KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ GADJIEV OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Tuncer ACAR

OCAK 2015

Matematik Anabilim Dalında Tuncer ACAR tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ GADJIEV OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun oldugunu onaylarım.

12/01/2015

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Ali ARAL
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan	:	Prof. Dr. Kerim KOCA
Üye (Danışman)	:	Prof. Dr. Ali ARAL
Üye	:	Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA
Üye	:	Doç. Dr. Harun KARSLI
Üye	:	Doç. Dr. Ali OLGUN

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ GADJİEV OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ACAR, Tuncer

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL

OCAK 2015, 66 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Bernstein-Chlodowsky polinomlarının Gadjiev tipli genelleştirmesi tanımlanmakta ve ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenmektedir. Ayrıca, yeni tanımlanan operatörlerin türevlerinin yaklaşım özellikleri de çalışılmıştır. Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde tanımlanan operatörlerin iki değişkenli versiyonu tüm kenarları hareketli olan üçgensel bölgeler üzerinde tanımlanmış, bazı şekil koruyan özellikleri ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde ise hareketli aralıklar üzerinde Bernstein-Durrmeyer operatörleri tanımlanmakta ve yaklaşım hızı, noktasal yakınsaklığı incelenmekte, daha iyi yaklaşım sonuçları veren genelleştirmeleri çalışılmaktadır.

Anahtar kelimeler: Bernstein Polinomları, Bernstein-Chlodowsky Polinomları, Ağırlıklı Yaklaşım, Korovkin teoremi, Yakınsaklık Hızı, Süreklilik Modülü, Voronovskaya Teoremi.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF GENERALIZED GADJIEV OPERATORS

ACAR, Tuncer

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Ph. D. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Ali Aral

January 2015, 66 pages

This thesis consist of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. In the third chapter, the Gadjiev type generalization Bernstein-Chlodowsky polynomials are introduced and approximation properties in weighted spaces are investigated and approximation properties of the derivatives of new operators are studied as well. In the chapter fourth, bivariate versions of the operators defined in third chapter are defined on triangular domains with mobile boundaries and some shape-preserving properties and weighted approximation properties of the operators are investigated. In the last chapter, new type Bernstein-Durrmeyer operators on mobile intervals are introduced and rate of convergence, pointwise convergence and a generalization presenting better approach are studied.

Key Words: Bernstein Polynomials, Bernstein-Chlodowsky Polynomials,

Weighted Approximation, Korovkin Theorem, Rate of Convergence,

Modulus of Continuity, Voronovskaya Theorem.

TEŞEKKÜR

İlk olarak doktora tez konumun belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, doktora çalışmamı tamamlamamda rehberliği ile ışık tutan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali ARAL' a teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmam boyunca, öneri, bilgi ve tecrübeleri ile doktora tezimin gelişmesine yardımcı olan değerli tez izleme komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA ve Sayın Doç. Dr. Harun KARSLI hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım. Doktora eğitimim boyunca 2211 Yurtiçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK' a ve Yurtdışı Doktora Tez Araştırma Bursu kapsamında yurtdışı doktora tez araştırması için maddi destek veren YÖK'e teşekkürlerimi sunarım. Doktora çalışmam boyunca her türlü desteği veren eşim Özlem ACAR'a ve sevgili anne ve babama teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$B_2\left[0,\infty\right)$	$[0,\infty)$ üzerinde tanımlı $1+x^2$ fonksiyonu ile sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C_2\left[0,\infty\right)$	$B_2\left[0,\infty\right)$ uzayına ait sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_2^*\left[0,\infty\right)$	$C_2\left[0,\infty\right)$ uzayına ait ve $x\to\infty$ için $\frac{\lvert f(x)\rvert}{1+x^2}\to sabit$ özelliğindeki fonksiyonlar uzayı
$f_n\rightrightarrows f$	(f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar
$\Delta_h^r f\left(\cdot\right)$	f fonksiyonuna ait r-inci ileri fark operatörü
$L_p\left(X\right)$	X üzerinde Lebesgue p-integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$Lip_M\alpha$	M sabitiyle α-ıncı mertebeden Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_\rho\left(\mathbb{R}_+^2\right)$	$[0,\infty)\times[0,\infty)$ üzerinde $\rho\left(x,y\right)$ ağırlık fonksiyonuna göre sınırlı olan sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_\rho^0\left(\mathbb{R}_+^2\right)$	$C_\rho\left(\mathbb{R}_+^2\right)$ uzayına ait ve $x+y\to\infty$ için $\frac{\lvert f(x)\rvert}{\rho(x,y)}\to sabit$ özelliğindeki fonksiyonlar uzayı
$\Delta_h^{(i,j)}f\left(\cdot\right)$	İki değişkenli fonksiyona ait ileri fark operatörü
$C^{(i,j)}(D)$	$D\subset\mathbb{R}^2$ üzerinde birinci değişkenine göre i kez, ikinci değişkenine göre j kez türevi sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$(n)_k$	Pochhammer Sembolü
${}_2F_1\left(\cdot,\cdot;\cdot;\cdot\right)$	Hipergeometrik Fonksiyon
$\omega\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonuna ait klasik süreklilik modülü
$K_2\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonuna ait $\mathcal{K}$-fonksiyoneli
$\omega_2\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonuna ait ikinci mertebeden düzgünlük modülü
$K_{2,\varphi}\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonuna ait ağırlıklı $\mathcal{K}$-fonksiyoneli
$\omega_2^\varphi\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonuna ait Ditzian-Totik düzgünlük modülü
$\overrightarrow{\omega}_\psi\left(f,\delta\right)$	f fonksiyonuna ait birinci mertebeden Ditzian-Totik modülü

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde amaç keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı fonksiyonlar cinsinden gösterimini elde etmektir. Yaklaşım teorisindeki en temel problemlerden birisi, yaklaşım yapılmak istenilen fonksiyon kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulan bir fonksiyon ailesi, yaklaşılmak istenen fonksiyon ailesinde yoğun mudur, sorusunun cevabını araştırmak olmuştur. Bu problemin pozitif cevabı K. Weierstrass [1] (Ayrıca bkz. [2,3]) tarafından 1885 yılında verilmiş ve $[a,b]$ kompakt aralığında sürekli her fonksiyona $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinomlar dizisinin varlığı ispatlanmıştır. Cebirsel ve trigonometrik fonksiyonlar için verilen bu ispatın uzun olması ve karmaşık ispat yöntemi, dönemin birçok ünlü matematikçisi tarafından ele alınmış, kısa ve basit bir ispatı verilmeye çalışılmıştır. Bu matematikçilerden bazılarını Carl Runge (1885), Henri Lebesgue (1908), Charles de la Vallée-Poussin (1908), Lipot Fejér (1916) olarak söyleyebiliriz.Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatı için verilen yöntemler olasılık teorisi, lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisi gibi bilimsel çalışma alanlarının doğmasına sebep olmuştur. Lineer pozitif operatörlerle yaklaşım metodlarının öncüsü ise Sergej N. Bernstein [4] olmuştur. 1912 yılında Bernstein Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatı için kendi adı ile anılan, $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşım için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ 0 \leq x \leq 1$$

ile tanımlanan operatörler dizisini tanımlamıştır. Bernstein operatörlerinin önemi bu yüzyılın ilk yarısında tam olarak anlaşılamamıştır. Fakat Paul de Faget'in Citroën firmasında ve Pierre Bézier'in Renault firmasında kendi endüstriyel dizaynları için Bernstein polinomlarını kullanması ile, Bernstein polinomları matematikçiler arasında popüler olmaya başlamıştır. Tezimizde tam olarak Bernstein operatörleri ile çalışmayacağız fakat bu operatörlerin yapısal özelliklerini kullanarak yeni operatörler tanımlayacağız. Weierstrass yaklaşım teoremi herhangi $[a,b]$ aralığı için verilmesine rağmen, Bernstein polinomları $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlıdır, ancak keyfi $[a,b]$ aralığının ve $[0,1]$ aralığının, $y \in [a,b]$ olmak üzere $x = (a-y)/(a-b)$ ve $y = (b-a)x + a$ dönüşümleri altında birbirine dönüştürülebildikleri göz önüne alındığında Bernstein polinomları, Weierstrass'ın yaklaşım teoremi için keyfi $[a,b]$ aralığı üzerinde de bir ispat yöntemi oluşturmaktadır. H. Bohman [5] ise Bernstein'ın metodunun daha genel formu olarak kabul edilecek genel bir lineer pozitif operatörler dizisi için, bu tip dizilerin $[0,1]$ kompakt aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşım koşullarını vermiş ve P. P. Korovkin [6] kompakt aralıklar üzerinde lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini ele alarak Korovkin teoremi olarak bilinen ve yaklaşım teorisinde büyük öneme sahip teoremini ispatlamıştır.

Bernstein polinomları kullanışlı yapısı ve birçok bilim dalındaki (fizik, mühendislik bilimleri, bilgisayar teknolojileri, v.s.) uygulamalarıyla yüzyılı aşkın süredir aktif bir çalışma konusu olmuş ve birçok genelleşmesi ile modifikasyonları çalışılmıştır. Bu genelleşme ve modifikasyonlardaki temel amaçlardan bazıları, kompakt aralıklar üzerinde sürekli fonksiyonlara yaklaşım yapmaya imkan tanıyan Bernstein polinomlarının sınırsız aralıklar üzerine taşınması ve yaklaşılmak istenilen fonksiyonun ait olduğu sınıfı genişletmek olarak söylenebilir. Örneğin; Chlodowsky [7] Bernstein polinomlarının yeni bir modifikasyonunu elde ederek, $[0,1]$ aralığında tanımlı bu polinomları $[0,b_n]$ $(b_n \to \infty)$ aralığına taşımıştır. Diğer yandan, D. D. Stancu [8] Bernstein polinomlarını modifiye ederek $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı, Bernstein-Stancu polinomlarını tanımlamış ve bu polinomların daha iyi yaklaşım sonuçları verdiğini göstermiştir. Diğer taraftan, yaklaşım yapılacak fonksiyonun ait olduğu uzaylar da genişletilmeye çalışılmıştır. Biliyoruz ki, Bernstein operatörlerini tanımlamak için yaklaşım fonksiyonunun $f(k/n)$ $(k = 0,1,...,n)$ değerlerinin bilinmesi yeterlidir. Fakat Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar ölçüsü sıfır olan küme dışında tanımlanmaktadır. Bu nedenle integrallenebilen fonksiyonlara yakınsayan dizileri bir integral şeklinde almak daha uygundur. Bu amaçla J. L. Durrmeyer [9] Bernstein polinomlarının $[0,1]$ aralığı üzerinde integallenebilen fonksiyonlar için tanımlı olan yeni bir genelleştirmesini tanımlamıştır.

Bernstein polinomları üzerine olan çalışmalar sadece $\mathbb{R}$ reel sayılar ve kapalı alt aralıkları üzerinde sınırlı kalmamış, çok boyutlu uzaylarda da çalışılmıştır.

Bernstein polinomlarının iki değişkenli fonksiyonlar sınıfındaki yaklaşımı ilk defa D. D. Stancu [10] tarafından incelenmiştir.

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1 \right\}$$

sabit üçgensel bölge olmak üzere, Δ üzerinde sürekli fonksiyonlara yaklaşım için iki değişkenli Bernstein polinomları

$$B_n(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} x^k y^j (1-x-y)^{n-k-j}, \qquad (1.1)$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca F. L. Martinez [11] $B_n(f;x,y)$ polinomlar dizisini $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0,1]\}$ sabit karesel bölgesi üzerinde tanımlamıştır. Her iki çalışmada da süreklilik modülü yardımıyla, tanımlanan iki değişkenli Bernstein polinomlarının yaklaşım fonksiyonuna yakınsaklık hızları hesaplanmıştır. (1.1) operatörlerinin Chlodowsky tipli genelleştirmeleri A. İzgi [12] tarafından sabit bölgeler üzerinde tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

Yaklaşım teorisinin ikinci temel problemi yaklaşım hızının hesaplanması problemidir. Korovkin teoremine göre, $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olmak üzere, $n \to \infty$ iken

$$\|L_n(f) - f\| = \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f;x) - f(x)| \to 0$$

olduğundan

$$\|L_n(f) - f\| = \alpha_n$$

dizisinin bir sıfır dizisi olduğu görülür. Bu (α_n) dizisinin $n \to \infty$ iken hangi hızla sıfıra yakınsamasının bulunması, $(L_n(f))$ dizisinin de f'e düzgün yakınsamasının hızını belirlemektedir. Bunu bulmak için (α_n) dizisinin başka bir sıfır dizisi ile karşılaştırılması yeterlidir. Çünkü her n için $\alpha_n \leq \beta_n$ eşitsizliğinin sağlanması (α_n) dizisinin (β_n) dizisinden daha hızlı sıfıra gitmesinin veya en azından β_n'den zayıf hızla sıfıra gitmemesinin kanıtıdır. Fonksiyon uzaylarında β_n dizisi f fonksiyonunun süreklilik modülü ile bağlantılı bir şekilde ele alınabilir.

Bernstein polinomları üzerine devam eden çalışmalardaki amaçlardan bir diğeri ise, yaklaşım hızını arttırmak ve yaklaşımın doğal sonucu olan hata miktarını azaltmaktır. Bu çalışmalardan biri de 2010 yılında A. D. Gadjiev ve A. M.

Ghorbanalizadeh [13] tarafından yapılmıştır ve Bernstein polinomlarının yeni bir modifikasyonu olarak, α_k, β_k, $k = 1, 2$ için pozitif ve $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$ eşitsizliğini sağlamak üzere $[0, 1]$ aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşım için $\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}$ hareketli aralıkları üzerinde tanımlanan

$$S_{n,\alpha,\beta}(f; x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}\right) \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-r},$$

polinomlarıdır. Ayrıca yazarlar aynı makalede

$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq (n + 2\alpha) / (n + \beta),\ x, y \geq \alpha / (n + \beta)\right\}$$

hareketli üçgensel bölgeleri üzerinde

$$\begin{aligned} p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x, y) &= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} \left(x - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \\ &\times \left(y - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta} - x - y\right)^{n-k-l} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x, y) \tag{1.2}$$

iki değişkenli Bernstein polinomlarını tanımlamışlardır. Bu yeni operatörler dizisinin düzgün yakınsaklığı gösterilmiş, yakınsamanın hızı hesaplanmış ve α_k, β_k ların özel durumlarına göre $S_{n,\alpha,\beta}$ operatörler dizisinin Bernstein operatörlerine göre, $S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}$ operatörlerinin (1.1) ile verilen iki değişkenli Bernstein polinomlarına göre daha iyi yaklaşım sonuçları verdiği gösterilmiş, elde edilen sonuçların daha iyi olduğu nümerik örneklerle ve grafiklerle de desteklenmiştir.

