KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

İBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Emre DENİZ

EYLÜL 2015

Matematik Anabilim Dalında Emre DENİZ tarafından hazırlanan **İBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ** adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Ali ARAL

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	____________
Üye	: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA	____________
Üye	: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL	____________
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Ali ARAL	____________
Üye	: Doç. Dr. Ali OLGUN	____________

03/09/2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Aileme Sevgilerimle

ÖZET

İBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

DENİZ, Emre

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı, Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL

Eylül 2015, 57 sayfa

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş ve kaynak özetlerine için ayrıldı. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin noktasal yakınsaklığı incelenmiştir. Beşinci bölümde İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin ağırlıklı yakınsaklığı incelenmiş ve yaklaşım hatası için bir üst sınır verilmiştir. Altıncı bölümde İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin türevlerinin, yaklaşım fonksiyonunun türevlerine olan yakınsaklığı incelenmiş ve bu operatörlerin noktasal yakınsaklığı verilmiştir. Yedinci bölüm tartışma ve sonuç olarak hazırlandı ve genel düşünceler ifade edildi.

Anahtar Kelimeler: Durrmeyer Operatör, İbragimov Gadjiev Operatör, K-Fonksiyonel, Ağırlıklı Yaklaşım, Korovkin Teoremi.

ABSTRACT

CONVERGENCE PROPERTİES OF IBRAGIMOV GADJİEV DURRMEYER OPERATORS

DENİZ, Emre
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Depertment of Mathematics, PhD Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL
September 2015, 57 pages

This thesis consists of seven chapters. In the first chapter, the introduction of the thesis and the summary of the literature are given. In the second chapter, some fundamental concepts of subject and theorems are given. In the third chapter, Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operators are introduced and some properties are given. In the fourth chapter, pointwise convergence of Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operators is studied. In the fifth chapter, the approximation properties of Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operators in weighted speces are given and an upper bound for the error of approximation are presented. In the sixth chapter, the approximation of the derivatives of Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operators to the derivatives of the approximating functions is studied and pointwise convergence properties are presented. In the seventh chapter, the chapter of discussion and results are prepared and general ideas are given.

Key Words: Durrmeyer Operators, Ibragimov Gadjiev Operators, Modulus of Continuity, K-Functional, Weighted Approximation, Korovkin's Theorem

TEŞEKKÜRLER

Hayatımın başlangıcından itibaren olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, doktora öğrenimimde ve tezimin hazırlanması esnasında bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ali ARAL'a , çalışmalarım esnasında tezime yardımcı olan değerli Tez İzleme Komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA ve Sayın Doç. Dr. Ali OLGUN'a ve her türlü yardımlarını, bilgilerini benden esirgemeyip bana destek olan arkadaşım Araştırma Görevlisi Gülhan MINAK ve diğer sevgili arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$C_B[0,\infty)$	Sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$B_{x^2}[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı $1+x^2$ fonksiyonu ile sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C_{x^2}[0,\infty)$	$B_{x^2}[0,\infty)$ uzayına ait sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{x^2}^k[0,\infty)$	$C_{x^2}[0,\infty)$ uzayına ait ve $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}=K_f<\infty$ özelliğindeki fonksiyon uzayı
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonuna ait klasik süreklilik modülü
$\omega_2(f;\delta)$	f fonksiyonuna ait ikinci mertebeden süreklilik modülü
$\Omega(f;\delta)$	Ağırlıklı uzaylarda süreklilik modülü
$K_2(f;\delta)$	f fonksiyonuna ait Peetre'nın K-fonksiyoneli
$\lVert . \rVert_{x^2}$	Ağırlıklı uzaylardaki norm
$\mathcal{H}$	$c>0, n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\int_0^\infty \frac{\lvert f(x)\rvert}{(1+ct)^{n/c}}<\infty$ şartını sağlayan fonksiyonlar sınıfı

1. GİRİŞ

Bu doktora tezi matematiğin önemli bir dalı olan yaklaşımlar teorisini temel almıştır. Yaklaşımlar teorisine temel olarak reel değerli ve sürekli bir fonksiyonun kendisinden daha basit ve kolay hesaplanabilen fonksiyon sınıflarına (örneğin cebirsel polinomlar) yaklaşmayı amaçlamaktadır. Bu konu son iki yüzyıldır matematikçilerin ilgisi altındadır

Yaklaşım teorisindeki ilk sonuç 1885 yılında K. Weierstrass tarafından "Birinci Weierstrass Yaklaşım teoremi" olarak şu teoreme dayanmaktadır:

Teorem 1.1 Her $\epsilon > 0$ sayısı ve her $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için $|f(x) - P(x)| < \epsilon$ olacak şekilde $[a,b]$ de tanımlanmış $P(x)$ polinomu bulunabilir.

