KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONLU TİPLİ KUADRİK HİPERYÜZEYLER

Halil İbrahim ARICI

HAZİRAN 2015

ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalında Halil İbrahim ARICI tarafından hazırlanan " SONLU TİPLİ KUADRİK HİPERYÜZEYLER " adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:(Unvanı ,Adı ve Soyadı, İmzası)	______________
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	______________
Üye	: (Unvanı, Adı ve Soyadı, İmzası)	______________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Babaaneme,

ÖZET

SONLU TİPLİ KUADRİK HİPERYÜZEYLER

ARICI, Halil İbrahim
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Mayıs 2015, 49 sayfa

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde sonlu tipli eğri ve yüzey kavramları tanıtılarak ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde üç boyutlu Öklid uzayında sonlu tip kuadriklerin sınıflandırılması incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise $(n+1)$-boyutlu Öklid uzayında sonlu tipten kuadrik hiperyüzeylerin sınıflandırılması incelenmiştir.

Beşinci bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Öklid Uzayı, Sonlu Tip Altmanifoldlar, Hiperyüzeyler, Laplasiyen, İzometrik İmersiyon, Ortalama Eğrilik Vektör Alanı.

ABSTRACT

QUADRİC HYPERSURFACES OF FİNİTE TYPE

ARICI, Halil İbrahim
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
May 2015, 49 pages

This thesis consist of five section. The first section ise reserved for introduction.

In the second section, the notion of finite type curves and surfaces and their properties are given. Also we give some finite type curves and surfaces examples.

In the third section, we study the quadrics of finite type in Euclidean 3-space.

In the fourth section, we give some properties of quadric hypersurfaces of finite type in Euclidean $(n+1)$-space.

In the last section including discussion and conclusions, it is emphasized that the importance of the known results.

Key Words: Euclidean Space, Finite Type Submanifolds, Hypersurfaces, Laplacian, Izometric Immersion, Mean Curvature Vector Field.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında ve öncesinde benden hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, bilimsel yayınlarını ve kütüphanesini sonuna kadar bizlerin hizmetine veren, üniversite hayatım boyunca her türlü derdimi dinleyip bana yol gösteren, çok kıymetli tez yöneticisi hocam, Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN' a ve üzerimde emeği olan başta Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN olmak üzere Matematik Anabilim dalındaki bütün hocalarıma sonsuz teşekkür ediyorum.

Tüm öğrenim hayatım boyunca benden maddi manevi hiçbir yardımı esirgemeyen ömrüm boyunca hep yanımda olan canım aileme, üniversite hayatım boyunca beni her anlamda destekleyen beni cesaretlendiren çok kıymetli amcam Osman Zeki ARICI'ya, büyük fedakarlıklarla bana destek olan, beni tezimin her aşamasında motive eden, beni yalnız bırakmayan ve bana her zaman güvenen Zehra İSLAM'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
E^n	n-boyutlu Öklid Uzayı
Δ	Laplas Operatörü
∇	Gradyan Operatörü

1. GİRİŞ

Sonlu tipten altmanifoldlar tanımı 1970'li yılların sonlarına doğru B. Y. Chen tarafından tanıtıldıktan sonra altmanifoldların incelenmesi için kullanışlı bir kavram haline gelmiş, geometri ile uğraşan pek çok kişi tarafından yoğun olarak çalışılmış ve sonlu tipten altmanifoldlar üzerinde oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir. Sonlu tipten altmanifoldların ilk sonuçları 1984'te B. Y. Chen tarafından bir kitapta toplanmıştır[1]. O zamandan beri konuda hızlı bir gelişme olmuştur.

Cebirsel hiperyüzey ve sonlu tipli altmanifold kavramları birlikte ele alındığında, E^m de bütün sonlu tip hiperyüzeyleri sınıflandırma problemi karşımıza çıkmıştır. Bu problem , 1984'te B. Y. Chen tarafından $m = 2$ için tamamen çözülmüştür. Sadece çember ve doğru E^2 de sonlu tip eğriler olduğu gösterilmiştir[2]. 1987'de B. Y. Chen tarafından $m = 3$ için; bu bağlamda ilk sonuç E^3 te tüp yüzeyleri içerisinde yalnızca dairesel silindirlerin sonlu tip yüzey olduğu gösterilmiştir[3]. 1988 yılında O. J. Garay, tarafından " E^m de bir koni sonlu tiptir ancak ve ancak koni minimaldir. " teoremi ispatlanmıştır[4]. 1990 yılında B.Y. Chen, F. Dillen L. Verstraelen and L. Vrancken tarafından " E^3 te bir regle yüzeyi sonlu tiptedir ancak ve ancak bu yüzey bir düzlem, helisoid ya da dairesel silindirdir. " olduğu ifade edilmiştir[5]. Sonlu tipli bazı regle yüzeylerin sınıflandırılması 1992'de F. Dillen tarafından yapılmıştır[6]. 1996 yılına kadar bu alanda yapılmış olan çalışmalar, B. Y. Chen tarafından derlenerek bir rapor halinde 1996 yılında yayınlanmıştır[7]. Bu tarihten sonra da, bu konuları içeren farklı doğrultularda çok sayıda çalışmalar yapılmıştır[8, 9, 11, 14, 15, 18].

Bu tezde m-boyutlu sonlu tip kuadrik hiperyüzeyler ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Tezimizin ikinci bölümünde konuyla ilgili temel kavram ve teoremler verilmiştir. Bu bölüm diğer bölümlerde yapılacak olan çalışmaların temelini oluşturacaktır.

Tezimizin üçüncü bölümünde sonlu tip altmanifoldların tanımı verilip B. Y. Chen ve F. Dillen tarafından yazılan makale ile 3-boyutlu E^3 Öklid uzayında sonlu tip kuadriklerin dairesel silindir ve küre olduğu ayrıntılı olarak incelenerek 3-boyutlu Öklid uzayı++nda sonlu tip kuadriklerin temel sınıflandırılması yapılmıştır.

Tezimizin dördüncü bölümünde E^m Öklid uzayında hiperyüzeylerin tanımı verilip B. Y. Chen, F. Dillen, ve H. Song tarafından yazılan makale ile m-boyutlu E^m Öklid uzayında bütün sonlu tip kuadrik hiperyüzeylerin temel sınıflandırma teoremi ayrıntılı olarak ispatlanıp sonlu tip kuadriklerin temel sınıflandırılması yapılmıştır. Bu sınıflandırma sonucunda E^{n+1} de M kuadrik hiperyüzeyi için eğer M sonlu tip ise M ya hiperküre ya $C_{p,n-p-1}$ cebirsel koniklerinden biri $(0 < p < n - 1)$ ya E^l lineer altuzayı ve E^{n-l+1} in $(0 < l < n)$ bir hiperküresinin çarpımı ya da E^l lineer altuzayın ve $C_{p,n-l-p-1}$ cebirsel konilerden birisinin çarpımı $(0 < p < n - 1)$ olduğu ve bu önermelerin tersinin de doğru olduğu gösterilmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tez çalışmamızda temel kavramlar için Hacısalihoğlu (2000) ‘nun “Diferensiyel Geometri Cilt I ve Cilt II” kitabı, Sabuncuoğlu (2004) ‘nun “Diferensiyel Geometri” kitabı, O’neill (2006) ‘in “Elemantry Differential Geometry” kitabı, Kuhnel (2006) ‘in “Differential Geometry of Curves-Surfaces-Manifolds” kitabı, Carmo (1976) ‘nun “Differential Geometry of Curves and Surfaces” adlı kitabı ve Chen (1983) ‘in “Total Mean Curvature and Submanifold of Finite Type” adlı kitabı referanslarımızı oluşturmuştur.

Tezimizin üçüncü bölümü için Chen ve Dillen (1990) tarafından yayınlanan makale ana referansımızı oluşturmuştur.

Tezimizin dördüncü bölümü için Chen, Dillen ve Song (1992) tarafından yayınlanan makale ana referansımızı oluşturmuştur.

Bunun dışında Kılıç (1997), Taşkent (2007) ve Bektaş (2012) tarafından hazırlanan lisansüstü tez çalışmalarından da faydalanılmıştır.

1.2. Tezin Amacı

Cebirsel hiperyüzey ve sonlu tipli altmanifold kavramları birlikte ele alındığında, sonlu tipli kuadriklerin dairesel, silindirler ve küreler olduğu Chen ve Dillen (1987) tarafından gösterilmiştir. Tez konusu olarak ifade edilen sonlu tipli kuadrik hiperyüzeyler başlıklı, yüksek lisans tez çalışmasında, Chen, Dillen ve Song (1992) tarafından yapılan çalışmada kuadrik hiperyüzeylerin sonlu tipten olma şartları elde edilmiştir. Adı geçen çalışmalar Öklid uzaylarında yapılmıştır. Bu çalışmalar, tezimizin temelini oluşturacak ve detaylı bir şekilde çalışılarak benzer konunun farklı uzaylarda ve geometrilerde çalışılmasına temel hazırlayacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız boyunca ihtiyaç duyacağımız bazı temel kavramlar ve sonuçlar verilmiştir. Bu bölüm için temel referanslarımız Carmo (1976), Chen (1983), Hacısalihoğlu (2000), Sabuncuoğlu (2004) ve Kuhnel (2006) olacaktır.

Tanım 2.1. M, bir diferansiyellenebilir (C^{∞}) manifold olmak üzere M üzerindeki (C^{∞}) vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ üzerinde bir $<,>$ iç çarpım fonksiyonu tanımladığında M manifoldu bu iç çarpım ile birlikte bir Riemann manifoldu oluşturur.

Tanım 2.2. M ve N sırasıyla n ve m boyutlu manifoldlar olmak üzere $x: M \longrightarrow N$, (C^{∞}) dönüşümü için $boy\left(x_*\left(T_pM\right)\right) = q$ ise x'in $p \in M$ noktasındaki rankı q'dur denir ve $rank(x) = q$ ile ifade edilir. Burada x_* ile x'in türev dönüşümü gösterilmiştir. Böylece M'nin boyutu $boyM = rank(x) = q$ ise x'e immersiyon, M'ye de N'nin altmanifoldu denir.

x immersiyonu birebir ise x'e bir gömme(imbedding), M'ye de N'nin gömülen (immersed) altmanifoldu denir.

Tanım 2.3. M manifoldu örten herhangi bir $u_1, u_2, \dots u_n$ koordinat komşulukları sistemi için M manifoldunun tamamını örten sonlu sayıda koordinat komşulukları varsa M manifoldu kompakttır denir.

Tanım 2.4. $M \subset N$ altmanifoldunun ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{n} iz\, h$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $H = 0$ ise M manifoldu minimaldir denir.

Tanım 2.5. $x: M^n \longrightarrow N^{n+k}$ dönüşümü bir immersiyon olsun. N manifoldu bir Riemann yapıya sahipse x yardımıyla N'den indirgenen metrik için

$$< u, v > = < dx_p(u), dx_p(v) >_{f(p)}$$

eşitliği sağlandığında x'e bir izometrik immersiyon adı verilir.

Tanım 2.6. $x: M^n \longrightarrow N^{n+k}$ fonksiyonu n-boyutlu Riemann manifoldu M' den m-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ ye bir izometrik immersiyon olsun. M üzerindeki lokal koordinatlar $u_1, u_2, \dots u_n$ verildiğinde $\mathbb{R}^m$ den indirgenen metriği

$$g_{ij} =< \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} > ; 1 \leq i, j \leq n$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece

$$g = \det(g_{ij})$$

ve

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1}$$

olmak üzere M'nin $\mathbb{R}^m$ den indirgenmiş metriğe göre Laplas operatörü

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j})$$

şeklinde tanımlanır. Burada det ile determinant fonksiyonu ifade edilmektedir.

Teorem 2.7. x bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda M sonlu tiptir $\Leftrightarrow$ M'nin ortalama eğrilik vektörü H için,

$$\Delta^k H + c_1 \Delta^{k-1} H + \cdots + c_{k-1} \Delta H + c_k H = 0$$

dir. Burada $1 \leq k \in \mathbb{Z}^+$ ve $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ dir.

Teorem 2.8. $x: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ye bir izometrik immersiyon olsun.

($\boldsymbol{i}$) Eğer M sonlu tipte ise $P(\Delta)H = 0$ olacak biçimde

$$P(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

şeklinde tanımlanan bir polinom vardır. (Burada $a_1 \in \mathbb{R}$, $0 < i \leq n-1$ ve $n \neq 0$ dır.) Buna M'nin minimal polinomu adı verilir.

($\boldsymbol{ii}$) Eğer M sonlu tipte ise M, k-tipindedir $\Leftrightarrow$ $der\ P = k$ dır. Burada der ile P polinomunun derecesi ifade edilmektedir.