Bu tez birinci bölümü giriş bölümü olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavram ve teoremler verilmiş, tez boyunca göz önüne alınacak fonksiyon uzayları tanımlanmıştır. Tezin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümleri tamamen orjinal olup aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Üçüncü bölümde $[0, 1]$ aralığının hareketli alt aralıkları üzerinde tanımlı olan $S_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerinin, $n \to \infty$ için $[0, \infty)$'a genişleyen hareketli alt aralıklar üzerinde Chlodowsky tipli genelleştirmeleri tanımlanıp, ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiş, ayrıca elde edilen yeni operatörlerin türevlerinin de yaklaşım fonksiyonunun türevine ağırlıklı yaklaşımı, Lipschitz uzayına ait fonksiyonlar için verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçgensel bölgeler üzerinde tanımlı iki değişkenli $S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}$ operatörlerinin, $n \to \infty$ için $[0,\infty) \times [0,\infty)$ bölgesine genişleyen tüm kenarları hareketli olan üçgensel bölgeler üzerinde Chlodowsky tipli genelleştirmeleri tanımlanıp, bazı şekil koruyan özellikleri ve ağırlıklı yaklaşımları incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise $S_{n,\alpha,\beta}$ operatörleri temel alınarak, $[0,1]$ aralığının hareketli alt aralıkları üzerinde yeni tipten Durrmeyer operatörleri tanımlanmış, tanımlanan operatörlerin momentleri için hipergeometrik fonksiyonlar ile bir gösterimi elde edilmiştir. Ayrıca yeni operatörlerin direk yaklaşım özelliği çalışılmış ve yaklaşım hızı elde edilmiştir. Yaklaşım teorisinde noktasal yaklaşım açısından temel teoremlerden olan Voronovskaya teoremi bu yeni operatörler için elde edilmiş, daha iyi yaklaşım sonuçları veren King tipli genelleştirmeleri çalışılmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Tez hazırlanırken temel kavramlar bölümünün ilk dört alt bölümünde H. Hilmi Hacısalihoğlu ve A. D. Gadjiev' in "Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı" kitabından, H. Bohman'ın, "On approximation of continuous and of analytic functions" adlı makalesinden, P. P. Korovkin'in, "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions" adlı kitabından yararlanılmıştır. Temel kavramlar bölümünün diğer alt bölümlerinde Z. Ditzian ve V. Totik'in "Moduli of Smoothness" adlı kitabınndan, G. A. Anastassiou ve S. Gal'ın "Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation" adlı kitabından, V. Gupta, R. P. Agarwal'ın "Convergence Estimates in Approximation Theory" adlı kitabından, G. G. Lorentz'in "Approximation of Functions" adlı doktora tezinden, P. L. Butzer'in "On the Extension of Bernstein Polynomials to the Infinite Interval" adlı makalesinden, P. L. Butzer ve R. J. Nessel'in "Fourier Analysis and Approximation" adlı kitabından, G. Gasper ve M. Rahman'ın "Basic Hypergeometric Series" adlı kitabından, G. M. Phillips'in

"Interpolation and Approximation by Polynomials" adlı kitabından, O. Agratini'nin "Linear operators that preserve some test functions" adlı makalesinden, D. Cárdenas-Morales ve F. J. Muñoz-Delgado'nun, "Improving certain Bernstein-type approximation processes" adlı makalesinden faydalanılmıştır.

Tezin orjinal olan diğer bölümlerinde sırasıyla A. D. Gadjiev ve A. M. Ghorbanalizadeh'in "Approximation properties of a new type Bernstein -Stancu polynomials of one and two variables" adlı makalesinden, E. A. Gadjieva ve E. Ibikli'nin, "On Generalization of Bernstein-Chlodowsky Polynomials" adlı makalesinden, E. A. Gadjieva ve T. Kh. Gasanova'nın "Approximation by two dimensional Bernstein-Chlodowsky polynomials in triangle with mobile boundary" adlı makalesinden faydalanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Bu bölümde lineer pozitif operatörler ile ilgili bazı temel kavramlar ve özellikler verilecektir. Verilen tanımlar ve özellikler [19] ve [20] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

Tanım 2.1.X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları olsun. $L : X \to Y$ operatörü, her $f, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ $(K, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ $)$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

eşitliğini sağlarsa, L operatörüne X den Y ye bir lineer operatör denir.
$\mathcal{L}(X, Y) = \{L : X \to Y : L \text{ lineer operatör}\}$ kümesi bir reel veya komplex vektör uzayıdır.

Tanım 2.2.$L : X \to Y$ lineer operatör ve

$$X^{+} = \{f \in X : f(t) \geq 0\}, Y^{+} = \{g \in Y : g(t) \geq 0\}$$

olmak üzere, L lineer operatörü X^{+} kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^{+} kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyorsa, L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Önerme 2.1.$L : X \to Y$ lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda, $f, g \in X$ olmak üzere $\forall t$ için $f(t) \leq g(t)$ ise $L(f(t); x) \leq L(g(t); x)$ dir ve buna L lineer pozitif operatörünün monotonluk özelliği denir. Ayrıca monoton operatörler $|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$ eşitsizliğini sağlar.

Tanım 2.3.X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları ve $L : X \to Y$ lineer operatör olsun. L operatörünün normu $\|L\|$ ile gösterilir ve

$$\|L\| = \sup_{f \in X,\ \|f\| = 1} \|Lf\|$$

olarak tanımlanır.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

$[a,b]$ kompakt aralığında sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşım için gerek ve yeter koşullar birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Her ne kadar uzun bir süre bilinmese de, Popoviciu [21] 1951 yılında aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir:

Teorem 2.1.$L_n : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $i = 0,1,2$ için $e_i = t^i$ olmak üzere $[a,b]$ aralığı üzerinde $\lim_{n\rightarrow\infty} L_n e_i = e_i$ düzgün olarak mevcut ise, bu durumda $[a,b]$ aralığı üzerinde her $f \in C[a,b]$ için $\lim_{n\rightarrow\infty} L_n f = f$ yakınsaması düzgündür.

Ayrıca Teorem 2.1 Bohmann [5] ve Korovkin [22] tarafından da incelenmiş ve aşağıdaki genel formu elde edilmiştir.

Teorem 2.2.(Bohman-Korovkin Teoremi) $L_n : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$, $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri olmak üzere, $\forall x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &= 1 + \alpha_n(x), \\ L_n(t;x) &= x + \beta_n(x), \\ L_n\left(t^2;x\right) &= x^2 + \gamma_n(x) \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

Teorem 2.1 de $e_i = t^i$, $i = 0,1,2$ fonksiyonları yaklaşım teorisinde önemli bir role sahip olup, Korovkin test-fonksiyonları olarak adlandırılır.

2.3. m-Boyutlu Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Korovkin teoremi $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$' nin sınırlı alt bölgeleri üzerinde V. I. Volkov [23] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 2.3.(Volkov Teoremi) $L_n : C([a,b]\times[c,d]) \to C([a,b]\times[c,d])$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer L_n operatörleri $n\to\infty$ için

$$\begin{aligned} L_n(1;x,y) &\rightrightarrows 1, \\ L_n(t;x,y) &\rightrightarrows x, \\ L_n(s;x,y) &\rightrightarrows y, \\ L_n\left(t^2+s^2;x,y\right) &\rightrightarrows x^2+y^2 \end{aligned}$$

şartlarını sağlarsa, bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]\times[c,d]$ kümesi üzerinde $f(x,y)$ sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.
Burada $\rightrightarrows$ düzgün yakınsama anlamındadır. Korovkin teoremi m-boyutlu uzaylarda da çalışılmış ve A. D. Gadjiev ve H. H. Hacısalihoğlu [20] tarafından 1995 yılında aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 2.4.$D\subset\mathbb{R}^m$ sınırlı bir bölge olmak üzere $C_b(D)$ ile, D bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı reel değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin. Eğer (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $K\subset D$ kompakt bölgesinde $n\to\infty$ için

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &\rightrightarrows 1, \\ L_n(t_i;x) &\rightrightarrows x_i,\ i=1,2,...,m \\ L_n\left(|t|^2;x\right) &\rightrightarrows |x|^2, \end{aligned}$$

şartlarını sağlarsa, keyfi $f\in C_b(D)$ için K üzerinde $n\to\infty$ için

$$L_n(f;x)\rightrightarrows f(x)$$

yakınsaması mevcuttur. (Burada $|x|^2=\sum_{k=1}^m x_k^2$ dir.)

2.4. Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Bir önceki kesimde verdiğimiz tüm teoremler sonlu aralıklar ve sonlu bölgeler üzerinde verilmiştir. Sınırsız aralıklar ve bölgeler üzerinde tanımlı Bernstein-Chlodowsky, Szasz-Mirakyan, Baskakov operatörleri gibi operatörler tanımlandıkça

Korovkin teoreminin sınırsız aralıklar üzerinde verilme gereksinimi oluşmuştur. 1976 yılında A. D. Gadjiev tarafından Korovkin teoreminin tüm $\mathbb{R}$' de geçerli olan versiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

$\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ olsun. Bu durumda M_f pozitif bir sabit olmak üzere

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f : |f(x)| \leq M_f \rho(x)\} \tag{2.1}$$

ve

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}) : f,\ \mathbb{R} \text{ de sürekli}\}$$

fonksiyon sınıflarını göz önüne alalım. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\rho(x)},\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

normu ile birer normlu uzaydır. Burada ρ'ya ağırlık fonksiyonu, $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir. Ayrıca $k_f \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$C_\rho^k(\mathbb{R}) = \left\{f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f\right\} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanan fonksiyon uzayı $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayı olur.

Teorem 2.5. $\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

(i) $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki bu operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(\varphi^\nu; x) - \varphi^\nu(x)\|_\rho = 0,\ \nu = 0, 1, 2 \tag{2.3}$$

şartları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunabilir ki

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f^*; x) - f^*(x)\|_\rho \geq 1$$

olur.

(ii) $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi (2.3) koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f; x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır.

Ayrıca, iki değişkenli fonksiyonlar için ağırlıklı Korovkin teoremi de A. D. Gadjiev [24] tarafından incelenmiştir.

2.5. Süreklilik Modülü ve $\mathcal{K}$-Fonksiyoneli

Lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisinde önemli çalışmalardan biri de yaklaşımın hızını belirlemek ve bu yaklaşımın hatası için bir üst sınır bulmaktır. Bunu yaparken süreklilik modülü ve $\mathcal{K}$-fonksiyoneli kullanmak en yaygın metodlardan birisidir. Aşağıdaki tanım ve teoremler [25] ve [26] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

Tanım 2.4. f, $[a,b]$ de sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x,y\in[a,b] \\ |x-y|<\delta}} |f(x) - f(y)|$$

ile tanımlanan ω fonksiyonuna, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Lemma 2.1. f, $[a,b] \subset \mathbb{R}$'de sürekli reel değerli fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlar doğrudur:

(a) $\omega(f,\delta)$ fonksiyonu δ ya göre artandır.

(b) $\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta) = 0$.

(c) $\lambda > 0$ reel sayısı için

$$\omega(f,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\,\omega(f,\delta)$$

dır.

Ayrıca yüksek mertebeden süreklilik modülü ve $\mathcal{K}$-fonksiyoneli aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.5. f, $[a,b]$ de sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\delta > 0$

sayısı için

$$\omega_2(f,\delta)=\sup_{0<h\leq\delta}\ \sup_{x,x+2h\in[a,b]}|f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)|$$

ile tanımlanan ω_2 fonksiyonuna f fonksiyonunun ikinci mertebeden süreklilik modülü denir.

Tanım 2.6. $W^2=\{g\in C[a,b]:g',g''\in C[a,b]\}$ ve $\|\cdot\|$, $C[a,b]$ üzerinde maksimum normu göstermek üzere K-fonksiyoneli

$$K_2(f,\delta)=\inf\left\{\|f-g\|+\delta\left\|g''\right\|:g\in W^2\right\}\quad(\delta>0),$$

eşitliği ile tanımlanır.

Lemma 2.2. $K_2(f,\delta)$ ve $\omega_2(f,\delta)$ için

$$K_2(f,\delta)\leq C\omega_2\left(f,\sqrt{\delta}\right)\tag{2.4}$$

olacak şekilde $C>0$ vardır.

Tanım 2.6. $f\in C[0,1]$ ve $\varphi(x)=\sqrt{x(1-x)}$, $x\in[0,1]$ olmak üzere

$$\omega_2^{\varphi}\left(f,\sqrt{\delta}\right)=\sup_{0<h\leq\sqrt{\delta}}\ \sup_{x\pm h\varphi(x)\in[0,1]}|f(x+h\varphi(x))-2f(x)+f(x-h\varphi(x))|$$

ifadesine ikinci mertebeden Ditzian-Totik düzgünlük modülü denir.

Uyarı 2.1. $\omega_2^{\varphi}(\cdot,\cdot)$ fonksiyonunun tanımında $\varphi(x)=1$ olarak seçilirse Tanım 2.5 ile verilen $\omega_2(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu elde edilir.

Tanım 2.8. $AC_{loc}[0,1]$, $[0,1]$ aralığının her alt aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı ve

$$W^2(\varphi)=\left\{g\in C[0,1]:g'\in AC_{loc}[0,1],\ \varphi^2g''\in C[0,1]\right\}$$

olmak üzere, $\omega_2^{\varphi}(\cdot,\cdot)$ fonksiyonuna karşılık gelen K-fonksiyoneli

$$\bar{K}_{2,\varphi}(f,\delta)=\inf\left\{\|f-g\|+\delta\left\|\varphi^2g''\right\|+\delta^2\left\|g''\right\|:g\in W^2(\varphi)\right\}\quad(\delta>0)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Lemma 2.3. $\bar{K}_{2,\varphi}(f,\delta)$ ve $\omega_2^{\varphi}\left(f,\sqrt{\delta}\right)$ için

$$\bar{K}_{2,\varphi}(f,\delta) \leq C\omega_2^{\varphi}\left(f,\sqrt{\delta}\right)$$

olacak şekilde $C>0$ vardır.

Tanım 2.9. ψ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\overrightarrow{\omega}_{\psi}(f,\delta) = \sup_{0<h\leq\delta}\ \sup_{x\pm h\psi(x)\in[0,1]} \left|f\left(x+h\psi(x)\right)-f(x)\right|$$

ifadesine birinci mertebeden Ditzian-Totik modülü denir.

2.6. Hipergeometrik Fonksiyonlar

Lineer pozitif operatörlerin Korovkin tipli yaklaşımlarını incelerken Korovkin test fonksiyonlarının yüksek mertebeden operatörler altında hesaplanmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Operatörlerin yapısı değiştikçe bu test fonskiyonlarının operatörler altındaki görüntüleri uzun ve karmaşık bir yapıya bürünmektedir. Bu durumlarda aşağıda tanımını ve özelliklerini vereceğimiz hipergeometrik fonksiyonlar kullanışlı bir metod sunmaktadır. Aşağıdaki tanımlar ve lemmalar [27] numaralı kaynakta bulunabilir.

Tanım 2.10. $\Gamma(x)$ ile gösterilen ve

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

genelleştirilmiş integralle ifade edilen fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

Tanım 2.11. $B(x,y)$ ile gösterilen ve

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

Lemma 2.4. Gamma ve Beta fonksiyonları arasında

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

eşitliği mevcuttur.

Tanım 2.12.α reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1) \tag{2.6}$$

ifadesine α sayısının Pochhammer gösterilimi denir.

Lemma 2.5. $\Gamma(\cdot)$, Gamma fonksiyonunu göstermek üzere, Pochhammer sembolü

$$(\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},$$
$$(\alpha)_{n+1}=\alpha(\alpha+1)_n$$

özelliklerine sahiptir.

Lemma 2.6. $|x|<1$ için

$$(1-x)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}x^n \tag{2.7}$$

dir.

Tanım 2.13. α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots \tag{2.8}$$

olarak ifade edilen seriye Gauss hipergeometrik serisi veya hipergeometrik seri denir.

(2.8) ifadesi $1+x+x^2+\ldots$ geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan bu adı alır. (2.8) ifadesine göre γ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır.

(2.8) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. $|x| = 1$ olduğu zaman $\gamma > \alpha + \beta$ ise seri mutlak yakınsaktır. $x = -1$ iken $\gamma > \alpha + \beta - 1$ olduğunda seri yakınsaktır.

(2.6) gösterimi dikkate alınarak (2.8) hipergeometrik serisi

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{2.9}$$

şeklindede ifade edilebilir. (2.9)'de görülen F'nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F'nin yapısında biri α ve β, diğeri γ olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder. (2.9)'un genelleştirilmiş ifadesi

$$ {}_pF_q(\alpha_1, \cdots, \alpha_p; \gamma_1, \cdots, \gamma_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n (\gamma_2)_n \cdots (\gamma_q)_n} \frac{x^n}{n!}$$

dir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterimi yerine F gösterimi de kullanılır. Yani

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

olup, bu fonksiyon Gauss hipergeometrik fonksiyonu veya hipergeometrik fonksiyon olarak bilinir.

Lemma 2.7. ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ fonksiyonu

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha} du$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

Lemma 2.8. $Re(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ için

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} = \frac{B(\beta, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\beta, \gamma - \beta)}$$

dır.

Lemma 2.9. $|x| < \frac{1}{2}$ için

$$ {}_2F_1(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; x) = (1-x)^{-\alpha}_2 F_1(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{x-1}) \tag{2.10}$$

dir.

2.7. Bölünmüş Farklar, İleri Fark Operatörü Ve Konvekslik

Bu bölümde verilen tanım, teorem ve lemmalar, kaynak [28]'de bulunabilir.

