

**KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

BİNOM KATSAYILARININ BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Yasir EREN

TEMMUZ 2015

Matematik Anabilim Dalı Yasir EREN tarafından hazırlanan BİNOM KATSAYILARININ BAZI GENELLEŞTİRMELERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. İlker AKKUŞ
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Emrah KILIÇ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlker AKKUŞ

25/07/2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıőtır.

Prof. Dr. Mustafa YIĐITOĐLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BİNOM KATSAYILARININ BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

EREN, Yasir

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İlker AKKUŞ

TEMMUZ 2015, 39 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde binom katsayıları ve Catalan sayıları hakkında temel tanım ve kavramlar, binom katsayılarının bazı özellikleri ve binom fonksiyonu verilmiş, üreteç fonksiyonlar yardımıyla Catalan sayıları oluşturulmuştur. Ayrıca Catalan sayılarının kombinatoriksel bir yorumu da yine bu bölümde incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Baxter permütasyonları, üçgensel katsayılar, Baxter katsayıları ve Fibonomial katsayılar ele alınmış ve bunların kombinatoriksel yorumlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise binom fonksiyonu yardımıyla elde edilen üçgensel, Baxter ve Fibonomial katsayılar irdelenmiş, bunlardan yola çıkarak yapılabilecek genelleştirmeler ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Binom katsayıları, Catalan sayıları, üçgensel katsayı, Binom fonksiyonu, Baxter permütasyonları, Baxter katsayıları, Fibonomial katsayı.

ABSTRACT

SOME GENERALIZATIONS OF THE BINOMIAL COEFFICIENTS

EREN, Yasir

Kirikkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. İlker AKKUŞ

July 2015, 39 pages

The thesis consists of four chapters. In the first chapter, the aim of the thesis and some informations about references are given.

In the second chapter, basic definitions and notions about the binomial coefficients and Catalan numbers, some properties of binomial coefficients and the binomial function are given, Catalan numbers are obtained via generating Functions. Also, a combinatorial interpretation of Catalan numbers is investigated in this part.

In the third chapter, Baxter permutations, triangular coefficients, Baxter coefficients and Fibonomial coefficients are introduced and combinatorial interpretations of these are presented.

In the fourth chapter, triangular, Baxter and Fibonomial coefficients which are obtained by using binomial function are investigated and generalizations which can be done from these observations are presented.

Key Words: Binomial coefficients, Catalan numbers, Triangular coefficient, Functions of the binomial coefficient, Baxter permutations, Baxter coefficients, Fibonomial coefficient.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımcı esirgemeyen tez yöneticisi hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. İlker AKKUŞ'a, tez çalışmaları esnasında büyük fedakârlıklarla bana destek olan aileme, son olarak birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1.GİRİŞ	1
1.1 Kaynak Özetleri.....	1
1.2 Tezin Amacı	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 Binom Katsayısı	2
2.1.2 Binom Katsayısının Bazı Özellikleri.....	3
2.1.3 Binom Katsayısının Fonksiyonları	5
2.2 Catalan Sayıları	6
2.2.1 Catalan Sayılarının Kombinatoriksel Yorumu	8
3. ARAŞTIRMA BULGULARI	12
3.1. Baxter Permütasyonları	12
3.1.1. Baxter Permütasyonlarına Giriş	12
3.1.2. Çeşitli Sonuçlar	12
3.2. Üçgensel Katsayılar	13
3.2.1. Üçgensel Katsayı	13
3.2.2. Üçgensel Katsayının Kombinatoriksel Yorumu	15
3.2.3. Kesişmeyen Yollar	21
3.2.4. Simetri	27
3.3. Baxter Katsayıları	28
3.3.1. Baxter Katsayısı	28
3.3.2. İlginç Benzerlikler	29
3.4. Fibonomial Katsayı	32
3.4.1. Daima Tam Sayı Olma Durumu	33

4. TARTIŞMA VE SONUÇ	37
KAYNAKLAR	39

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. $n=1, 2$ ve 3 için Catalan yolları	9
2.2. Birkaç polyomino örneği	10
2.3. k nın sağında $n-k$ büyüklüğe sahip bir polyomino ve her bir sütunun yüksekliğinin 1 artması	11
3.1. Bir kırılma örneği	15
3.2. Kırılma olmayan bir örnek	15
3.3. Kırılma yerleştirilebilecek latis yolları	17
3.4. Kırılmaların yanlış düzenlenmesi	17
3.5. Kırılmaların uygun bir yerleşimi	18
3.6. P ve P' nin birbirine bağlantısı	19
3.7. P ve P' nin son noktaları arasındaki kırılma çifti	20
3.8. S_1 den D_1 e ve S_2 den D_2 ye bir eş zamanlı yol	21
3.9. Standart kesişen bir yol	22
3.10. Şekil 3.9 da verilen yolların kesişim noktasından sonra varış noktalarının değiştirilmesi	23
3.11. Sınırlandırılmış bir yol örneği	25
3.12. Köşeleri kapatılarak elde edilmiş polyomino formu	25
3.13. Parçalanmış bir polyomino ve birbirinden ayrı sütunlar	25
3.14. Catalan yolu oluşturmak üzere ayrılan, polyominoya karşılık gelen sütunlarla elde edilmiş üçgenler	26
3.15. Her bir üçgenin çakışma parametresine göre Catalan yolu formunda düzenlenişi	26
3.16. Üç kesişmeyen yol	30
3.17. Kesişmeyen yolların başlangıç noktalarının değiştirilmesi	31
3.18. Piramit kutucuklarından bir piramit düzenlenmesi	33
3.19. $k-1$ parçaya ayrılabilen en üst kutucuğun varlığında kalan alt kutucuklar için piramidin geri kalanının incelenmesi	34
3.20. $k-1$ parçaya ayrılamayan en üst kutucuğun varlığında kalan alt kutucuğun geri kalanının piramidin en altına taşınması	35
3.21. Eşit sayıda kutucuğa sahip fakat daha kısa olan piramit	35

ÇİZELGELER DİZİNİ

ÇİZELGE

Sayfa

3.1. Başlangıç noktalarından varış noktalarına yolların sayısı..... 22

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin oluşturulmasında [1] numaralı kaynak temel olarak alınmıştır. Temel Kavramlar kısmında bahsedilen ve diğer bölümlerde oluşturulacak olan özdeşliklerin temelini teşkil eden binom katsayıları için de [2] numaralı kaynaktan faydalanılmıştır.

Catalan sayıları ve düzenli parantez yapıları ile üreteç fonksiyonları aracılığıyla Catalan sayılarının elde edilmesinde [3] numaralı kaynak kullanılmıştır.

Baxter permütasyonlarının araştırılması ve belirlenmesinde [4] ve [5] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

Son olarak [6 – 8] numaralı kaynaklardan da konuyla ilgili çeşitli kavramlar, tanımlar ve ek bilgiler alınmıştır.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezde öncelikle binom katsayılarının tanımı verilecek, daha sonra ileride yararlanılabilecek temel özelliklerinden bahsedilecek ve binom katsayıları ve binom fonksiyonu kullanılarak üçgensel katsayı, Baxter katsayısı ve Fibonomial katsayıya ulaşılmaya çalışılacaktır. Yine Catalan sayıları tanımlanarak üreteç fonksiyonları yardımıyla Catalan sayı dizisinin oluşturulması ve kombinatoriksel yöntemle ispatı gösterilecektir.

Sonraki bölümlerde üçgensel katsayı, Baxter katsayısı ve Fibonomial katsayı tanımlanacak ve bu katsayıların hepsinin birer tam sayı olması gerektiği kombinatoriksel yollarla ispatlanacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Binom Katsayısı

Tanım 2.1. Binom katsayısı $0 \leq k \leq n$ olmak üzere $\binom{n}{k}$, n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısını veren ifadelerdir ve aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 1}.$$

Binom katsayılarının Pascal üçgenini üretmesi de yine bilinen bir durumdur.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

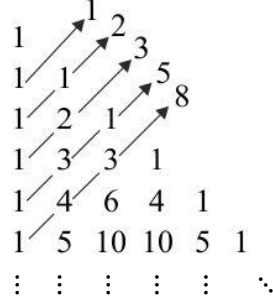
Burada $\binom{n}{k}$ ifadesi, n . satır ve k . sütundaki terimi verir. Pascal üçgeni diğer matematiksel niceliklerle çok sayıda ilginç bağlantıya sahiptir. Örneğin herhangi bir satırdaki sayılar topladığında

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

olduğu görülür veya köşegensel olarak topladığında ise

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

elde edilir, burada F_n ifadesi n . Fibonacci sayısıdır.



2.1.2. Binom Katsayısının Bazı Özellikleri

$0 \leq k \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerinin sayısını veren ifadenin $\binom{n}{k}$ olduğu ve binom katsayısı olarak adlandırıldığı söylenmişti. Şimdi binom katsayılarının bazı özellikleri gösterilebilir.

Özellik 1.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

$\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ kümesinin k elemanlı alt kümelerinin sayısı $\binom{n+1}{k}$ dir. a_{n+1} in bulunmadığı k elemanlı alt kümelerin sayısı ise $\binom{n}{k}$ tanedir. Eğer a_{n+1} bulunuyorsa geriye $k-1$ eleman kalır. Bunların sayısı ise $\binom{n}{k-1}$ dir. Böylece istenen eşitlik elde edilir.

Özellik 2.

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \dots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad m, n \geq 0.$$

Özellik 3.

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k} = \binom{m+k+1}{k}.$$

k üzerinden tümevarımla gösterilebilir. $k=0$ için $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ olup doğrudur. $k=1$ için $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = 1+n+1 = n+2 = \binom{n+1+1}{1}$ olduğundan eşitlik doğrudur. k için eşitlik doğru olsun. $k+1$ ifadesi için de doğru olduğu gösterilmelidir. $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$ dir. Tümevarım hipotezinden dolayı $\binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}$ elde edilir. O halde her k doğal sayısı için eşitlik doğrudur.

Özellik 4.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$1 = \binom{1}{1}$, $2 = \binom{2}{1}$, ... , $n = \binom{n}{1}$ yazılırsa $\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \dots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ elde edilir.

Özellik 5.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

S kümesi n elemanlı bir küme olsun. Buna göre $\binom{n}{k}$ ifadesi S kümesinin k elemanlı alt kümelerinin sayısını gösterir. Sağ taraf ise $n-k$ elemanlı alt kümelerinin sayısını gösterir. $n-k$ elemanlı alt kümeler k elemanlı alt kümelerin S içindeki tümleyenleri olduğundan bu kümelerden eşit miktarda olması gerekir.