Sonuç 2.9. $x: M \longrightarrow \mathbb{R}^{m+d}$ bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda M'nin k-tipinde olması için gerek ve yeter şart M'nin ortalama eğrilik vektörü H'nin

$$\Delta^k H + c_1 \Delta^{k-1} H + \cdots + c_{k-1} \Delta H + c_k H = 0 , \qquad \Delta x_i = \lambda_i x_i$$

eşitliğini sağlamasıdır. $(1 \leq i \leq k)$

Sonuç 2.10. M, $\mathbb{R}^m$ nin kompakt altmanifoldu olsun. Bu durumda M, k-tipindedir $\Leftrightarrow$ k. yinci dereceden bir P polinomu vardır öyle ki P(t) k-tane farklı pozitif köke sahiptir ve $P(\Delta)H = 0$ dır.

Tanım 2.11. M, n-boyutlu kompakt Riemann manifoldu olmak üzere $x: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bir izometrik immersiyon olsun. M'nin $\mathbb{R}^m$ den indirgenmiş metriğe göre Laplas operatörü Δ olmak üzere M'nin ortalama eğrilik vektörü H, aşağıdaki Bertrami formülünü sağlar:

$$\Delta x = -nH$$

2.1. Sonlu Tip Yüzey Örnekleri

Örnek 2.1.1: ($\mathbb{R}^2$ de Çember**)**

$\mathbb{R}^2$ de a yarıçaplı çember $S^1(a)$ izometrik immersiyon olarak

$$x(u) = (a\cos u, a\sin u);\ u \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır. (2.1) eşitliğinin u'ya göre türevi alındığında

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (-a\sin u, a\cos u) \tag{2.2}$$

elde edilir. Buradan

$$g_{11} = \langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \rangle = a^2 \tag{2.3}$$

bulunur. Böylece

$$g = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{a^2} = a \qquad , \qquad (g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \frac{1}{a^2}$$

olduğundan Laplas operatörü tanımı yardımıyla

$$\Delta = -\frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial u}\right)\right) = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} \tag{2.4}$$

elde edilir. Bu çember 1-tipindedir. Çünkü (2.1) ve (2.4) eşitliklerinden

$$\Delta x = \frac{1}{a}(\cos u, \sin u) \tag{2.5}$$

bulunur. Böylece Bertrami formülü ve (2.5) den

$$H = -\frac{1}{a}(\cos u\,, \sin u) \tag{2.6}$$

elde edilir. Ayrıca (2.4) ve (2.6) dan

$$\Delta H = -\frac{1}{a^3}(\cos u\,, \sin u)$$

elde edilir. Son iki eşitlik yardımıyla

$$\Delta H - \frac{1}{a^2}H = 0$$

bulunur. Bu eşitlik

$$(\Delta - \frac{1}{a^2})H = 0$$

şeklinde yazılabilir.

$$P(t) = t - \frac{1}{a^2}$$

alınırsak Sonuç (2.10) dan $S^1(a)$ çemberinin 1-tipinde olduğu görülür.

Örnek 2.1.2: ($\mathbb{R}^3$ te Küre**)**

$\mathbb{R}^3$ te b yarıçaplı küre $S^2(b)$ izometrik immersiyon olarak

$$x(u,v) = (\mathrm{b}\cos u \cos v\,, \mathrm{b}\cos u \sin v\,, \mathrm{b}\sin u); \quad u,v \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanır. (2.7) eşitliğininu u ve v'ye göre ayrı ayrı türevi alındığında

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= (-\mathrm{b}\sin u \cos v\,, -\mathrm{b}\sin u \sin v\,, \mathrm{b}\cos u) \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= (-\mathrm{b}\cos u \sin v\,, \mathrm{b}\cos u \cos v\,, 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

elde edilir. Buradan

$$g_{11} = \langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \rangle = b^2$$

$$g_{12} = \langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} \rangle = b^2 cos^2 u$$

bulunur. Böylece

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 cos^2 u \end{bmatrix}$$

ve

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2cos^2u} \end{bmatrix}$$

$$g = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{b^4cos^2u} = b^2 \cos u$$

olduğundan Laplas operatörü tanımı yardımıyla

$$\Delta = -\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{b^2cos^2u}\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \tan u \frac{\partial}{\partial u}\right) \qquad (2.9)$$

elde edilir. Bu küre 1-tipindedir. Çünkü (2.7) ve (2.9) eşitliklerinden

$$\Delta x = \frac{2}{b}(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \qquad (2.10)$$

bulunur. Böylece Bertrami formülü ve (2.10) dan

$$H = -\frac{1}{b}(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \qquad (2.11)$$

elde edilir. Ayrıca (2.9) ve (2.11) den

$$\Delta H = -\frac{2}{b^3}(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

elde edilir. Son iki eşitlik yardımıyla

$$\Delta H - \frac{2}{b^2}H = 0$$

bulunur. Bu eşitlik

$$(\Delta - \frac{1}{b^2})H = 0$$

şeklinde yazılabilir.

$$P(t) = t - \frac{1}{b^2}$$

alınırsak Sonuç (2.10) dan $S^2(b)$ küresinin 1-tipinde olduğu görülür.

Örnek 2.1.3: ($\mathbb{R}^3$ te Silindir Yüzeyi**)**

$\mathbb{R}^3$ te $S^1(a)$x$\mathbb{R}$ silindir yüzeyi, x: $S^1(a)$x$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ izometrik immersiyon olarak

$$x(\theta, \varphi) = (a\cos\theta, a\sin\theta, \varphi) \qquad (2.12)$$

biçiminde tanımlanır. (2.12) eşitliğinin θ ve φ'ye göre türevi alındığında

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \theta} &= (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= (0,0,1)\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

elde edilir. Buradan

$$g_{11} = \langle \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \theta} \rangle = a^2$$

$$g_{12} = \langle \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \varphi} \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \varphi} \rangle = 1$$

bulunur. Böylece

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{a^2} = a$$

olduğundan Laplas operatörü tanımı yardımıyla

$$\Delta = -\left(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \tag{2.14}$$

elde edilir. Bu silindir yüzeyi 1-tipindedir. Çünkü (2.12) ve (2.14) eşitliklerinden

$$\Delta x = \frac{1}{a}(\cos\theta, \sin\theta, 0) \tag{2.15}$$

bulunur. Böylece Bertrami formülü ve (2.15) ten

$$H = -\frac{1}{2a}(\cos\theta, \sin\theta, 0) \tag{2.16}$$

elde edilir. Ayrıca (2.14) ve (2.16) den

$$\Delta H = -\frac{1}{2a^3}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

elde edilir. Son iki eşitlik yardımıyla

$$\Delta H - \frac{2}{a^2}H = 0$$

bulunur. Bu eşitlik

$$(\Delta - \frac{1}{a^2})H = 0$$

şeklinde yazılabilir.

$$P(t) = t - \frac{1}{a^2}$$

alınırsak Sonuç (2.10) dan $S^1(a)$x$\mathbb{R}$ silindir yüzeyinin 1-tipinde olduğu görülür.

Örnek 2.1.4: (Çarpım alt manifoldu**)**

M ve $\overline{M}$, sırasıyla, E^m ve $E^{\overline{m}}$ Öklid uzaylarının kompakt iki alt manifoldu olsun. Bu iki manifoldun çarpım alt manifoldlarının sonlu tipten olması için gerek ve yeter koşul, iki manifoldun da sonlu tipten olmasıdır. Ayrıca, bu manifoldların ikisi de 1-tipinden veya 2-tipindendir. Örnek olarak T^2 tor yüzeyi, yarıçapları farklı olan iki düzlem çemberin kartezyen çarpımına izometriktir. Yer vektörü $x : T^2 \longrightarrow E^4$

$$x = x(u, v) = (\mathrm{a}\cos u, \mathrm{a}\sin u, \mathrm{b}\cos v, \mathrm{b}\sin v) \tag{2.17}$$

şeklinde verilmiş tor yüzeyini ele alalım. (2.17) eşitliğinin u ve v'ye göre ayrı ayrı türevi alındığında

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= (-\mathrm{a}\sin u, \mathrm{a}\cos u, 0, 0) \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= (0, 0, -b\sin v, b\cos v) \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

elde edilir. Buradan

$$g_{11} = \langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \rangle = a^2$$

$$g_{12} = \langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \rangle = 0$$

$$g_{21} = \langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} \rangle = b^2$$

bulunur. Böylece

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$(g_{ij})^{-1} = (g^{ij}) = \frac{1}{a^2 b^2} \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}$$

$$g = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{a^2 b^2} = ab$$

dır. Tanım 2.6. dan

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j}\right)$$

ifadesini daha açık bir şekilde yazarsak

$$\Delta = -\left\{g^{11}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2g^{12}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+g^{22}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{11}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{12}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{21}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{22}\right)\right]\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta = -\left\{\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2.0\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(ab\frac{1}{a^2}\right)+\frac{\partial}{\partial v}(ab.0)\right]\frac{\partial}{\partial u}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\frac{\partial}{\partial u}(ab.0)+\frac{\partial}{\partial v}\left(ab\frac{1}{b^2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$
$$\Delta = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

elde edilir. Diğer taraftan Bertrami formülü gereğince

$$\Delta x = -nH$$

dır.

$$\Delta x = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}(\mathrm{a}\cos u, \mathrm{a}\sin u, \mathrm{b}\cos v, \mathrm{b}\sin v)$$
$$-\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}(\mathrm{a}\cos u, \mathrm{a}\sin u, \mathrm{b}\cos v, \mathrm{b}\sin v)$$
$$= -\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial u}(-\mathrm{a}\sin u, \mathrm{a}\cos u, 0,0)$$
$$-\frac{1}{b^2}\frac{\partial}{\partial v}(0,0,-\mathrm{b}\sin v, \mathrm{b}\cos v)$$
$$= -\frac{1}{a^2}(-\mathrm{a}\cos u, -\mathrm{a}\sin u, 0,0)$$
$$-\frac{1}{b^2}(0,0,-\mathrm{b}\cos v, -\mathrm{b}\sin v)$$
$$= \left(\frac{1}{a}\cos u, \frac{1}{a}\sin u, \frac{1}{b}\cos v, \frac{1}{b}\sin v\right)$$

dır. $n = 2$ olduğu için

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\cos u\,, \frac{1}{a}\sin u\,, \frac{1}{b}\cos v\,, \frac{1}{b}\sin v\right) \tag{2.19}$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında H ortalama eğrilik vektörünün 1. ve 2. Laplasiyeni, sırasıyla, aşağıdaki gibi bulunur:

$$\left.\begin{aligned} \Delta H &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^3}\cos u\,, \frac{1}{a^3}\sin u\,, \frac{1}{b^3}\cos v\,, \frac{1}{b^3}\sin v\right) \\ \Delta^2 H &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^5}\cos u\,, \frac{1}{a^5}\sin u\,, \frac{1}{b^5}\cos v\,, \frac{1}{b^5}\sin v\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Burada iki durum söz konusudur:

1. Durum: $a = b$ olsun. Bu durumda ΔH ve H paraleldir. Dolasıyla, T^2 tor yüzeyi 1-tipinden bir alt manifolddur.

2. Durum: $a \neq b$ olduğu durumda, (2.19) ve (2.20) denklemlerinden

$$\Delta^2 H - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\Delta H + \frac{1}{a^2 b^2} H = 0$$

bağıntısı elde edilir. Buradan

$$\left(\Delta^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\Delta + \frac{1}{a^2 b^2}\right) H = 0$$

dır.

$$P(t) = t^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) t + \frac{1}{a^2 b^2}$$

alırsak $P(t)$'nin kökleri de $\frac{1}{a^2}$ ile $\frac{1}{b^2}$ dir. Sonuç (2.10.) den, T^2 tor yüzeyi 2-tipinden bir alt manifolddur.

3. SONLU TİP KUADRİKLER

Tezimizin bu bölüm için Chen ve Dillen (1990) tarafından yayınlanan makale ana referansımızı oluşturmuştur[2].

Bu bölümde sonlu tip altmanifoldların tanımını verip sonlu tip kuadriklerin temel sınıflandırılmasını yapacağız.

$\mathbb{R}^m$ de M kompakt Riemann manifoldu için $x: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ izometrik immersiyonunu

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlayalım.

$\mathbb{R}^m$ de M'nin $i.$ nci Öklid koordinatları x_i olmak üzere her bir $x_i \in \mathbb{R}$ için

$$x_i - (x_i)_0 = \sum_{t=p_i}^{q_i} (x_i)_t \;\; , i = 1,2, \dots, m \tag{3.2}$$

dir. O halde $x: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ izometrik immersiyonu için

$$p = \inf\{p_i\} \;\; , q = \sup\{q_i\} \tag{3.3}$$

alındığında

$$x_i - (x_i)_0 \neq 0 \tag{3.4}$$

dır.

Böylece $p \geq 1$ bir tamsayı olduğundan $q = \infty$ ya da $q \geq p$ nin de bir tamsayı olduğu kolayca görülür. Üstelik p ve q, $\mathbb{R}^m$ üzerinde Öklid koordinat sistemi seçiminden bağımsızdır. Böylece p ve q iyi tanımlıdır.

