normu kullanılarak incelenen bu lokal problem Banach uzayı gibi başka fonksiyon uzaylarında da incelenebilir.

Tezin ikinci kısmında kompleks düzlemin bir basit irtibatlı bölgesinde tanımlanan belli tipten kompleks diferensiyel denklem sistemi bir tek vektörel denkleme dönüştürülmüş ve daha sonra bu vektörel denklem için tanımlanan Schwarz probleminin çözümünün varlık ve tekliği araştırılmıştır. Burada incelenen problem için varlık ve teklik bölgenin ölçüsüne bağlı değildir. Bu problemde de Hölder normu kullanılmıştır. Bu normun dışında başka fonksiyon uzayı normu kullanılarak yeni sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca ele alınan kompleks diferensiyel denklem sistemi için Dirichlet sınır değer problemi henüz incelenmemiştir.

KAYNAKLAR

[1] Tutschke, W. Partielle Differentialgleichungen, klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoded, Teubner-TEXTE zur Mathematik, Band 27, 1983.

[2] Tutschke, W. Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer und mehreren komplexen Variablen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1977.

[3] Tutschke, W. Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungssyteme erster Ordnung in der Ebene durch Verwendung einer komplexen Normalform, Math. Nachr., 75, 283-298, 1976.

[4] Tutschke, W. Topologische absch$\ddot{a}$tzungsmethoden für Lösungen partieller komplexer Differentialgleichungen. Math. Nachr. 63, 89-95, 1974

[5] Vekua, I. N. , Verallgemeinerte analytische Funktionen, Berlin, Akademie-Verlang, 1963.

[6] Meden, H. , Zuordnung der Lösungen partieller Differentialgleicbungen und der holomorphe Funktionen bei Existenzbeweisen mittel des Schauderschen Fixunksatzes" Math. Machr. 67, 251-254, (1975).

[7] Royden, H. L., Real Analysis, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.