Özellik 6.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tümevarımla gösterilebilir. $n=0$ için ifade doğrudur. Çünkü 0 elemanlı bir kümenin yalnızca 1 tane alt kümesi vardır.

$n>0$ olmak üzere ifadenin $n-1$ için doğruluğu kabul edilip n için doğruluğu kontrol edilmelidir.

n elemanlı bir S kümesi tanımlansın. S kümesinin alt kümeleri bulunabilir. S kümesinden bir eleman çıkarılıp a ile gösterilsin. Geriye a yı bulundurmayan $n-1$ elemanlı bir küme kalır. Bu küme S' olsun. $n-1$ elemanlı S' kümesinin hiçbir alt kümesinde a yoktur. Tümevarım hipotezi gereği $n-1$ elemanlı alt kümelerinin sayısı 2^{n-1} dir. Şimdi S kümesinin a elemanını bulunduran alt kümelerinin sayısı bulunmalıdır. S' kümesinin her alt kümesine a elemanını eklenirse S kümesinin a elemanını bulunduran alt kümelerinin sayısını elde edilir. Yani S nin a elemanını bulundurmayan alt kümelerinin sayısı, bulunduran alt kümelerinin sayısı ile aynıdır. O halde $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ dir.

2.1.3. Binom Katsayılarının Fonksiyonları

Pascal üçgeni ve binom katsayısı diğer sayısal niceliklerle pek çok bağlantı içerdiği için binom katsayısında her bir i çarpanını bir $f(i)$ fonksiyonu ile değiştirerek etkisini inceleyelim. Örneğin n . üçgensel sayı ilk n pozitif tam sayının toplamı olarak tanımlıdır. Böylece eğer $f(i) = t_i$ yazılırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{t_n t_{n-1} \dots t_{n-k+1}}{t_k \dots t_1}$$

elde edilir ve üçgensel katsayı olarak adlandırılır veya $f(i) = \binom{i+2}{3}$ alınırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 = \frac{\binom{n+2}{3} \binom{n+1}{3} \dots \binom{n-k+3}{3}}{\binom{k+2}{3} \dots \binom{3}{3}}$$

bulunur ki bu da bir Baxter katsayısı olarak adlandırılır. Ayrıca $f(i) = F_n$ Fibonacci sayısı yazılırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_F = \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+1}}{F_k \dots F_1}$$

Her bir düzenli parantez yapısı aşağıdaki iki şartı sağlar:

1. Bir düzenli parantez yapısında sağ ve sol parantezlerin sayısı aynıdır.
2. Bir düzenli parantez yapısında herhangi bir parçadan başlayarak sol parantezlerin sayısı aynı parçadaki sağ parantezlerin sayısından az değildir.

Düzenli parantez grubunda bir çift parantezin arasında kalan parantez grubu A , geri kalan parantez grubu B ile gösterilirse orijinal parantez grubu $A(B)$ dir. Burada A ve B de yine kendi içinde düzenli parantez grubu oluşturmaktadır. Eğer düzenli parantez grubu $n+1$ çift parantezden oluşuyorsa A ve B grupları toplamı n çift parantez içermelidir. Yani A , k tane parantez çifti içeriyorsa B , $n-k$ tane parantez çifti içermelidir ($0 \leq k \leq n$).

A nın 0, B nin n çift parantezden oluştuğu durumların sayısı C_0C_n ,

A nın 1, B nin $n-1$ çift parantezden oluştuğu durumların sayısı C_1C_{n-1} ,

...

A nın n , B nin 0 çift parantezden oluştuğu durumların sayısı C_nC_0

olur. Her k için olası durumların sayısı toplanırsa $n+1$ çift parantezden oluşan bir düzenli parantez yapısı için

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \dots + C_nC_0$$

$$C_{n+1} = \sum_{k \geq 0} C_k C_{n-k}$$

elde edilir.

Catalan sayıları için üreteç fonksiyonu düşünülürse

$$\begin{aligned} \text{Cat}(s) &= C_0 + C_1s + C_2s^2 + \dots \\ &= 1 + s + 2s^2 + \dots \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadenin daha genel bir formu için $Cat(s)$ ifadesinin karesi alınıp s ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} sCat^2(s) &= c_0^2s + (c^0c^1 + c^1c^0)s^2 + (c^0c^2 + c^1c^1 + c^2c^0)s^3 + \dots \\ &= s + 2s^2 + 5s^3 + 14s^4 + \dots \\ &= Cat(s) - 1 \end{aligned}$$

Buradan

$$sCat^2(s) - Cat(s) + 1 = 0$$

bulunur ve böylece

$$Cat(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4s}}{2s} \quad (2.1)$$

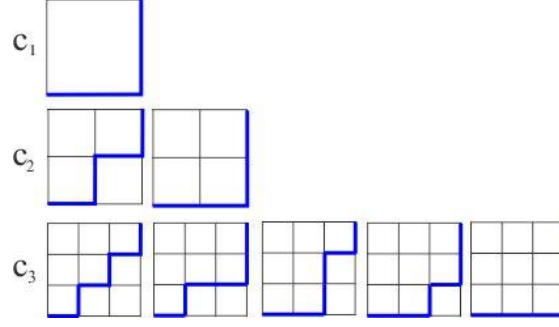
elde edilir (Burada pozitif kök seçildiğinde $Cat(s)$ ifadesinde $Cat(0)=1$ olması gerekirken $Cat(s) = \frac{1}{s}$ olduğundan negatif kök seçilir).

Catalan sayıları için (2.1) ifadesindeki üreteç fonksiyonunun daha açık bir formu bulunabilir. Bunun için $\sqrt{(1 - 4s)}$ ifadesi 1 den çıkarılıp $1/2s$ ile çarpılırsa n . Catalan sayısı binom katsayısının terimleri ile direkt olarak açıklanabilir:

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

2.2.1. Catalan Sayılarının Kombinatoriksel Yorumu

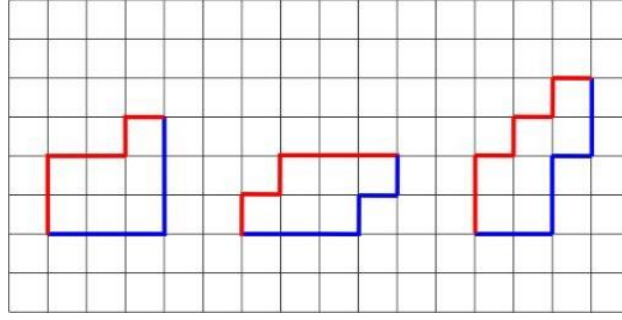
Alışılmışın dışındaki yinelemelere rağmen Catalan sayıları pek çok kombinatoriksel yorum içerir. Bu yorumlardan birisi latis yolları ile ilgilidir. $(0,0)$ dan (n,n) ye giden, $y=x$ doğrusunun altında kalan sadece yukarı ve sağ yönlü yolların sayısı C_n , latis yolu olarak ifade edilir ve 2.1 numaralı şekilde bazı Catalan yolu örnekleri görülebilir.



Şekil 2.1. $n=1, 2$ ve 3 için Catalan yolları

Latis yollarının sayısının Catalan yinelemesini sağladığı gösterilmelidir. Bir Catalan yolunda $(0,0)$ dan $(n+1,n+1)$ e bir P yolu alınsın. $y=x$ doğrusunda P yi kesen son nokta (k,k) olarak adlandırılınsın. Burada $0 \leq k \leq n$ dir. Orijinden (k,k) noktasına gidilebilecek C_k yol vardır. Ayrıca P nin $y=x$ doğrusuna asla değmeyeceği bilindiğinden $y=x-1$ doğrusunu kesmeden $(k+1,k)$ dan $(n+1,n)$ ye hareket edilmelidir. Burada $(k+1,k)$ dan $(n+1,n)$ ye gidebilmek için C_{n-k} yol vardır. Bundan dolayı P yollarının toplam sayısı $C_k C_{n-k}$ dir. k nin bütün değerlerinin toplanmasıyla istendiği gibi Catalan yinelemesi sağlanır. $(0,0)$ noktasından $(0,0)$ noktasına 1 Catalan yolu (boş yol) olduğundan $C_0=1$ olarak tanımlanır.

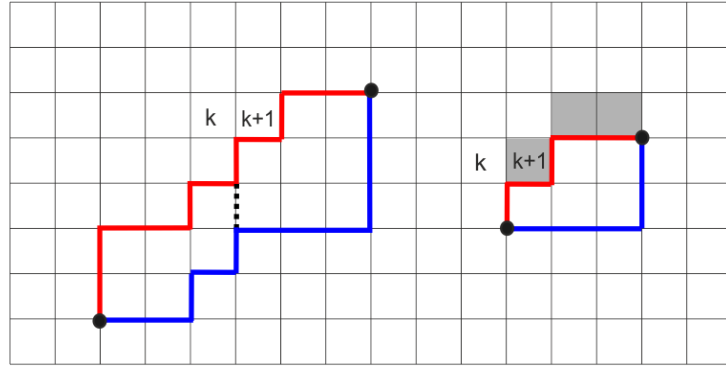
Catalan sayıları çeşitli kombinatoriksel yorumlara sahiptir. Burada polyominoları içeren bir yorumu düşünülecektir. İlk olarak eşit uzunlukta iki eş zamanlı latis yoluna sahip, her ikisi de sadece yukarı ve sağ yönlü olan ve $(0,0)$ dan başlayıp aynı noktada biten fakat daha öncesinde kesişmeyen bir polyomino tanımlansın. Şekil 2.2 de çeşitli polyomino örnekleri görülebilir.