Weierstrass teoreminin ispatı çok uzun ve karmaşık olduğundan bir çok matematikçi daha etkili ve daha basit bir ispat vermek için çalışmışlardır.

1912 yılında S.N. Bernstein, Weierstrass'ın bu teoremini basit ve etkili bir yolla ifade etmiştir. Şimdi aşağıdaki Bernstein operatörünü tanımlayalım:

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \; f \in C[0,1], x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

Weierstrass teoreminin bir diğer ifadeside Korovkin teoremi olarak bilinen ve operatör dizisinin birim operatöre yaklaşımını veren aşağıdaki teoremdir:

Teorem 1.2 $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$, $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri olmak üzere her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &= 1 + \alpha_n(x), \\ L_n(t;x) &= x + \beta_n(x), \\ L_n(t^2;x) &= x^2 + \gamma_n(x) \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n f$, $[a,b]$ aralığı üzerinde f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.
Burada f , $[a,b]$ de sürekli, a da sağdan, b de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur.

Bu iki teorem bir çok matematikçi tarafından farklı yönlerden geliştirilmiştir.

Biz bu tezde genel bir Durrmeyer tipli lineer pozitif operatörlerle birim operatöre yaklaşımının şartlarını vereceğiz. Göstereceğiz ki bizim tanımlayacağımız operatör literatürde çok iyi bilinen Genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer, Baskakov Durrmeyer, Szasz Durrmeyer gibi bir çok operatörü içeren bir operatör olacak ve bu operatörlerin birim operatöre yaklaşımı hem doğrudan hem de quantitative teoremler ile verilecektir. Quantitativ teoremler verilirken ağırlıklı süreklilik modülleri kullanılacak. Dolayısıyla bizim teoremlerimiz, literatürde farklı farklı operatörler için bilinen sonuçları tek bir şartı içeren genel bir teorem olarak verecektir. Bu sonuçları vermek içinde Gadjiev tarafından tanımlanan genel bir lineer pozitif operatörler dizilerinin Durrmeyer tipli bir genelleşmesi verilecektir. Bu operatörler için ayrıca Voronovskaya tipli teoremler ispatlanacaktır. Son olarak operatörün türevlerinin, fonksiyonunun türevlerine olan yaklaşımının hangi şartlarda olacağı verilecektir.

1.1. Kaynak Özetleri

Tez hazırlanırken H. Hilmi Hacısalihoğlu ve A. D. Gadjiev' in ,[9] "Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı" kitabından, H. Bohman'ın ,[10] "On approximation of continuous and of analytic functions" adlı makalesinden, P. P. Korovkin'in ,[11] "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions" adlı kitabından yararlanılmıştır. Ayrıca Z. Ditzian ve V. Totik'in ,[12] "Moduli of Smoothness" adlı kitabından, G. A. Anastassiou ve S. Gal'ın ,[13] "Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation" adlı kitabından, V. Gupta, R. P. Agarwal'ın ,[14] "Convergence

Estimates in Approximation Theory" adlı kitabından faydalanılmıştır.

Tezin orjinal olan bölümlerinde sırasıyla M. Heilmann'nın ,[15] "Direct and converse results for operators of Baskakov-Durrmeyer type" adlı makalesinden, Z. Ditzian ve K. Ivanov'un ,[16] "Bernstein-type operators and their derivatives" adlı makalesinden, A. Aral ve T. Acar'ın ,[17] "On Approximation Properties of Generalized Durrmeyer Operators" adlı makalesinden, P. N. Agrawal ve A.R. Gairola'nın ,[18] "On certain Durrmeyer type operators" adlı makalesinden, N. İspir'in ,[22] "On modified Baskakov operators on weighted spaces" adlı makalesinden, A. Aral'ın ,[23] "Approximation by Ibragimov-Gadjiev operators in polynomial weighted space" adlı makalesinden faydalanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Bu bölümde lineer pozitif operatörler ile ilgili bazı temel kavramlar ve özellikler verilecektir.

Tanım 2.1 X, Y lineer normlu fonksiyon uzaylar ve $L : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $f \in X$ için

$$L\left(f; x\right) = g\left(x\right)$$

olacak şekilde bir $g \in Y$ bulunuyorsa L'ye bir operatördür denir.