Tanım 2.14. $n \geq 1$ olmak üzere $x_0, x_1, ..., x_n$ ler f fonksiyonunun tanım kümesinde şeklinde $n+1$ tane nokta olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f[x] &= f(x_0) \\ f[x_0, x_1, ..., x_n] &= \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} \end{aligned} \tag{2.11}$$

ifadesine fonksiyonun verilen noktalara göre bölünmüş farkı denir.

Teorem 2.6. $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ ve bu aralık üzerinde f ve f'nin n. türevi sürekli , $n+1$-inci türevi ise (a, b)' de mevcut olsun. Bu durumda

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\eta_x)}{n!}$$

olacak şekilde en az bir $\eta_x \in (a, b)$ noktası vardır.

Tanım 2.15. $n \in \mathbb{N}$ ve $h > 0$

$$\begin{aligned} \Delta_h^0 f(x) &= f(x) \\ \Delta_h f(x) &= \Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x) \\ \Delta_h^n f(x) &= \Delta_h \left(\Delta_h^{n-1} f(x)\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Δ operatörüne ileri fark operatörü denir.

Lemma 2.10. Δ, Tanım 2.15 deki gibi verilen ileri fark operatörü olmak üzere

$$\Delta^k f(x_j) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} \binom{k}{s} f(x_{j+s}) \tag{2.12}$$

eşitliği geçerlidir.

Lemma 2.11. $\forall\ i, k \geq 0$ için $x_j = j$ olmak üzere

$$f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}] = \frac{1}{k!} \Delta^k f(x_j)$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç 2.1. Teorem 2.6 ve Lemma 2.11 göz önüne alınırsa, $\theta_{k,r} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+r}{n}\right]$ olmak üzere

$$\Delta^r_{1/n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^r f^{(r)}(\theta_{k,r}) \tag{2.13}$$

bulunur.

2008 yılında D. Cardenes-Morales ve F. J. Munoz-Delgado [29],

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$$

üçgensel küme olmak üzere, $f \in C\,(S)$, $(x, y) \in S$ ve $h \in \mathbb{R}^+$ için

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{(1,0)} f(x,y) &= f(x+h, y) - f(x,y), \\
\Delta_h^{(0,1)} f(x,y) &= f(x, y+h) - f(x,y), \\
\Delta_h^{(1,1)} f(x,y) &= f(x+h, y+h) + f(x,y) \\
&\quad - f(x+h, y) - f(x, y+h), \\
\Delta_h^{(2,0)} f(x,y) &= f(x+2h, y) - 2f(x+h, y) + f(x,y), \\
\Delta_h^{(0,2)} f(x,y) &= f(x, y+2h) - 2f(x, y+h) + f(x,y)
\end{aligned}$$

şeklindeki ileri fark operatörlerini tanımlamışlardır.

Tanımlanan bu ileri fark operatörü yardımıyla iki değişkenli fonksiyonlar için konvekslik tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 2.16. $i, j \in \mathbb{N}$, $0 < i + j \leq 2$ olmak üzere, eğer $h \in \mathbb{R}^+$ için $\Delta_h^{(i,j)} f \geq 0$ ise, $f(x, y)$ fonksiyonuna (i, j) dereceden konvekstir denir.

Uyarı 2.2. Eğer $f \in C^{(i,j)}(S)$ ve her $(x, y) \in S$ için

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x, y) \geq 0$$

ise bu durumda $f(x, y)$ fonksiyonu (i, j) dereceden konvekstir.

2.8. Lipschitz Şartı

Tanım 2.17. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında bir f fonksiyonu verilsin. Her $x, t \in [a,b]$, $M > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M |t - x|^{\alpha}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfını $Lip_M \alpha$ ile gösterelim.

Lemma 2.12. f, $[a,b]$ sınırlı aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$, $M > 0$ olsun.

(a) $f \in Lip_M \alpha$ ise f süreklidir.

(b) f türevlenebilir ve $f'(x) \leq M$ ise $f \in Lip_M 1$ dır.

(c) $f \in Lip_M \alpha \Longleftrightarrow \omega(f;\delta) \leq M\delta^{\alpha}$.

(d) $\alpha < \beta$ ise $Lip\beta \subset Lip\alpha$ olup bu ifadeler M' den bağımsızdır.

2.9. Bernstein Polinomları ve Bazı Genelleştirmeleri

Bu bölümde Bernstein polinomları ve bazı genelleştirmelerinin tanımlarını vereceğiz. İlk olarak 1912 yılında Sergej N. Bernstein [4] tarafından tanımlanan Bernstein polinomlarını verelim.

Tanım 2.18. (Bernstein Polinomları) f, $[0,1]$ üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.14}$$

olarak tanımlanan polinomlara f fonksiyonuna karşı gelen Bernstein polinomlar dizisi denir.

Sabit bir b pozitif reel sayısı için f fonksiyonu $[0,b]$ aralığında tanımlı olsun. Bu aralık üzerinde Bernstein polinomlarını tanımlamak için, $0 \leq y \leq 1$ olmak üzere $y = x/b$ dönüşümü yapılmalıdır. $[0,1]$ aralığında tanımlı Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri ile $[0,b]$ aralığında tanımlı Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri teorik açıdan benzer olmakla beraber, her iki operatörde kompakt aralıklar üzerinde bir yaklaşım metodu oluşturmaktadır. Ancak, (b_n) pozitif reel sayıların $n \to \infty$ için $b_n \to \infty$ özelliğindeki bir dizisi olmak üzere, $b = b_n$ olarak seçilirse yaklaşım fonksiyonu f, $0 \leq x < \infty$ de tanımlı olarak kabul edilebilir. Ancak, yaklaşım fonksiyonunun iki ardışık kb_n/n noktası arasındaki fark $n \to \infty$ için sıfıra gitmelidir. Ayrıca $f(t) = t^2$ fonksiyonunun $b = b_n$ seçimi altında Bernstein operatörleri altındaki görüntüsü

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{b_n x}{n}$$

olup, Korovkin teoremi gereği $b_n/n \to 0$ olmalıdır. Yukarıdaki gereklilikler ışığında I. Chlodowsky [7] 1937 yılında aşağıdaki polinomları tanımlamıştır:

Tanım 2.19.(Bernstein-Chlodowsky Polinomları) (b_n) pozitif reel sayıların

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} (b_n/n) = 0 \tag{2.15}$$

şartını sağlayan bir dizisi olmak üzere, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı ve her $[0, b_n] \subset [0, \infty)$ alt aralığı üzerinde sınırlı f fonksiyonları için,

$$C_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, 0 \leq x \leq b_n \tag{2.16}$$

olarak tanımlanan polinomlar dizisine Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisi denir.

1995 yılında ise E. A. Gadjieva ve E. İbikli [30] Bernstein-Chlodowsky polinomlarının bir genelleştirmesi olarak aşağıdaki operatörler dizisini tanımlamışlardır.

Tanım 2.20.(Genelleştirilmiş Bernstein-Chlodowsky Operatörleri) $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı ve her $[0, b_n] \subset [0, \infty)$ alt aralığı üzerinde sınırlı f fonksiyonları için

$$C_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\alpha x + \beta \frac{k}{n} b_n\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}, 0 \leq x \leq b_n$$

olarak tanımlanan polinomlar dizisine genelleştirilmiş Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisi denir.

Tanım 2.21.(Bernstein-Stancu Polinomları) α ve β, $0 \leq \alpha \leq \beta$ şartını sağlayan reel sayılar olmak üzere, $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli f fonksiyonları için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \ 0 \leq x \leq 1 \tag{2.17}$$

olarak tanımlanan polinomlara Bernstein-Stancu polinomlar dizisi denir.

Bernstein operatörleri ile süreksiz fonksiyonlara yaklaşım uygun olmadığından, integrallenebilen fonksiyonlar uzayında J. L. Durrmeyer [9] tarafından aşağıdaki toplamsal integral tipli operatörler tanımlanmıştır.

Tanım 2.22.(Bernstein-Durrmeyer Polinomları) $f \in L_1[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$D_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(t)\, dt$$

olarak tanımlanan polinomlara Bernstein-Durrmeyer polinomları denir.

A. D. Gadjiev ve A. M. Ghorbanalizadeh [13] tarafından 2010 yılında Bernstein polinomlarının aşağıdaki tek ve iki değişkenli genelleştirmeleri tanımlanmıştır.

Tanım 2.23.(Gadjiev tipli Bernstein-Stancu Polinomları) α_k, β_k, $k = 1,2$ için pozitif ve $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1$ eşitsizliğini sağlamak üzere $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşım için $\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}$ hareketli aralıkları üzerinde

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}\right)\binom{n}{r}\left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-r}, \tag{2.18}$$

olarak tanımlanan polinomlara Gadjiev tipli Bernstein-Stancu polinomları denir.

Tanım 2.24.(İki Değişkenli Gadjiev tipli Bernstein-Stancu Polinomları)

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq (n+2\alpha)/(n+\beta),\ x, y \geq \alpha/(n+\beta)\right\}$$

hareketli üçgensel bölgeleri üzerinde sürekli fonksiyonlara yaklaşım için

$$\begin{aligned} p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) &= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \\ &\quad \times \left(y-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta}-x-y\right)^{n-k-l} \end{aligned}$$

olmak üzere iki değişkenli Gadjiev tipli Bernstein-Stancu Polinomları

$$S_n^{\alpha,\alpha_k,\beta,\beta_k}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1},\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)$$

olarak tanımlanır.

3. BERNSTEIN-CHLODOWSKY-GADJİEV OPERATÖRLERİ

Tezimizin bu kısmında $S_{n,\alpha,\beta}(f;.)$ operatörlerinin Chlodowsky tipli genelleştirmesini tanımlıyoruz. α_k, β_k, $(k=1,2,3)$ pozitif sayıları

$$0\leq\alpha_2\leq\alpha_1\leq\beta_2\leq\beta_1,\ \alpha_3+\beta_3=1$$

şartlarını sağlamak üzere, f fonksiyonları $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı ve her

$$\left[\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n,\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\right]\subset[0,\infty)$$

hareketli alt aralığı üzerinde sınırlı olsun.

$$p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x)=\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{x}{b_n}\right)^{n-r}$$

olmak üzere, Gadjiev tipli Bernstein-Stancu polinomlarının Chlodowsky tipli genelleştirmesini

$$T_{n,\alpha,\beta}(f;x)=\sum_{r=0}^{n}f\left(\alpha_3x+\beta_3\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x),\tag{3.1}$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu operatörleri Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörleri olarak isimlendireceğiz. Tanımladığımız bu yeni operatörler dizisi lineer ve pozitiftir. Ayrıca;

(1) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_2=0$ ve $b_n=1$ seçilirse, (2.14) ile verilen Bernstein polinomlarını,

(2) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_2=0$ seçilirse, (2.16) ile verilen Bernstein-Chlodowsky polinomlarını,

(3) $\alpha_2=\alpha_3=\beta_2=0$ ve $b_n=1$ seçilirse, (2.17) ile verilen Bernstein-Stancu polinomlarını,

(4) $\alpha_3=0$ ve $b_n=1$ seçilirse, (2.18) ile verilen Gadjiev tipli Bernstein-Stancu polinomlarını

elde ederiz. Operatörümüzün tanımına dikkat edilirse, yeni tanımlanan operatörlerin genelde polinom olmadığı görülmektedir. Örneğin; $\alpha_3\neq0$ ve $f(x)=$

$\sin(x^2)$ olarak seçilirse, $T_{n,\alpha,\beta}(f;x)$ polinom tipli değildir. Ancak polinomları polinomlara dönüştürmektedir.

3.1. $T_{n,\alpha,\beta}$ Operatörlerinin Ağırlıklı Yaklaşım Özellikleri

$T_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerinin yaklaşım özelliklerini çalışırken (2.1) ve (2.2) ile verilen ağırlıklı uzayları özel olarak $\varphi(x) = x$ alacağız. Yani,

$$C[0,\infty) = \{f : \; f, \; [0,\infty) \text{ üzerinde sürekli}\}.$$

M_f, f' e bağlı pozitif sabit olmak üzere,

$$B_2[0,\infty) = \left\{f : \; f, \; [0,\infty) \text{ üzerinde tanımlı ve } |f(x)| \leq M_f\left(1+x^2\right)\right\},$$

$$C_2[0,\infty) = B_2[0,\infty) \cap C[0,\infty)$$

ve

$$C_2^*[0,\infty) = \left\{f \in C_2[0,\infty) : \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2} = K_f < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzaylarını gözönüne alacağız. Bu uzaylar üzerindeki norm ise

$$\|f\|_2 = \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

olarak tanımlanır. Aşağıda yeni tanımlanan operatörlerimizin $\rho(x) = 1+x^2$ ağırlık fonksiyonuna göre yaklaşımını verelim:

Teorem 3.1. $f \in C_2^*[0,\infty)$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n} \frac{|T_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)|}{1+x^2} = 0$$

dır.

İspat. İşlemlerimizde kolaylık sağlaması açısından

$$T_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) = \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x), \tag{3.2}$$

yardımcı operatörünü kullanacağız. $T_{n,\alpha,\beta}(f;.)$ operatörünün tanımını ve $T^{*}_{n,\alpha,\beta}(f;.)$ operatörünü göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
& T_{n,\alpha,\beta}(1;x) \\
= \; & T^{*}_{n,\alpha,\beta}(1;x) \\
= \; & \sum_{r=0}^{n} p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x) \\
= \; & \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^{n}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}+\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{x}{b_n}\right)^{n}=1, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\le x\le\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n}\frac{\left|T_{n,\alpha,\beta}(1;x)-1\right|}{1+x^2}=0 \qquad (3.4)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca (3.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& T^{*}_{n,\alpha,\beta}(t;x) \\
= \; & \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^{n}\sum_{r=0}^{n}\frac{r}{n}\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r}\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{x}{b_n}\right)^{n-r} \\
= \; & \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^{n}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r+1}\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{x}{b_n}\right)^{n-r-1} \\
= \; & \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^{n}\left(\frac{n}{n+\beta_2}\right)^{n-1}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right) \\
= \; & \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& T^{*}_{n,\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) \\
= \; & \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^{n}\sum_{r=0}^{n}\frac{r^2}{n^2}\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r}\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{x}{b_n}\right)^{n-r} \\
= \; & \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^{n}\sum_{r=2}^{n}\frac{r(r-1)}{n^2}\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r}\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{x}{b_n}\right)^{n-r} \\
& +\left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{n^2}\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r}\left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}-\frac{x}{b_n}\right)^{n-r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \frac{n-1}{n} \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-2}{r} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r+2} \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-r-2} \\
&+ \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r+1} \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-r-2} \\
&= \frac{(n-1)}{n} \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^2 \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2 + \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right) \frac{1}{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right), \quad (3.6)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Operatörün ve yardımcı operatörün tanımından,

$$
\begin{aligned}
& T_{n,\alpha,\beta}(t;x) \\
&= \sum_{r=0}^{n} \left(\alpha_3 x + \beta_3 \frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1} b_n\right) p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x) \\
&= \alpha_3 x \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r} \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-r} \\
&+ \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \frac{n\beta_3}{n+\beta_1} b_n \sum_{r=0}^{n} \frac{r}{n} \binom{n}{r} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r} \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-r} \\
&+ \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \frac{\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1} b_n \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^{r} \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-r} \\
&= \alpha_3 x T^*_{n,\alpha,\beta}(1;x) + \frac{n\beta_3}{n+\beta_1} b_n T^*_{n,\alpha,\beta}(t;x) + T^*_{n,\alpha,\beta}(1;x) \frac{\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1} b_n,
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.3) ve (3.5) eşitlikleri gözönüne alınırsa,

$$
T_{n,\alpha,\beta}(t;x) = \alpha_3 x + \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right) \beta_3 x + \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right) \beta_3 b_n
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} b_n \le x \le \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} b_n} \frac{|T_{n,\alpha,\beta}(t;x) - x|}{1+x^2} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \left\{ \left| \alpha_3 + \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right) \beta_3 - 1 \right| + \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{n+\beta_1}\right) \beta_3 b_n \right\} \\
&= \alpha_3 + \beta_3 - 1 = 0 \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer olarak,

$$
\begin{aligned}
& T_{n,\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) \\
= {} & \sum_{r=0}^{n}\left(\alpha_3 x+\beta_3\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)^2 p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x) \\
= {} & (\alpha_3 x)^2\sum_{r=0}^{n}p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x) \\
& +\sum_{r=0}^{n}\left(2x\alpha_3\beta_3\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x) \\
& +\sum_{r=0}^{n}\left(\beta_3\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)^2 p_{n,r}^{\alpha_2,\beta_2}(x)
\end{aligned}
$$