Şekil 2.2. Birkaç polyomino örneği

Polyominolar iki yolun birleşimi şeklinde tanımlı olduğundan iki boyutlu şekiller gibi düşünülebilir. Bir polyominonun genişliği polyominodaki sütunların sayısı ve yüksekliği de polyominonun satırlarının sayısı olarak tanımlanır. Örneğin Şekil 2.2 de en sağdaki polyominonun genişliği 3 ve yüksekliği 4 tür. Ayrıca bir polyominodaki her bir sütunun yüksekliği hakkında da yorum yapılabilir. Örnek olarak en sağdaki polyominonun sütunlarının yüksekliği sırasıyla 2, 3 ve 2 dir. Son olarak bir polyominonun büyüklüğü polyomino formundaki yolların uzunluğu olarak tanımlanır. Örneğin Şekil 2.2 deki ilk iki polyominonun büyüklüğü 6 dır. Kırmızı ve mavi yolların her ikisinin de uzunluğu 6 dır. Aynı şekilde en sağdaki polyominonun uzunluğu 7 dir. n büyüklüğüne sahip polyominoların sayısı P_n ile gösterilsin. Catalan dizisini veren, yani Catalan yinelemesini sağlayan polyominolar gösterilebilir. Catalan yolları incelenirken yolun $y=x$ doğrusuna dokunduğu son noktaya bakıldı. Benzer şekilde polyominolar için de tam olarak bir karesi çakışan $n+1$ büyüklüğünde iki sütuna sahip bir polyominonun son noktası incelensin. Şekil 2.2 de en soldaki polyominoda olduğu gibi bir çakışan sütunun olmadığı durumda bu son çakışma birinci sütundan önce, sıfırıncı kırılma noktasında meydana gelir denilir. Böyle bir polyomino $y=x$ doğrusuna temas etmeyen bir Catalan yoluna benzer. Bundan dolayı $y=x$ doğrusu ile son temas noktası $(0,0)$ dir. Bu çakışmayı oluşturan sütunun i ve $i+1$ sütunları arasında olduğu kabul edilsin. Ayrıca bu çakışmaya son katılma hareketi k ve bundan dolayı da ilk ayrılma hareketi de $k+1$. hareket olsun. Burada çakışmanın solundaki P_k yollarının polyomino formunda olduğu ve çakışmanın sağı içinse tam olarak bir kare ile çakışan daha fazla sütun olmadığı bilinmektedir. Bunu üretmek için $n-k$ büyüklüğünde bir polyomino oluşturulsun. Bu polyomino P_{n-k} yoldan

oluşturulabilir ve sonrasında her bir sütunun yüksekliği Şekil 2.3 te olduğu gibi 1 artacaktır. Her bir sütunun yüksekliği 1 arttığı takdirde polyominonun büyüklüğü de tam olarak 1 artar. Bu nedenle $n+1$ büyüklüğünde bir polyomino oluşturabilmek için P_k yoldan oluşturulabilen ilk polyominoya P_{n-k} yoldan oluşturulabilecek değiştirilmiş olan polyomino eklenebilir. Mümkün olan bütün k değerlerinin toplanması ile Catalan yinelemesi elde edilir. İlk durumlar incelenirse örneğin büyüklüğü 3 olan 2 polyomino, büyüklüğü 4 olan 5 polyomino vardır. Diğer bir deyişle n büyüklüğüne sahip polyomino sayısı C_{n-1} dir. Bu nedenle $P_{n+1} = C_n$ dir.



Şekil 2.3. k nın sağında $n-k$ büyüklüğe sahip bir polyomino ve her bir sütunun yüksekliğinin 1 artması

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Baxter Permütasyonları

3.1.1. Baxter Permütasyonlarına Giriş

Baxter permütasyonları sınırlandırılmış bir permütasyon türüdür. $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{n-1}\sigma_n$ şeklinde bir permütasyon düşünelim. Burada σ_i , i elemanın eşlemesidir. Bir Baxter permütasyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

Bütün indisler için $1 \leq i < j < k < l \leq n$ olmak üzere

1. Eğer $\sigma_i + 1 = \sigma_l$ ve $\sigma_j > \sigma_l$ ise $\sigma_k > \sigma_l$ dir.
2. Eğer $\sigma_l + 1 = \sigma_i$ ve $\sigma_k > \sigma_i$ ise $\sigma_j > \sigma_i$ dir.

Baxter permütasyonlarının daha kolay anlaşılabilmesi için bir örnek verilebilir. $n=5$ olsun. Örnek olarak 21543 permütasyonu alınsın. Burada $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 5, \sigma_3 = 4, \sigma_4 = 3$ ve $\sigma_5 = 2$ dir. Birinci koşuldaki $\sigma_i + 1 = \sigma_l$ ifadesi ardışık iki sayı alınması gerektiğini söyler. Yani 1 ve 2, 2 ve 3, 3 ve 4, 4 ve 5 gibi. Burada yine $1 \leq i < j < k < l \leq n$ şartı göz önünde bulundurulmalıdır. Birinci koşuldaki $\sigma_i + 1 = \sigma_l$ gereği $i=1$ alınırsa $\sigma_1 + 1 = 1 + 1 = 2 = \sigma_i + 1 = \sigma_5$ elde edilir. Yani $i=1$ iken $l=5$ tir. Bu durumda $j=2$ ve $k=3$ alınabilir. Birinci koşulda belirtilen $\sigma_j > \sigma_l$ şartına bakılırsa, $\sigma_2 > \sigma_5$ yazılır ve bu da $5 > 2$ demektir. Şimdi $\sigma_k > \sigma_l$ kontrol edilebilir. $\sigma_3 > \sigma_5$ yazılır buradan da $4 > 2$ elde edilir. Birinci koşul sağlandığından dolayı 21543 bir Baxter permütasyonudur. Benzer şekilde 41352, 263154, 5143762 permütasyonları da Baxter permütasyonudur. Fakat $n=4$ için 2413 ve 3142 Baxter permütasyonu değildir.

3.1.2. Çeşitli Sonuçlar

Baxter permütasyonlarının sayısı $B(n)$ kullanışsız bir yineleme bağlantısı olmasına rağmen daha hoş bir kapalı forma sahiptir:

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+1}{k-1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{1} \binom{n+1}{2}}.$$

Bu toplamdaki her bir terim birer tam sayıdır.

3.2. Üçgensel Katsayılar

3.2.1. Üçgensel Katsayı

Daha önce belirtildiği gibi binom katsayılarında her bir i çarpanını t_i ile değiştirerek üçgensel katsayılar elde edilebilir. i . üçgensel sayı

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{t_n t_{n-1} \dots t_{n-k+1}}{t_k \dots t_1}$$

şeklindedir. $t_n = \binom{n+1}{2}$ olduğunda

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{\binom{n+1}{2} \binom{n}{2} \dots \binom{n-k+2}{2}}{\binom{k+1}{2} \binom{k}{2} \dots \binom{3}{2} \binom{2}{2}}$$

elde edilir. Cebirsel olarak

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] &= \frac{\binom{n+1}{2} \binom{n}{2} \dots \binom{n-k+2}{2}}{\binom{k+1}{2} \dots \binom{2}{2}} \\ &= \frac{[(n+1)(n)][(n)(n-1)] \dots [(n-k+2)(n-k+1)]}{[(k+1)(k)] \dots [(3)(2)][(2)(1)]} \\ &= \frac{1}{k+1} \frac{(n+1)(n)(n-1) \dots (n-k+2)(n)(n-1) \dots (n-k+1)}{(k)(k-1) \dots (2)(1)} \\ &= \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

bulunur.

Binom katsayılarının Pascal üçgenini üretmesi gibi üçgensel katsayı da kendi üçgenine sahiptir.

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & & & & & \\
 1 & 1 & & & & \\
 1 & 3 & 1 & & & \\
 1 & 6 & 6 & 1 & & \\
 1 & 10 & 20 & 10 & 1 & \\
 \vdots & & & & & \ddots
 \end{array}$$

Üçgensel katsayının ilginç özelliklerinden birisi incelenirse farklı sonuçlara ulaşılabılır. Buradan hareketle aşağıdaki ifade üçgensel katsayının daima bir tam sayı olduğu anlamına gelir. $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} n \\ n-k \end{smallmatrix} \right]$ olduğu bilindiğinden

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \binom{n}{k} (k+1) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{n-k+1} (k+1) \\
 &= \frac{1}{n+1} \binom{(n+1) + (n+1)}{1 + (n+1)} \\
 &= \frac{1}{n+1} \binom{2n+2}{n+2} \\
 &= \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} \\
 &= C_{n+1}
 \end{aligned}$$

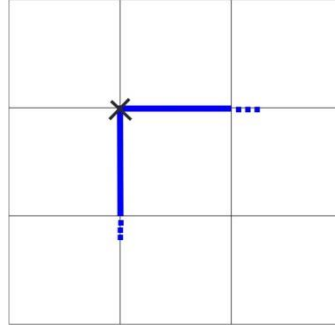
Yukarıdaki özdeşlik üçgensel katsayıların bir şeyi saydığı anlamına gelir yani üçgensel katsayılar Catalan sayılarının bir parçasıdır. Yukarıdaki ifade cebirsel olarak kanıtlanabilmesine rağmen bu kısımda üçgensel katsayılar ile Catalan sayıları arasındaki ilişki kombinatoriksel olarak gösterilecektir.

3.2.2. Üçgensel Katsayının Kombinatoriksel Yorumu

Catalan yolunun takip ettiği doğrultuda değişiklikler olduğu için, kırılma noktası Catalan yolunun kombinatoriksel bir parametresi olarak tanımlanır.

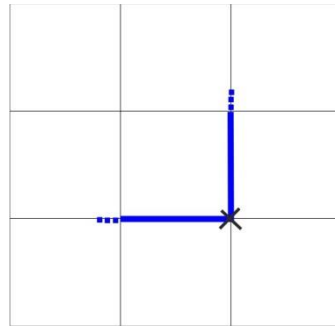
Tanım 3.1. Kırılma, latis yolunda yukarı yönlü bir hareketin ardından sağ yönlü bir hareketin geldiği latis noktasına verilen isimdir.

Şekil 4.1 de bir kırılma bölgesi X işareti ile gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Bir kırılma örneği

Şekil 3.2 de ise kırılma olmayan bir yöndeki değişiklik gösterilmektedir.



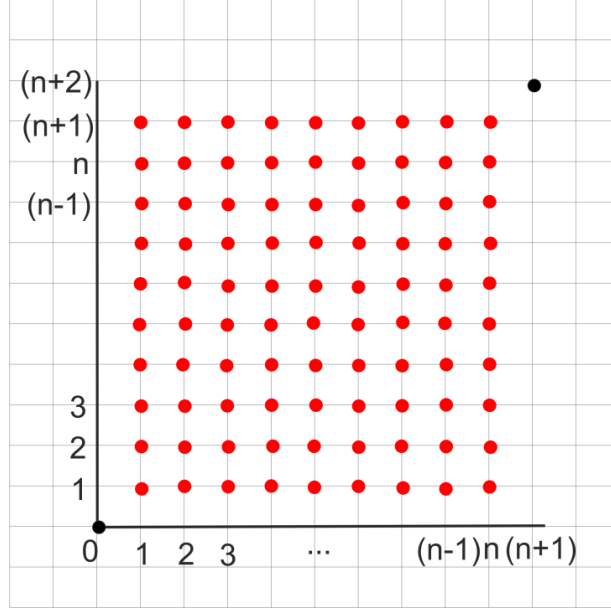
Şekil 3.2. Kırılma olmayan bir örnek

Bu tanımı göz önünde bulundurarak üçgensel katsayıların bir kombinatoriksel yorumu yapılabilir.