Sonuç olarak her bir $M \subset \mathbb{R}^m$ kompakt altmanifoldu (veya her bir $x: M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ izometrik immersiyonu) için M'nin bir $[p, q]$ sayı çifti buluruz. Bu şekilde oluşturulan $[p, q]$ sayı çiftine M manifoldunun mertebesi denir.

[p,q] mertebeli bir M altmanifoldu için bazen M'ye $\geq p$ mertebelidir (veya $\leq q$ mertebelidir) bazen de p mertebeli altmanifold denir.

Böylece (3.1), (3.2) ve (3.3) eşitliklerinden

$$x = x_0 + \sum_{t=p}^{q} x_t \tag{3.5}$$

elde edilir.

(3.5) eşitliğinde q sonlu ise $M \subset \mathbb{R}^m$ kompakt altmanifoldu sonlu tip olarak adlandırılır. Aksi halde M sonlu tip değildir.

Eğer (3.5) eşitliğinde tam olarak k-tane sıfırdan farklı x_t $(t \geq 1)$ varsa $M \subset \mathbb{R}^m$ kompakt altmanifolduna k-tipindedir denir. $(k = 1,2, \dots)$

(3.5) eşitliğinde x_0 sabit vektör, x_t ler ise sıfırdan farklı $\mathbb{R}^m$ değerli Δ Laplas operatörünün öz vektörleridir. Yani , $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$ olmak üzere

$$\Delta x_t = \lambda_t x_t \, , \qquad t = 1,2, \dots , k \tag{3.6}$$

denklemini sağlar.

$$P(T) = \prod_{t=1}^{k} (T - \lambda_t) \tag{3.7}$$

olacak şekilde bir P polinomu tanımlayalım. (3.6) eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \Delta x_t = \lambda_t x_t \ &\Rightarrow \Delta x_t - \lambda_t x_t = 0 \\ &\Rightarrow (\Delta - \lambda_t) x_t = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

dir. (3.8) eşitliğinde $x_t \neq 0$ olduğundan $\Delta - \lambda_t = 0$ olmalıdır.

Bu durumda (3.7) den

$$P(\Delta) = \prod_{t=1}^{k} \underbrace{(\Delta - \lambda_t)}_{=0} = 0$$

dır. Öyleyse $P(\Delta)(x - x_0) = 0$ dır.

Şimdi E^3 te sonlu tip yüzeylerin sınıflandırılmasını yapalım. Bunun için şu varsayım bize yardımcı olacaktır.

" E^3 $te\ sonlu\ tip\ kompakt\ y$üzeyler $birer\ k$ü$redir.$ "

Bir yan ürün olarak her elipsoidin küre olmadıkça sonsuz tipten olduğunu göstererek varsayıma destek buluruz.

Q, E^3 te bir kuadrik olsun. Bu durumda Q, ya regledir ya da aşağıdaki iki durumdan biridir.

$$z^2 - ax^2 - by^2 = c \, , \ \ abc \neq 0 \tag{I}$$

ya da

$$z = \tfrac{a}{2} x^2 + \tfrac{b}{2} y^2 \, , \qquad a > 0, b > 0 \tag{II}$$

Eğer Q sonlu tip ve regle ise bu durumda Q'nun bir dairesel silindir olduğu B. Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vracken tarafından gösterildi[5]. İlk olarak (I) türündeki bir kuadriğin sonlu tipten olması için gerek ve yeter şartın $a = b = -1$

yani Q'nun bir küre olmasını gösterelim. Daha sonra (II) türündeki bir kuadriğin asla sonlu tip olamayacağını gösterelim.

Yani aslında biz aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 3.1. Sonlu tip E^3 te kuadrikler küre ve dairesel silindirdir.

Sonuç 3.1. E^3 te sonlu tip elipsoid bir küredir.

Birinci (I) Tür Kuadrikler:

$$z^2 - ax^2 - by^2 = c\,, \qquad abc \neq 0$$

kuadriğinin parametrizasyonunu

$$X(u,v) = (u, v, (c + au^2 + bv^2)^{\frac{1}{2}})$$

olarak düşünebiliriz.

$c + au^2 + bv^2$ fonksiyonunu W ile gösterelim. Bu durumda

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = < \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} > = < \left(1,0,\frac{2au}{2W^{1/2}}\right), \left(1,0,\frac{2au}{2W^{1/2}}\right) > = 1 + \frac{a^2u^2}{W}$$

$$g_{12} = < \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} > = < \left(1,0,\frac{2au}{2W^{1/2}}\right), \left(0,1,\frac{2bv}{2W^{1/2}}\right) > = \frac{abuv}{W}$$

$$g_{21} = < \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} > = <, \left(1,0,\frac{2bv}{2W^{1/2}}\right)\left(0,1,\frac{2au}{2W^{1/2}}\right) > = \frac{abuv}{W}$$

$$g_{22} = < \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} > = < \left(0,1,\frac{2bv}{2W^{1/2}}\right), \left(0,1,\frac{2bv}{2W^{1/2}}\right) > = 1 + \frac{b^2v^2}{W}$$

dir.

$$\Rightarrow g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{a^2u^2}{W} & \dfrac{abuv}{W} \\ \dfrac{abuv}{W} & 1 + \dfrac{b^2v^2}{W} \end{bmatrix}$$

dir.

$$g=\det(g_{ij})=\begin{vmatrix}1+\frac{a^2u^2}{W} & \frac{abuv}{W}\\ \frac{abuv}{W} & 1+\frac{b^2v^2}{W}\end{vmatrix}$$

$$=1+\frac{a^2u^2}{W}+\frac{b^2v^2}{W}+\frac{a^2b^2u^2v^2}{W}-\frac{a^2b^2u^2v^2}{W}=1+\frac{a^2u^2}{W}+\frac{b^2v^2}{W}$$

dir.

$$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}=\frac{1}{\underbrace{\det(g_{ij})}_{=g}}\begin{bmatrix}1+\frac{b^2v^2}{W^2} & -\frac{abuv}{W}\\ -\frac{abuv}{W} & 1+\frac{a^2u^2}{W^2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}g^{11}=\frac{1}{g}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\\ g^{12}=\frac{1}{g}\left(-\frac{abuv}{W}\right)\\ g^{21}=\frac{1}{g}\left(-\frac{abuv}{W}\right)\\ g^{22}=\frac{1}{g}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\end{cases}$$

Tanım 2.6. dan

$$\Delta=-\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial u_i}(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial u^j})$$

ifadesini daha açık bir şekilde yazarsak

$$\Delta=-\left\{g^{11}\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2g^{12}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+g^{22}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{11}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{12}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{21}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}g^{22}\right)\right]\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

$$=-\left\{\frac{1}{g}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2\frac{1}{g}\left(-\frac{abuv}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{1}{g}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\frac{1}{g}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{g}\frac{1}{g}\left(-\frac{abuv}{W}\right)\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\frac{1}{g}\left(-\frac{abuv}{W}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{g}\frac{1}{g}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\right)\right]\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
= -\Bigg\{ & \frac{1}{g}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{g}\left(\frac{2abuv}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{g}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1+\frac{b^2v^2}{W}}{\sqrt{g}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-\frac{abuv}{W}}{\sqrt{g}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u} \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-\frac{abuv}{W}}{\sqrt{g}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1+\frac{a^2u^2}{W}}{\sqrt{g}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial v}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= -\Bigg\{ & \frac{1}{g}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{g}\left(\frac{2abuv}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{g}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\frac{b^2v^2(-2au)}{W^2}\sqrt{g} - \left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\frac{g_u}{2\sqrt{g}}}{g} \right. \\
& \left. + \frac{-\frac{abuW+abuv2bv}{W^2}\sqrt{g} + \left(\frac{abuv}{W}\right)\frac{g_v}{2\sqrt{g}}}{g}\right]\frac{\partial}{\partial u} \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{-\frac{abvW+abuv2bv}{W^2}\sqrt{g} + \left(\frac{abuv}{W}\right)\frac{g_u}{2\sqrt{g}}}{g} \right. \\
& \left. + \frac{\frac{a^2u^2(-2bv)}{W^2}\sqrt{g} - \left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\frac{g_v}{2\sqrt{g}}}{g}\right]\frac{\partial}{\partial v}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= -\Bigg\{ & \frac{1}{g}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{g}\left(\frac{2abuv}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{g}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{1}{2g^{3/2}}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)g_u + \frac{1}{2g^{3/2}}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_v - \frac{abu}{\sqrt{g}W}\right]\frac{\partial}{\partial u} \\
& + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{2g^{3/2}}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_u - \frac{1}{2g^{3/2}}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)g_v - \frac{abv}{\sqrt{g}W}\right]\frac{\partial}{\partial v}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$=-\left\{\frac{1}{g}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{1}{g}\left(\frac{2abuv}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}+\frac{1}{g}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right.$$

$$+\left[-\frac{1}{2g^2}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)g_u+\frac{1}{2g^2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_v\right]\frac{\partial}{\partial u}-\frac{abu}{gW}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2g^2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_u-\frac{1}{2g^2}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)g_v\right]\frac{\partial}{\partial v}-\frac{abv}{gW}\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

$$=\frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)g_u-\frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_v\right]\frac{\partial}{\partial u}$$

$$+\frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)g_v-\frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_u\right]\frac{\partial}{\partial v}+\frac{1}{g}\left(\frac{2abuv}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}$$

$$-\frac{1}{g}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{1}{g}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\frac{1}{g}\frac{ab}{W}\left(u\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

olur.

$$A=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)g_u-\frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_v$$

$$B=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)g_v-\frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_u$$

$$C=\frac{2abuv}{W}$$

$$D=1+\frac{b^2v^2}{W}$$

$$E=1+\frac{a^2u^2}{W}$$

denirse

$$\Delta=\frac{1}{g^2}A\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{g^2}B\frac{\partial}{\partial v}+\frac{1}{g}C\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}-\frac{1}{g}D\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{1}{g}E\frac{\partial^2}{\partial v^2}+\frac{1}{g}\frac{ab}{W}\left(u\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

olur. Daha sonra kullanmak üzere birkaç not alalım.

$$g=1+\frac{a^2u^2}{W}+\frac{b^2v^2}{W}$$

$$=\frac{1}{W}(c+au^2+bv^2+a^2u^2+b^2v^2)$$

$$=\frac{1}{W}\left(\underbrace{c+a(a+1)u^2+b(b+1)v^2}_{\tilde{g}}\right)$$

$$=\frac{\tilde{g}}{W}$$

$$\Rightarrow \quad g = 1 + \frac{a^2u^2}{W} + \frac{b^2v^2}{W}$$

$$\Rightarrow \quad g_u = \frac{2a^2uW - a^2u^2(2au)}{W^2} - \frac{b^2v^2(2au)}{W^2}$$

$$= \frac{2au}{W^2}(\ ac + a^2u^2 + abv^2 - a^2u^2 - b^2v^2$$

$$= \frac{2au}{W^2}(\ ac + b(a-b)v^2\ )$$

$$\Rightarrow \quad g_v = -\frac{a^2u^2(2bv)}{W^2} + \frac{2b^2vW - b^2v^2(2bv)}{W^2}$$

$$= \frac{2bv}{W^2}(\ bc + abu^2 + b^2v^2 - a^2u^2 - b^2v^2\ )$$

$$= \frac{2bv}{W^2}(\ bc + a(b-a)u^2\ )$$

$(-2)(Ag_u + Bg_v)$

$$= (-2)\left\{\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2v^2}{W}\right)g_u - \frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_v\right]g_u\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a^2u^2}{W}\right)g_v - \frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_u\right]g_v\right\}$$

$$= -\left(1 + \frac{b^2v^2}{W}\right){g_u}^2 + \frac{abuv}{W}g_ug_v - \left(1 + \frac{a^2u^2}{W}\right){g_v}^2 + \frac{abuv}{W}g_ug_v$$

$$= \frac{2abuv}{W}g_ug_v - \left(1 + \frac{b^2v^2}{W}\right){g_u}^2 - \left(1 + \frac{a^2u^2}{W}\right){g_v}^2$$

$$= Cg_ug_v - D{g_u}^2 - E{g_v}^2$$

dir. Bu eşitlikleri daha sonra kullanmak üzere not alalım.

$$g = \frac{\tilde{g}}{W}$$

$$g_u = \frac{2au}{W^2}(\ ac + b(a-b)v^2\ )$$

$$g_v = \frac{2bv}{W^2}(\ bc + a(b-a)u^2\ )$$

$$(-2)(Ag_u + Bg_v) = Cg_ug_v - D{g_u}^2 - E{g_v}^2$$

Burada $\tilde{g}, u$ ve v cinsinden bir polinomdur.