bulunur ve yardımcı operatör kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& T_{n,\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) \\
= {} & (\alpha_3 x)^2 T_{n,\alpha,\beta}^{*}(1;x)+\left(2x\alpha_3\beta_3\frac{n}{n+\beta_1}b_n\right)T_{n,\alpha,\beta}^{*}(t;x) \\
& +\left(2x\alpha_3\beta_3\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)T_{n,\alpha,\beta}^{*}(1;x) \\
& +\left(\frac{n\beta_3}{n+\beta_1}b_n\right)^2 T_{n,\alpha,\beta}^{*}\left(t^2;x\right) \\
& +\left(\frac{2\beta_3^2\alpha_1 n}{(n+\beta_1)^2}b_n^2\right)T_{n,\alpha,\beta}^{*}(t;x) \\
& +\left(\frac{\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)^2 T_{n,\alpha,\beta}^{*}(1;x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.3), (3.5), ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& T_{n,\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) \\
& =\left((\alpha_3 x)^2+2x\alpha_3\beta_3\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}b_n+\left(\frac{\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)^2\right) \\
& +\beta_3\left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)\left(x-\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\right) \\
& \times\left(2x\alpha_3+\frac{2\beta_3\alpha_1 b_n}{n+\beta_1}+\frac{\beta_3(n-1)(n+\beta_2)}{n(n+\beta_1)}\left(x-\frac{\alpha_2 b_n}{n+\beta_2}\right)+\frac{\beta_3 b_n}{n+\beta_1}\right)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

bulunur. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n} \frac{\left|T_{n,\alpha,\beta}\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n} \left\{\frac{x^2}{1+x^2}\left[\alpha_3^2+\frac{\beta_3\left(n+\beta_2\right)}{n+\beta_1}\left(2\alpha_3+\frac{\beta_3\left(n-1\right)\left(n+\beta_2\right)}{n\left(n+\beta_1\right)}\right)-1\right]\right.$$

$$+\frac{x}{1+x^2}\left[\frac{2\alpha_3\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1}b_n+\frac{\beta_3\left(n+\beta_2\right)}{n+\beta_1}\left(\frac{2\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1}b_n-\frac{\beta_3\left(n-1\right)\alpha_2 b_n}{n\left(n+\beta_1\right)}+\frac{\beta_3 b_n}{n+\beta_1}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\beta_3\alpha_2 b_n}{n+\beta_1}\left(2\alpha_3+\frac{\beta_3\left(n-1\right)\left(n+\beta_2\right)}{n\left(n+\beta_1\right)}\right)\right]+\frac{1}{1+x^2}\left[\left(\frac{\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)^2\right.$$

$$\left.\left.-\beta_3\left(\frac{\alpha_2 b_n}{n+\beta_1}\right)\left(\frac{2\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1}b_n-\frac{\beta_3}{n+\beta_1}b_n\left(\frac{n-1}{n}\alpha_2-1\right)\right)\right]\right\}$$

$$\leq \alpha_3^2+2\alpha_3\beta_3+\beta_3^2-1=0. \tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n} \frac{\left|T_{n,\alpha,\beta}\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2}=0$$

olduğu anlamına gelir. Diğer taraftan

$$T_n\left(f;x\right):=\begin{cases} f\left(x\right) & , \quad 0\leq x\leq\frac{\alpha_2}{n+\beta_1}b_n \\ T_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right) & , \quad \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n \\ f\left(x\right) & , \quad \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\leq x<\infty \end{cases} \tag{3.10}$$

operatörünü kullanırsak,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(f\right)-f\right\|_2=\lim_{n\to\infty} \sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n} \frac{\left|T_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|}{1+x^2}. \tag{3.11}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.4), (3.7) ve (3.9) kullanılırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(t^\nu;\right)-x^\nu\right\|_2=0,\ \nu=0,1,2$$

eşitliği elde edilir. Teorem 2.5 (ii) ifadesine göre $f\in C_2^*[0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_n\left(f\right)-f\right\|_2=0$$

elde edilir.

Teorem 3.2 $f\in C_2^*[0,\infty)$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n} \frac{\left|T_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|}{1+x^2}=0$$

dir.

İspat. $f \in C_2^*[0,\infty)$ olduğundan $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2} = K_f$ dir. Dolayısıyla $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2} = 0$ özelliğindeki fonksiyonlar için ispatı vermek yeterlidir. Örneğin,

$$\varphi(x) = f(x) - K_f\left(1+x^2\right)$$

olsun. Bu durumda yeterince büyük bir $x_0 > 0$ için $x > x_0$ olduğunda $\frac{|f(x)|}{1+x^2} < \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. (3.10) ile verilen operatör kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{0\le x<\infty} \frac{|T_n(f;x) - f(x)|}{1+x^2} \\
\le\ & \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{0\le x\le x_0} \frac{|T_n(f;x) - f(x)|}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{x>x_0} \frac{|T_n(f;x) - f(x)|}{1+x^2} \\
\le\ & \frac{1}{\sqrt{b_n}} \|T_n(f) - f\|_{C[0,\ x_0]} + \frac{1}{\sqrt{b_n}} \|f\|_2 \sup_{x>x_0} \frac{T_n(1+t^2;x)}{1+x^2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{x>x_0} \frac{|f(x)|}{1+x^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Korovkin teoreminden eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim $n \to \infty$ için sıfıra gider. Ayrıca, $x > x_0$ olduğunda $\frac{|f(x)|}{1+x^2} < \varepsilon$ olduğundan son terimde $n \to \infty$ için sıfıra gider. İkinci terim için ise (3.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{x>x_0} \frac{T_n(1+t^2;x)}{1+x^2} \\
\le\ & \frac{\alpha_3^2 + 2\alpha_3\beta_3}{\sqrt{b_n}} + 2\frac{\alpha_3\beta_3}{\sqrt{b_n}} \frac{\alpha_1}{n+\beta_1} b_n \\
& + \frac{1}{\sqrt{b_n}} \left(\frac{\beta_3\alpha_1}{n+\beta_1} b_n\right)^2 \\
& + \frac{1}{\sqrt{b_n}} \frac{2\beta_3^2\alpha_1}{n+\beta_1} b_n + \frac{1}{\sqrt{b_n}} \frac{\beta_3^2(n-1)}{n} \\
& + \frac{1}{\sqrt{b_n}} \frac{\beta_3^2}{n+\beta_1} b_n
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Eşitsizliğin sağ tarafı $n \to \infty$ için sıfıra gider. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{0\le x<\infty} \frac{|T_n(f;x) - f(x)|}{1+x^2} \\
=\ & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b_n}} \sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} b_n \le x \le \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} b_n} \frac{|T_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)|}{1+x^2} = 0 \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.2. $T_{n,\alpha,\beta}$ Operatörlerinin Türevinin Yakınsaklığı

Bu bölümde çalışmalarımızı $\alpha_3 = 0$ seçimi altında yapacağız ve bu seçim altında (3.1) operatörlerini de $\mathcal{T}_{n,\alpha,\beta}$ sembolü ile göstereceğiz. İlk olarak $\mathcal{T}_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün k-ıncı türevini, f fonksiyonunun k-ıncı ileri farkları cinsinden verelim.

Lemma 3.1. $k \geq 0$ herhangi bir pozitif tamsayı, $h = b_{n+k}/n+k+\beta_1$ ve $\Delta_h^k f$ da f fonksiyonunun k-ıncı ileri farkı olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) &= \frac{(n+k)!}{n!}\left(\frac{1}{b_{n+k}}\right)^k\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^{n+k}\sum_{r=0}^{n}\Delta_h^k f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)\\ &\quad\times\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}-\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n-r}\end{aligned}$$

dır.

İspat. Operatörün tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) &= \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^{n+k}\sum_{r=0}^{n+k} f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)\binom{n+k}{r}\\ &\quad\times\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}-\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n+k-r}\end{aligned}$$

yazabiliriz. $\mathcal{T}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün k-kez türevini alırsak,

$$P(x) = \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}-\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n+k-r}$$

olmak üzere,

$$\mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) = \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^{n+k}\sum_{r=0}^{n+k} f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)\binom{n+k}{r}P(x)$$

olarak yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\frac{d^s}{dx^s}\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^r = \begin{cases}\frac{r!}{(r-s)!}\left(\frac{1}{b_{n+k}}\right)^s\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^{r-s} & ,r\text{-}s \geq 0\\ 0 & ,r\text{-}s < 0\end{cases}$$

ve

$$\frac{d^{k-s}}{dx^{k-s}}\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}\text{-}\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n+k-r}$$
$$=\begin{cases}\frac{(n+k-r)!}{(n+s-r)!}\left(\frac{\text{-}1}{b_{n+k}}\right)^{k-s}\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}\text{-}\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n+s-r} & ,r\text{-}s\leq n\\ \\ 0 & ,r\text{-}s>n\end{cases}$$

eşitlikleri ile $P(x)$ için Leibnitz kuralını kullanırsak,

$$\begin{aligned}P(x) &= \left(\frac{1}{b_{n+k}}\right)^k\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{k}{s}\frac{r!}{(r-s)!}\frac{(n+k-r)!}{(n+s-r)!}\\ &\quad\times\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^{r-s}\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}-\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n+s-r}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\binom{n+k}{r}\frac{r!}{(r-s)!}\frac{(n+k-r)!}{(n+s-r)!}=\frac{(n+k)!}{n!}\binom{n}{r-s}$$

eşitliği kullanılırsa, $\mathcal{T}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün k-ıncı türevini

$$\begin{aligned}&\frac{(n+k)!}{n!}\left(\frac{1}{b_{n+k}}\right)^k\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^{n+k}\sum_{r=0}^{n}\binom{k}{s}f\left(\frac{r+s+\alpha_1}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)\\ &\times\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^{r}\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}-\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n-r}.\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. (2.12) eşitliğine göre $h=b_{n+k}/n+k+\beta_1$ olarak seçilirse

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{k}{s}f\left(\frac{r+s+\alpha_1}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)=\Delta_h^k f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) &= \frac{(n+k)!}{n!}\left(\frac{1}{b_{n+k}}\right)^k\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^{n+k}\sum_{r=0}^{n}\Delta_h^k f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)\\ &\quad\times\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^{r}\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}-\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n-r},\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi Lipschitz uzayına ait fonksiyonlar için operatörlerimizin türevlerinin yaklaşım fonksiyonunun türevine ağırlıklı yaklaşımını veren teoremimizi verelim.

Teorem 3.3. f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde $(k-1)$-inci $(k\geq 1)$ mertebeden sürekli türevlenebilir ve $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere k-ıncı türevi $Lip_M\alpha$ sınıfından olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}b_{n+k}\leq x\leq\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}b_{n+k}}\frac{\left|\mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x)-f^{(k)}(x)\right|}{1+x^{\alpha}}=0$$

dır.

İspat. (2.13) eşitliğine göre

$$(r+\alpha_1)\,b_{n+k}/\,(n+k+\beta_1)<\xi_r<(r+\alpha_1+k)\,b_{n+k}/\,(n+k+\beta_1)$$

olmak üzere

$$\Delta_h^k f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)=f^{(k)}(\xi_r)\,\frac{(b_{n+k})^k}{(n+k+\beta_1)^k}$$

olacak şekilde ξ_r sayısı vardır. $0<\theta_r<1$ için $\xi_r=\frac{r+\alpha_1+\theta_r k}{n+k+\beta_1}b_{n+k}$ olup, Lemma 3.1' den,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) &= \frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k}\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^{n+k}\sum_{r=0}^{n}f^{(k)}\left(\frac{r+\alpha_1+\theta_r k}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)\\ &\quad\times\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}-\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n-r}\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x)-f^{(k)}(x)\\ =\ &\frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k}\left\{\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^{n+k}\sum_{r=0}^{n}\left[f^{(k)}\left(\frac{r+\alpha_1+\theta_r k}{n+k+\beta_1}b_{n+k}\right)-f^{(k)}(x)\right]\right.\\ &\left.\times\binom{n}{r}\left(\frac{x}{b_{n+k}}-\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}\right)^r\left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}-\frac{x}{b_{n+k}}\right)^{n-r}\right\}\\ &+f^{(k)}(x)\left[\frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k}\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^k-1\right],\end{aligned}$$

dır. Hipotezimize göre $f^{(k)} \in Lip_M \alpha$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\left| \mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) - f^{(k)}(x) \right| \\
\leq\ & M \frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k} \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^k \\
& \times \left\{ \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^n \sum_{r=0}^{n} \left| \frac{r+\alpha_1+\theta_r k}{n+k+\beta_1} b_{n+k} - x \right|^{\alpha} \binom{n}{r} \right. \\
& \left. \times \left(\frac{x}{b_{n+k}} - \frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2} \right)^r \left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2} - \frac{x}{b_{n+k}} \right)^{n-r} \right\} \\
& + \left| f^{(k)}(x) \right| \left| \frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k} \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^k - 1 \right|,
\end{aligned}$$

yazılabilir. $p = \frac{2}{\alpha}$, $q = \frac{2}{2-\alpha}$ olarak seçip Hölder eşitsizliği ve

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leq \left| f^{(k)}(0) \right| + M x^{\alpha} \leq M_f (1 + x^{\alpha})$$

eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&\left| \mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) - f^{(k)}(x) \right| \\
\leq\ & M \frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k} \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^k \\
& \times \left\{ \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^n \sum_{r=0}^{n} \left(\frac{r+\alpha_1+\theta_r k}{n+k+\beta_1} b_{n+k} - x \right)^2 \right. \\
& \left. \times \binom{n}{r} \left(\frac{x}{b_{n+k}} - \frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2} \right)^r \left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2} - \frac{x}{b_{n+k}} \right)^{n-r} \right\}^{\alpha/2} \\
& + M_f (1 + x^{\alpha}) \left| \frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k} \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^k - 1 \right| \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\tilde{\mathcal{T}}_{n,\alpha,\beta}$ operatörü

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{T}}_{n,\alpha,\beta}(f;x) &= \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^n \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r+\alpha_1+k}{n+k+\beta_1} b_{n+k} \right) \\
& \times \binom{n}{r} \left(\frac{x}{b_{n+k}} - \frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2} \right)^r \left(\frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2} - \frac{x}{b_{n+k}} \right)^{n-r}
\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa (3.13) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&\left| \mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) - f^{(k)}(x) \right| \\
\leq\ & M \frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k} \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^k \left[\tilde{\mathcal{T}}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2 ; x \right) \right]^{\alpha/2} \\
& + M_f (1 + x^{\alpha}) \left| \frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k} \left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k} \right)^k - 1 \right|
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan, $\tilde{\mathcal{T}}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &:= \left[\left(\left(\frac{n}{n+k}\right)\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k+\beta_1}\right)-1\right)^2 - n\left(\frac{1}{n+k}\right)^2\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k+\beta_1}\right)\right], \\
\sigma_n &:= \left(\frac{b_{n+k}}{n+k+\beta_1}\right)\left[\left(\frac{2n}{n+k}\right)\alpha_2 - 2(\alpha_1+k)\right. \\
&\quad \left. -2\left(\frac{n}{n+k}\right)^2\frac{(n+k+\beta_2)}{n+k+\beta_1}\alpha_2 + 2(\alpha_1+k+1)\left(\frac{n}{n+k}\right)\frac{(n+k+\beta_2)}{n+k+\beta_1}\right], \\
\tau_n &:= \left(\frac{b_{n+k}}{n+k+\beta_1}\right)^2\left\{\left[\left(\frac{n}{n+k}\right)\alpha_2 - (\alpha_1+k)\left(\frac{b_{n+k}}{n+k+\beta_1}\right)\right]^2 + 2\alpha_2\left(\frac{n}{n+k}\right)\right\},
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|\mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) - f^{(k)}(x)\right|}{1+x^\alpha} \\
\leq\ & M\frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k}\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^k\frac{1}{1+x^\alpha}\left[x^2\gamma_n + x\sigma_n + \tau_n\right]^{\frac{\alpha}{2}} \\
&+M_f\left|\frac{(n+k)!}{n!\,(n+k+\beta_1)^k}\left(\frac{n+k+\beta_2}{n+k}\right)^k - 1\right|,
\end{aligned}$$

elde edilir. $x \in \left[\frac{\alpha_2}{n+k+\beta_2}b_{n+k}, \frac{n+k+\alpha_2}{n+k+\beta_2}b_{n+k}\right]$ üzerinden supremum alınıp, $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2}b_{n+k}\leq x\leq\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}b_{n+k}}\frac{\left|\mathcal{T}^{(k)}_{n+k,\alpha,\beta}(f;x) - f^{(k)}(x)\right|}{1+x^\alpha} = 0,$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-CHLODOWSKY-GADJİEV OPERATÖRLERİ

Bu bölümde, tüm kenarları hareketli olan üçgensel bölgeler üzerinde, iki değişkenli Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörlerini tanımlayacağız. Operatörümüzün tanımını vermeden, bu bölümde göz önüne alacağımız hareketli üçgensel bölgeleri ve fonksiyon uzaylarını tanımlayalım. α, β, a pozitif sayılar ve $\alpha \leq \beta$ şartı sağlanmak üzere

$$\Delta_a = \{(x, y) : x + y \leq a,\ x, y \geq 0\}$$

ile sabit kenarlı üçgensel kümeyi,

$$\Delta_a^{n,\alpha,\beta} = \left\{(x, y) : x + y \leq a,\ x, y \geq \frac{\alpha}{n+\beta} b_n\right\}$$

ile dik kenarları hareketli olan üçgensel küme ve

$$\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta} = \left\{(x, y) : x + y \leq \frac{n+2\alpha}{n+\beta} b_n,\ x, y \geq \frac{\alpha}{n+\beta} b_n\right\}$$

ile tüm kenarları hareketli olan üçgensel kümeleri gösterelim. Yukarıda tanımlanan üçgensel kümelerin tanımına göre $\Delta_a^{n,\alpha,\beta} \subset \Delta_a$ ve $\Delta_a^{n,\alpha,\beta} \subset \hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}$ kapsamalarının olduğu görülür ve $\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}$ bölgesi $n \to \infty$ için $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ bölgesine genişlemektedir.