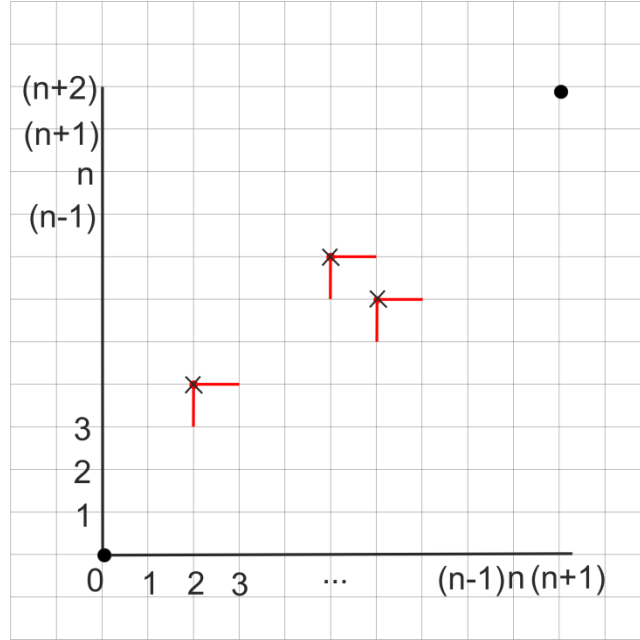
Teorem 3.1. Tam olarak k kırılmaları ile $(n+1, n+1)$ e olan Catalan yollarının sayısı $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ dır.

İspat. A_{n+1} sadece sağ ve yukarı yönlü hareket eden ve $y = \frac{(n+2)}{(n+1)}x$ doğrusunun altında kalan $(0,0)$ dan $(n+1, n+2)$ ye bir latis yolu olsun. A_{n+1} yollarının sayısı C_{n+1} e eşittir. Bunu ispatlamak için, A_{n+1} yolları ve $(n+1, n+1)$ e kadar olan Catalan yolları arasında birebir örtenlik sağlanmalıdır. Açıkça her C_{n+1} Catalan yolu ile yukarı yönlü fazladan bir adım sonucunda bir A_{n+1} yolu elde edilir. Tersine, $y = \frac{(n+2)}{(n+1)}x$, $y = \frac{(n+1)}{(n+1)}x$ ve $x = n+1$ ile sınırlanan üçgende hiçbir latis noktası olmadığında bir A_{n+1} yolu üzerinde olması veya $y=x$ doğrusunun altında kalması gerekir. Sonuç olarak bir C_{n+1} Catalan yolunun son hareketinin yukarı yönlü olması gerektiğinde bir A_{n+1} yolunun son iki hareketi yukarı yönlü olmalıdır. Bu nedenle bir A_{n+1} yolundan yukarı yönlü son hareketi kaldırarak A_{n+1} yolları ile Catalan yolları arasında basit bir birebir örtenlik oluşturularak $(n+1, n+1)$ e bir Catalan yolu elde edilir.

Şimdi k kırılmalarını yerleştirerek $(0,0)$ dan $(n+1, n+2)$ ye sınırsız bir yol inşa edilmelidir. Yoldaki birinci hareketin sağ yönlü hareket ve son hareketin yukarı yönlü bir hareket olması sağlanmaya çalışılacaktır. Bundan dolayı herhangi bir (x,y) noktasına bir kırılma yerleştirilebilir. Burada $x \in \{1,2,3,\dots,n\}$ ve $y \in \{1,2,\dots,n+1\}$ dir. Şekil 4.3 teki kırmızı renkli noktaların herhangi birine herhangi bir latis noktası yerleştirilebilir. Ayrıca kırılmalar artan sıralamada yerleştirilmelidir. Örneğin kırılmalar Şekil 3.4 te olduğu gibi yerleştirilemez. Bundan dolayı k kırılmalarını uygun bir biçimde yerleştirebilmek için k nın x - koordinatları $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n$ ve y - koordinatları da $1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_k \leq n+1$ seçilmelidir. Kırılmaların koordinatları $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ olacaktır. Örneğin eğer x - koordinatları $(1,5,6)$ ve y - koordinatları $(2,4,5)$ seçilirse kırılmalar, Şekil 3.5 te ki gibi $(1,2)$, $(5,4)$ ve $(6,5)$ olarak yerleştirilebilir.



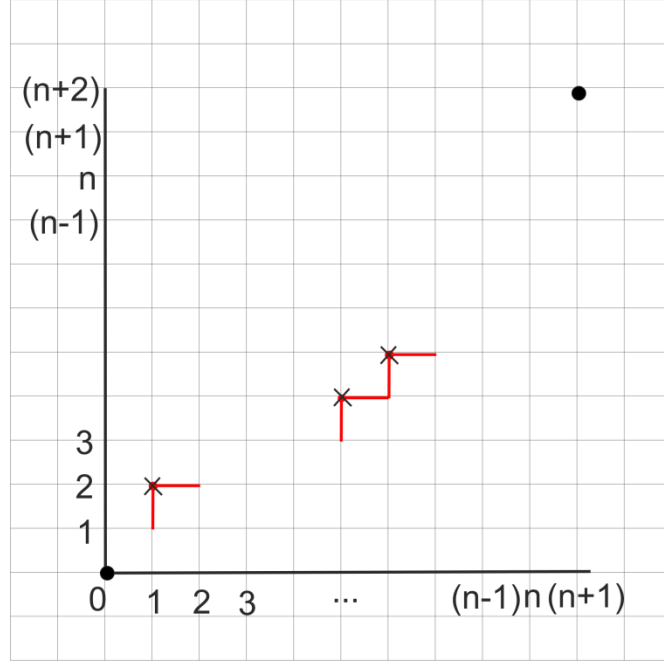
Şekil 3.3. Kırılma yerleştirilebilecek latis noktaları



Şekil 3.4. Kırılmaların yanlış düzenlenmesi

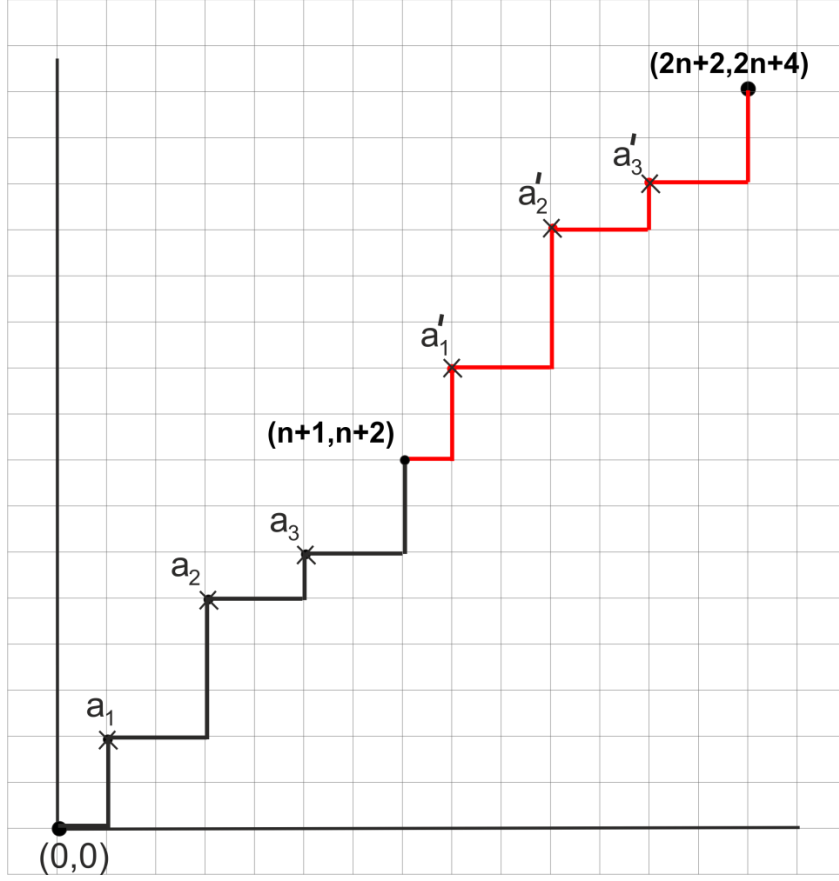
Böylece bu hareket tarzında $(0,0)$ dan $(n+1, n+2)$ ye toplam $\binom{n+1}{k} \binom{n}{k}$ yol vardır. Şimdi bu biçimde elde edilen bir A_{n+1} yolunda her $k+1$ yolundan inşa edilen tam

olarak bir çıkış olduğu gösterilsin. k kırılmalarıyla bu hareket tarzında inşa edilen bir P yolu alınsın. Bu kırılmalar a_1, a_2, \dots, a_k olarak isimlendirilebilir. Şimdi P den geçen bir A_{n+1} yolu oluşturulmalıdır.



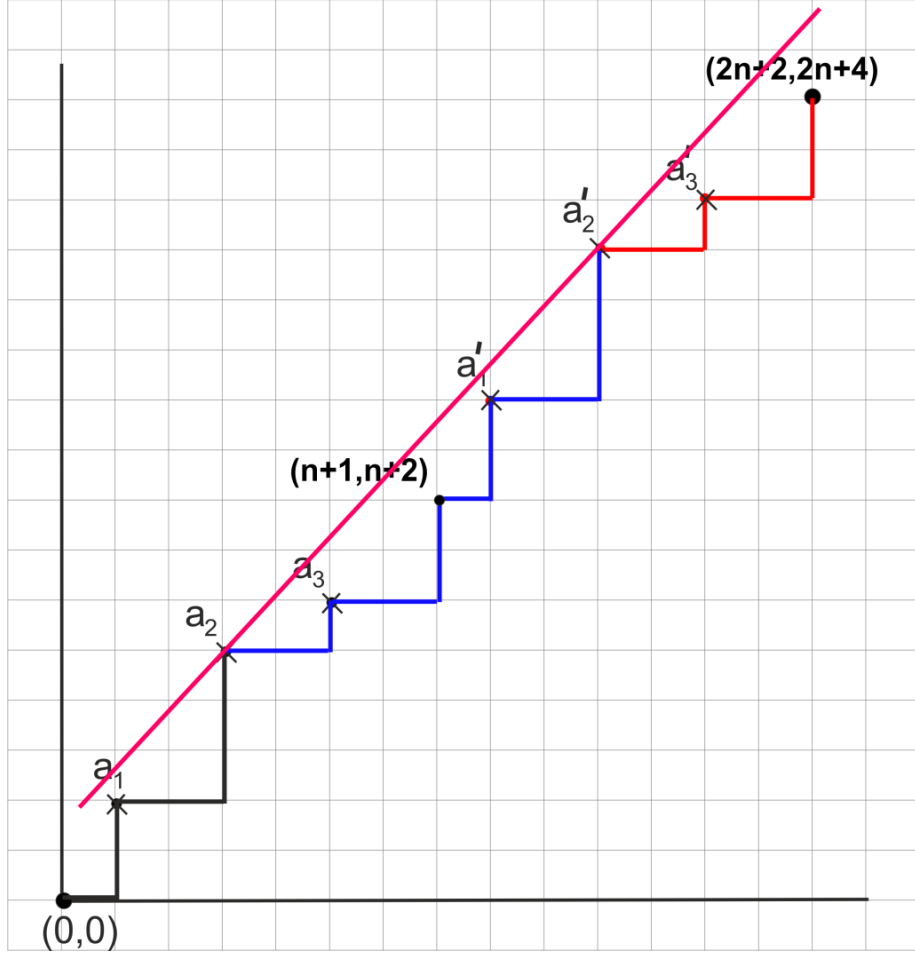
Şekil 3.5. Kırılmaların uygun bir yerleşimi