Tanım 2.2 X, Y lineer normlu fonksiyon uzaylar ve her f_1, $f_2 \in X$ ve her α_1, $\alpha_2 \in K$ ($K, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olsun. $L : X \to Y$ operatörü için

$$L\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right) = \alpha_1 L\left(f_1\right) + \alpha_2 L\left(f_2\right)$$

eşitliği sağlanırsa, L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.3

$$X^+ = \left\{f \in X : f\left(t\right) \geq 0\right\}, Y^+ = \left\{g \in Y : g\left(t\right) \geq 0\right\}$$

olmak üzere iki fonksiyon uzayı olsun. $L : X \to Y$ lineer operatör için $L\left(X^+\right) \subset Y^+$ oluyorsa L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Tanım 2.4 X, Y iki normlu uzaylar olsun. $L : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Her $f \in X$ için

$$\|L(f; x)\|_Y \leq C \left\|f\right\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $C \in [0, \infty)$ varsa L' ye sınırlı operatör ve L operatörünün normu

$$\|L\|_{X \to Y} = \inf\left\{C : \|L(f; x)\|_Y \leq C \left\|f\right\|_X\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.1 $L : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü için,

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

i. $\|L\|_{X\to Y} = \inf\{C : \|L(f;x)\|_Y \leq C\,\|f\|_X\}$ olmak üzere her $f \in X$ için

$$\frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq C$$

olduğundan

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \inf\{C : \|L(f;x)\|_Y \leq C\,\|f\|_X\}$$

olur. Bu durumda

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X\to Y}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii. İnfimumum tanımından her $\varepsilon > 0$ için en az bir $f_\varepsilon \in X$ vardır öyle ki

$$\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y \geq (\|L\|_{X\to Y} - \varepsilon)\,\|f_\varepsilon\|_X$$

olur. O halde

$$\frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y} - \varepsilon$$

eşitsizliği her ε için sağlanır. $\varepsilon \to 0$ olarak alınırsa;

$$\frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y}$$

dır. $\|f\|_X \neq 0$ olan $f \in X$ fonksiyonları üzerinde supremum alınırsa

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X\to Y}$$

eşitsizliği elde edilir.

i ve ii'den

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} = \|L\|_{X \to Y}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Lemma 2.2 $L : X \to Y$ lineer pozitif operatörü için

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. L lineer pozitif operatör olduğundan

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

eşitsizliğine L operatörü uygulanırsa

$$L(-|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliği doğrudur.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Tezimizin bu bölümünde lineer pozitif operatörler dizileri için önemli yaklaşım teoremleri ifade edilmiştir.

Teorem 2.1 [19] $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $i = 0, 1, 2$ için $e_i = t^i$ olmak üzere $[a,b]$ aralığı üzerinde $\lim_{n\to\infty} L_n e_i = e_i$ düzgün olarak mevcut ise, bu durumda $[a,b]$ aralığı üzerinde her $f \in C[a,b]$ için

$\lim_{n\to\infty} L_n f = f$ yakınsaması düzgündür.

Teorem 2.2 [10, 11](Korovkin Teoremi) $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$, $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri olmak üzere her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &= 1+\alpha_n(x), \\ L_n(t;x) &= x+\beta_n(x), \\ L_n\left(t^2;x\right) &= x^2+\gamma_n(x) \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar. Burada f , $[a,b]$ de sürekli, a da sağdan, b de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur.

2.3. Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Bir önceki kısımda verdiğimiz tüm teoremler sonlu aralıklarda sağlanmasına rağmen sınırsız aralıkta sağlanmaz. Sınırsız aralıklar ve bölgelerde Korovkin teorem sağlanmadığı için 1976 yılında Gadjiev tarafından Korovkin teoreminin tüm $\mathbb{R}$' de geçerli olan şekli aşağıdaki gibi vermiştir:

$\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1+\varphi^2(x)$ olsun. Ayrıca M_f pozitif bir sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesini $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesini de $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterelim. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\rho(x)},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

normu ile birer normlu uzaydır. Burada ρ'ya ağırlık fonksiyonu, $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir. Ayrıca

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesini $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterelim. $C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzayı $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayı olur.

Teorem 2.3 [8] $\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda
(i) $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki, bu operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(\varphi^\nu; x) - \varphi^\nu(x)\|_\rho = 0, \ \nu = 0, 1, 2 \tag{2.1}$$

şartları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunabilir ki

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f^*; x) - f^*(x)\|_\rho \geq 1$$

olur.
(ii) $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına giden lineer pozitif operatörlerin bir $\{A_n\}$ dizisi 2.1 koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f; x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır.