Lemma 3.1.

$$\Delta^t x = \frac{1}{g^{3t-1}}A\alpha_t(Ag_u + Bg_v)^{t-1} + \frac{1}{g^{3t-2}}P_t\left(u, v, \frac{1}{W}\right),$$

dir. Burada $x = u, P_t$ 3-değişkenli bir polinom ve α_t ise

$$\alpha_t = \prod_{i=1}^{t} (4-3i)(6i-5)$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat. İspat tümevarımdan yapılır. $t = 1$ için $x = u$ alınırsa

$$\Delta u = \frac{1}{g^2} A + \frac{1}{g} P_t\left(u, v, \frac{1}{W}\right)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $t = 1$ için lemma sağlanır.

Lemma $t - 1$ için doğru olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\Delta^t u = {} & \frac{1}{g^{3t-1}} A\alpha_{t-1}(Ag_u + Bg_v)^{t-2}[(Ag_u + Bg_v)(4-3t) \\
& + (Cg_u g_v - D{g_u}^2 - E{g_v}^2)(4-3t)(3-3t)] + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t\left(u, v, \frac{1}{W}\right) \\
& = \frac{1}{g^{3t-1}} A\alpha_{t-1}(Ag_u + Bg_v)^{t-2}[(Ag_u + Bg_v)(4-3t) \\
& + (-2)(Ag_u + Bg_v)(4-3t)(3-3t)] + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t\left(u, v, \frac{1}{W}\right) \\
& = \frac{1}{g^{3t-1}} A\alpha_{t-1}(Ag_u + Bg_v)^{t-2}\{ (Ag_u + Bg_v)(4-3t)[1 - 2(3 \\
& - 3t)] \} + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t\left(u, v, \frac{1}{W}\right) \\
& = \frac{1}{g^{3t-1}} A\alpha_{t-1}(Ag_u + Bg_v)^{t-1}(4-3t)(6t-5) \\
& + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t\left(u, v, \frac{1}{W}\right) \\
& = \frac{1}{g^{3t-1}} A\alpha_t(Ag_u + Bg_v)^{t-1} + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t\left(u, v, \frac{1}{W}\right)
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda lemma sağlanır.

Lemma 3.2.

$$\Delta^t y = \frac{1}{g^{3t-1}} B\alpha_t(Ag_u + Bg_v)^{t-1} + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t\left(u, v, \frac{1}{W}\right),$$

dir. Burada $y = v, Q_t$ 3-değişkenli bir polinom ve α_t ise

$$\alpha_t = \prod_{i=1}^{t} (4-3i)(6i-5)$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat. İspat tümevarımdan yapılır. $t = 1$ için $y = v$ alınırsa

$$\Delta v = \frac{1}{g^2} B\alpha_1 (Ag_u + Bg_v)^0 + \frac{1}{g} Q_t \left(u, v, \frac{1}{W}\right)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $t = 1$ için lemma sağlanır.

Lemma $t - 1$ için doğru olsun. A,B,C,D,E, g_u, g_v ve g'nin hepsi u, v ve $\frac{1}{W}$ yi içeren polinomlardır ve Laplas operatörünün bir kez daha uygulanmasıyla

$$\Delta^t v = \frac{1}{g^{3t-1}} B\alpha_{t-1} (Ag_u + Bg_v)^{t-2} [(Ag_u + Bg_v)(4 - 3t)$$

$$+ (Cg_u g_v - D{g_u}^2 - E{g_v}^2)(4 - 3t)(3 - 3t)] + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t \left(u, v, \frac{1}{W}\right)$$

$$= \frac{1}{g^{3t-1}} B\alpha_{t-1} (Ag_u + Bg_v)^{t-2} [(Ag_u + Bg_v)(4 - 3t)$$

$$+ (-2)(Ag_u + Bg_v)(4 - 3t)(3 - 3t)] + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t \left(u, v, \frac{1}{W}\right)$$

$$= \frac{1}{g^{3t-1}} B\alpha_{t-1} (Ag_u + Bg_v)^{t-2} \{ (Ag_u + Bg_v)(4 - 3t)[1 - 2(3$$

$$- 3t)] \} + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t \left(u, v, \frac{1}{W}\right)$$

$$= \frac{1}{g^{3t-1}} B\alpha_{t-1} (Ag_u + Bg_v)^{t-1} (4 - 3t)(6t - 5)$$

$$+ \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t \left(u, v, \frac{1}{W}\right)$$

$$= \frac{1}{g^{3t-1}} B\alpha_t (Ag_u + Bg_v)^{t-1} + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t \left(u, v, \frac{1}{W}\right)$$

dir. Bu durumda lemma sağlanır.

Bundan böyle Q'nun k-tipinde olduğunu varsayalım. Bu durumda $c_1, c_2, \dots, c_k$ sabit sayılar olmak üzere

$$\Delta^{k+1} X + c_1 \Delta^k X + \cdots + c_{k-1} \Delta X + c_k X = 0 \tag{3.9}$$

sağlanır.

Lemma 3.1. ve Lemma 3.2. den

$$(Ag_u + Bg_v)^{k+1} = gP \left(u, v, \frac{1}{W}\right) \tag{3.10}$$

eşitliğini sağlayan üç değişkenli bir P polinomu elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
Ag_u + Bg_v = & \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)g_u - \frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_v\right]g_u \\
& + \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)g_v - \frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_u\right]g_v \\
& = \frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right){g_u}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_u g_v \\
& + \frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right){g_v}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{abuv}{W}\right)g_u g_v \\
= & \frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\left[\frac{2au}{W^2}(\ ac + b(a-b)v^2\,)\right]^2 \\
& + \frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\left[\frac{2bv}{W^2}(\ bc + a(b-a)u^2\,)\right]^2 \\
& \qquad - \frac{abuv}{W}\left[\frac{2au}{W^2}(\ ac + b(a-b)v^2\,)\right] \\
\times & \left[\frac{2bv}{W^2}(\ bc + a(b-a)u^2\,)\right] \\
= & \frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2v^2}{W}\right)\left[\frac{4a^2u^2}{W^4}(\ ac + b(a-b)v^2\,)^2\right] \\
+ & \frac{1}{2}\left(1+\frac{a^2u^2}{W}\right)\left[\frac{4b^2v^2}{W^4}(\ bc + a(b-a)u^2\,)^2\right] \\
- & \frac{4a^2b^2u^2v^2}{W^5}(\ ac + b(a-b)v^2\,)(\ bc + a(b-a)u^2\,) \\
= & \frac{1}{W^5}\left\{\left[\frac{1}{2}(\ c + au^2 + bv^2 + b^2v^2\,)4a^2u^2(\ ac + b(a-b)v^2\,)^2\right]\right. \\
+ & \left[\frac{1}{2}(\ c + au^2 + bv^2 + b^2v^2\,)4b^2v^2(\ bc + a(b-a)u^2\,)^2\right] \\
- & \left.[4a^2b^2u^2v^2(\ ac + b(a-b)v^2\,)(\ bc + a(b-a)u^2\,)]\right\} \\
= & \frac{1}{W^5}G(u,v)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow Ag_u + Bg_v = \frac{1}{W^5}G(u,v) \tag{3.11}
$$

eşitliğini sağlayan iki değişkenli bir G polinomu kolayca bulunabilir.

W, u ve v cinsinden bir polinom olduğu için (3.10) ve (3.11) den,

$$
(Ag_u + Bg_v)^{k+1} = gP\left(u, v, \frac{1}{W}\right)
$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{W^5}G(u,v)\right]^{k+1} = \frac{1}{W}(c + a(a+1)u^2 + b(b+1)v^2)P\left(u,v,\frac{1}{W}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{W^{5k+5}}G^{k+1}(u,v) = \frac{1}{W}H(u,v)\,P\left(u,v,\frac{1}{W}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{W^{5k+4}}R(u,v) = P\left(u,v,\frac{1}{W}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(u,v,\frac{1}{W}\right) = \frac{1}{W^{k_0}}R(u,v) \tag{3.12}$$

eşitliğini sağlayan iki değişkenli bir R polinomu bulunabilir. Burada k_0, doğal sayıdır. (3.11) ve (3.12) eşitlikleri (3.10) da yerine yazılırsa

$$(Ag_u + Bg_v)^{k+1} = gP\left(u,v,\frac{1}{W}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{W^5}G(u,v)\right]^{k+1} = \frac{\tilde{g}}{W}\frac{1}{W^{k_0}}R(u,v)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\underbrace{W^{5k+5}}_{W^{k_2}(u,v)}}G^{k+1}(u,v) = \frac{\tilde{g}}{\underbrace{W^{k_0+1}}_{W^{k_1}(u,v)}}R(u,v)$$

$$\Rightarrow W^{k_1}(u,v)G^{k+1}(u,v) = \tilde{g}(u,v)W^{k_2}(u,v)R(u,v) \tag{3.13}$$

olur. Burada k_1 ve k_2 birer doğal sayıdır.

Eğer (3.13) te $u = 0$ alınırsa

$$\left(c + a\underbrace{u^2}_{=0} + bv^2\right)^{k_1}[W^5(Ag_u + Bg_v)]^{k+1}$$

$$= \left(c + a(a+1)\underbrace{u^2}_{=0} + b(b+1)v^2\right)$$

$$\times\left(c + a\underbrace{u^2}_{=0} + bv^2\right)^{k_2} R\left(\underbrace{u}_{=0},v\right)$$

$$\Rightarrow (c + bv^2)^{k_1}\left\{(c + bv^2)^5\left[A\frac{2a\overbrace{u}^{=0}}{W^2}(\,ac + b(a-b)v^2\,) + \frac{{g_v}^2}{2}\right]\right\}^{k+1}$$

$$= (c + b(b+1)v^2)(c + bv^2)^{k_2}\,R(0,v)$$

$$\Rightarrow (c + bv^2)^{k_1}\left[(c + bv^2)^5\left(\frac{{g_v}^2}{2}\right)\right]^{k+1} = (c + b(b+1)v^2)(c + bv^2)^{k_2}\,R(0,v)$$

$$\Rightarrow (c+bv^2)^{k_1}\left[(c+bv^2)^5\frac{1}{2}\left(\frac{2bv}{W^2}(\ bc+a(b-a)u^2\ )\right)^2\right]^{k+1}$$

$$= (c+b(b+1)v^2)(c+bv^2)^{k_2}\ R(0,v)$$

$$\Rightarrow (c+bv^2)^{k_1}\left[(c+bv^2)^5\frac{1}{2}\left(\frac{2b^2\,cv}{W^2}\right)^2\right]^{k+1}$$

$$= (c+b(b+1)v^2)(c+bv^2)^{k_2}\ R(0,v)$$

$$\Rightarrow (c+bv^2)^{k_1}\left[2(c+bv^2)^5\frac{(\ b^2\,cv)^2}{\underbrace{W^4}_{(c+bv^2)^4}}\right]^{k+1}$$

$$= (c+b(b+1)v^2)(c+bv^2)^{k_2}\ R(0,v)$$

$$\Rightarrow (c+bv^2)^{k_1+k+1}2^{k+1}(b^2\,cv)^{2k+2} = (c+b(b+1)v^2)(c+bv^2)^{k_2}\ R(0,v)$$

dir. $b \neq 0$ ve $c \neq 0$ olduğu için bu eşitlik ancak $b = -1$ olduğu zaman sağlanır.

Benzer şeklide (3.13) de $v = 0$ uygulanırsa

$$\left(c+au^2+b\underbrace{v^2}_{=0}\right)^{k_1}[W^5(Ag_u+Bg_v)]^{k+1}$$

$$= \left(c+a(a+1)u^2+b(b+1)\underbrace{v^2}_{=0}\right)\times\left(c+au^2+b\underbrace{v^2}_{=0}\right)^{k_2} R\left(u,\underbrace{v}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow\ (c+au^2)^{k_1}\left\{(c+au^2)^5\left[\frac{{g_u}^2}{2}+B\frac{2b\overbrace{v}^{=0}}{W^2}(\ bc+a(b-a)u^2\ )\right]\right\}^{k+1}$$

$$= (c+a(a+1)u^2)(c+au^2)^{k_2}\ R(u,0)$$

$$\Rightarrow (c+au^2)^{k_1}\left[(c+au^2)^5\left(\frac{{g_u}^2}{2}\right)\right]^{k+1} = (c+a(a+1)u^2)(c+au^2)^{k_2}\ R(u,0)$$

$$\Rightarrow (c+au^2)^{k_1}\left[(c+au^2)^5\frac{1}{2}\left(\frac{2au}{W^2}(\ ac+b(a-b)v^2\ )\right)^2\right]^{k+1}$$

$$= (c+a(a+1)u^2)(c+au^2)^{k_2}\ R(u,0)$$

$$\Rightarrow (c+au^2)^{k_1}\left[(c+au^2)^5\frac{1}{2}\left(\frac{2a^2\,cu}{W^2}\right)^2\right]^{k+1}$$

$$= (c+a(a+1)u^2)(c+au^2)^{k_2}\ R(u,0)$$

$$\Rightarrow (c+au^2)^{k_1}\left[2(c+au^2)^5\frac{(\ a^2\,cu)^2}{\underbrace{W^4}_{(c+au^2)^4}}\right]^{k+1}$$

$$= (c+a(a+1)u^2)(c+au^2)^{k_2}\ R(u,0)$$

$$\Rightarrow (c+au^2)^{k_1+k+1}2^{k+1}(a^2\,cu)^{2k+2} = (c+a(a+1)u^2)(c+au^2)^{k_2}\ R(u,0)$$

dir. $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ olduğu için bu eşitlik ancak $a = -1$ olduğu zaman sağlanır. Bu yüzden Q bir küre olmalıdır.