Ayrıca

$$\rho(x, y) = 1 + x^2 + y^2,\ x, y \in \mathbb{R}_+$$

olmak üzere $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$, M_f sadece f'e bağlı bir sabit olmak üzere,

$$|f(x, y)| \leq M_f \rho(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan tüm sürekli fonksiyonların uzayı olsun.

$C_\rho^0(\mathbb{R}_+^2)$ ise $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayının alt uzayı olup,

$$\lim_{x+y\to\infty} \frac{f(x, y)}{1 + x^2 + y^2} = 0$$

şartını sağlayan fonksiyonların uzayıdır. Yukarıda tanımları verilen tüm fonksiyon uzayları, üzerinde tanımlı olan

$$\|f\|_{\rho} = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}_{+}^{2}} \frac{|f(x,y)|}{1+x^{2}+y^{2}} \tag{4.1}$$

normu ile birer normlu uzaydır.

İki değişkenli f fonksiyonu için tüm kenarları hareketli olan $\hat{\Delta}_{n}^{\alpha,\beta}$ üçgensel bölgesi üzerinde Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörlerini, $f \in C_{\rho}\left(\mathbb{R}_{+}^{2}\right)$ ve $\alpha, \beta, \alpha_{r}, \beta_{r}$ $(r = 1, 2, 3)$,

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_{1} \leq \beta_{1} \leq \beta,$$

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_{2} \leq \beta_{2} \leq \beta \text{ ve } \alpha_{3} + \beta_{3} = 1$$

şartını sağlayan pozitif reel sayılar ve

$$\begin{aligned} p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) &= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(\frac{x}{b_{n}}-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k} \\ &\times\left(\frac{y}{b_{n}}-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{l}\left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta}-\frac{x+y}{b_{n}}\right)^{n-k-l} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$C_{n}^{\alpha,\alpha_{r},\beta,\beta_{r}}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} f\left(\alpha_{3}x+\beta_{3}\frac{k+\alpha_{1}}{n+\beta_{1}}b_{n}, \alpha_{3}y+\beta_{3}\frac{l+\alpha_{2}}{n+\beta_{2}}b_{n}\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) \tag{4.2}$$

olarak tanımlayalım. (4.2) ile tanımlanan operatörler lineer ve pozitiftir. Ayrıca α_{r} ve β_{r}'nin bazı özel durumlarında aşağıdaki operatörler elde edilir:

(1) Eğer $\alpha = \alpha_{1} = \alpha_{2} = \alpha_{3} = \beta_{1} = \beta_{2} = \beta = 0$ ve $b_{n} = 1$ seçersek, Δ_{1} üzerinde klasik iki değişkenli olan ve (2.14) ile verilen Bernstein polinomları elde edilir.

(2) Eğer $\alpha = \alpha_{1} = \alpha_{2} = \alpha_{3} = \beta_{1} = \beta_{2} = \beta = 0$ seçersek, $\Delta_{b_{n}}$ üzerinde klasik iki değişkenli olan Bernstein-Chlodowsky [31] polinomları elde edilir.

(3) Eğer $\alpha_{3} = 0$ ve $b_{n} = 1$ seçersek, Δ üzerinde iki değişkenli olan (1.2) ile verilen Gadjiev tipli Bernstein-Stancu polinomları elde edilir.

4.1. $C_{n}^{\alpha,\alpha_{r},\beta,\beta_{r}}$ Operatörlerinin Konveksliği

Bu bölümde iki değişkenli f fonksiyonunun $\hat{\Delta}_{n}^{\alpha,\beta}$ hareketli üçgensel bölgeleri üzerinde konveks olması durumunda $C_{n}^{\alpha,\alpha_{r},\beta,\beta_{r}}$ operatörlerinin de konveks olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.1. $i, j \in \mathbb{N}$ ve $0 < i + j \leq 2$ olmak üzere, $f \in C^{i+j}(\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta})$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i)Eğer $f(\cdot,\cdot)$, $(1,0)$ (veya $(0,1)$) mertebeden konveks ise, bu durumda $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;\cdot,\cdot)$ operatörleri de $(1,0)$ (veya $(0,1)$) mertebeden konvekstir.

(ii)Eğer $f(\cdot,\cdot)$, $(2,0)$ (veya $(0,2)$) mertebeden konveks ise, bu durumda $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;\cdot,\cdot)$ operatörleri de $(2,0)$ (veya $(0,2)$) mertebeden konvekstir.

(iii) Eğer $f(\cdot,\cdot)$, $(1,1)$ mertebeden konveks ise, bu durumda $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;\cdot,\cdot)$ operatörleri de $(1,1)$ mertebeden konvekstir.

İspat. İspatımıza $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}$ operatörünün kısmi türevlerini alarak başlayacağız. Hesaplamalarımıza başlamadan önce

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \alpha_3 x + \beta_3 \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} b_n \quad , \quad & \gamma_0 &= \alpha_3 y + \beta_3 \frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2} b_n \\
\sigma_1 &= \alpha_3 x + \beta_3 \frac{k+1+\alpha_1}{n+\beta_1} b_n \quad , \quad & \gamma_1 &= \alpha_3 y + \beta_3 \frac{l+1+\alpha_2}{n+\beta_2} b_n \\
\sigma_2 &= \alpha_3 x + \beta_3 \frac{k+2+\alpha_1}{n+\beta_1} b_n \quad \text{ve} \quad & \gamma_2 &= \alpha_3 y + \beta_3 \frac{l+2+\alpha_2}{n+\beta_2} b_n .
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) &= \frac{n}{b_n}\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \binom{n-1}{k}\binom{n-k-1}{l} \\
&\times \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\frac{y}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta} - \frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-l-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) &= \frac{n(n-1)}{b_n^2}\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n \binom{n-2}{k}\binom{n-k-2}{l} \\
&\times \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k \left(\frac{y}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^l \left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta} - \frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-l-2}
\end{aligned}$$

notasyonlarını tanımlayalım. Bu notasyonlar ve temel hesaplamalar ile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)}{\partial x} &= \alpha_3 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} f_x(\sigma_0,\gamma_0)\, p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k-1} \left[f(\sigma_1,\gamma_0) - f(\sigma_0,\gamma_0)\right] \boldsymbol{\rho}_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y), \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)}{\partial y} &= \alpha_3 \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} f_y\left(\sigma_0,\gamma_0\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} \left[f\left(\sigma_0,\gamma_1\right) - f\left(\sigma_0,\gamma_0\right)\right] \boldsymbol{\rho}_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right),
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)}{\partial x^2} &= \alpha_3^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} f_{xx}\left(\sigma_0,\gamma_0\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right) \\
&+ 2\alpha_3 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} \left[f_x\left(\sigma_1,\gamma_0\right) - f_x\left(\sigma_0,\gamma_0\right)\right] \boldsymbol{\rho}_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-k-2} \left[f\left(\sigma_2,\gamma_0\right) - 2f\left(\sigma_1,\gamma_0\right) + f\left(\sigma_0,\gamma_0\right)\right] r_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right),
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)}{\partial y^2} &= \alpha_3^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} f_{yy}\left(\sigma_0,\gamma_0\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right) \\
&+ 2\alpha_3 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} \left[f_y\left(\sigma_0,\gamma_1\right) - f_y\left(\sigma_0,\gamma_0\right)\right] \boldsymbol{\rho}_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-k-2} \left[f\left(\sigma_0,\gamma_2\right) - 2f\left(\sigma_0,\gamma_1\right) + f\left(\sigma_0,\gamma_0\right)\right] r_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right),
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)}{\partial x \partial y} &= \alpha_3^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} f_{xy}\left(\sigma_0,\gamma_0\right) p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right) \\
&+ \alpha_3 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} \left[f_x\left(\sigma_0,\gamma_1\right) - f_x\left(\sigma_0,\gamma_0\right)\right] \boldsymbol{\rho}_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right) \\
&+ \alpha_3 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} \left[f_y\left(\sigma_1,\gamma_0\right) - f_y\left(\sigma_0,\gamma_0\right)\right] \boldsymbol{\rho}_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{n-k-2} \left[f\left(\sigma_1,\gamma_1\right) - f\left(\sigma_0,\gamma_1\right)\right. \\
&\left. - f\left(\sigma_1,\gamma_0\right) + f\left(\sigma_0,\gamma_0\right)\right] r_{n,\alpha,\beta}^{k,l}\left(x,y\right)
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

oldukları elde edilebilir. Açıktır ki,

$$
\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \frac{\beta_3 b_n}{n+\beta_1} = h \in \mathbb{R}^+,\ \gamma_2 - \gamma_1 = \gamma_1 - \gamma_0 = \frac{\beta_3 b_n}{n+\beta_2} = h^* \in \mathbb{R}^+,
$$

$$\sigma_2-\sigma_0=\frac{2\beta_3 b_n}{n+\beta_1}=h_1\in\mathbb{R}^+ \text{ ve } \gamma_2-\gamma_0=\frac{2\beta_3 b_n}{n+\beta_2}=h_1^*\in\mathbb{R}^+.$$

$i)$ ispatı için, (4.3) (veya (4.4)) eşitliklerini gözönüne alalım. $f(x,y)$ fonksiyonu $(1,0)$ (veya $(0,1)$) mertebeden konveks olduğu için,

$$f(\sigma_1,\gamma_0)-f(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0 \text{ (veya } f(\sigma_0,\gamma_1)-f(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0)$$

dır. Diğer taraftan $f\in C^{(1,0)}(\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta})$ (veya $f\in C^{(0,1)}(\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta})$) olduğundan

$$f_x(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0 \text{ (veya } f_y(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0)$$

dır. Böylece $\frac{\partial C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}f}{\partial x}\geq 0$ (veya $\frac{\partial C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}f}{\partial y}\geq 0$) dır ki bu da $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)$ nin $(1,0)$ (veya $(0,1)$) mertebeden konveksliği anlamına gelir ve

$$f_y(\sigma_1,\gamma_0)-f_y(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0$$

dır. Böylece

$$\frac{\partial^2 C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)}{\partial x\partial y}\geq 0$$

dır ki bu da $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)$ nin $(1,1)$ mertebeden konveks olduğu anlamına gelir.

$ii)$ ispatı için, (4.5) (veya (4.6)) eşitliklerini gözönüne alalım. $f(x,y)$, $(2,0)$ (veya $(0,2)$) mertebeden konveks olduğundan,

$$f(\sigma_2,\gamma_0)-2f(\sigma_1,\gamma_0)+f(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0 \text{ (veya } f(\sigma_0,\gamma_2)-2f(\sigma_0,\gamma_1)+f(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0)$$

dır. $f\in C^{(2,0)}(\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta})$ (veya $f\in C^{(0,2)}(\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta})$) olduğundan

$$f_{xx}(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0 \text{ (veya } f_{yy}(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0)$$

ve

$$f_x(\sigma_1,\gamma_0)-f_x(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0 \text{ (veya } f_y(\sigma_0,\gamma_1)-f_y(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0)$$

dır. Böylece

$$\frac{\partial^2 C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}f}{\partial x^2}\geq 0 \text{ (veya } \frac{\partial^2 C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}f}{\partial y^2}\geq 0)$$

dır ki bu da $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)$ nin $(2,0)$ (veya $(0,2)$) mertebeden konveksliği anlamına gelir.

$iii)$ ispatı için, (4.7) eşitliğini göz önüne alalım. $f(x,y)$, $(1,1)$ mertebeden konveks olduğundan,

$$f(\sigma_1,\gamma_1)-f(\sigma_0,\gamma_1)-f(\sigma_1,\gamma_0)+f(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0$$

dır. $f\in C^{(1,1)}(\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta})$ olduğundan,

$$f_{xy}(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0 \text{ ve } f_x(\sigma_0,\gamma_1)-f_x(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0$$

ve

$$f_y(\sigma_1,\gamma_0)-f_y(\sigma_0,\gamma_0)\geq 0$$

dır. Böylece

$$\frac{\partial^2 C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)}{\partial x\partial y}\geq 0$$

olur ve bu $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)$ nin $(1,1)$ mertebeden konveks olduğunu gösterir.

Yukarıdaki teoremde $\alpha_3=0$ seçilirse, yaklaşım fonksiyonun türevlenebilme şartınına ihtiyaç kalmayıp, aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1. $i,j\in\mathbb{N}$ ve $0<i+j\leq 2$ olmak üzere $f\in C(\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta})$ olsun. Bu durumda

1. Eğer $f(x,y)$, $(1,0)$ (veya $(0,1)$) mertebeden konveks ise, $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)$ operatörleri de $(1,0)$ (veya $(0,1)$) metebeden konvekstir.
2. Eğer $f(x,y)$, $(2,0)$ (veya $(0,2)$) mertebeden konveks ise, $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)$ operatörleri de $(2,0)$ (veya $(0,2)$) metebeden konvekstir.
3. Eğer $f(x,y)$, $(1,1)$ mertebeden konveks ise, $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)$ operatörleri de $(1,1)$ metebeden konvekstir.

4.2. $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}$ Operatörlerinin Yakınsaklık Özellikleri

Lemma 4.1. $f(t,\tau)\in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ ve $(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}$ için, $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}$ operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y)=1, \tag{4.8}$$

$$C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t;x,y)=\alpha_3 x+\frac{(n+\beta)}{n+\beta_1}\beta_3 x+\frac{(\alpha_1-\alpha)}{n+\beta_1}\beta_3 b_n, \tag{4.9}$$

$$C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(\tau;x,y)=\alpha_3 y+\frac{(n+\beta)}{n+\beta_2}\beta_3 y+\frac{(\alpha_2-\alpha)}{n+\beta_2}\beta_3 b_n, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
&C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2;x,y)\\
&=x^2\left[\alpha_3^2+2\beta_3\alpha_3\frac{(n+\beta)}{n+\beta_1}+\beta_3^2\left(\frac{n+\beta}{n+\beta_1}\right)^2\frac{n-1}{n}\right]\\
&+x\left[2\beta_3\alpha_3\tfrac{b_n(\alpha_1-\alpha)}{n+\beta_1}-\beta_3^2 2\alpha\tfrac{(n+\beta)(n-1)b_n}{(n+\beta_1)^2 n}+\beta_3^2\tfrac{(n+\beta)}{(n+\beta_1)^2}b_n\left(1+2\alpha_1\right)\right]\\
&+\left(\frac{b_n}{n+\beta_1}\right)^2\beta_3^2\left[(\alpha-\alpha_1)^2-\alpha\left(\frac{\alpha}{n}+1\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
&C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(\tau^2;x,y)\\
&=y^2\left[\alpha_3^2+2\alpha_3\beta_3\frac{(n+\beta)}{n+\beta_2}+\beta_3^2\left(\frac{n+\beta}{n+\beta_2}\right)^2\frac{n-1}{n}\right]\\
&+y\left[2\alpha_3\beta_3\tfrac{b_n(\alpha_2-\alpha)}{n+\beta_2}-\beta_3^2 2\alpha\tfrac{(n+\beta)(n-1)b_n}{(n+\beta_2)^2 n}+\beta_3^2\tfrac{(n+\beta)}{(n+\beta_2)^2}b_n\left(1+2\alpha_2\right)\right]\\
&+\left(\frac{b_n}{n+\beta_2}\right)^2\beta_3^2\left[(\alpha-\alpha_2)^2-\alpha(\frac{\alpha}{n}+1)\right].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Ayrıca $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}$ operatörleri $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayından $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayına dönüşüm yapar.