2.4. Hölder ve Minkowski Eşitsizlikleri

Tanım 2.5 p ve $q, 1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşullarını sağlayan iki sayı olmak üzere her $x = (x_n) \in \ell_p = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{R}^\infty : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \text{ yakınsak} \right\}$ ve her $y = (y_n) \in \ell_q$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir. Hölder eşitsizliğinde

$p = q = 2$ seçilerek elde edilen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwartz eşitsizliği denir.

Tanım 2.6 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere her $x = (x_n) \in \ell_p$ ve her $y = (y_n) \in \ell_p$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği saglanır. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir.

2.5. Süreklilik Modülü ve Fonksiyonel

Lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisinde önemli çalışmalardan biri de yaklaşımın hızını belirlemek ve bu yaklaşımın hatası için bir üst sınır bulmaktır. Bunu yaparken süreklilik modülü ve K-fonksiyonelini kullanmak en yaygın metodlardan birisidir. Aşağıdaki tanım ve lemmalar [12] ve [13] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

Tanım 2.7 f, $[a, b]$'de sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{x,y \in [a,b] \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|$$

veya

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{x \in [a,b] \\ |h| < \delta}} |f(x+h) - f(x)|$$

ile tanımlanan ω fonksiyonuna, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Lemma 2.3 f, $[a, b] \subset \mathbb{R}$'de sürekli reel değerli fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlar doğrudur:

a-) $\omega(f,\delta)$ fonksiyonu δ ya göre artandır.

b-) $\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)=0$.

c-) m doğal sayısı için

$$\omega(f,m\delta)\le m\omega(f,\delta).$$

d-) $\lambda>0$ reel sayısı için

$$\omega(f,\lambda\delta)\le(1+\lambda)\,\omega(f,\delta)$$

dir.

İspat.

a-) $0<\delta_1<\delta_2$ olsun. Bu durumda, aralık büyüdükçe supremum büyüyeceği için süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f,\delta_1)\le\omega(f,\delta_2)$$

olur. Bu ise süreklilik modülünün artan olduğunu gösterir.

b-) f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğundan düzgün süreklidir. Böylece her $\varepsilon>0$ için bir $\eta>0$ vardır öyle ki, $|t-x|<\eta$ olduğunda $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ olur. Süreklilik modülünde $\delta>\eta$ alındığında $\omega(f,\delta)<\varepsilon$ dır. Yani her $\varepsilon>0$ verildiğinde $\eta>0$ bulunur öyle ki $\delta>\eta$ olduğunda $\omega(f,\delta)<\varepsilon$ olur. Bu da

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)=0$$

olduğunu kanıtlar.

c-) m doğal sayısı için

$$\begin{aligned}
\omega(f,m\delta) &\le \sup_{\substack{x\in[a,b]\\|h|<\delta}}|f(x+mh)-f(x)|\\
&= \sup_{\substack{x\in[a,b]\\|h|<\delta}}\left|\sum_{k=1}^{m}f(x+kh)-f(x+(k-1)h)\right|\\
&\le \sum_{k=1}^{m}\sup_{\substack{x\in[a,b]\\|h|<\delta}}|f(x+kh)-f(x+(k-1)h)|\\
&= m\omega(f,\delta)
\end{aligned}$$

sağlanır.

d-) $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}\omega(f, \lambda\delta) &\leq \omega(f, (1 + \lfloor\lambda\rfloor)\delta) \\ &\leq (1 + \lfloor\lambda\rfloor)\,\omega(f, \delta) \\ &\leq (1 + \lambda)\,\omega(f, \delta)\end{aligned}$$

Tanım 2.8 f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega_2\left(f, \sqrt{\delta}\right) = \sup_{0 \leq h \leq \sqrt{\delta}} \sup_{x \in [0,\infty)} |f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)|$$

ile tanımlı ω_2 fonksiyonuna f fonksiyonunun ikinci mertebeden süreklilik modülü denir.

Tanım 2.9 $C_B[0, \infty)$, sürekli ve sınırlı fonksiyon uzayındaki

$$\|f\| = \sup\{|f| : f \in C_B[0, \infty)\}$$

normuyla $\delta > 0$ ve $W_\infty^2 = \{g \in C_B[0, \infty) : g', g'' \in C_B[0, \infty)\}$ için

$$K_2(f; \delta) = \inf\left\{\|f - g\| + \delta\,\|g''\| : g \in W_\infty^2\right\},$$

eşitliği ile tanımlanan $K_2(f; \delta)$ ye Peetre K-fonksiyoneli denir.

Lemma 2.4 $K_2(f; \delta)$ ve $\omega_2\left(f, \sqrt{\delta}\right)$ arasında

$$K_2(f; \delta) \leq C\omega_2\left(f, \sqrt{\delta}\right), \qquad C > 0 \tag{2.2}$$

şekilde bir bağıntı vardır.