İkinci (II) Tür Kuadrikler:

$$z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2\,, \qquad a > 0, b > 0$$

kuadriğinin parametrizasyonunu

$$X(u,v) = (u, v, \frac{a}{2}u^2 + \frac{b}{2}v^2)$$

olarak düşünebiliriz. Bu durumda

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$g_{11} =< \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} >=< (1,0,au),(1,0,au) >= 1 + a^2u^2$$

$$g_{12} =< \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} >=< (1,0,au),(0,1,bv) >= abuv$$

$$g_{21} =< \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u} >=< (0,1,bv),(1,0,au) >= abuv$$

$$g_{22} =< \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} >=< (0,1,bv),(0,1,bv) >= 1 + b^2v^2$$

$\Rightarrow g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 + a^2u^2 & abuv \\ abuv & 1 + b^2v^2 \end{bmatrix}$ dir.

$$\left(g^{ij}\right) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det(g_{ij})}_{=g}}\begin{bmatrix} 1 + b^2v^2 & -abuv \\ -abuv & 1 + a^2u^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g^{11} = \dfrac{1}{g}(1 + b^2v^2) \\ g^{12} = \dfrac{1}{g}(-abuv) \\ g^{21} = \dfrac{1}{g}(-abuv) \\ g^{22} = \dfrac{1}{g}(1 + a^2u^2) \end{cases}$$

dir.

$$g = \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} 1+a^2u^2 & abuv \\ abuv & 1+b^2v^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + a^2u^2 + b^2v^2 + a^2b^2u^2v^2 - a^2b^2u^2v^2 = 1 + a^2u^2 + b^2v^2$$

$\Rightarrow g = 1 + a^2u^2 + b^2v^2$ dir.

Tanım 2.6. dan

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial u_i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j})$$

ifadesini daha açık bir şekilde yazarsak

$$\Delta = -\left\{ g^{11}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2g^{12}\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + g^{22}\frac{\partial^2}{\partial v^2} \right.$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\, g^{11}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\, g^{12}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\, g^{21}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\, g^{22}\right)\right]\frac{\partial}{\partial v} \right\}$$

$$\Rightarrow \Delta = -\left\{ \frac{1}{g}(1+b^2v^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\frac{1}{g}(-abuv)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{g}(1+a^2u^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2} \right.$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{g}}\frac{1}{g}(1+b^2v^2)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{g}}\frac{1}{g}(-abuv)\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{g}}\frac{1}{g}(-abuv)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{g}}\frac{1}{g}(1+a^2u^2)\right)\right]\frac{\partial}{\partial v} \right\}$$

$$\Rightarrow \Delta = -\left\{ \frac{1}{g}(1+b^2v^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{2}{g}(abuv)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{g}(1+a^2u^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2} \right.$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1+b^2v^2}{\sqrt{\mathrm{g}}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-abuv}{\sqrt{\mathrm{g}}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-abuv}{\sqrt{\mathrm{g}}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1+a^2u^2}{\sqrt{\mathrm{g}}}\right)\right]\frac{\partial}{\partial v} \right\}$$

$$\Rightarrow \Delta = -\left\{\frac{1}{g}(1+b^2v^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{2}{g}(abuv)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{g}(1+a^2u^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{-(1+b^2v^2)2a^2u}{2g^{3/2}} + \frac{-abu\sqrt{g} + abuv\dfrac{2b^2v}{2\sqrt{\mathrm{g}}}}{g}\right]\frac{\partial}{\partial u}$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{-abv\sqrt{g} + abuv\dfrac{2a^2v}{2\sqrt{\mathrm{g}}}}{g} + \frac{-(1+a^2u^2)2b^2v}{2g^{3/2}}\right]\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta = -\left\{\frac{1}{g}(1+b^2v^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{2}{g}(abuv)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{g}(1+a^2u^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right.$$

$$-\left[\frac{(a^2+a^2b^2v^2)u}{g^2} - \frac{ab^3uv^2}{g^2}\right]\frac{\partial}{\partial u}$$

$$+\left[\frac{a^3bu^2v}{g^2} - \frac{(b^2+a^2b^2u^2)v}{g^2}\right]\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\left. -\frac{1}{g}abu\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{g}abv\frac{\partial}{\partial v}\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta = -\left\{\frac{1}{g}(1+b^2v^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{2}{g}(abuv)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{1}{g}(1+a^2u^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right.$$

$$-\frac{1}{g^2}[(a+ab^2v^2-b^3v^2)au]\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{g^2}[(a^3u^2-b-a^2bu^2)au]\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\left. -\frac{1}{g}ab\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{1}{g^2}(a+b^2(a-b)v^2)au\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{g^2}(b+a^2(b-a)u^2)bv\frac{\partial}{\partial v}$$

$$+\frac{2}{g}(abuv)\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{1}{g}(1+b^2v^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{g}(1+a^2u^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

$$+\frac{1}{g}ab\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

dir.

Lemma 3.3.

$$\Delta^t x = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-1}(u,v) au(a + b^2(a-b)v^2)\alpha_t + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t(u,v),$$

dir. Burada P_t, iki değişkenli bir polinomdur ve

$$\alpha_t = \prod_{i=1}^{t} (4-3i)(6i-5)$$

ve

$$R(u,v) = 2a^4u^2 + 2b^4v^2 + 2a^2b^2(a-b)^2u^2v^2$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat. İspat tümevarımdan yapılır. $t = 1$ için $x = u$ alınarak Laplas operatörü uygulanırsa

$$\Delta u = \frac{1}{g^2}(a + b^2(a-b)v^2)au + \frac{1}{g} abu \,, R^0 = 1 \,, abu = P_t(u,v)$$

sağlanır.

$t - 1$ için Lemma doğru olsun. Bu durumda bir kez daha Laplas operatörünün uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
\Delta^t x = {} & \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-2}(u,v) au(a + b^2(a-b)v^2)\alpha_{t-1} \\
& \times (4-3t)\{[2a^3u^2(a + b^2(a-b)v^2) + 2b^3v^2(b + a^2(b-a)u^2)] \\
& - (3-3t)[(1 + b^2v^2)(2a^2u)^2 + (1 + a^2u^2)(2b^2v)^2 \\
& - 8a^3b^3u^2v^2]\} + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t(u,v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Delta^t x = {} & \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-2}(u,v) au(a + b^2(a-b)v^2)\alpha_{t-1} \\
& \times (4-3t)\{[2a^4u^2 + 2a^4b^2u^2v^2 - 2a^3b^3u^2v^2 + 2b^4v^2 \\
& + 2a^2b^4u^2v^2 - 2a^3b^3u^2v^2] - (3-3t)[4a^4u^2 + 4a^4b^2u^2v^2 + 4b^4v^2 \\
& + 4a^2b^4u^2v^2 - 8a^3b^3u^2v^2]\} + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Delta^t x = {} & \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-2}(u,v) au(a + b^2(a-b)v^2)\alpha_{t-1} \\
& \times (4-3t)\{[2a^4u^2 + 2b^4v^2 + 2a^2b^2u^2v^2(a^2 - 2ab + b^2)] \\
& - (3-3t)[2(2a^4u^2 + 2b^4v^2 + 2a^2b^2u^2v^2(a^2 - 2ab + b^2))]\} \\
& + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t(u,v)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta^t x = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-2}(u,v) au(a + b^2(a-b)v^2)\alpha_{t-1}$$
$$\times (4-3t)[R(u,v) - 2(3-3t)R(u,v)] + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t(u,v)$$
$$\Rightarrow \Delta^t x = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-1}(u,v) au(a + b^2(a-b)v^2)\alpha_{t-1}(4-3t)(6t-5)$$
$$+ \frac{1}{g^{3t-2}} P_t(u,v)$$
$$\Rightarrow \Delta^t x = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-1}(u,v) au(a + b^2(a-b)v^2)\alpha_t + \frac{1}{g^{3t-2}} P_t(u,v)$$

elde edilir. Bu da Lemma'yı ispatlar.

Benzer şekilde aşağıdaki Lemma'yı da ispatlayalım.

Lemma 3.4.

$$\Delta^t y = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-1}(u,v) bv(b + a^2(b-a)u^2)\alpha_t + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t(u,v),$$

dir. Burada Q_t, iki değişkenli bir polinomdur ve

$$\alpha_t = \prod_{i=1}^{t} (4-3i)(6i-5)$$

ve

$$R(u,v) = 2a^4u^2 + 2b^4v^2 + 2a^2b^2(a-b)^2u^2v^2$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat. İspat tümevarımdan yapılır. $t = 1$ için $y = v$ alınarak Laplas operatörü uygulanırsa

$$\Delta v = \frac{1}{g^2}(b + a^2(b-a)u^2)bv + \frac{1}{g} abv \,, R^0 = 1 \,, abv = Q_t(u,v)$$

sağlanır.

$t-1$ için Lemma doğru olsun. Bu durumda bir kez daha Laplas operatörünün uygulanmasıyla

$$\Delta^t y = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-2}(u,v) bv(b + a^2(b-a)u^2)\alpha_{t-1}$$
$$\times (4-3t)\{[2b^3v^2(b + a^2(b-a)u^2) + 2a^3u^2(a + b^2(a-b)v^2)]$$
$$-(3-3t)[(1 + a^2u^2)(2b^2v)^2 + (1 + b^2v^2)(2a^2u)^2$$
$$-8a^3b^3u^2v^2]\} + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t(u,v)$$

$$\Rightarrow \Delta^t y = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-2}(u,v) bv(b + a^2(b-a)u^2)\alpha_{t-1}$$
$$\times (4-3t)\{[2b^4v^2 + 2a^2b^4u^2v^2 - 2a^3b^3u^2v^2 + 2a^4u^2$$
$$+ 2a^4b^2u^2v^2 - 2a^3b^3u^2v^2] - (3-3t)[4b^4v^2 + 4a^2b^4u^2v^2$$
$$+ 4a^4u^2 + 4a^4b^2u^2v^2 - 8a^3b^3u^2v^2]\} + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t(u,v)$$
$$\Rightarrow \Delta^t y = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-2}(u,v) bv(b + a^2(b-a)u^2)\alpha_{t-1}$$
$$\times (4-3t)\{[2a^4u^2 + 2b^4v^2 + 2a^2b^2u^2v^2(a^2 - 2ab + b^2)]$$
$$- (3-3t)[2(2a^4u^2 + 2b^4v^2 + 2a^2b^2u^2v^2(a^2 - 2ab + b^2))]\}$$
$$+ \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t(u,v)$$
$$\Rightarrow \Delta^t y = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-2}(u,v) bv(b + a^2(b-a)u^2)\alpha_{t-1}$$
$$\times (4-3t)[R(u,v) - 2(3-3t)R(u,v)] + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t(u,v)$$
$$\Rightarrow \Delta^t y = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-1}(u,v) bv(b + a^2(b-a)u^2)\alpha_{t-1}(4-3t)(6t-5)$$
$$+ \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t(u,v)$$
$$\Rightarrow \Delta^t y = \frac{1}{g^{3t-1}} R^{t-1}(u,v) bv(b + a^2(b-a)u^2)\alpha_t + \frac{1}{g^{3t-2}} Q_t(u,v)$$

elde edilir. Bu da Lemma’yı ispatlar.

Eğer Q, k-tipinde ise bu durumda

$$\Delta^{k+1}X + c_1\Delta^k X + \cdots + c_k \Delta X = 0 \qquad (3.14)$$

eşitliği tekrar sağlanır. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sabit sayılardır.

(3.13), (3.14), Lemma 3.1. ve Lemma 3.2. birleştirilerek

$$R^{k+1} = gP(u,v)$$

eşitliğini sağlayan iki değişkenli bir P polinomu elde ederiz.

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğundan g indirgenemez ve g, R’yi böler. Bu durum imkansızdır. Bundan dolayı Q sonlu tip olamaz.

4. SONLU TİP KUADRİK HİPERYÜZEYLER

Tezimizin bu bölümü için Chen, Dillen ve Song (1992) tarafından yayınlanan makale ana referansımızı oluşturmuştur[10].