P' ifadesi $(n+1, n+2)$ den $(2n+2, 2n+4)$ e Şekil 3.6 da gösterildiği gibi a'_1, a'_2, \dots, a'_k kırılmaları ile isimlendirilen P nin bir ötelenişi gibi düşünülürse P ve P' nin her ikisi $y = \frac{(n+2)}{(n+1)}x$ e paralel bir doğru altına tamamen gelene kadar $y = \frac{(n+2)}{(n+1)}x$ doğrusu yukarıya taşınabilir. Örneğin, Şekil 3.7 de P ve P' kırmızı doğrunun altında kalana kadar orijinal doğru yukarı doğru taşındı. Sonuç olarak A_{n+1} yolu mavi renkle vurgulandı. $(n+1)$ ve $(n+2)$ aralarında asal olduğunda, her a_i, a'_i kırılma çiftleri hariç hiçbir kırılma $y = \frac{(n+2)}{(n+1)}x$ doğrusuna paralel bir doğru üzerine gelemez. Ayrıca P yolunun başlangıç ve bitiş noktaları kırılmalar gibi hareket ettiğinden (P nin bitiş noktası ve P' nin başlangıç noktası bir kırılma oluşturur) toplam $k+1$ kırılma olduğu görülebilir. Bundan dolayı, P ve P' bu son noktalarla oluşan doğrunun altında kalacak şekilde $k+1$ toplam kırılma çiftleri dışında tam olarak bir a_i, a'_i çifti vardır.



Şekil 3.6. P ve P' nin birbirine bağlanması

Diğer bir deyişle (0,0) dan bir yol inşa edilmişti ve tüm P – P' yolu üstünde kalan tam olarak $k+1$ çifti dışında bir doğru inşa edileceği bulundu. Böylece $k+1$ dışındaki her sınırsız yol tam olarak aslında bir A_{n+1} yolu olacaktır. Bundan dolayı k kırılmalarıyla toplam A_{n+1} yoldan oluşan $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \binom{n+1}{k} \binom{n}{k}$ ifadesi $k+1$ ile bölünmelidir. A_{n+1} yolları ve Catalan yolları arasında bir birebir-örtelik kurulduğundan tam olarak k kırılmalarıyla (0,0) dan $(n+1, n+1)$ e Catalan yollarının sayısı $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ inşa edildi. Üçgensel katsayının bir tam sayı olması gerektiği Catalan yollarının sayısının ayrık olarak saymasından direkt olarak görülür.



Şekil 3.7. P ve P' nin son noktaları arasındaki kırılma çifti

Teorem 3.2.

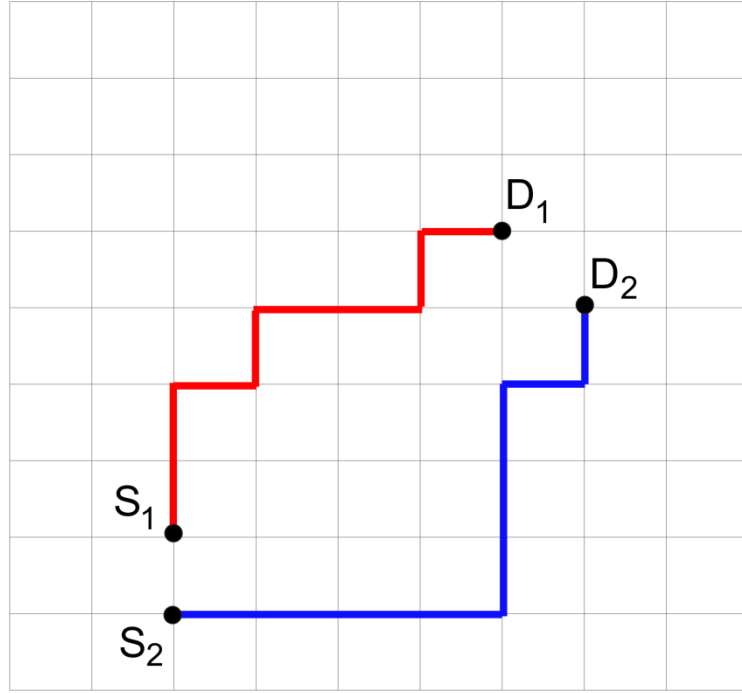
$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} = C_{n+1}$$

İspat. k kırılmaları ile $(n+1)$ e olan Catalan yollarının sayısı $\binom{n}{k}$ ile sayılacağı için k nın tüm değerlerinin toplanması herhangi bir kırılmanın sayısı ile $(n+1)$ e olan Catalan yollarının sayımına eşittir yani doğal olarak C_{n+1} e eşittir.

3.2.3. Kesişmeyen Yollar

Üçgensel katsayı kesişmeyen yolun özel bir formunun sayımı olarak da yorumlanabilir. Bu yorumu vermeden önce kesişmeyen yolların sayımı kavramı tanıtılsın.

S_1 ve S_2 den başlayarak D_1 ve D_2 varış noktalarına ulaşan eş zamanlı yollar düşünölsün. Bu başlangıç ve varış noktaları Şekil 3.8 deki gibi düzenlenebilir.



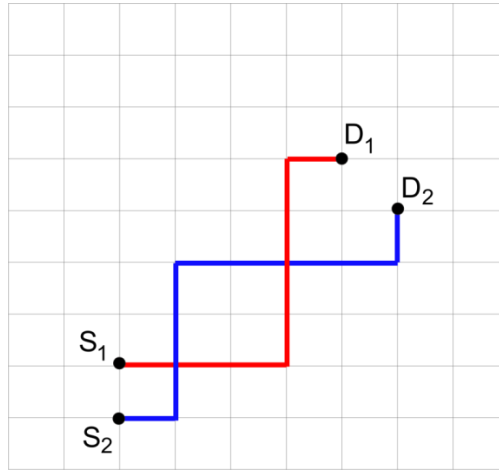
Şekil 3.8. S_1 den D_1 e ve S_2 den D_2 ye bir eşzamanlı yol

Başlangıç noktalarından varış noktalarına olan yolların sayısı Çizelge 3.1 deki gibi gösterilsin.

Çizelge 3.1. Başlangıç noktalarından varış noktalarına yolların sayısı

Başlangıç ve varış noktaları	D_1	D_2
S_1	A	B
S_2	C	D

Bu şekilde başlangıç noktalarından varış noktalarına olan eş zamanlı yollar düşünülürse iki ihtimal vardır: S_1 den D_1 e ve S_2 den D_2 ye. Bu standart eş zamanlı yol olarak adlandırılırsa veya S_1 den D_2 ye ve S_2 den D_1 olan yol ki bu da çapraz geçişli eşzamanlı yol olarak adlandırılabilir. Dikkat edilirse çapraz geçişli yol bazı kesişim noktalarına sahip olacaktır. Bundan dolayı eşzamanlı yolların toplam sayısı $AD+BC$ dir. Şimdi Şekil 3.9 da olduğu gibi standart kesişen yollar düşünölsün.



Şekil 3.9. Bir standart kesişen yol

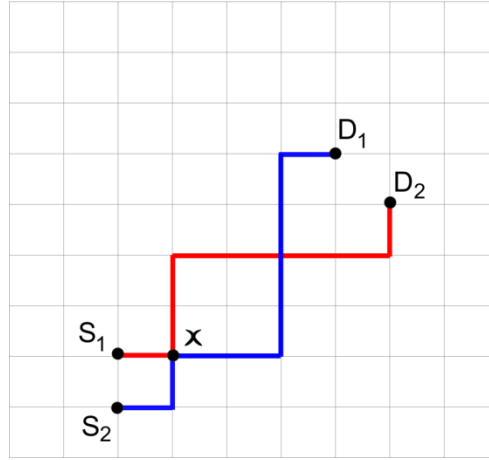
En az bir kesişim ile böyle BC yollarının olduğunu iddia ediyoruz. İki yol arasında bir kesişim noktasına sahip standart eş zamanlı bir yol düşünölsün. Bu iki yolun ilk kesişim noktası x olarak isimlendirilsin. x noktasından sonra iki yolun da arka kısmı değiştirilsin. Yani S_1 yolu aslında D_1 e gidiyordu, fakat x den sonra S_1 yolu S_2 ile başlayıp D_2 de bitecek olan yolu takip eder. Aynı şekilde S_2 yolu aslında D_2 ye

gidiyordu fakat x den sonra S_2, S_1 in D_1 e olan yolunu takip edecektir. Şekil 3.10 da görsel bir örnek verilmiştir.

Diğer bir deyişle her çapraz geçişli yol bir kesişim noktasına sahip olduğunda, kesişen ve çapraz geçişli yollar ile standart yolların birebir-örten bir forma sahip olduğu görülür. Bundan dolayı kesişim olmaksızın oluşan $AD-BC$ standart yolları kadar bir kesişim noktası ile oluşan BC standart yolları vardır. Bu aşağıdaki matrisin determinantı gibi gösterilebilir.

$$\text{Kesişmeyen standart yolların sayısı} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

Bu matrisin daha önce verilen Çizelge 3.1 ile aynı formatta olduğu görülebilir. Kesişmeyen yollardaki bu ifade aşağıdaki teoremi ispatlamak için kullanılacaktır.