İspat. İspatımızı sadece $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y)$, $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t;x,y)$ ve $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2;x,y)$ için yapacağız. Diğerleri benzerdir. Ayrıca uygun notasyon ve kısaltma açısından

$$C_n^{\alpha,\beta}(f(t,\tau);x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y) \tag{4.13}$$

yardımcı operatörlerini tanımlayalım. Binom açılımı ve (4.13) kullanılırsa

$$C_n^{\alpha,\beta}(1;x,y)=C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)=1 \tag{4.14}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&C_n^{\alpha,\beta}(t;x,y)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\frac{k}{n}p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\\
&=\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\\
&\times\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}\left(\frac{y}{b_n}-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^l\left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta}-\frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-l}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&\times \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k-1} \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&\times \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k} \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k-1} \\
&= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right) \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{n+\beta}{n}\right) \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right) \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

yazabiliriz ve

$$
\begin{aligned}
&C_n^{\alpha,\beta}(t^2; x, y) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{k^2}{n^2} p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x, y) \\
&= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k} \\
&\times \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \left(\frac{y}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{l} \left(\frac{n+2\alpha}{n+\beta} - \frac{x+y}{b_n}\right)^{n-k-l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n} \frac{n-1}{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{2} \\
&\times \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k-2} \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&+ \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right) \\
&\times \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k-1} \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n} \frac{n-1}{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{2} \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n-2} \\
&+ \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right) \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n-1} \\
&= \frac{n-1}{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{2} \left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2} + \frac{1}{n} \left(\frac{x}{b_n} - \frac{\alpha}{n+\beta}\right) \left(\frac{n+\beta}{n}\right) \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilebilir. (4.2) ve (4.13)-(4.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t;x,y)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(\alpha_3 x+\beta_3\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\\
&=\alpha_3 x C_n^{\alpha,\beta}(1;x,y)+\frac{n\beta_3}{n+\beta_1}b_n C_n^{\alpha,\beta}(t;x,y)\\
&+\frac{\alpha_1\beta_3}{n+\beta_1}b_n C_n^{\alpha,\beta}(1;x,y)\\
&=\alpha_3 x+\frac{(n+\beta)}{n+\beta_1}\beta_3 x+\frac{(\alpha_1-\alpha)}{n+\beta_1}\beta_3 b_n,
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Tekrar (4.2) ve (4.13)-(4.16) kullanırsak,

$$\begin{aligned}
&C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2;x,y)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(\alpha_3 x+\beta_3\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)^2 p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\alpha_3^2x^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}2\beta_3\alpha_3x\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}b_np_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\\
&+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}(\beta_3\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n)^2p_{n,\alpha,\beta}^{k,l}(x,y)\\
&=\alpha_3^2C_n^{\alpha,\beta}(1;x,y)+2\beta_3\alpha_3x\frac{n}{n+\beta_1}b_n\left[C_n^{\alpha,\beta}(t;x,y)+\frac{\alpha_1}{n}C_n^{\alpha,\beta}(1;x,y)\right]\\
&+(\beta_3\frac{n}{n+\beta_1}b_n)^2\left[C_n^{\alpha,\beta}(t^2;x,y)+\frac{2\alpha_1}{n}C_n^{\alpha,\beta}(t;x,y)+\frac{\alpha_1^2}{n^2}C_n^{\alpha,\beta}(1;x,y)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\alpha_3^2x^2+2\beta_3\alpha_3x\frac{n}{n+\beta_1}b_n\left[\left(\frac{n+\beta}{n}\right)\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)+\frac{\alpha_1}{n}\right]\\
&+(\beta_3\frac{n}{n+\beta_1}b_n)^2\left[\frac{n-1}{n}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^2\right.\\
&\left.+\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\frac{n+\beta}{n^2}+\frac{2\alpha_1(n+\beta)}{n^2}\left(\frac{x}{b_n}-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)+\frac{\alpha_1^2}{n^2}\right]\\
&=x^2\left[\alpha_3^2+2\beta_3\alpha_3\frac{n+\beta}{n+\beta_1}+\beta_3^2\left(\frac{n+\beta}{n+\beta_1}\right)^2\frac{n-1}{n}\right]\\
&+x\left[2\beta_3\alpha_3\frac{b_n(\alpha_1-\alpha)}{n+\beta_1}-\beta_3^22\alpha\frac{(n+\beta)(n-1)}{(n+\beta_1)^2}\frac{b_n}{n}+\beta_3^2\frac{(n+\beta)(1+2\alpha_1)}{(n+\beta_1)^2}b_n\right]\\
&+\left(\frac{b_n}{n+\beta_1}\right)^2\beta_3^2\left[(\alpha-\alpha_1)^2-\alpha\left(\frac{\alpha}{n}+1\right)\right].
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabililir.

Şimdi de $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}$ operatörlerinin $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayından $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayına dönüşüm yaptığını gösterelim. Eğer $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ise bu durumda (4.1) eşitliğine göre

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\alpha_3 x + \beta_3 \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} b_n, \alpha_3 y + \beta_3 \frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2} b_n \right) \right| \\ \leq \ & \|f\|_\rho \left[1 + \left(\alpha_3 x + \beta_3 \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} b_n \right)^2 + \left(\alpha_3 y + \beta_3 \frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2} b_n \right)^2 \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliğin her iki tarafına $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}$ operatörleri uygulanıp, operatörlerin lineerlik ve monotonluk özelliğinden

$$\left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) \right| \leq \|f\|_\rho \left(C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y) + C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2;x,y) + C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(\tau^2;x,y) \right)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.8), (4.11) ve (4.12) eşitlikleri kullanılıp, (b_n/n) dizisinin sınırlı olduğu gözönüne alınırsa M_f^* sadece f'e bağlı bir sabit olmak üzere

$$\left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) \right| \leq M_f^* \|f\|_\rho \left(1 + x^2 + y^2 \right)$$

elde edilir ki bu eşitsizlik bize $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}$ operatörlerinin $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayından $C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ uzayına dönüşüm yaptığını gösterir.

Lemma 4.2. Herhangi $a > 0$ ve tüm $f \in C(\mathbb{R}_+^2)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y) \right| = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (4.8), (4.9) ve (4.10) eşitlikleri kullanılırsa,

$$C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y) - 1 = 0,$$

$$\begin{aligned} & \max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t;x,y) - x \right| \\ = \ & \left(a - \frac{\alpha}{n+\beta} b_n \right) \left(\alpha_3 + \frac{n+\beta}{n+\beta_1} \beta_3 - 1 \right) + \frac{b_n}{n+\beta_1} \beta_3 (\alpha_1 - \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(\tau;x,y) - y \right| \\ = \ & \left(a - \frac{\alpha}{n+\beta} b_n \right) \left(\alpha_3 + \frac{n+\beta}{n+\beta_2} \beta_3 - 1 \right) + \frac{b_n}{n+\beta_2} \beta_3 (\alpha_2 - \alpha), \end{aligned}$$

eşitliklerini yazabiliriz. (4.11) ve (4.12)'den

$$\begin{aligned}
&\max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2+\tau^2;x,y)-(t^2+\tau^2)\right| \\
&\le a^2\left[\left(\frac{n+\beta}{n+\beta_1}\right)^2+\frac{(n+\beta)^2}{(n+\beta_2)^2}-2\right] \\
&+a\left[2\frac{b_n\alpha_1}{n+\beta_1}+\frac{n+\beta}{(n+\beta_1)^2}b_n(1+2\alpha_1)+2\frac{b_n\alpha_2}{n+\beta_2}+\frac{n+\beta}{(n+\beta_2)^2}b_n(1+2\alpha_2)\right] \\
&+\left(\frac{b_n}{n+\beta_1}\right)^2\alpha_1^2+\left(\frac{b_n}{n+\beta_2}\right)^2\alpha_2^2,
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, (2.15) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}}\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y)-1\right|=0,\\
&\lim_{n\to\infty}\max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}}\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t;x,y)-x\right|=0,\\
&\lim_{n\to\infty}\max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}}\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(\tau;x,y)-y\right|=0 \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\alpha_3+\beta_3=1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}}\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right|=0 \qquad (4.18)$$

sonucunu elde ederiz.

Şimdi

$$C_n(f;x,y):=\begin{cases} C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) & \text{if} \quad (x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta} \\ f(x,y) & \text{if} \quad (x,y)\in\Delta_a\backslash\Delta_a^{n,\alpha,\beta}\end{cases}$$

eşitliği ile verilen operatörler dizisini gözönüne alalım. Bu durumda

$$\|C_nf-f\|_{\Delta_a}=\max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}}\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)-f(x,y)\right| \qquad (4.19)$$

yazılabilir. (4.17) ve (4.18) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left\|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y)-1\right\|_{\Delta_a}=0,\\
&\lim_{n\to\infty}\left\|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t;x,y)-x\right\|_{\Delta_a}=0,\\
&\lim_{n\to\infty}\left\|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(\tau;x,y)-y\right\|_{\Delta_a}=0,
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2+\tau^2;x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{\Delta_a}=0$$

elde edilir.

Teorem 2.3'ün tüm şartları sağlandığından, her $f \in C(\Delta_a)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|C_n f - f\|_{\Delta_a} = 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak (4.19)'dan

$$\lim_{n\to\infty} \max_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y) \right| = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ olsun. Bu durumda herhangi $\alpha > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}} \frac{\left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y) \right|}{(1+x^2+y^2)^{1+\alpha}} = 0$$

dır.

İspat. Herhangi $f \in C_\rho(\mathbb{R}_+^2)$ ve herhangi $\alpha > 0$ için,

$$\begin{aligned}
&\sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}} \frac{\left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y) \right|}{(1+x^2+y^2)^{1+\alpha}} \\
&\leq \sup_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y) \right| \\
&+ \sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}\setminus\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{\left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y) \right|}{(1+x^2+y^2)^{1+\alpha}} \\
&= I_n^{'} + I_n^{''}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Lemma 4.2' ye göre $n \to \infty$ için $I_n^{'} \to 0$ dır.

Diğer taraftan, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $a > 0$ vardır öyle ki, $x + y > a$ iken

$$\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}} < \varepsilon, \tag{4.20}$$

dır.

Bu durumda $I_n^{''}$ için

$$I_n^{''} \leq \sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}\setminus\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{\left| C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) \right|}{(1+x^2+y^2)^{1+\alpha}} + \sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}\setminus\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{|f(x,y)|}{(1+x^2+y^2)^{1+\alpha}},$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Lemma 4.1' den, eğer $f \in C_\rho(\mathbb{R}^2_+)$ ise, bu durumda $C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f) \in C_\rho(\mathbb{R}^2_+)$ dır. Ve (4.20) eşitsizliğini kullanırsak, M_f^{**} sadece f'e bağlı pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} I_n'' &\leq \left(M_f + M_f^{**}\right) \sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}\setminus\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \\ &\leq \left(M_f + M_f^{**}\right)\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3. $f \in C_\rho^0(\mathbb{R}^2_+)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}} \frac{\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{1+x^2+y^2} = 0$$

dır.

İspat. $C_\rho^0(\mathbb{R}^2_+)$ uzayının tanımından,

$$\lim_{x+y\to\infty} \frac{f(x,y)}{1+x^2+y^2} = 0 \tag{4.21}$$

dır. Böylece, (4.21)'e göre, $\varepsilon > 0$ için yeterince büyük $a > 0$ seçebiliriz öyleki, $x + y > a$ ise

$$|f(x,y)| < \varepsilon(1+x^2+y^2) \tag{4.22}$$

dır. Dolayısıyla, verilen $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned} &\left|f\left(\alpha_3 x + \beta_3\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n, \alpha_3 y + \beta_3\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\right)\right| \\ < \ & \varepsilon\left[1 + \left(\alpha_3 x + \beta_3\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}b_n\right)^2 + \left(\alpha_3 y + \beta_3\frac{l+\alpha_2}{n+\beta_2}b_n\right)^2\right] \end{aligned} \tag{4.23}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} &\sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}} \frac{\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{1+x^2+y^2} \\ &\leq \sup_{(x,y)\in\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{1+x^2+y^2} \\ &+ \sup_{(x,y)\in\hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta}\setminus\Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y) - f(x,y)\right|}{1+x^2+y^2} \\ &= I_n' + I_n'' \end{aligned}$$

olup, Lemma 4.2 den $n \to \infty$ için $I_n^{''} \to 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(4.22) ve (4.23)'den, C sayısı n' den bağımsız bir sabit olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
I_n^{''} &\leq \sup_{(x,y)\in \hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta} \setminus \Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{|f(x,y)|}{1+x^2+y^2} + \sup_{(x,y)\in \hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta} \setminus \Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)\right|}{1+x^2+y^2} \\
&\leq \varepsilon + \sup_{(x,y)\in \hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta} \setminus \Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{\left|C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(f;x,y)\right|}{1+x^2+y^2} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon \sup_{(x,y)\in \hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta} \setminus \Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y) + C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2;x,y) + C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(\tau^2;x,y)}{1+x^2+y^2} \\
&= \varepsilon \left(1 + \sup_{(x,y)\in \hat{\Delta}_n^{\alpha,\beta} \setminus \Delta_a^{n,\alpha,\beta}} \frac{C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(1;x,y) + C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(t^2;x,y) + C_n^{\alpha,\alpha_r,\beta,\beta_r}(\tau^2;x,y)}{1+x^2+y^2} \right) \\
&\leq C\varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

5. BERNSTEIN-DURRMEYER OPERATÖRLERİ

Bu bölümde $S_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerinden hareketle, integrallenebilen fonksiyonların yaklaşım özelliklerini incelememize imkan tanıyan yeni tipten Bernstein-Durrmeyer operatörlerini tanımlayacak ve hipergeometrik seriler yardımıyla yeni bir gösterimini elde edeceğiz. Tanımlanan bu yeni operatörlerin lokal ve global yaklaşım özelliklerini süreklilik modülü yardımıyla hesaplayacak, Voronovskaya tipli noktasal yakınsaklğını çalışacağız. Son olarak ise daha iyi yaklaşım sonuçları elde etmekte temel yöntemlerden biri olan King tipli genelleştirmeleri bu yeni operatörlerimiz için elde edip daha iyi yaklaşım sonuçlarını sunacağız.
$[0,1]$ aralığının alt aralıklarında Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar için, Gadjiev-Ghorbanalizadeh tipli Bernstein-Stancu polinomlarının, Stancu varyantsız Durrmeyer tipli genelleştirmelerini α,β pozitif, $\alpha \leq \beta$ ve

$$\bar{p}_{n,k}(x) = \binom{n}{k}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k}\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k}$$

olmak üzere

$$\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) = (n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\bar{p}_{n,k}(x)\int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\bar{p}_{n,k}(t)\,f(t)\,dt \qquad (5.1)$$

olarak tanımlıyoruz. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörler dizisi lineer ve $\left[\frac{\alpha}{n+\beta},\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right]$ aralıkları üzerinde pozitiftir. Ayrıca hipergeometrik seriler kullanılırsa $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Lemma 5.1. ${}_2F_1(\cdot,\cdot;\cdot;)$ fonksiyonu (2.9)'da tanımlanan hipergeometrik fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) &= (n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}} f(t)\left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-t\right)\right]^{n}\\ &\quad\times {}_2F_1\left(-n,-n;1;\frac{\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(t-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)}{\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-t\right)}\right)dt\end{aligned}$$

dir.