2.6. Ağırlıklı Uzaylarda Süreklilik Modülü

Şimdi $|f(x + h) - f(x)|$ ifadesine bakalım. $f(x), f(x + h) \in C_\rho(\mathbb{R})$ olduğundan $|f(x)| \leq M_f\rho(x)$ ve $\rho(x) = 1 + x^2$ seçimi ile

$$\frac{|f(x)|}{1 + x^2} \leq M_f \tag{2.3}$$

dir. Benzer şekilde

$$\frac{|f(x+h)|}{1+(x+h)^2} \leq M_f \tag{2.4}$$

dir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f(x+h)-f(x)| &\leq |f(x+h)|+|f(x)| \\ &= \frac{|f(x+h)|}{1+(x+h)^2}\left[1+(x+h)^2\right]+\frac{|f(x)|}{1+x^2}\left(1+x^2\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada 2.3 ve 2.4 eşitsizliklerinin kullanılmasıyla

$$|f(x+h)-f(x)| \leq M_f\left\{\left[1+(x+h)^2\right]+\left(1+x^2\right)\right\} \tag{2.5}$$

elde edilir. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $(a+b)^2 \leq 4\left(a^2+b^2\right)$ olduğundan $(x+h)^2 \leq 4\left(x^2+h^2\right)$ eşitsizliği doğrudur. O halde

$$\begin{aligned} \left[1+(x+h)^2\right]+\left(1+x^2\right) &\leq 1+4\left(x^2+h^2\right)+1+x^2 \\ &\leq 1+4\left(x^2+h^2\right)+1+x^2+3+h^2 \\ &= 5\left(1+x^2+h^2\right) \\ &\leq 5\left(1+x^2+h^2+x^2h^2\right) \\ &= 5\left(1+h^2\right)\left(1+x^2\right) \end{aligned}$$

dır. Yani

$$\left[1+(x+h)^2\right]+\left(1+x^2\right) \leq 5\left(1+h^2\right)\left(1+x^2\right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik 2.5 te kullanılırsa

$$|f(x+h)-f(x)| \leq M_f 5\left(1+h^2\right)\left(1+x^2\right)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$|f(x+h)-f(x)| \leq C_f\left(1+h^2\right)\left(1+x^2\right)$$

olduğundan her $f \in C_\rho^{\prime k}[0,\infty)$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{|h|<\delta,\ x\in[0,\infty)} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\left(1+h^2\right)\left(1+x^2\right)}$$

mevcuttur.

Tanım 2.10 $f \in C_{\rho}^{k}[0,\infty)$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{|h|<\delta,\ x\in[0,\infty)} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

şeklinde tanımlanan $\Omega(f;\delta)$ fonksiyonuna $C_{\rho}^{k}[0,\infty)$ uzayında $f(x)$'in süreklilik modülü denir.

Şimdi süreklilik modülünün bazı elemanter özelliklerini aşağıdaki lemmada verelim:

Lemma 2.5 $f \in C_{x^2}^{k}[0,\infty)$ olmak üzere

i) $\Omega(f;\delta)\,,\ \delta \geq 0$ değişkenine göre monoton artan bir fonksiyondur.

ii) Her bir $f \in C_{x^2}^{k}[0,\infty)$ için $\lim\limits_{\delta\to 0}\Omega(f;\delta) = 0$ dır.

iii) Her bir $\lambda > 0$ için

$$\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta) \text{ dır.} \tag{2.6}$$

iv) Her bir $f \in C_{x^2}^{k}[0,\infty)$ ve $x,t \in [0,\infty)$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq 2\left(1+x^2\right)\left(1+(t-x)^2\right)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta) \tag{2.7}$$

dır.

3. İBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLERİ

Yaklaşım teorisinde, birçok araştırmacı daha geniş uzaylarda geçerli olan sonuçları bulmak amacıyla lineer pozitif operatörlerin çeşitli genelleştirilmeleri bulmaya çalışmışlardır. Bu genelleştirilmiş operatörlerin en önemlilerin de; 1970'de İbragimov ve Gadjiev [20] tarafından inşa edilen ve İbragimov Gadjiev operatörleri adı verilen bu operatörlerdir. İbragimov Gadjiev operatörleri sınırsız aralıkta özel seçimler altında iyi bilinen Bernstein, Szasz-Mirakjan ve Baskakov operatörlerine dönüşebilen lineer pozitif operatörlerdir. Şimdi bu operatörleri verelim:

$x \in [0, \infty)$ ve $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$G_n(f;x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right) K_n^{(\nu)}(x, 0, \alpha_n\psi_n(0)) \frac{(-\alpha_n\psi_n(0))^\nu}{\nu!}.$$

Burada $(\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $C[0,\infty)$ da fonksiyon dizileri olup $\varphi_n(0) = 0$ ve her t için $\varphi_n(t) > 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\psi_n(0) = 0$$

dır. Ayrıca $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0 \text{ and } \lim_{n\to\infty} \alpha_n\psi_n(0) = l_1, \; l_1 \geq 0$$

koşullarını sağlayan bir pozitif sayılar dizisi olsun. İbragimov Gadjiev operatöründeki $K_n(x, t, u)$ fonksiyon dizisi

$$\left(K_n^{(\nu)}(x, t, u)\right)_{n\in\mathbb{N}} := \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} K_n(x, t, u)\bigg|_{u=\alpha_n\psi_n(t), t=0}$$

şeklinde olmak üzere ve aşağıdaki özellikleri sağlayan üç değişkenli fonksiyon dizisidir.

1-) $x,t\in[0,\infty)$ olmak üzere $K_n(x,t,u)$ fonksiyon dizisi u'ya göre analitik ve $n\in\mathbb{N}$ için $K_n(x,0,0)=1$,

2-) $\nu=0,1,...,$ ve $x\in[0,\infty)$ için $\left[(-1)^{\nu}\,\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}\right]\geq 0$,

3-) Her $x\in[0,\infty)$ ve $n,\nu\in\mathbb{N}$, m sabit bir doğal sayı olmak üzere

$$\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}=-nx\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{m+n}(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}\right]$$

dır.

İbragimov Gadjiev operatörlerinin Durrmeyer tipli genelleştirilmesini tanımlamak için yukarıda verilen üç şart yetmemiştir. Bu şartlara ilave olarak aşağıdaki üç şartı ekleyerek Durrmeyer genelleştirilmesi yapılmıştır.

4-) Herhangi bir $u\in\mathbb{R}$ için $K_n(0,0,u)=1$ ve herhangi bir $p\in\mathbb{N}$ ve sabit $u=u_1$ için

$$\lim_{x\to\infty}x^pK_n^{(\nu)}(x,0,u_1)=0,$$

5-) Herhangi bir sabit t, u için $K_n(x,t,u)$, $x\in[0,\infty)$ değişkenine göre sürekli türevlenebilir olsun ve sabit bir $u=u_1$ için aşağıdaki eşitlik sağlansın.

$$\frac{d}{dx}K_n(x,0,u_1)=-nu_1K_{m+n}(x,0,u_1)\,,$$

6-) $x\in\mathbb{R}^{+}$, $n\in\mathbb{N}$, $\nu=0,1,...,$ için

$$\frac{n+\nu m}{1+u_1mx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)=nK_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,.$$

$K_n(x,t,u)$ dizisi 1. şartından u'ya göre analitik olup herhangi bir $u_1\in\mathbb{R}$ noktasında Taylor serisine açılırsa

$$K_n(x,t,u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}}K_n(x,t,u)\Big|_{u=u_1}\frac{(u-u_1)^{\nu}}{\nu!}$$

olarak yazılabilir. Burada $u=\varphi_n(t)$, $u_1=\alpha_n\psi_n(t)$ ve $t=0$ alınırsa

$$K_n(x,0,0)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{(-\alpha_n\psi_n(0))^\nu}{\nu!}$$

elde edilir. $\varphi_n(0)=0$ ve $K_n(x,0,0)=1$ olduğu göz önüne alınırsa, 1. şartından

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{(-\alpha_n\psi_n(0))^\nu}{\nu!}=1 \tag{3.1}$$

bulunur.

Şartlarıyla beraber İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri tanımlanmıştır. Şimdi ise İbragimov Gadjiev Durrmeyer Operatörlerini verelim:

$$\begin{aligned}M_n(f;x) &= (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}\\ &\quad\times\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu)}(y,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}dy \end{aligned}\tag{3.2}$$

dır. Ayrıca bu operatörler $K_n(x,0,u)$ çekirdeğinin özel seçimleriyle aşağıda verilen ve çok iyi bilinen Durrmeyer tipli operatörlere dönüşebilmektedir.