Şekil 3.10. Şekil.3.9 da verilen yolların kesişim noktasından sonra varış noktalarının değişmesi

Teorem 3.3.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{vmatrix}$$

İspat. İlk olarak matris düşünülürse determinantın yorumunda kesişmeyen yolu kullanarak basitçe başlangıç noktaları, varış noktaları ve yolların hareketleri gösterilmelidir. $(0,0)$ ve $(0,-1)$ den başlayan ve $(k,n-k)$ ve $(k+1,n-k-1)$ varış noktalarına ulaşan iki nokta alınsın. Burada ayrıca sadece sağ ve yukarı yönlü latis yollarının sayısı sayılmalıdır. Yani $(0,0)$ dan $(k,n-k)$ ye, $k+(n-k)=n$ toplam hareket uygulanmalıdır. Bu yüzden sağ yönlü k hareket seçilirse bu şekilde toplam $\binom{n}{k}$ yol vardır. Benzer sayma argümanları matrisin üstünde oluşan diğer başlangıç ve varış noktası çiftleri için uygulanabilir.

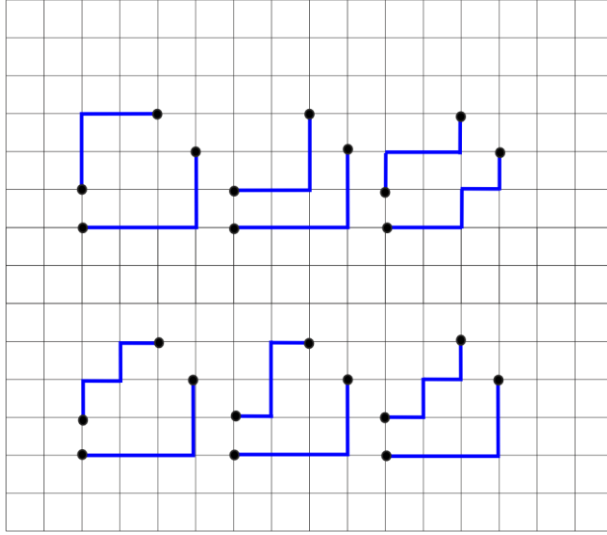
Örneğin eğer $n=4$ ve $k=2$ alınırsa Şekil 3.11 deki gibi sınırlandırılmış yollara sahip olunabilirdi.

Ancak her bir duruma dikkat edildiğinde eğer $(0,0)$ dan $(0,-1)$ noktasına bir çizgi çekilir $(k,n-k)$ ve $(k+1,n-k-1)$ noktalarının sağ üst köşeleri çizgilerle kapatılırsa, Şekil 3.12 deki gibi $n+2$ büyüklüğünde polyominolar elde edilir.

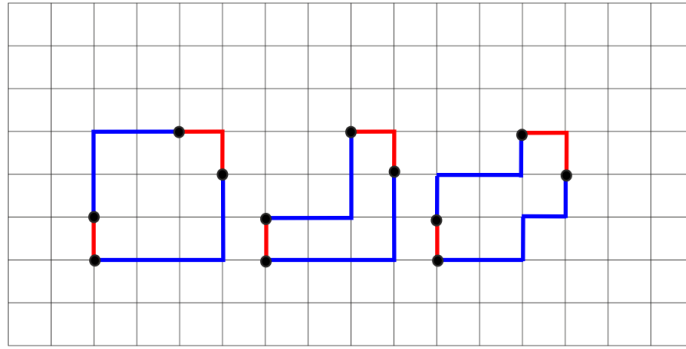
Bundan dolayı orijinal matrislerin sayımları $k+1$ genişliği ile $n+2$ büyüklüğündeki polyominoların sayısıdır. Burada “genişlik” bir polyominonun sütunlarının sayısıdır.

Şimdi $n+2$ büyüklüğünde polyominolar ve $(n+1,n+1)$ e Catalan sayıları arasında bir birebir örtenlik gösterilsin. Örnek olarak $n+2$ büyüklüğünde bir polyomino düşünölsün. İlk olarak polyominonun birbirine karşılık gelen sütunları kendi içinde ayrılmalıdır. Her bir sütun iki parametreye sahiptir: Yükseklik ve önceki sütunla çakışma. Örneğin Şekil 3.13 teki üçüncü polyomino incelenebilir.

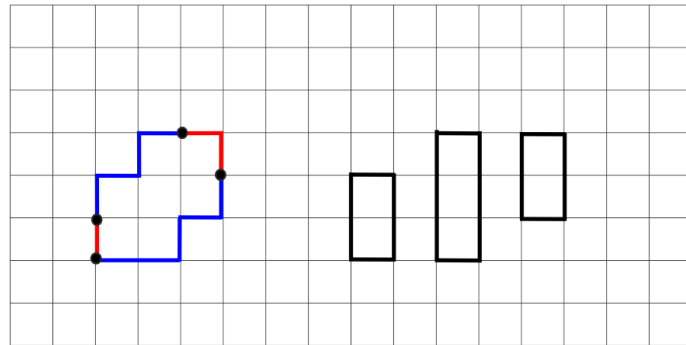
Her sütun en az bir çakışmaya sahip olması gerektiği için (birinci sütun dışında) çakışma parametresi asıl çakışma durumundan bir tane azdır denilir. Bu yüzden örnekte ilk sütunun yüksekliği 2 dir ve çakışma parametresi yoktur, ikinci sütunun yüksekliği 3 ve çakışma parametresi 1 dir ve üçüncü sütunun yüksekliği 2 ve çakışma parametresi 1 dir. Birinci sütundan başlayarak, yüksekliği ve taban uzunluğu sütunun yüksekliğinde olan bir sağ üçgen çizilsin. Aşağıdaki örnekler ile devam edilirse Şekil 3.14 te göröldüğü gibi sağ üçgenler elde edilir.



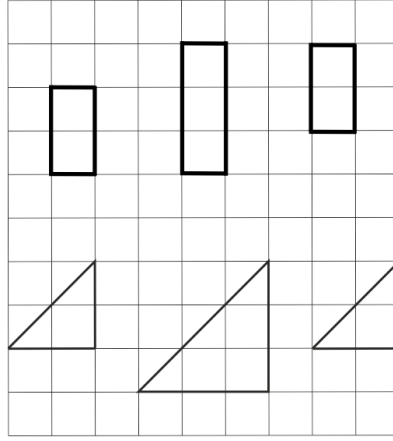
Şekil 3.11. Sınırlandırılmış bir yol örneği



Şekil 3.12. Köşeleri kapatılarak elde edilen polyomino formu

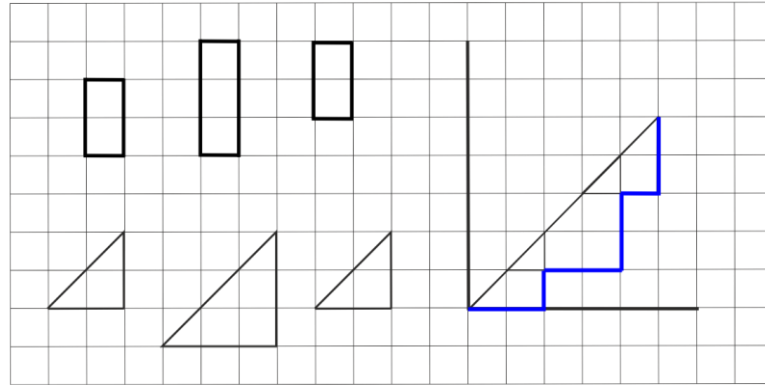


Şekil 3.13. Parçalanmış bir polyomino ve birbirinden ayrı sütunlar



Şekil 3.14. Catalan yolu oluşturmak üzere ayrılan, polyominoya karşılık gelen sütunlarla elde edilmiş üçgenler

Şimdi bu üçgenler bir Catalan yolundan latis tam sayısı üzerine yerleştirilmelidir. İlk üçgen (birinci kolona karşılık gelen) $(0,0)$ ve $y=x$ doğrusu hizasına yerleştirilsin. Sonraki üçgeni yerleştirmek için yolun bitiş noktasının y koordinatına ve çakışma parametresinin değeri p ye bakılmalıdır. Sonraki üçgenin tabanı $(y-p)$ ye ve $y=x$ doğrusu hizasına yerleştirilsin.



Şekil 3.15. Her bir üçgenin çakışma parametresine göre Catalan yolu formunda düzenlenişi

$(0,0)$ dan $(n+1,n+1)$ e bir Catalan yolunda oluşan bu üçgenlerin yerleştirilmesi boyunca izlensin. Dikkat edilirse çakışma en azından sıfır olacaktır ve böylece $y=x$ doğrusu asla geçilemeyecektir. Şekil 3.15 te bu biçimde bir Catalan yolu formunda kullanılmış üçgenler görülebilir. Her bir Catalan yolundaki kırılmaların sayısı polyominoya karşılık gelen sütunların sayısından bir azdır. Bundan dolayı yukarıdaki birebir eşlemeyle sağdaki matris $k+1$ sütunlu polyominoların sayısını verdiği için k kırılmaya sahip Catalan yollarının sayısını da verdiği görülür. Böylece istenildiği gibi

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{vmatrix}$$

elde edilir.

3.2.4. Simetri

Teorem 3.4. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-k \end{bmatrix}$.

İspat. Tam olarak k kırılmalarıyla $(n+1,n+1)$ e Catalan yollarının sayısının $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ile sayıldığı gösterilmişti. Bundan dolayı Catalan yolları ve polyominolar arasında birebir eşlemeyi kullanarak polyominoya karşılık gelen k sütun ve $n-k$ yüksekliğine sahip olunmuş olacaktır. Eğer bu polyominonun $y=x$ doğrusuna göre simetriği alınır, k yüksekliği ve $n-k$ sütunlarıyla bir polyomino elde edilir. Sonuç olarak, Catalan yolu $n-k$ kırılmaya sahip bu polyominoya karşılık gelir. Her bir yol yalnız bir polyomino temsiline sahip olduğu için bu biçimdeki k kırılmaları ve $n-k$ kırılmalarıyla yollar arasında istenildiği gibi bir birebir eşleme olduğu görülür.

3.3. Baxter Katsayıları

3.3.1. Baxter Katsayısı

Önceki bölümde üçgensel katsayılar düşünülmüştü. $t_n = \binom{n+1}{2}$ için üçgensel katsayı

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{t_n t_{n-1} \dots t_{n-k+1}}{t_k \dots t_1} = \frac{\binom{n+1}{2} \binom{n}{2} \dots \binom{n-k+2}{2}}{\binom{k+1}{2} \dots \binom{2}{2}}$$

gibi yeniden yazılabilir.