Bu bölümünde E^m Öklid uzayında bütün sonlu tip hiperyüzeyleri sınıflandıracağız.

n-boyutlu Öklid uzayı E^n nin bir altkümesi M olsun. Eğer M aşağıda verilen 2. dereceden denklemini sağlayan $(x_1, x_2, \dots x_n)$ noktalarının bir kümesi ise M'ye kuadrik hiperyüzey adı verilir.

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 \tag{4.1}$$

Burada a_{ik}, b_i ve c ler birer reel sayıdır. $A = (a_{ik})$ matrisinin simetrik ve sıfır matrisi olmadığını genelliği bozmadan kabul edebiliriz. Gerekirse E^n de koordinat dönüşümü uygulayarak (4.1) i aşağıdaki kanonik formlardan biri olarak varsayabiliriz.

$$\sum_{i=1}^{r} a_i {x_i}^2 + 1 = 0, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i {x_i}^2 + 2x_{r+1} = 0, \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i {x_i}^2 = 0, \tag{4.4}$$

burada $\left(a_1, a_2, \dots a_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r\ tane}\right)$ A matrisinin özdeğerleri için oransal (proportional) dır.

Genelde $1 \leq r \leq n$ dir. (4.2) ve (4.4) de $r = n$ ve (4.3) de $r + 1 = n$ olduğu durumlarda hiperyüzey, $(n-1)$-boyutlu düzgün kuadrik hiperyüzey, diğer durumlarda silindirik kuadrik hiperyüzey olarak adlandırılır.

(4.2) ve (4.4) durumlarında kuadrik silindirik hiperyüzey $(n-r)$-boyutlu lineer altuzay E^{n-r} ile $(r-1)$-boyutlu düzgün kuadrik hiperyüzeyin çarpımıdır. (4.3) durumunda kuadrik silindirik hiperyüzey $(n-r-1)$-boyutlu lineer altuzay E^{n-r-1} ve r-boyutlu düzgün bir kuadrik hiperyüzeyin çarpımıdır.

$S^p(r)$, E^{p+1} de orijin merkezli r-yarıçaplı hiperküreyi belirtsin.

$$S^p\left(\sqrt{\frac{p}{p+q}}\right) \times S^q\left(\sqrt{\frac{q}{p+q}}\right) \subset S^{p+q+1}(1) \subset E^{p+q+2}$$

Kürelerinin ürünü $M_{p,q}$ olarak tanımlansın $M_{p,q}$ küresinde orijin biçiminde tepe noktası için E^{p+q+2} de $(p+q+2)$-boyutlu koniyi $C_{p,q}$ olarak tanımlayalım. Burada $C_{p,0}$ ve $C_{0,q}$ sırasıyla E^{p+2} ve E^{q+2} de hiperdüzlemdir ve $C_{p,q}$, $p > 0$ ve $q > 0$ için 2-boyutlu cebirsel hiperyüzeydir.

Makalenin bu bölümünde aşağıdaki sınıflandırma teoremini ispatlayıp kuadrik hiperyüzeylerin sınıflandırılmasını yapmış olacağız.

Teorem 4.1. E^{n+1} de M kuadrik hiperyüzeyi sonlu tiptir ancak ve ancak M aşağıdaki hiperyüzeylerden biridir.

a) Hiperküre,

b) $C_{p,n-p-1}$ cebirsel koniklerden biri, $(0 < p < n-1)$

c) E^l lineer altuzayı ve E^{n-l+1} in $(0 < l < n)$ bir hiperküresinin çarpımı,

d) E^l lineer altuzayın ve $C_{p,n-l-p-1}$ cebirsel konilerden birisinin çarpımıdır $(0 < p < n-l-1)$.

4.1. n −boyutlu düzgün kuadrik hiperyüzey

M, E^{n+1} de bir hiperyüzey olsun. M'nin parametrizasyonunu

$$X(u_1, u_2, \dots, u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n, v) \tag{4.5}$$

olarak düşünebilir. Burada

$$v = v(u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{4.6}$$

dir.

$$\partial_i v = \frac{\partial v}{\partial u_i} = v_i \tag{4.7}$$

olsun. Bu durumda

$$g_{i,j} = \langle\, \partial_i X, \partial_j X \,\rangle \tag{4.8}$$

olduğundan

$$\left.\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + \frac{\partial v}{\partial u_i}\frac{\partial v}{\partial u_j} = \delta_{ij} + v_i v_j \\ \left(g^{ij}\right) &= (g_{ij})^{-1} = \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{g} \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

dir. Burada

$$g = \det\left(g_{ij}\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 \tag{4.10}$$

dir.

M'nin Laplas operatörü

$$\Delta = -\sum_{i,j}\left(\frac{\partial_i g}{2g} g^{ij} + \partial_i g^{ij}\right)\partial_j - \sum_{i,j} g^{ij}\partial_i\partial_j \tag{4.11}$$

olarak tanımlanır.

Eğer M, n-noyutlu düzgün kuadrik hiperyüzey ise, bu durumda M'ye 2-boyutlu bir cebirsel koni ya da aşağıdaki iki türden biridir.

$$v^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i {u_i}^2 + c = 0, \qquad b_1 \dots b_n c \neq 0 \qquad \text{(I. tür)}$$

$$v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i {u_i}^2, \qquad b_1 \dots b_n \neq 0 \qquad \text{(II. tür)}$$

Aşağıdaki iki bölümde I. ve II. türdeki n-boyutlu düzgün kuadrik hiperyüzeyleri ayrı ayrı inceleyeceğiz.

4.2.I. Türdeki n-boyutlu düzgün kuadrik hiperyüzeyler

Bu bölümde M'yi I. türdeki n-boyutlu düzgün kuadrik hiperyüzey olarak kabul edelim. Bu durumda M'nin parametrizasyonunu

$$\left.\begin{aligned} X &= (u_1, u_2, \dots, u_n, v) \\ v^2 &= a_1 {u_1}^2 + \dots + a_n {u_n}^2 + c\,, \qquad a_1 \dots a_n c \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

olarak düşünebiliriz. Bu durumda

$$v^2 = a_1 {u_1}^2 + \dots + a_n {u_n}^2 + c$$

$$\Rightarrow 2v\,\frac{\partial v}{\partial u_i} = 2a_i u_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial u_i} = \frac{a_i u_i}{v}$$

$$\Rightarrow v_i = \partial_i v = \frac{\partial v}{\partial u_i} = \frac{a_i u_i}{v} \tag{4.13}$$

dir. Böylece (4.8), (4.9) ve (4.10) dan

$$g_{ij} = \delta_{ij} + v_i v_j = \delta_{ij} + \frac{a_i a_j u_i u_j}{v^2} = \delta_{ij} + \frac{a_i a_j u_i u_j}{W} \tag{4.14}$$

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{g} = \delta_{ij} - \frac{a_i a_j u_i u_j}{g v^2} = \delta_{ij} - \frac{a_i a_j u_i u_j}{gW} \tag{4.15}$$

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i u_i}{v}\right)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i u_i)^2}{v^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{v^2} \sum_{i=1}^{n} (a_i u_i)^2 = 1 + \frac{1}{W} \sum_{i=1}^{n} (a_i u_i)^2 \tag{4.16}$$

$$\frac{1}{g} = 1 - \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 = 1 - \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i u_i}{v}\right)^2 = 1 - \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i u_i)^2}{v^2} = 1 - \frac{1}{g v^2} \sum_{i=1}^{n} (a_i u_i)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{gW} \sum_{i=1}^{n} (a_i u_i)^2 \tag{4.17}$$

Burada

$$W = v^2 = a_1 {u_1}^2 + \cdots + a_n {u_n}^2 + c \tag{4.18}$$

dir.

(4.13) ve (4.14) ten

$$\partial_i g = \frac{\partial g}{\partial u_i} = \frac{\partial \left(1 + \frac{1}{W} \sum_{i=1}^{n} (a_i u_i)^2\right)}{\partial u_i} = \frac{\partial \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {u_i}^2}{c + \sum_{i=1}^{n} a_i {u_i}^2}\right)}{\partial u_i}$$

$$= \frac{2{a_i}^2 u_i (c + \sum_{i=1}^{n} a_i {u_i}^2) - (\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {u_i}^2) 2 a_i u_i}{W^2}$$

$$= \frac{2 a_i u_i}{W} \left(\frac{a_i W - \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {u_i}^2}{W}\right) = \frac{2}{W} \left[a_i u_i \left(\frac{a_i W}{W} - \frac{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {u_i}^2}{W}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{W} \left[a_i u_i \left(a_i + 1 - 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {u_i}^2}{W}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{W} \left\{a_i u_i \left[1 + a_i - \left(1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {u_i}^2}{W}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{W} [a_i u_i (1 + a_i - g)]$$

$$\Rightarrow\ \partial_i g = \frac{2}{W}\left[a_i u_i (1 + a_i - g)\right] \tag{4.19}$$

dir.

$$\tilde{g} = gW = \left(1 + \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2\right)W = W + \sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2$$

$$= a_1 {u_1}^2 + \cdots + a_n {u_n}^2 + c + {a_1}^2 {u_1}^2 + \cdots + {a_n}^2 {u_n}^2$$

$$= c + a_1 {u_1}^2 (1 + a_1) + \cdots + a_n {u_n}^2 (1 + a_n) = c + \sum_{i=1}^{n}(1 + a_i){u_i}^2$$

$$\Rightarrow\ \tilde{g} = gW = c + \sum_{i=1}^{n}(1 + a_i){u_i}^2 \tag{4.20}$$

dir.

$$A_k = \frac{1}{2W}\left\{(gW - {a_k}^2 {u_k}^2)\partial_k g - a_k u_k \sum_{t \neq k} a_t u_t \partial_t g\right\}$$

$$= \frac{1}{2} g \sum_{t} g^{tk} \partial_t g \tag{4.21}$$

dir.

(4.13) ve (4.14) den

$$-\sum_{t} \partial_t g^{tk} = \frac{a_k u_k}{gW}\sum_{t \neq k} a_t + \frac{2A_k}{g^2} \tag{4.22}$$

(4.11) ve (4.17) den

$$\Delta = \frac{1}{g^2}\sum_{i} A_i \partial_i + \frac{1}{gW}\sum_{j}\left(\sum_{t \neq k} a_t\right) a_j u_j \partial_j - \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i \partial_j \tag{4.23}$$

dir.

$$c_{ij} = g g^{ij} \tag{4.24}$$

olarak alalım. (4.13), (4.14), (4.15), (4.16) ve (4.24) den

$$
\begin{aligned}
c_{ij} = gg^{ij} &= \left(1 + \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2\right)\left(\delta_{ij} - \frac{a_i a_j u_i u_j}{gW}\right) \\
&= \delta_{ij} - \frac{a_i a_j u_i u_j}{gW} + \frac{1}{W}\left(\delta_{ij}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2 - \frac{a_i a_j u_i u_j}{gW}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2\right) \\
&= \delta_{ij} + \frac{1}{W}\left(\delta_{ij}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2 - \frac{a_i a_j u_i u_j}{g} - \frac{a_i a_j u_i u_j}{gW}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2\right) \\
&= \delta_{ij} + \frac{1}{W}\left[\delta_{ij}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2 - \frac{a_i a_j u_i u_j}{g}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2\right)}_{g}\right] \\
&= \delta_{ij} + \frac{1}{W}\left[\delta_{ij}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2 - \frac{a_i a_j u_i u_j}{g}g\right]
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \; c_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{W}\left[\delta_{ij}\sum_{i=1}^{n}(a_i u_i)^2 - \frac{a_i a_j u_i u_j}{g}g\right] \tag{4.25}
$$

dir.

Daha sonra kullanmak için (4.21) ve (4.25) den

$$
\sum_{i,j} c_{ij}(\partial_i g)(\partial_j g) = 2\sum_j A_j \partial_j g \tag{4.26}
$$

eşitliğini not alalım.

Lemma 4.1.

$$
\Delta^t u_k = g^{1-3t} A_k \alpha_t \left(\sum_j A_j \partial_j g\right)^{t-1} + g^{2-3t} P_{k,t}\left(u_1, \dots, u_n, \frac{1}{W}\right),
$$

dir. Burada $P_{k,t}$, $n+1$ değişkenli bir polinomdur ve

$$
\alpha_t = \prod_{i=1}^{t}(4-3i)(6i-5)
$$

dir.

İspat. İspat tümevarımdan yapılır. $t = 1$ için (4.23) den

$$
\begin{aligned}
\Delta u_k &= \frac{1}{g^2}\underbrace{\sum_i A_i\partial_i u_k}_{A_k} + \frac{1}{gW}\sum_j\left(\sum_{t\neq k} a_t\right)a_j u_j \partial_j\, u_k - \sum_{i,j} g^{ij}\partial_i\partial_j\, u_k \\
&= \frac{1}{g^2}A_k + \frac{1}{gW}a_j u_j\left(\sum_{t\neq k} a_t\right) - \sum_i g^{ik}\partial_i \\
&= \frac{1}{g^2}A_k + \frac{1}{g}\underbrace{\left[\frac{a_j u_j}{W}\left(\sum_{t\neq k} a_t\right) - \sum_i g^{ik}\partial_i\right]}_{P_{k,t}\left(u_1,\dots,u_n,\frac{1}{W}\right)} \\
&= \frac{1}{g^2}A_k + \frac{1}{g}P_{k,t}\left(u_1,\dots,u_n,\frac{1}{W}\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan $t = 1$ için Lemma sağlanır.