İspat. (2.9) eşitliğinde verilen hipergeometrik serinin tanımına göre

$$\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) = (n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}} f(t)\left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-t\right)\right]^{n}$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \left[\left(x - \frac{\alpha}{n+\beta} \right) \left(t - \frac{\alpha}{n+\beta} \right) \right]^{k} \frac{(-n)_k(-n)_k}{(k!)^2} \left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - x \right) \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - t \right) \right]^{-k} dt$$

$$= (n+1) \left(\frac{n+\beta}{n} \right)^{2n+1} \int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}} f(t) \left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - x \right) \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - t \right) \right]^{n}$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \left[\left(x - \frac{\alpha}{n+\beta} \right) \left(t - \frac{\alpha}{n+\beta} \right) \right]^{k} \frac{(-n)_k(-n)_k}{(1)_k k!} \left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - x \right) \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - t \right) \right]^{-k} dt$$

olarak yazabiliriz. Pochhammer sembolü $(n)_k$ için

$$(n)_k = n(n+1)(n+2)(n+3)....(n+k-1).$$

olduğunu ve

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k(-n)_k}{k!}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) &= (n+1) \left(\frac{n+\beta}{n} \right)^{2n+1} \int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}} f(t) \left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - x \right) \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - t \right) \right]^{n} \\ &\quad \times {}_2F_1 \left(-n, -n; 1; \frac{\left(x - \frac{\alpha}{n+\beta} \right) \left(t - \frac{\alpha}{n+\beta} \right)}{\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - x \right) \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - t \right)} \right) dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Operatörümüzün hipergeometrik seriler yardımıyla olan bu gösterimini de kullanarak operatörümüzün momentlerini aşağıdaki gibi bulabiliriz.

Lemma 5.2. $n > 0$ ve $r > -1$ için

$$\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(t^r;x) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \frac{n^i \alpha^{r-i}}{(n+\beta)^r} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(i+1)}{\Gamma(n+i+2)} \, {}_2F_1 \left(-n, -i; 1; \frac{(n+\beta)x - \alpha}{n} \right)$$

dir.

İspat. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
&\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(t^r;x\right)\\
=\;&(n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}} t^r\left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-t\right)\right]^n\\
&\times\sum_{k=0}^{n}\left[\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(t-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\right]^k\\
&\times\frac{(-n)_k(-n)_k}{(k!)^2}\left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-t\right)\right]^{-k}dt\\
=\;&(n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k}\frac{(-n)_k(-n)_k}{(k!)^2}\\
&\times\int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{r-i}\left(t-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{k+i}\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-t\right)^{n-k}dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$u=\frac{n+\beta}{n}\left(t-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)$$

dönüşümü yapılıp, (2.5) ile verilen Beta fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned}
&\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(t^r;x\right)\\
=\;&(n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k}\frac{(-n)_k(-n)_k}{(k!)^2}\\
&\times\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{r-i}\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n+i+1}\int_0^1 u^{k+i}(1-u)^{n-k}du\\
=\;&(n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k}\frac{(-n)_k(-n)_k}{(k!)^2}\\
&\times\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{r-i}\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n+i+1}B(k+i+1,n-k+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
=\;&(n+1)\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{r-i}\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n-i}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n-k}\\
&\times\frac{(-n)_k(-n)_k}{(k!)^2}\frac{\Gamma(k+i+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+i+2)}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $\Gamma(i+k+1)=\Gamma(i+1)(i+1)_k$ ve $k!=(1)_k$ eşitlikleri kullanılarak elde edilen

$$\begin{aligned}
(-n)_k\Gamma(n-k+1)\;&=\;[(-n)(-n+1)(-n+2)......(-n+k-1)](n-k)!\\
&=\;(-1)^k[n(n-1)(n-2)....(n-k+1)](n-k)!=(-1)^k n!,
\end{aligned}$$

eşitliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(t^r;x) \\
= \;& \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{r-i}\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n-i}\frac{(n+1)!\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n}\Gamma(i+1)}{\Gamma(n+i+2)} \\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(i+1)_k}{(1)_k k!}\left(\frac{x-\frac{\alpha}{n+\beta}}{x-\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\right)^{k} \\
= \;& \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{r-i}\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{n-i}\frac{(n+1)!\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{n}\Gamma(i+1)}{\Gamma(n+i+2)} \\
&\times{}_2F_1\left(-n,i+1;1;\frac{x-\frac{\alpha}{n+\beta}}{x-\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Ayrıca (2.10) eşitliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(t^r;x) \\
= \;& \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^{r-i}\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{i} \\
&\times\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(i+1)}{\Gamma(n+i+2)}\,{}_2F_1\left(-n,-i;1;\frac{(n+\beta)x-\alpha}{n}\right)
\end{aligned}
$$

buluruz.

Sonuç 5.1. Lemma 5.2' ye göre $r=0,1,2$ için ilk üç momenti

$$
\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(1;x) = 1, \tag{5.2}
$$

$$
\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(t;x) = \frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}, \tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) \\
&= \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} \\
&+ \left(\frac{n}{n+\beta}\right)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\frac{4n}{(n+2)(n+3)} \\
&+ \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2\frac{2}{(n+2)(n+3)}+\frac{2n\alpha}{(n+\beta)(n+2)}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \\
&+ \frac{2n\alpha}{(n+\beta)^2}\frac{1}{(n+2)}+\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

olarak buluruz.

Lemma 5.3. $f \in C[0,1]$ ve $\|.\|$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde maksimum normu olmak üzere $\left\|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}f\right\| \leq \|f\|$ dır.

İspat. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerinin tanımından ve (5.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \left|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x)\right| \\ \leq\ & (n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\bar{p}_{n,k}(x)\int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}}\bar{p}_{n,k}(t)\,|f(t)|\,dt \\ \leq\ & \|f\|\,\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(1;x)=\|f\| \end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 5.4. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\varphi^2(x)$ ve $\delta_n^2(x)$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\varphi^2(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right) & ,\ x\in\left[\frac{\alpha}{n+\beta},\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right] \\ 0 & ,\ x\in\left[0,\frac{\alpha}{n+\beta}\right]\cup\left[\frac{n+\alpha}{n+\beta},1\right]\end{cases}, \tag{5.5}$$

$$\delta_n^2(x)=\varphi^2(x)+\frac{1}{n+2}.$$

Bu durumda

$$\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)\leq\frac{2}{n+2}\delta_n^2(x)$$

dır.

İspat. (5.2)-(5.4) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right) \\ =\ & \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)}+\left(\frac{n}{n+\beta}\right)\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\frac{4n}{(n+2)(n+3)} \\ & +\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2\frac{2}{(n+2)(n+3)}+\frac{2n\alpha}{(n+\beta_2)(n+2)}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \\ & +\frac{2n\alpha}{(n+\beta)^2}\frac{1}{(n+2)}+\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2-2x\left[\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}\right]+x^2 \\ =\ & \left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left\{\frac{6-2n}{(n+2)(n+3)}x+\frac{2n-6}{(n+2)(n+3)}\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)\right\} \\ & +\frac{2}{(n+2)(n+3)}\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2 \\ \leq\ & \frac{2n-6}{(n+2)(n+3)}\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)+\frac{2}{(n+2)(n+3)} \\ \leq\ & \frac{2}{n+2}\left[\left(x-\frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}-x\right)+\frac{1}{(n+2)}\right], \end{aligned}$$

elde edilir.

5.1. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ Operatörlerinin Lokal Yaklaşım Özellikleri

Teorem 5.1. $f \in C[0,1]$, $\delta_n(x) = \left[\varphi^2(x) + \frac{1}{n+2}\right]^{1/2}$ ve $x \in \left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta}\right]$ olmak üzere $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörleri için öyle bir $C > 0$ vardır öyle ki

$$\left|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq C\omega_2\left(f, (n+2)^{-1}\delta_n(x)\right) + \omega\left(f, \frac{1}{n+2}\right)$$

dır.

İspat. Öncelikle aşağıdaki yardımcı operatörü gözönüne alalım.

$$\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{n}{(n+2)}x + \frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}\right).$$

Bu durumda (5.2) ve (5.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}(1;x) = \bar{D}_{n,\alpha,\beta}(1;x) = 1$$

ve

$$\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}(t;x) = \bar{D}_{n,\alpha,\beta}(t;x) + x - \frac{n}{(n+2)}x - \frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)} = x$$

olduğu görülür. $g \in W^2$ ve $t \in [0,1]$ olsun. g fonksiyonunun integral kalanlı Taylor açılımdan

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)\,du$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerini uygularsak,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}(g;x) \\
= \; & g(x) + \mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du\right) \\
= \; & g(x) + \bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du; x\right) \\
& - \int_x^{\frac{n}{(n+2)}x + \frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}} \left(\frac{n}{(n+2)}x + \frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)} - u\right) g''(u)\,du
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right| \\
&\leq \mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\int_{x}^{t}\left|t-u\right|\left|g^{''}\left(u\right)\right|du;x\right) \\
&+\int_{x}^{\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}}\left|\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)\left(n+\beta\right)}-u\right|\left|g^{''}\left(u\right)\right|du \qquad (5.6)\\
&\leq \mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\left(t-x\right)^{2},x\right)\left\|g^{''}\right\| \\
&+\left(\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)\left(n+\beta\right)}-x\right)^{2}\left\|g^{''}\right\| \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 5.4' den

$$\begin{aligned}
&\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\left(t-x\right)^{2},x\right)+\left(\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)\left(n+\beta\right)}-x\right)^{2} \\
\leq\ & \frac{2}{n+2}\delta_{n}^{2}\left(x\right)+\left(\frac{n+2\alpha}{(n+2)\left(n+\beta\right)}-\frac{2x}{(n+2)}\right)^{2} \\
\leq\ & \frac{2}{n+2}\delta_{n}^{2}\left(x\right)+\left(\frac{n}{(n+2)\left(n+\beta\right)}\right)^{2} \\
\leq\ & \frac{2}{n+2}\delta_{n}^{2}\left(x\right)+\frac{1}{\left(n+2\right)^{2}}\leq\frac{4}{n+2}\delta_{n}^{2}\left(x\right) \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\frac{4}{n+2}\delta_{n}^{2}\left(x\right)\left\|g^{''}\right\| \qquad (5.9)$$

bulunur. Ayrıca Lemma 5.3' den $f\in C\left[0,1\right]$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right)\right| \\
\leq\ & \left|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right)\right|+\left|f\left(x\right)\right|+\left|f\left(\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)\left(n+\beta\right)}\right)\right| \\
\leq\ & 3\left\|f\right\|, \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. $f\in C\left[0,1\right]$ ve $g\in W^{2}$ için (5.9) ve (5.10) eşitsizliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| \\
=\ & \left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)+f\left(\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)\left(n+\beta\right)}\right)-f\left(x\right)\right| \\
\leq\ & \left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f-g;x\right)\right|+\left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right| \\
& +\left|g\left(x\right)-f\left(x\right)\right|+\left|f\left(\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)\left(n+\beta\right)}\right)-f\left(x\right)\right| \\
\leq\ & 4\left\|f-g\right\|+\frac{4}{n+2}\delta_{n}^{2}\left(x\right)\left\|g^{''}\right\|+\omega\left(f,\left|\frac{n+2\alpha}{(n+2)\left(n+\beta\right)}-\frac{2x}{(n+2)}\right|\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $g \in W^2$ fonksiyonları üzerinden infimum alırsak

$$\left|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq 4K_2\left(f, \frac{1}{n+2}\delta_n^2(x)\right) + \omega\left(f, \left|\frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)} - \frac{2x}{(n+2)}\right|\right)$$

elde edilir. Her $x \in [0,1]$ için

$$\left|\frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)} - \frac{2x}{(n+2)}\right| \leq \frac{1}{(n+2)}$$

olduğundan ve (2.4) eşitsizliğinden

$$\left|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \leq C\omega_2\left(f, (n+2)^{-1}\delta_n(x)\right) + \omega\left(f, (n+2)^{-1}\right)$$

elde edilir.

5.2. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ Operatörlerinin Global Yaklaşım Özellikleri

Teorem 5.2. $f \in C[0,1]$ olsun. $\varphi(x) = \sqrt{\left(x - \frac{\alpha}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} - x\right)}$ ve $x \in \left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta}\right]$ için öyle bir $C > 0$ vardır ki

$$\left\|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}f - f\right\| \leq C\omega_2^{\varphi}\left(f, (n+2)^{-1/2}\right) + \overrightarrow{\omega}_{\psi}\left(f, (n+2)^{-1}\right),$$

dır.

İspat. Tekrar

$$\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{n}{(n+2)}x + \frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}\right)$$

yardımcı operatörünü gözönüne alalım. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün tanımı ve Sonuc 5.1' den

$$\begin{aligned} &\left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}(g;x) - g(x)\right| \\ &\leq \bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\int_x^t |t-u|\left|g''(u)\right| du; x\right) \\ &+ \int_x^{\frac{n}{(n+2)}x + \frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}} \left|\frac{n}{(n+2)}x + \frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)} - u\right|\left|g''(u)\right| du \end{aligned} \qquad (5.11)$$

eşitsizliği elde edilir. δ_n^2 fonksiyonu $x \in \left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta}\right]$ üzerinde konkav olduğundan, $u = \lambda x + (1-\lambda)t$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$\frac{|t-u|}{\delta_n^2(u)} = \frac{\lambda|t-x|}{\delta_n^2(\lambda x + (1-\lambda)t)} \leq \frac{\lambda|t-x|}{\lambda\delta_n^2(x) + (1-\lambda)\delta_n^2(t)} \leq \frac{|t-x|}{\delta_n^2(x)}$$

yazılabilir. Böylece (5.11) eşitsizliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right| \\
&\leq \bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\int_x^t \frac{|t-u|}{\delta_n^2\left(u\right)}du;x\right)\left\|\delta_n^2 g^{''}\right\| \qquad (5.12)\\
&+\int_x^{\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}} \frac{\left|\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)}-u\right|}{\delta_n^2\left(u\right)}du\left\|\delta_n^2 g^{''}\right\| \\
&\leq \frac{1}{\delta_n^2\left(x\right)}\left\|\delta_n^2 g^{''}\right\|\left[\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\left(t-x\right)^2;x\right)+\left(\frac{n+2\alpha}{\left(n+2\right)\left(n+\beta\right)}-\frac{2x}{\left(n+2\right)}\right)^2\right] \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitzilik (5.8)'den

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right| \\
\leq\ & \frac{4}{n+2}\left\|\delta_n^2 g^{''}\right\| \\
\leq\ & \frac{4}{n+2}\left(\left\|\varphi^2 g^{''}\right\|+\frac{1}{n+2}\left\|g^{''}\right\|\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği kolayca yazılabilir. (5.10) ve (5.13)'den $f\in C\left[0,1\right]$ için

$$
\begin{aligned}
&\left|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| \\
\leq\ & \left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f-g;x\right)\right|+\left|\mathcal{D}_{n,\alpha,\beta}\left(g;x\right)-g\left(x\right)\right| \\
&+\left|g\left(x\right)-f\left(x\right)\right|+\left|f\left(\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{\left(n+2\right)\left(n+\beta\right)}\right)-f\left(x\right)\right| \\
\leq\ & 4\left\|f-g\right\|+\frac{4}{n+2}\left\|\varphi^2 g^{''}\right\|+\frac{4}{\left(n+2\right)^2}\left\|g^{''}\right\| \\
&+\left|f\left(\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{\left(n+2\right)\left(n+\beta\right)}\right)-f\left(x\right)\right|
\end{aligned}
$$

bulunur. $g\in W^2$ fonksiyonları üzerinden infimum alırsak

$$
\left|\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq 4\bar{K}_{2,\varphi}\left(f,\frac{1}{n+2}\right)+\left|f\left(\frac{n}{(n+2)}x+\frac{n+2\alpha}{\left(n+2\right)\left(n+\beta\right)}\right)-f\left(x\right)\right| \qquad (5.14)
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{n}{(n+2)}x + \frac{n+2\alpha}{(n+2)(n+\beta)} \right) - f(x) \right| \\
= & \left| f\left(x + \psi(x) \frac{[(n+2\alpha) - 2x(n+\beta)]}{(n+2)(n+\beta)\psi(x)} \right) - f(x) \right| \\
\leq & \sup_{t, t+\psi(t)\frac{[(n+2\alpha)-2x(n+\beta)]}{(n+2)(n+\beta)\psi(x)}} \left| f\left(t + \psi(t) \frac{[(n+2\alpha) - 2x(n+\beta)]}{(n+2)(n+\beta)\psi(x)} \right) - f(t) \right| \\
\leq & \overrightarrow{\omega}_{\psi}\left(f, \frac{|(n+2\alpha) - 2x(n+\beta)|}{(n+2)(n+\beta)\psi(x)} \right) \leq \overrightarrow{\omega}_{\psi}\left(f, \frac{2\left(x - \frac{\alpha}{n+\beta} \right)}{(n+2)\psi(x)} \right) \\
= & \overrightarrow{\omega}_{\psi}\left(f, \frac{1}{(n+2)} \right)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Böylece (2.4) ve (5.14)'den

$$
\left\| \bar{D}_{n,\alpha,\beta} f - f \right\| \leq C\omega_2^{\varphi}\left(f, (n+2)^{-1/2} \right) + \overrightarrow{\omega}_{\psi}\left(f, (n+2)^{-1} \right)
$$

bulunur.