Binom katsayısındaki her bir $\binom{i}{2}$ terimi yerine $\binom{i+1}{2+1} = \binom{i+1}{3}$ yazarak artırıldığında çeşitli sonuçlar bulunabilir:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 = \frac{\binom{n+2}{3} \binom{n+1}{3} \dots \binom{n-k+3}{3}}{\binom{k+2}{3} \dots \binom{3}{3}}.$$

Bu ifade kendi üçgenini üretir.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ 1 & 10 & 10 & 1 & & \\ 1 & 20 & 50 & 20 & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{array}$$

Burada yeni bir durumla karşılaşılır ki bu da yeni katsayının daima bir tam sayı olmasıdır. Daha da önemlisi satırlar toplandığında 1, 2, 6, 22, 92, 422, ... dizisi elde edilir veya

$$\sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 = B_n$$

yazılabilir. Bu yüzden $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3$ ifadesi bir Baxter katsayısı olarak adlandırılır.

3.3.2. İlginç Benzerlikler

Teorem 3.5.

$$\sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 = B_n.$$

İspat.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 &= \frac{\binom{n+2}{3} \binom{n+1}{3} \dots \binom{n-k+3}{3}}{\binom{k+2}{3} \dots \binom{3}{3}} \\ &= \frac{[(n+2)(n+1)(n)][(n+1)(n)(n-1)] \dots [(n-k-3)(n-k-2)(n-k-1)]}{[(k+2)(k+1)(k)] \dots [4.3.2][3.2.1]} \\ &= \frac{2}{(k+1)^2(k+2)} \frac{(n+2) \dots (n-k+3)}{(k) \dots (1)} \frac{(n+1) \dots (n-k+2)}{(k) \dots (1)} \frac{(n) \dots (n-k+1)}{(k)(k-1)(1)} \\ &= \frac{2}{(k+1)^2(k+2)} \binom{n+2}{k} \binom{n+1}{k} \binom{n}{k} \\ &= \frac{\binom{n+2}{k} \binom{n+1}{k} \binom{n}{k}}{\binom{k+1}{1} \binom{k+2}{2}} \\ &= \frac{\binom{n+2}{k} \binom{n+1}{k} \binom{n}{k}}{\binom{n+1}{1} \binom{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Böylece bir satırın üzerine toplanmasıyla

$$\sum_{k=1}^n \frac{\binom{n+1}{k-1} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{1} \binom{n+1}{2}} = B_n$$

elde edilir.

Üçgensel katsayıya benzer şekilde Pascal üçgeninde bir determinant alınarak Baxter katsayısının da bulunabileceği görülür.

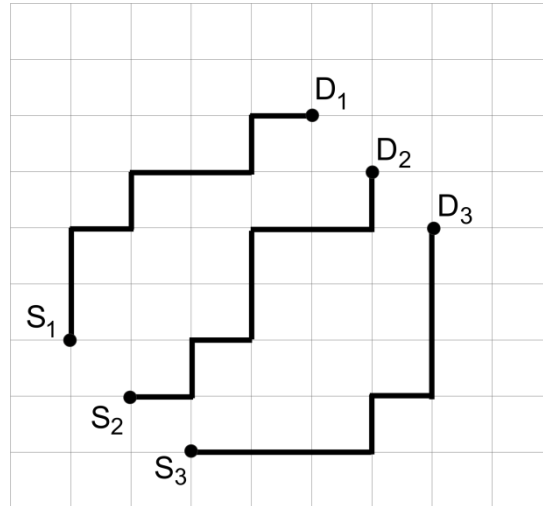
Teorem 3.6.

$$[n]_3 = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} & \binom{n+1}{k+2} \\ \binom{n+2}{k} & \binom{n+2}{k+1} & \binom{n+2}{k+2} \end{vmatrix}.$$

İspat. Bu ifade cebirsel işlemler yapılarak ispatlanabilmesine rağmen [4] ün doğal bir sonucudur. Baxter permütasyonlarının sayısı k artışıyla beraber

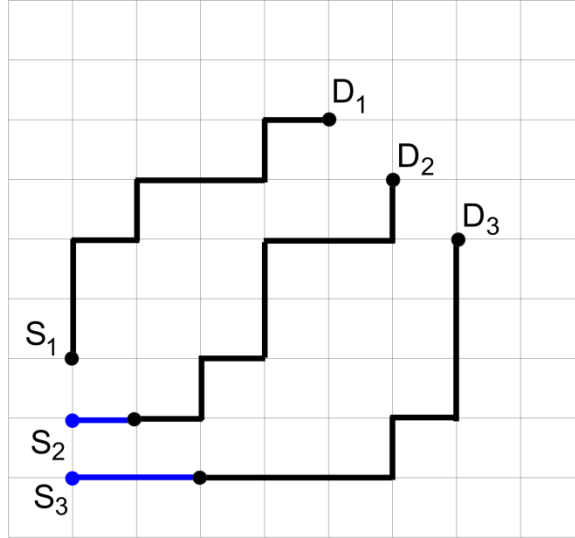
$$\begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \\ \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \\ \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \end{vmatrix}$$

dir. Diğer bir deyişle 3.2.3. numaralı kısımda tartışıldığı gibi bu matris S_1, S_2, S_3 başlangıç noktaları ve D_1, D_2, D_3 varış noktaları ile kesişmeyen yolların sayısını sayar. Şekil 3.16 da başlangıç ve varış noktaları ile bu 3 kesişmeyen yolun bir örneği görülebilir.



Şekil 3.16. Üç kesişmeyen yol

Ancak dikkat edilirse sadece sağ ve yukarı yönlü hareketler yapılabildiği için eğer hareket Şekil 3.17 de olduğu gibi S_3 den $(0, -2)$ ve S_2 den $(0, -1)$ noktasına kaydırılırsa kesişmeyen yolların sayısı değişmez.



Şekil 3.17. Kesişmeyen yolların başlangıç noktalarının değiştirilmesi

Yolların kesişmeyenlerinin sayısı böylece

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} & \binom{n+1}{k+2} \\ \binom{n+2}{k} & \binom{n+2}{k+1} & \binom{n+2}{k+2} \end{vmatrix}$$

ile sayılır. Bu da

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \\ \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \\ \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} & \binom{n+1}{k+2} \\ \binom{n+2}{k} & \binom{n+2}{k+1} & \binom{n+2}{k+2} \end{vmatrix}$$

anlamına gelir. Diğer bir deyişle k artışlarıyla Baxter permütasyonlarının sayısı, Pascal üçgeninde n . satır ve k . sütuna giderek ve 3×3 tipinde bir determinant olarak belirlenir.

3.4. Fibonomial Katsayı

Binom katsayısının her bir çarpanı bir Fibonacci sayısı ile değiştirilirse Fibonomial katsayı elde edilir. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_F$ ifadesi

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_F = \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+1}}{F_k \dots F_1}$$

olarak tanımlansın. Burada $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dir. Yine Fibonomial katsayılar da kendi üçgenlerini oluşturur.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 6 & 6 & 1 & & \\ 1 & 10 & 20 & 10 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Burada Fibonomial katsayının daima bir tam sayı olması durumu ile karşılaşılır. Cebirsel olarak ve üçgende ayrıca görülür ki $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_F$ dir.

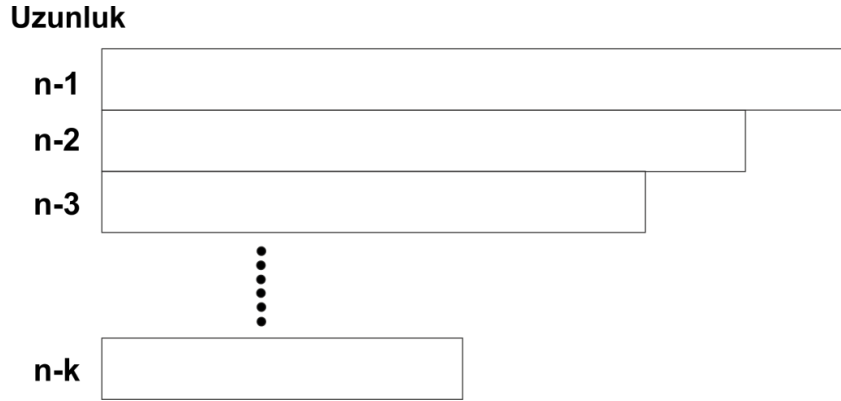
Bu gerçeği ispatlamak için $f_n = F_{n+1}$ ifadesi yani n genişliğinde kareler ve dominoların bir tahtaya yerleştirilmesindeki yolların sayısını veren ötelenmiş Fibonacci sayıları kullanılacaktır.

3.4.1. Daima Tam Sayı Olma Durumu

Teorem 3.7. $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_F$ bir tam sayıdır.

İspat. Fibonacci sayılarının ötelenişi kullanılarak $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_F = \frac{f_{n-1}f_{n-2}\dots f_{n-k}}{f_{k-1}\dots f_0}$ elde edilir.

$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_F$ ifadesinin daima bir tam sayı olduğunu ispatlamak için $n-1, n-2, \dots, n-k$ uzunluğundaki kutuların içinde $k-1, k-2, \dots, 1, 0$ uzunluğunda kutucukların var olduğu gösterilmelidir. Paydadaki kutucuklar alt kutucuk ve paydaki kutucuklar da piramit kutucuk olarak adlandırılısın. Tıpkı cebirsel olarak terimlerin sadeleştirilmesi gibi herhangi bir piramit kutucuğu ve eşit uzunluktaki alt kutucuk bir sadeleştirme yapar gibi kaldırılabilir. Kutucuklardan geriye kalanlar için Şekil 3.18 deki gibi bir piramitte piramit kutucukları düzenlenir.