Lemma $t - 1$ için doğru olsun. Bu durumda (4.23), (4.24) ve (4.26) dan

$$\Delta^t u_k = g^{1-3t} \sum_j A_j\, A_k \alpha_{t-1} \left(\sum_i A_i \partial_i g \right)^{t-2} (4-3t)\partial_j g$$

$$- g^{1-3t} \sum_{i,j} c_{ij}\, A_k \alpha_{t-1} \left(\sum_t A_t \partial_t g \right)^{t-2} (4-3t)(3-3t)\partial_i g \partial_j g$$

$$+ g^{2-3t} P_{k,t}\left(u_1, \dots, u_n, \frac{1}{W}\right)$$

$$= g^{1-3t} \sum_j A_j\, A_k \alpha_{t-1} \left(\sum_i A_i \partial_i g \right)^{t-2} (4-3t)\partial_j g$$

$$- g^{1-3t} \sum_{i,j} c_{ij}\, \partial_i g \partial_j g A_k \alpha_{t-1} \left(\sum_t A_t \partial_t g \right)^{t-2} (4-3t)(3-3t)$$

$$+ g^{2-3t} P_{k,t}\left(u_1, \dots, u_n, \frac{1}{W}\right)$$

$$= g^{1-3t} \sum_j A_j\, A_k \alpha_{t-1} \left(\sum_i A_i \partial_i g \right)^{t-2} (4-3t)\partial_j g$$

$$- g^{1-3t} 2 \sum_{i,j} A_j\, \partial_j g A_k \alpha_{t-1} \left(\sum_t A_t \partial_t g \right)^{t-2} (4-3t)(3-3t)$$

$$+ g^{2-3t} P_{k,t}\left(u_1, \dots, u_n, \frac{1}{W}\right)$$

$$= g^{1-3t} \left(\sum_j A_j \partial_i g \right)^{t-1} A_k \alpha_{t-1} (4-3t)\, \underbrace{[1-2(3-3t)]}_{(6t-5)}$$

$$+ g^{2-3t} P_{k,t}\left(u_1, \dots, u_n, \frac{1}{W}\right)$$

$$= g^{1-3t} A_k \alpha_t \left(\sum_j A_j \partial_j g \right)^{t-1} + g^{2-3t} P_{k,t}\left(u_1, \dots, u_n, \frac{1}{W}\right)$$

dir. Bu da Lemma’nın sağlandığını gösterir.

Şimdi M’nin k-tipinde olduğunu varsayalım. Bu durumda $c_1, c_2, \dots, c_k$ reel sayılar olmak üzere

$$\Delta^{k+1} H + c_1 \Delta^k H + \dots + c_k \Delta H = 0 \tag{4.28}$$

$$\Delta^{k+1} u_i + c_1 \Delta^k u_i + \dots + c_k \Delta u_i = 0 \tag{4.29}$$

dir.($i = 1,2, \dots, n$)

Lemma 4.1. ve (4.29) dan

$$\left(\sum_i A_i \partial_i g\right)^{k+1} = g\, P\left(u_1, \dots, u_n, \frac{1}{W}\right) \tag{4.30}$$

dir. Burada $P,\ n+1$ değişkenli bir polinomdur.

$$G(u_1, \dots, u_n) = W^5 \sum_i A_i \partial_i g \tag{4.31}$$

alalım. Bu durumda $G, u_1, \dots, u_n$ cinsinden bir polinomdur. $W, u_1, \dots, u_n$ cinsinden bir polinom olduğu için

$$W^N\, P\left(u_1, \dots, u_n, \frac{1}{W}\right) = R(u_1, \dots, u_n) \tag{4.32}$$

eşitliğini sağlayan N doğal sayısı ve n değişkenli bir R polinomu vardır.

(4.20), (4.30), (4.31) ve (4.32) den

$$\begin{aligned}
W^N\, P &= R \\
\Rightarrow W^N \left(\sum_i A_i \partial_i g\right)^{k+1} \frac{1}{g} &= R \\
\Rightarrow W^N \left(\frac{G}{W^5}\right)^{k+1} \frac{1}{g} &= R \\
\Rightarrow W^N\, \frac{G^{k+1}}{W^{5k+5}} &= gR \\
\Rightarrow W^N\, G^{k+1} &= gW^{5k+5}R \\
\Rightarrow W^N W\, G^{k+1} &= gWW^{5k+5}R \\
\Rightarrow W^{N+1}\, G^{k+1} &= \tilde{g}W^{5k+5}R
\end{aligned} \tag{4.33}$$

dir.

Herhangi bir $i \leq j \leq n$ için $i \neq j$ olmak üzere elde edilen (4.33) eşitliğinde $u_i = 0$ alınırsa

$$W^{N+1}\, G^{k+1} = \tilde{g}W^{5k+5}R$$

$$\Rightarrow \left(c + a_j {u_j}^2\right)^{N+1} \left(W^5 \sum_i A_i \partial_i g\right)^{k+1}$$

$$= \left(c + (1 + a_j) a_j {u_j}^2\right)\left(c + a_j {u_j}^2\right)^{5k+5} R(0, \dots, 0, u_j, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow \left(c + a_j {u_j}^2\right)^{N+1} \left[W^5 (A_1 \partial_1 g + \dots + A_n \partial_n g)\right]^{k+1}$$

$$= \left(c + (1 + a_j) a_j {u_j}^2\right)\left(c + a_j {u_j}^2\right)^{5k+5} R(0, \dots, 0, u_j, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow \left(c+a_j{u_j}^2\right)^{N+1}\left[W^5\left(\underbrace{A_1\frac{\partial\left(1+\frac{1}{W}\left(a_ju_j\right)^2\right)}{\partial u_1}}_{=0}+\cdots+A_j\frac{\partial\left(1+\frac{1}{W}\left(a_ju_j\right)^2\right)}{\partial u_j}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\underbrace{A_n\frac{\partial\left(1+\frac{1}{W}\left(a_ju_j\right)^2\right)}{\partial u_n}}_{=0}\right)\right]^{k+1}$$

$$=\left(c+(1+a_j)a_j{u_j}^2\right)\left(c+a_j{u_j}^2\right)^{5k+5}R(0,\dots,0,u_j,0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow \left(c+a_j{u_j}^2\right)^{N+1}\left[W^5A_j\left(\frac{2{a_j}^2u_j\left(c+a_j{u_j}^2\right)-\left(a_ju_j\right)^2\left(2a_ju_j\right)}{W^2}\right)\right]^{k+1}$$

$$=\left(c+(1+a_j)a_j{u_j}^2\right)\left(c+a_j{u_j}^2\right)^{5k+5}R(0,\dots,0,u_j,0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow \left(c+a_j{u_j}^2\right)^{N+1}\left[W^5A_j\left(\frac{2{a_j}^2cu_j+2{a_j}^3{u_j}^3-2{a_j}^3{u_j}^3}{W^2}\right)\right]^{k+1}$$

$$=\left(c+(1+a_j)a_j{u_j}^2\right)\left(c+a_j{u_j}^2\right)^{5k+5}R(0,\dots,0,u_j,0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow \left(c+a_j{u_j}^2\right)^{N+1}\left[W^5A_j\left(\frac{2{a_j}^2cu_j}{W^2}\right)\right]^{k+1}$$

$$=\left(c+(1+a_j)a_j{u_j}^2\right)\left(c+a_j{u_j}^2\right)^{5k+5}R(0,\dots,0,u_j,0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow \left(c+a_j{u_j}^2\right)^{N+1}\left\{W^5\frac{1}{2W}\left[\left(\left(1+\frac{1}{W}\left(a_ju_j\right)^2\right)W-{a_j}^2{u_j}^2\right)\partial_jg\right.\right.$$

$$\left.\left.-\underbrace{a_ju_j\sum_{t\neq k}a_tu_t\underbrace{\partial_tg}_{=0}}_{=0}\right]\left(\frac{2{a_j}^2cu_j}{W^2}\right)\right\}^{k+1}$$

$$=\left(c+(1+a_j)a_j{u_j}^2\right)\left(c+a_j{u_j}^2\right)^{5k+5}R(0,\dots,0,u_j,0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow \left(c+a_j{u_j}^2\right)^{N+1}$$

$$\times\left\{W^5\frac{1}{2W}\left[\left(W+{a_j}^2{u_j}^2-{a_j}^2{u_j}^2\right)\frac{\partial\left(1+\frac{1}{W}\left(a_ju_j\right)^2\right)}{\partial u_j}\right]\left(\frac{2{a_j}^2cu_j}{W^2}\right)\right\}^{k+1}$$

$$=\left(c+(1+a_j)a_j{u_j}^2\right)\left(c+a_j{u_j}^2\right)^{5k+5}R(0,\dots,0,u_j,0,\dots,0)$$

$$\Rightarrow \left(c+a_j u_j{}^2\right)^{N+1}$$
$$\times \left\{W^5 \frac{1}{2W}\left[W\left(\frac{2a_j{}^2 u_j\left(c+a_j u_j{}^2\right)-\left(a_j u_j\right)^2\left(2a_j u_j\right)}{W^2}\right)\right]\left(\frac{2a_j{}^2 c u_j}{W^2}\right)\right\}^{k+1}$$
$$=\left(c+(1+a_j)a_j u_j{}^2\right)\left(c+a_j u_j{}^2\right)^{5k+5} R(0,\ldots,0,u_j,0,\ldots,0)$$
$$\Rightarrow \left(c+a_j u_j{}^2\right)^{N+1}\left\{W^5\left[\frac{2a_j{}^2 c u_j+2a_j{}^3 u_j{}^3-2a_j{}^3 u_j{}^3}{W^2}\right]\left(\frac{2a_j{}^2 c u_j}{W^2}\right)\right\}^{k+1}$$
$$=\left(c+(1+a_j)a_j u_j{}^2\right)\left(c+a_j u_j{}^2\right)^{5k+5} R(0,\ldots,0,u_j,0,\ldots,0)$$
$$\Rightarrow \left(c+a_j u_j{}^2\right)^{N+1}\left\{\underbrace{W}_{c+a_j u_j{}^2}\left(2a_j{}^2 c u_j\right)^2\right\}^{k+1}$$
$$=\left(c+(1+a_j)a_j u_j{}^2\right)\left(c+a_j u_j{}^2\right)^{5k+5} R(0,\ldots,0,u_j,0,\ldots,0)$$
$$\Rightarrow \left(c+a_j u_j{}^2\right)^{N+k+2}\left(2a_j{}^2 c u_j\right)^{2k+2}$$
$$=\left(c+(1+a_j)a_j u_j{}^2\right)\left(c+a_j u_j{}^2\right)^{5k+5} R\left(0,\ldots,0,u_j,0,\ldots,0\right) \qquad (4.34)$$

dir. $a_1 a_2 \ldots a_n c \neq 0$ olduğu için $a_j = -1$ olmak zorundadır. Bu her j için doğru olduğundan M bir hiperküredir. Çünkü $a_j = -1$ her j için sağlandığından

$$v^2 = a_1 u_1{}^2 + \cdots + a_n u_n{}^2 + c$$
$$\Rightarrow v^2 = -u_1{}^2 - \cdots - u_n{}^2 + c$$
$$\Rightarrow u_1{}^2 + u_1{}^2 + \cdots + u_n{}^2 + v^2 = c$$

dir. Bu ise bir hiperküre belirtir.

4.3.II. Türdeki düzgün kuadrik hiperyüzeyler

Böyle hiperyüzeyler için parametrizasyon

$$\left.\begin{array}{c} X = (u_1, u_2, \ldots, u_n, v) \\ v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} b_i u_i{}^2 \ , \qquad b_1 \ldots b_n \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (4.35)$$

şeklinde düşünülebilir. Bu durumda

$$v = \frac{1}{2}\left[b_1 u_1{}^2 + b_2 u_2{}^2 + \cdots + b_n u_n{}^2\right]$$
$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial u_i} = \frac{1}{2} 2 b_i u_i$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial v}{\partial u_i} = b_i u_i$$

$$\Rightarrow v_i = \partial_i v = \frac{\partial v}{\partial u_i} = b_i u_i \tag{4.36}$$

dir. Böylece (4.8), (4.9) ve (4.10) dan

$$\left.\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + v_i v_j = \delta_{ij} + b_i b_j u_i u_j \\ g^{ij} &= \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{g} = \delta_{ij} - \ b_i b_j u_i u_j \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

$$g = 1 + \sum_{i=1}^{n} {v_i}^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_i)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2 {u_i}^2 \tag{4.38}$$

Ayrıca (4.11) den

$$\Delta = \frac{1}{g^2} \sum_j \left\{ b_j + \sum_i (b_j - b_i) {b_i}^2 {u_i}^2 \right\} b_j u_j \partial_j - \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i \partial_j$$

$$+ \frac{1}{g} \sum_j \left(\sum_{i \neq j} b_i \right) b_j u_j \partial_j \tag{4.39}$$

dir.