5.3. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ Operatörü İçin Voronovskaya Teoremi

Teorem 5.3. $f \in C[0,1]$ olsun. Eğer $x \in \left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta} \right]$ noktasında f'' türevi mevcut ise

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x) \right] = (1-2x) f'(x) + 2x(1-x) f''(x)
$$

dır.

İspat. Taylor açılımdan $t \to x$ için $\varepsilon(t,x) \to 0$ olmak üzere

$$
f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2} f''(x)(t-x)^2 + \varepsilon(t,x)(t-x)^2 \tag{5.15}
$$

yazabiliriz. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerini (5.15) eşitliğinin her iki tarafına uygularsak

$$
\begin{aligned}
& \left[\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x) \right] \\
= & f'(x)\bar{D}_{n,\alpha,\beta}((t-x), x) + \frac{1}{2} f''(x)\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2, x \right) \\
& + \bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2, x \right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ve $n \to \infty$ için limit alırsak

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} n\left[\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right] \\
= {} & \lim_{n\to\infty} nf'(x)\,\bar{D}_{n,\alpha,\beta}((t-x),x) + \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{2}f''(x)\,\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2,x\right) \\
& + \lim_{n\to\infty} n\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2,x\right)
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. (5.2)-(5.4) eşitliklerine göre

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} n\left[\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right] \\
= {} & (1-2x)f'(x) + 2x(1-x)f''(x) + \lim_{n\to\infty} n\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\varepsilon(t,x)(t-x)^2,x\right) \\
= {} & (1-2x)f'(x) + 2x(1-x)f''(x) + F
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$F = \lim_{n\to\infty} n\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\varepsilon^2(t,x),x\right)^{1/2}\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^4,x\right)^{1/2} \tag{5.16}$$

dır. Ve $\varepsilon^2(x,x)=0$, $\varepsilon^2(.,x)\in C[0,1]$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\varepsilon^2(t,x),x\right) = 0 \tag{5.17}$$

dır. Ayrıca bu yaklaşım $x \in \left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{n+\alpha}{n+\beta}\right]$ için düzgündür. Böylece (5.16) ve (5.17)' den

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left(\varepsilon^2(t,x),x\right)^{1/2}\bar{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^4,x\right)^{1/2} = 0$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\bar{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right] = (1-2x)f'(x) + 2x(1-x)f''(x)$$

elde edilir.

5.4. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ Operatörlerinin King Tipli Modifikasyonu

Bu bölümde operatörlerimizle daha iyi yaklaşım sunmak için King tipli genelleştirmelerini tanımlayacağız. 2003 yılında J. P. King [32] Bernstein polinomlarının 1 ve t^2 test fonksiyonlarını koruyan yeni bir modifikasyonunu tanımlamıştır. Tanımlanan bu yeni operatörlerin $0 \le x \le 1/3$ aralığında Bernstein polinomlarına göre daha iyi yaklaşım sonuçları verdiği gösterilmiştir. $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörleri sabit fonksiyonları korumasına rağmen, t test fonksiyonunu korumamaktadır. Bu nedenle $\bar{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerinin King tipli modifikasyonunu tanımlayarak daha iyi yaklaşım metodları sunmayı amaçlıyoruz. Ele alacağımız genelleştirmeyi

$$r_n(x) := \frac{n+2}{n}x - \frac{n+2\alpha}{n(n+\beta)}$$

ve

$$x \in I_n = \left[\frac{(n+2)\alpha+n}{(n+2)(n+\beta)}, \frac{(n+2)\alpha+n(n+1)}{(n+2)(n+\beta)}\right]$$

olmak üzere

$$\hat{D}_{n,\alpha,\beta}(f;x) = (n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(r_n(x))\int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}} p_{n,k}(t) f(t)\,dt \quad (5.18)$$

olarak tanımlayalım.

Uyarı 5.1. Basit işlemlerle

$$\hat{D}_{n,\alpha,\beta}(1;x) = 1, \quad (5.19)$$

$$\hat{D}_{n,\alpha,\beta}(t;x) = x, \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
&\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) \\
= &\left(\frac{n+2}{n}x - \frac{n+2\alpha+n\alpha}{n(n+\beta)}\right)^2 \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} \\
&+\left(\frac{n}{n+\beta}\right)\left(\frac{n+2}{n}x - \frac{n+2\alpha+n\alpha}{n(n+\beta)}\right)\frac{4n}{(n+2)(n+3)} \\
&+\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^2 \frac{2}{(n+2)(n+3)} + \frac{2n\alpha}{(n+\beta)(n+2)}\left(\frac{n+2}{n}x - \frac{n+2\alpha+n\alpha}{n(n+\beta)}\right) \\
&+\frac{2n\alpha}{(n+\beta)^2}\frac{1}{(n+2)} + \left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)^2
\end{aligned} \quad (5.21)$$

olduğunu kolayca gösterebiliriz.

Uyarı 5.2. (5.19)-(5.21) eşitliklerinde verilen momentler kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right) \\
= &\frac{2(n+1)}{n(n+3)}\left(x - \frac{(n+2)\alpha+n}{(n+2)(n+\beta)}\right)\left(\frac{(n+2)\alpha+n(n+1)}{(n+2)(n+\beta)} - x\right) \\
&+\frac{n^2(n+1)}{(n+\beta)^2(n+2)^2(n+3)},
\end{aligned}$$

bulunur ve böylece $x \in I_n$ ve

$$\hat{\varphi}(x) = \sqrt{\left(x - \frac{(n+2)\alpha + n}{(n+2)(n+\beta)}\right)\left(\frac{(n+2)\alpha + n(n+1)}{(n+2)(n+\beta)} - x\right)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2; x\right) \\
= \; & \frac{2(n+1)}{n(n+3)}\hat{\varphi}^2(x) + \frac{n^2(n+1)}{(n+\beta)^2(n+2)^2(n+3)} \\
\leq \; & \frac{2(n+1)}{n(n+3)}\left[\hat{\varphi}^2(x) + \frac{1}{n+2}\right] = \delta_n(x)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

olarak yazabiliriz.

Lemma 5.5. $f \in C[0,1]$ ve $\|.\|$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde maksimum normu olmak üzere, $\left\|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\right\| \leq \|f\|$ dır.

İspat. $\hat{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörünün tanımından ve (5.19) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& \left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}(f; x)\right| \\
\leq \; & (n+1)\left(\frac{n+\beta}{n}\right)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(r_n(x))\int_{\frac{\alpha}{n+\beta}}^{\frac{n+\alpha}{n+\beta}} p_{n,k}(t)\,|f(t)|\,dt \\
\leq \; & \|f\|\,\hat{D}_{n,\alpha,\beta}(1; x) = \|f\|
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.4. $f \in C[0,1]$, $\delta_n(x) = \left[\hat{\varphi}^2(x) + \frac{1}{n+2}\right]$ ve $x \in I_n$ olmak üzere, $\hat{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörleri için öyle bir $C > 0$ vardır öyle ki

$$\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}(f; x) - f(x)\right| \leq C\omega_2\left(f, \sqrt{\delta_n(x)}\right)$$

dır.

İspat. $g \in W^2$ ve $x, t \in I_n$ olsun. g fonksiyonunun integral kalanlı Taylor açılımdan

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)\,g''(u)\,du$$

dır. Her iki tarafa $\hat{D}_{n,\alpha,\beta}$ operatörlerini uygularsak ve (5.19)-(5.21) eşitliklerinde verilen momentleri kullanırsak

$$\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}(g, x) - g(x)\right| \leq \left\|g''\right\|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left((t-x)^2, x\right)$$

elde edilir. Ve (5.22) eşitsizliğinden

$$\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left(g,x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\left\|g^{''}\right\|\delta_{n}\left(x\right)$$

yazabiliriz. Lemma 5.5'e göre $\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f,x\right)\right|\leq\left\|f\right\|$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f,x\right)-f\left(x\right)\right|\\ \leq\ &\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f-g,x\right)-\left(f-g\right)\left(x\right)\right|+\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left(g,x\right)-g\left(x\right)\right|\\ \leq\ &2\left\|f-g\right\|+\left\|g^{''}\right\|\delta_{n}\left(x\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $g\in W^{2}$ fonksiyonları üzerinden infimum alınırsa

$$\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f,x\right)-f\left(x\right)\right|\leq K_{2}\left(f,\delta_{n}\right)$$

dır ve (2.4)'den

$$\left|\hat{D}_{n,\alpha,\beta}\left(f,x\right)-f\left(x\right)\right|\leq C\omega_{2}\left(f,\sqrt{\delta_{n}}\right)$$

bulunur.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Hareketli sınırlı aralıklar ve sınırlı bölgeler üzerinde A. D. Gadjiev tarafından tanımlanan tek ve iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomları, sınırsız aralıklar ve bölgeler üzerine taşınmıştır. Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev operatörleri diye adlandırdığımız bu operatörlerin ağırlıklı yaklaşımları, simultane (eş anlı) yaklaşımları ve bazı şekil koruyan özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca hareketli aralıklar üzerinde tanımlı yeni tipten Bernstein-Durrmeyer operatörleri tanımlanmış ve lokal, global yaklaşım özellikleri, noktasal yakınsaklığı verilmiş, yakınsaklık hızı elde edilmiş, King tipli modifikasyonları tanımlanmıştır.

Sonuç olarak literatüre, her biri bir yaklaşım metodu sunan, özel seçimler altında bilinen operatörlere indirgenebilen ve hareketli aralık ve bölgeler üzerinde tanımlı üç yeni yaklaşım operatörü kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Weierstrass, K. G., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsber. Akad. Berlin, 633–639, 789–805, 1885. [Ayrıca bkz: "Mathematische Werke", Vol. 3, 1–37, Berlin: Mayer & Müller 1903.]

[2] Altomare, F. and Campiti, M., Korovkin Type Approximation Theory and Its Applications, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 195-352, 1994.

[3] Korovkin, P. P., Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi, 1-66, 1960.

[4] Bernstein, S., Démonstration du théorème de Weierstrass, fondeé sur le calcul des probabilités, Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 13: 1-2, 1912-1913.

[5] Bohman, H., On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat., 2, 43-56, 1952.

[6] Korovkin, P.P., Convergence of positive linear operators in the space of continuous functions, (Russian) Dokl. Akad. Nauk. SSSR 90, 961-964, 1953.

[7] Chlodowsky, I., Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M. S. Bernstein, Compositio Math., 4, 380-393, 1937.

[8] Stancu, D. D., Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, Rev. Roum. Math. Pure Appl., 13, 1173-1194, 1968.

[9] Durrmeyer, J. L., Une formule d'inversion de la Transformee Laplace, Applications a la Theorie des Moments, These de 3e Cycle, Faculte des Sciences de I' Universite de Paris, 1967.

[10] Stancu, D. D., A new class of uniform approximating polynomial operators in two and several variables, Proc. Conf. on Constructive Theory of Functions, Budapest, 443–455, 1969.

[11] Martinez, F. L., Some properties of two dimensional Bernstein polynomials, J. Approx.Theory, 59, 300-306, 1989.

[12] İzgi, A., İki Değişkenli Fonksiyonlar Sınıfında Bernstein-Chlodowsky Tipi Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Özellikleri, Doktora Tezi, Ankara, 2004.

[13] Gadjiev, A. D. and Ghorbanalizadeh, A. M., Approximation properties of a new type Bernstein -Stancu polynomials of one and two variables. Appl. Math. Compl., 216, 890-901, 2010.

[14] Gupta, V., Agarwal, R. P., Convergence Estimates in Approximation Theory, Springer, 2014.

[15] Lorentz, G. G., Approximation of Functions, Syracuse Univ., Toronto, 1966.

[16] Butzer, P. L., On the Extension of Bernstein Polynomials to the Infinite Interval, Proc. Amer. Math. Soc., 5, 547-553, 1954.

[17] Butzer, P. L. and Nessel R. J., Fourier Analysis and Approximation, New York, 1971.

[18] Agratini, O., Linear operators that preserve some test functions, Int. J. Math. Math. Sci., 11pp. (Art. ID 94136), 2006.

[19] Stancu, D. D., Agratini, O., Gh. Coman & R. Trâmbiţaş, Analiză Numerică şi Teoria Aproximării, vol. I, Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană, 2001.

[20] Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, 1-71 p., Ankara, 1995.

[21] Popoviciu, T., Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare, Lucrările Ses. Gen. Şt. Acad. Române din 1–4, 1950, translated into English by D. Kacsó, On the proof of Weierstrass' theorem using interpolation polynomials, East J. Approx., 4, 107–110, 1998.

[22] Korovkin, P. P., On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 90, 961–964, 1953.

[23] Volkov, V. I., On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 115, 17–19, 1957.

[24] Gadžiev A. D., Positive linear operators in weighted spaces of functions of several variables, Izv. Akad. Nauk Azerbaĭdzhan. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk 1 4, 32–37, 1980.

[25] Anastassiou, G. A. and Gal, S.G., Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation. Birkhäuser, Boston, 2000.

[26] Ditzian, Z., Totik, V., Moduli of Smoothness, Springer-Verlag, New York, 1987.

[27] Gasper, G. and Rahman, M., Basic Hypergeometric Series, Cambiridge University Press, Cambridge, 1990.

[28] Phillips, G. M., Interpolation and Approximation by Polynomials, CMS Books Math. /Ouvrages Math. SMC 14, Springer, Berlin, 2003.

[29] Cárdenas-Morales, D., Muñoz-Delgado, F. J.,Improving certain Bernstein-type approximation processes, Math. Comput. Simulation , 77, no. 2-3, 170–178, 2008.

[30] Gadjieva, E. A., Ibikli, E., OnGeneralization of Bernstein-Chlodowsky Polynomials, Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering , Volume 24, pp. 31-40, 1995.

[31] Gadjieva, E. A., Gasanova, T. Kh., Approximation by two dimensional Bernstein-Chlodowsky polynomials in triangle with mobile boundary, Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 20, 47-51.

[32] King, J. P., Positive linear operators which preserves x^2, Acta. Math. Hungar. 99**,** 203-208, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuncer ACAR
Doğum Tarihi : 20.10.1985
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lisans : Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2004-2008.
Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D., 2009-2011.

Çalıştığı Kurum ve Yıllar : Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2009- 2013.
University of Alberta, Faculty of Science, Department of Mathematical and Statistical Science, 2013-2014.
Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2014-…

Yayınları (SCI) :

1. A. Aral, T. Acar, Weighted Approximation By New Bernstein-Chlodowsky-Gadjiev Operators, Filomat, 27 (2), 2013, 373-382.
2. T. Acar, A. Aral and V. Gupta, On Approximation Properties of A New Type Bernstein-Durrmeyer Operators, Mathematica Slovaca, (In press).

Yayınları (Diğer) :

1. T. Acar, A. Aral, Approximation Properties of Two Dimensional Bernstein-Stancu-Chlodowsky Operators, Matematiche (Catania), 68 (2), 2013, 15-31.

Araştırma Alanları : Yaklaşım Teorisi, Quantum Kalkülüs, Özel Fonksiyonlar.