(i) $K_n(x,t,u)=K_n(t+ux)$, $\alpha_n=n$, $\psi_n(0)=1/n$, $m=c$ seçilirse

$$\mathcal{B}_n(f;x)=(n-c)\sum_{k=0}^{\infty}w_{n,k}(x)\int_0^\infty w_{n,k}(t)f(t)\,dt,$$

genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörüne

(ii) $K_n(x,t,u)=[1+t+ux]^{-n}$, $\alpha_n=n$, $\psi_n(0)=1/n$, $m=1$ seçilirse

$$B_n(f;x)=(n-1)\sum_{k=0}^{\infty}v_{n,k}(x)\int_0^\infty v_{n,k}(t)f(t)\,dt,$$

Baskakov Durrmeyer operatörüne

(iii) $K_n(x,t,u) = e^{-n(t+ux)}$, $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = 1/n$, $m = 0$ seçilirse

$$S_n(f;x) = n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(t)\, f(t)dt$$

Szasz Durrmeyer operatörüne dönüşmektedir.

Lemma 3.1 [17] 5. şartı kullanılırsa

$$\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = \frac{\nu}{x}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) - nu_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)$$

dır.

İspat. 3. şartı v kez uygulanırsa

$$K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = (-1)^{\nu}n(n+m)...(n+(\nu-1)mx^{\nu}K_{n+\nu m}(x,0,u_1) \tag{3.3}$$

elde edilir. 3.3 eşitliğinin her iki tarafının x'e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) &= (-1)^{\nu}n(n+m)...(n+(\nu-1)m)\frac{d}{dx}\{x^{\nu}K_{n+\nu m}(x,0,u_1)\} \\ &= (-1)^{\nu}n(n+m)...(n+(\nu-1)m)\Big\{\nu x^{\nu-1}K_{n+\nu m}(x,0,u_1) \\ &\quad +x^{\nu}\frac{d}{dx}K_{n+\nu m}(x,0,u_1)\Big\}\end{aligned}$$

bulunur.

$$\frac{d}{dx}K_{n+\nu m}(x,0,u_1) = -(n+\nu m)\,u_1K_{n+(\nu+1)m}(x,0,u_1)$$

eşitliğini kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) &= (-1)^{\nu}n(n+m)...(n+(\nu-1)m)\Big\{\nu x^{\nu-1}K_{n+\nu m}(x,0,u_1) \\ &\quad -x^{\nu}(n+\nu m)\,u_1K_{n+(\nu+1)m}(x,0,u_1)\Big\}\end{aligned}$$

eşitliği elde edelir. Bu son eşitliğe 3.3 uygulanırsa

$$\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = \frac{\nu}{x}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) - nu_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 3.1 6. şart ve Lemma 3.1 kullanılırsa

$$x\left(1+u_1 mx\right)\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)=\left(\nu-xu_1 n\right)K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right) \tag{3.4}$$

bulunur.

Lemma 3.2 [17] $n>m$ için $K_n\left(x,t,u\right)$ çekirdeği

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx=\left(-1\right)^\nu\frac{\nu!}{\left(n-m\right)u_1^{\nu+1}} \tag{3.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Kısmi integrasyon ve 2. şart kullanılırsa

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx=-\int_0^\infty x\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx$$

elde edilir. Burada Lemma 3.1 kullanılırsa

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx=-\nu\int_0^\infty K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx+nu_1\int_0^\infty xK_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx$$

olup 3. şart göz önünde bulundurulursa

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx=-\nu\int_0^\infty K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx-u_1\int_0^\infty K_n^{(\nu+1)}\left(x,0,u_1\right)dx$$

elde edilir ve buradan

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)dx=\frac{-u_1}{\nu+1}\int_0^\infty K_n^{(\nu+1)}\left(x,0,u_1\right)dx$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlik ν kez uygulayıp 1. ve 5. şartlar kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx &= -\frac{\nu}{u_1}\int_0^{\infty} K_n^{(\nu-1)}(x,0,u_1)\,dx \\
&\;. \\
&\;. \\
&\;. \\
&= (-1)^{\nu}\frac{\nu!}{u_1^{\nu}}\int_0^{\infty} K_n(x,0,u_1)\,dx \\
&= \frac{\nu!(-1)^{\nu+1}}{(n-m)u_1^{\nu}}\int_0^{\infty}\frac{d}{dx}K_{n-m}(x,0,u_1)\,dx \\
&= (-1)^{\nu}\frac{\nu!}{(n-m)\,u_1^{\nu+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.3 [17] $\nu, n \in \mathbb{N}$ olsun ve herhangi bir r doğal sayısı için

$$\int_0^{\infty} x^r K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx = \frac{(-1)^{\nu}(\nu+r)!}{(n-m)(n-2m)\ldots(n-(r+1)m)\,u_1^{\nu+r+1}} \tag{3.6}$$

sağlanır.