Lemma 4.2.

$$g^2 \Delta g = Q(u_1, u_2, \dots, u_n) + gQ(u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{4.40}$$

$$\|\nabla g\|^2 = \frac{2}{g} \ Q(u_1, u_2, \dots, u_n) \tag{4.41}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada Q ve $T, u_1, u_2, \dots, u_n$ cinsinden bazı polinomlardır. ∇g ile g'nin gradyanı gösterilmiştir.

İspat. (4.38) ve (4.39) dan

$$\Delta g = \frac{1}{g^2} \sum_j \left\{ b_j + \sum_i (b_j - b_i) {b_i}^2 {u_i}^2 \right\} b_j u_j \partial_j g - \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i \partial_j g$$

$$+ \frac{1}{g} \sum_j \left(\sum_{i \neq j} b_i \right) b_j u_j \partial_j g$$

$$\Rightarrow \Delta g = \frac{1}{g^2}\sum_j \left\{b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right\} b_j u_j 2{b_j}^2 u_j - \sum_{i,j} g^{ij}\partial_i 2{b_j}^2 u_j$$

$$+\frac{1}{g}\sum_j\left(\sum_{i\neq j} b_i\right) b_j u_j 2{b_j}^2 u_j = \frac{2}{g^2}\sum_j 2{b_j}^2 u_j \left\{\left(b_j + \sum_i (b_j\right.\right.$$

$$\left.\left. - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right) b_j u_j + g\left(\sum_{i\neq j} b_i\right) b_j u_j\right\} - 2\sum_{i,j} {b_j}^2 g^{ij}$$

dir. Böylece,

$$Q = 2\sum_j 2{b_j}^3{u_j}^3\left\{b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right\} \tag{4.42}$$

$$T = 2\sum_j 2{b_j}^3{u_j}^3\left(\sum_{i\neq j} b_i\right) - 2g\sum_i {b_i}^2 g^{ii} \tag{4.43}$$

olarak alırsak (4.40) eşitliği sağlanır. Bu bize Q ve T'nin $u_1, u_2, \dots, u_n$cinsinden birer polinom olduğunu gösterir. (4.37), (4.38) (4.42) ve ∇g gradyan vektörünün normunun tanımından

$$\|\nabla g\| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial u_n}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \|\nabla g\|^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial u_n}\right)^2$$

$$= \left(2{b_1}^2 u_1\right)^2 + \cdots + \left(2{b_n}^2 u_n\right)^2$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n}\left(2{b_i}^2 u_i\right)^2$$

$$\Rightarrow g\|\nabla g\|^2 = 4\left(1 + \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2{u_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left({b_i}^2 u_i\right)^2\right)$$

$$= 2\left\{2\left[1 + \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2{u_i}^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\left({b_i}^2 u_i\right)^2\right]\right\}$$

$$= 2Q(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\Rightarrow \|\nabla g\|^2 = \frac{2}{g} Q(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

dir.

Lemma 4.3.

$$\Delta^t u_j = g^{1-3t} Q^{t-1} b_j u_j \left\{ b_j + \sum_i (b_j - b_i) {b_i}^2 {u_i}^2 \right\} \alpha_t + g^{2-3t} \tilde{P}_{j,t}(u_1, \dots, u_n)$$

dir. Burada $\tilde{P}_{j,t}, u_1, \dots, u_n$ i içeren bir polinomdur ve

$$\alpha_t = \prod_{i=1}^{t} (4-3i)(6i-5)$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. İspat tümevarımdan yapılır. $t = 1$ için (4.23) den

$$\Delta u_j = \frac{1}{g^2} \sum_j \left\{ b_j + \sum_i (b_j - b_i) {b_i}^2 {u_i}^2 \right\} b_j u_j \underbrace{\partial_j u_j}_{=1} - \sum_{i,j} g^{ij} \partial_i \underbrace{\partial_j u_j}_{=1}$$

$$+ \frac{1}{g} \sum_j \left(\sum_{i \neq j} b_i \right) b_j u_j \partial_j u_j$$

$$= \frac{1}{g^2} \sum_j \left\{ b_j + \sum_i (b_j - b_i) {b_i}^2 {u_i}^2 \right\} b_j u_j - \sum_{i,j} g^{ij} \underbrace{\partial_i 1}_{=0}$$

$$+ \frac{1}{g} \sum_j \left(\sum_{i \neq j} b_i \right) b_j u_j$$

$$= \frac{1}{g^2} \sum_j \left\{ b_j + \sum_i (b_j - b_i) {b_i}^2 {u_i}^2 \right\} b_j u_j + \frac{1}{g} \tilde{P}_{j,t}$$

$$Q^{t-1} = Q^{1-1} = 1, \alpha_1 = 1$$

olduğundan $t = 1$ için Lemma sağlanır. Lemma $t - 1$ için doğru olsun. Bu durumda

$$\Delta^{t-1} u_j = g^{4-3t} Q^{t-2} b_j u_j \left\{ b_j + \sum_i (b_j - b_i) {b_i}^2 {u_i}^2 \right\} \alpha_{t-1} + g^{5-3t} \tilde{P}_{j,t-1}$$

dir. Her iki tarafın Δ laplasını alırsak,

$$\Delta^t u_j = \Delta\left\{g^{4-3t}Q^{t-2}b_j u_j\left(b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right)\alpha_{t-1} + g^{5-3t}\tilde{P}_{j,t-1}\right\}$$

$$= g^{1-3t}Q^{t-2}b_j u_j\left(b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right)\alpha_{t-1}$$

$$\times [(4-3t)g^2\Delta g - (4-3t)(3-3t)g\|\nabla g\|^2] + g^{2-3t}\tilde{P}_{j,t}$$

$$= g^{1-3t}Q^{t-2}b_j u_j\left(b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right)\alpha_{t-1}$$

$$\times [(4-3t)(Q+gT) - (4-3t)(3-3t)Q] + g^{2-3t}\tilde{P}_{j,t}$$

$$= g^{1-3t}Q^{t-2}b_j u_j\left(b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right)\alpha_{t-1}$$

$$\times \{Q(4-3t)[1+2(3t-3)]\}$$

$$+ g^{2-3t}T\left\{Q^{t-2}b_j u_j\left(b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right)\alpha_{t-1}\right\}$$

$$+ g^{2-3t}\tilde{P}_{j,t} = g^{1-3t}Q^{t-1}b_j u_j\left\{b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right\}$$

$$\times (4-3t)(6t-5)\alpha_{t-1} + g^{2-3t}\dot{P}_{j,t}$$

$$= g^{1-3t}Q^{t-1}b_j u_j\left\{b_j + \sum_i (b_j - b_i){b_i}^2{u_i}^2\right\}\alpha_t + g^{2-3t}\dot{P}_{j,t}$$

dir. Burada $\tilde{P}$ ve $\dot{P}$, $u_1, u_2, \dots, u_n$ i içeren polinomlardır. Bu durumda Lemma sağlanır.

Eğer M, k-tipinde ise bu durumda

$$\Delta^{k+1}u_j + c_1\Delta^k u_j + \cdots + c_k\Delta u_j = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

denklemini sağlayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ reel sayıları vardır.

Lemma 4.3. ve (4.42) den

$$Q^{k+1} = g\,P(u_1, \dots, u_n)$$

elde edilir. Burada P, $u_1, \dots, u_n$ i içeren bir polinomdur.

$b_1 b_2 \dots b_n \neq 0$ olduğundan $g = 1 + \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2{u_i}^2$ indirgenemezdir. Üstelik Lemma 4.2. dan $\frac{Q}{g} = \frac{1}{2}\|\nabla g\|^2$, $u_1, \dots, u_n$ i içeren bir polinom olmadığı için bir çelişki elde ederiz. Bu yüzden II. tür sonlu tip düzgün kuadrik hiperyüzey bulunamaz.

Teorem 4.1.'in ispatı (Sınıflandırma Teoremi).

Eğer M, E^{n+1} de sonlu tip n-boyutlu düzgün kuadrik hiperyüzey ise bu durumda (4.1) ve (4.3) e göre M ya 2-boyutlu bir cebirsel koni ya da hiperküredir(a).

Eğer M, 2-boyutlu bir cebirsel koni ise bu durumda M sonlu tip olduğu için minimaldir[4]. Bu yüzden M, C_{n-p-1} cebirsel konilerden biridir $(0 < p < n-1)$ [19] (b).

Eğer M, E^{n+1} de sonlu tip kuadrik silindirik hiperyüzey ise bu durumda M, E^{l} lineer altuzayı ile adına N dediğimiz bir düzgün kuadrik hiperyüzeyin çarpımıdır. M sonlu tip olduğu için N de aynı zamanda sonlu tiptir. Bu yüzden N ya hiperküredir ya da bazı uygun p ler için bir $C_{p,n-l-p-1}$ cebirsel konidir.

Teoremin tersinin doğrulamak açıktır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1970'li yılların sonlarına doğru B. Y. Chen tarafından ortaya konulan sonlu tipten altmanifold fikri, Öklidyen ve yarı-Öklidyen uzayların altmanifoldlarının geometrik özelliklerinin incelenmesinde çok önemli ve sıkça kullanılan bir kavram haline gelmiştir. Bu kavram yardımıyla Öklidyen uzayların altmanifoldları üzerinde tanımlı türevlenebilir dönüşümler incelenmiş, özellikle de sonlu tipten Gauss dönüşümü altmanifoldların geometrisinde önemli bir araç haline gelmiştir. Yapmış olduğumuz tez çalışmasıyla sonlu tipten kuadrik ve hiperkuadrikler üzerine yapılmış çalışmalar detaylı bir şekilde incelenmiştir. Tez çalışmamızın sonlu tip altmanifoldlar üzerine çalışacak araştırmacılar için bir kaynak eser olmasına ümit etmekteyiz.

KAYNAKLAR

[1] Chen B. Y. , Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type, World Scientific, Singapore 1984

[2] Chen B. Y. and Dillen F. , Quadrics of finite type,J.Geo.38 (1990),16-22.

[3] Chen B. Y. , Surfaces of finite type in Euclidean 3-space , Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B 39 (1987), 243-254

[4] Garay O. J. , Finite type cones shaped on spherical submanifolds , ibid. 104 (1988) , 868-870.

[5] Chen B. Y. , Dillen F. , Verstraelen L. and Vrancken L., Ruled surfaces of finite type, Bull. Austral. Math. Soc. 42 (1990), 447–453.

[6] Dillen F. , Ruled submanifolds of finite type, Proc. Amer. Math. Soc. 114 (1992), 795-798

[7] Chen, B. Y. , A Report on Submanifolds of Finite Type, Soochow Journal of Mathematics, 22, n. 2, p. 117-337 (1996).

[8] Arvanitoyeorgos, A. , Kaimakamis, G. ve Magid, M. , Lorentz Hypersurfaces in E^{4}_{1} Satisfying ΔH = αH , Illinois J. Math., 53, n. 2,p. 581-590(2009).

[9] Bektaş B. , Spherical submanifolds with finite type spherical gauss map, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2012

[10] Chen, B. Y. , Dillen, F. and Song, H. Z., Quadric Hypersurfaces of Finite Type,Colloquium Mathematicum, Vol. LXIII, Fasc. 2,145-152 (1992).

[11] Dursun, U. , Hypersurfaces with Pointwise 1-Type Gauss Map, Taiwanese Journal of Mathematics, 11, n. 5, p. 1407-1416 (2007).

[12] Dursun, U. , On Null 2-Type Submanifolds of Euclidean Space, Int. Electron. J. Geom., 2, n. 2, p. 20-26(2009).

[13] Hacısalihoğlu, H. H.: Diferensiyel geometri- cilt-I,II, 2000.

[14] Kılıç B. , k-tipinde eğriler ve altmanifoldlar, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1997.

[15] Kuhnel, W. Differential geometry: curves-surfaces-manifolds, Braunschweig, Wiesbaden, 1999.

[16] Sabuncuoğlu, A. : Diferensiyel geometri, Nobel Yayınları-2006.

[17] Struik, D. J. , Lectures on Classical Differential Geometry. Dover, New-York, 1988.

[18] Taşkent S. , Spherical Finite Type Hypersurfaces, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2007.

[19] Hsiang W. Y. , Remarks on closed minimal submanifolds in the standard Riemannian m-sphere, J. Differential Geom. 1 (1967), 257-267