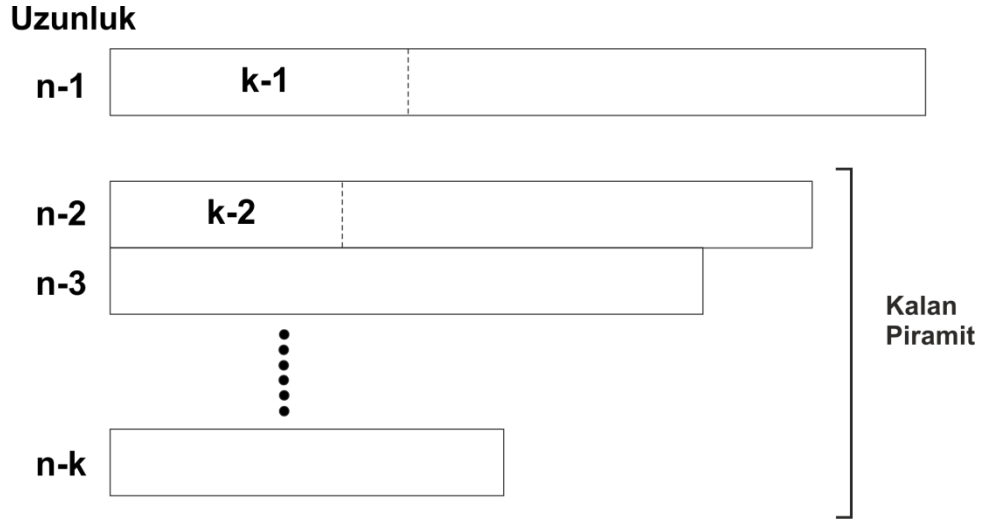


Şekil 3.18. Piramit kutucuklarından bir piramit düzenlemesi

Her bir piramit kutucuğunda tam olarak bir alt kutucuk bulunmaya çalışılacaktır. Piramidin en tepesinden her seferinde bir döşeme incelenerek başlanabilir. İlk olarak $k-1$ parçalanabilir hücreden $n-1$ kutucuk oluşturulup oluşturulamayacağına karar verilmelidir. Eğer $n-1$ kutucuk $k-1$ parçaya ayrılabiliriyorsa ilk alt kutucuk bulunmuş demektir. Böylece Şekil 3.19 de gösterildiği gibi piramitten $n-1$ kutucuk

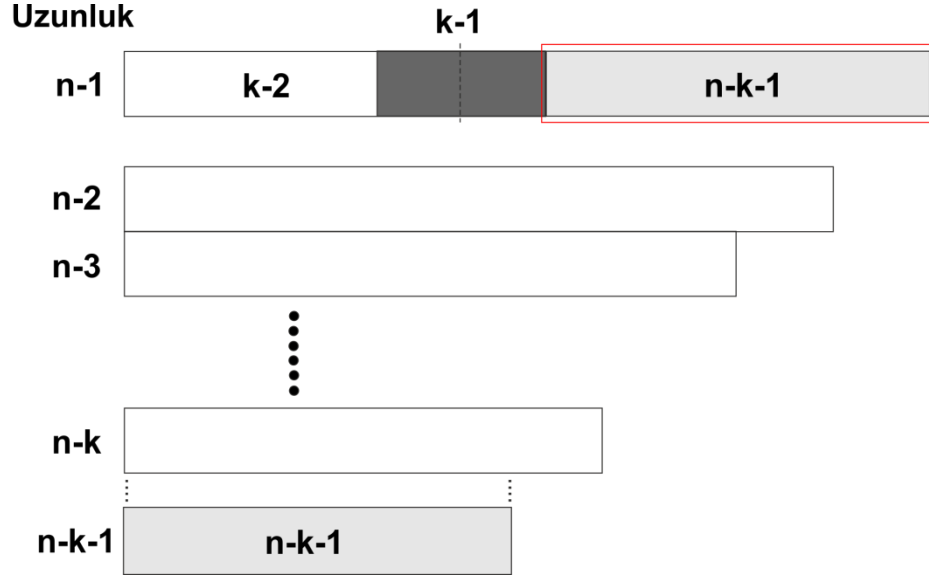
kaldırılabilir ve bir sonraki kutucuğun $k-2$ parçaya ayrılıp ayrılmadığına karar verilebilir.

Diğer bir deyişle eğer i alt kutucukları bulunursa en üstteki piramit kutucuğunun $k-(i+1)$ parçaya ayrılıp ayrılmayacağı incelenmeye devam edilebilir.



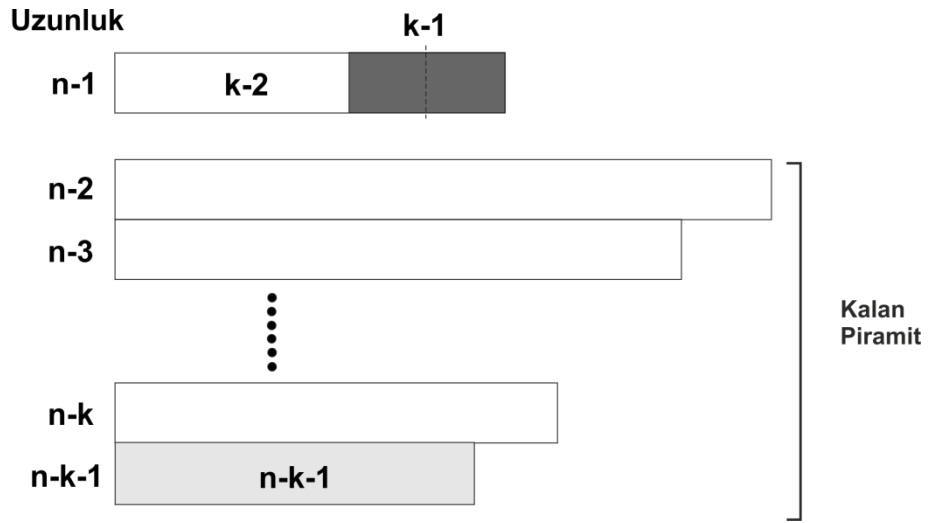
Şekil 3.19. $k-1$ parçaya ayrılabilen en üst kutucuğun varlığında, kalan alt kutucuklar için piramidin geri kalanının incelenmesi

Ancak üstteki piramit kutucuğu $k-i+1$ parçaya ayrılamıyorsa bir problemle karşılaşılır. Diğer bir deyişle bir domino $k-i+1$ hücre üzerine ortalanmıştır. Bu durumda kutucukların en üst kısmında yer alan dominonun en sağındaki parça alınıp piramidin en altına doğru Şekil 3.20 te olduğu gibi hareket ettirilir.



Şekil 3.20. $k-1$ parçaya ayrılamayan en üst kutucuğun varlığında, kutucuğun geri kalanının piramidin en altına taşınması

Yine eğer i alt kutucukları bulundursa piramitte kalan hala $k-i$ kutucuk ve bulmak için ayrılan $k-i$ alt kutucuk vardır. Şekil 3.20 deki gibi devam ederek hala $k-i$ kutucuk ile bir piramide sahip olunur. Fakat piramit Şekil 3.21 de olduğu gibi bir önceki piramitten biraz daha küçüktür.



Şekil 3.21. Eşit sayıda kutucuğa sahip fakat daha kısa olan piramit

Her adımda aynı şekilde devam ederek eğer i alt kutucukları bulunduysa piramidin en üst kutucuğunun $k-i+1$ parçaya ayrılıp ayrılmadığına karar verilebilir. Bu şekilde ya başarılı olunur ve piramit bir kutucuk kadar daralır ya da bir domino elde edilir ve piramidin en üstte kalan kutucuğu piramidin altına doğru hareket ettirilir. Her iki durumda da en üstteki kutucuğun uzunluğu her bir yineleme sonrası tam olarak bir azalacaktır. Ters bir durumda ise eğer i alt kutucukları bulunduysa kalan bütün alt kutucukları veren $k-(i+1), k-i+2, \dots, 1,0$ uzunluklu bütün kutucuklarla karşılaşılır. Bundan dolayı $n-k, n-k+1, n-k+2, \dots, n-2, n-1$ uzunluklu kutucukların herhangi bir kümesinde $0, 1, \dots, k-1$ uzunluklu kutucuklar daima bulunabilir. Bu yüzden $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_F$ ifadesinin daima bir tam sayı olması gerektiğine ulaşılır.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez de öncelikle binom katsayısı tanımlanıp bazı özellikleri verilmiştir. Binom katsayısından yola çıkarak binom fonksiyonunda i çarpanı uygun $f(i)$ fonksiyonları ile değiştirilerek yeni özdeşlikler elde edilmeye çalışılmıştır. Sırasıyla eğer $f(i)=t_i$ yazılırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{t_n t_{n-1} \dots t_{n-k+1}}{t_k \dots t_1}$$

elde edildiği ve üçgensel katsayı olarak adlandırıldığı veya $f(i) = \binom{i+2}{3}$ alınırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 = \frac{\binom{n+2}{3} \binom{n+1}{3} \dots \binom{n-k+3}{3}}{\binom{k+2}{3} \dots \binom{3}{3}}$$

bulunduğu ve Baxter katsayısı olarak isimlendirildiği ayrıca $f(i)=F_n$ yazılırsa

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_F = \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+1}}{F_k \dots F_1}$$

Fibonomial katsayının elde edildiği gösterilmiştir. Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a = \frac{\binom{n+a-1}{a} \binom{n+a-2}{a} \dots \binom{n-k+a}{a}}{\binom{k+a-1}{a} \dots \binom{a}{a}} = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \dots & \binom{n}{k+a-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n+a-1}{a} & \dots & \binom{n+a-1}{k+a-1} \end{vmatrix}$$

elde edilebilir.

Daha sonra 2×2 ve 3×3 tipinde matris determinantları alındığında Baxter ve Catalan sayılarının parçalanışlarına ulaşıldı ve sırasıyla $n \times n$ durumunu sağlayan herhangi n kesişmeyen yoldan daha fazla yol olup olmadığı araştırıldı.

Ayrıca bir boyutlu Catalan yolunun basit kombinatoriksel ispatı yapıldı. Son olarak tıpkı üçgensel katsayılar ile Baxter katsayısı arasındaki gibi Pascal üçgeni ile Fibonomial katsayı arasında bir ilişki kuruldu ve Fibonomial katsayının daima tam sayı olması gerektiği gösterildi.

KAYNAKLAR

- [1] S. S. Plott, Functions of the Binomial Coefficient. Master Thesis. Harvey Mudd Collage, 2008.
- [2] Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik O., Concrete Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, California, 1990.
- [3] Lando, S. K., Lectures on Generating Functions. American Math. Society, United States of America, 2003.
- [4] Dulucq, S., Guibert, O., Baxter permutations. In Proceedings of the 7th Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 143–156, UK, 1998.
- [5] Giraud, S., Algebraic and Combinatorial Structures on Baxter Permutations. The University Paris-Est Marne-la-Vallée. <http://arxiv.org/pdf/1011.4288v3.pdf> (Erişim tarihi: 20.04.2015)
- [6] Seibert, J. and Trojovský, P., On some identities of the Fibonomial coefficient. Mathematica Slovaca, vol. 55, 2005.
- [7] Stanley, R.P., Enumerative Combinatorics. Vol. 2. Cambridge University Press, New York, 1999.
- [8] West, B., Combinatorial Mathematics. University of Illinois Mathematics Department, United States of America, 2006.