İspat. 3. şartı r kez uygularsak

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x^r K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx &= -\frac{1}{n-m}\int_0^{\infty} x^{r-1}K_{n-m}^{(\nu+1)}(x,0,u_1)\,dx \\
&= \frac{1}{(n-m)(n-2m)}\int_0^{\infty} x^{r-2}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\,dx \\
&\;. \\
&\;. \\
&\;. \\
&= (-1)^{r}\frac{1}{(n-m)(n-2m)\ldots(n-rm)} \\
&\quad\times\int_0^{\infty} K_{n-rm}^{(\nu+r)}(x,0,u_1)\,dx
\end{aligned}$$

bulunup 3.5 eşitliğinden

$$\int_0^\infty x^r K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx = \frac{(-1)^\nu(\nu+r)!}{(n-m)(n-2m)...(n-(r+1)m)u_1^{\nu+r+1}}$$

elde edilir.

Lemma 3.4 [17] $\nu, n \in \mathbb{N}$ olsun. Herhangi r bir doğal sayısı ve $n > (r+1)m$ için

$$\begin{aligned} M_n(t^r;x) &= \frac{n^{2r}}{(n-2m)...(n-pm)(n-(r+1)m)(\alpha_n)^r(n^2\psi_n(0))^r} \\ &\times \sum_{j=0}^{r} n(n+m)...(n+(j-1)m)C_{j,r}[\alpha_n\psi_n(0)]^j x^j, \end{aligned}$$

dir. Burada $C_{j,r} = \frac{r!}{j!}\binom{r}{j}$ şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned} M_n(1;x) &= 1, \quad M_n(t;x) = \frac{n^2}{(n-2m)\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}x + \frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right) \qquad (3.7) \\ M_n\left(t^2;x\right) &= \frac{n^4}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n^2}\left(\left(\frac{\alpha_n}{n}x\right)^2\frac{(m+n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}\frac{4}{n^2\psi_n(0)}x\right. \\ &\left.+\frac{2}{(n^2\psi_n(0))^2}\right) \end{aligned}$$

dır.

İspat. Operatörün tanımından

$$\begin{aligned} M_n(t^r;x) &= (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!} \\ &\times \int_0^\infty t^r K_n^{(\nu)}(y,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}dy \end{aligned}$$

yazılabilir. 3.6 eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
M_n\left(t^r;x\right) &= (n-m)\,\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^{\nu}}{(\nu)!}\\
&\quad\times\frac{(-1)^{\nu}(\nu+r)!}{(n-m)\ldots(n-(r+1)m)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^{\nu+r+1}}\frac{\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^{\nu}}{(\nu)!}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^{\nu}}{(\nu)!}\\
&\quad\times\frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+r)}{(n-2m)\ldots(n-(r+1)m)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^{r}}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^{\nu}}{(\nu)!}\\
&\quad\times\frac{1}{(n-2m)\ldots(n-(r+1)m)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^{r}}\sum_{j=0}^{r}C_{j,r}\prod_{l=0}^{j-1}(\nu-l)
\end{aligned}
$$

olur. Bu son eşitliğe 3.5 uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
M_n\left(t^r;x\right) &= \frac{1}{(n-2m)\ldots(n-(r+1)m)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^{r}}\\
&\quad\times\sum_{j=0}^{r}C_{j,r}\sum_{\nu=j}^{\infty}K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^{\nu}}{(\nu-j)!}\\
&= \frac{1}{(n-2m)\ldots(n-(r+1)m)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^{r+1}}\\
&\quad\times\sum_{j=0}^{r}C_{j,r}\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{(-1)^{j}\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^{\nu+j}}{(\nu)!}\\
&= \frac{n^{2r}}{(n-2m)\ldots(n-pm)(n-(r+1)m)\left(\alpha_n\right)^{r}\left(n^2\psi_n(0)\right)^{r}}\\
&\quad\times\sum_{j=0}^{r}n(n+m)\ldots(n+(j-1)m)\,C_{j,r}\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^{j}x^{j}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lemma 3.5 Her $x\geq 0$ ve yeterince büyük n'ler için

$$
M_n\left((t-x)^2;x\right)\leq\frac{C}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\left[\varphi^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right]
$$

dır. Burada $\varphi(x) := \sqrt{x\left(1 + xm\alpha_n\psi_n(0)\right)}$ ve C pozitif bir sabittir.

İspat. İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri lineer olduğundan

$$M_n\left((t-x)^2; x\right) = M_n\left(t^2; x\right) - 2xM_n(t; x) + x^2 M_n(1; x)$$

yazılabilir. Burada 3.7 eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} M_n\left((t-x)^2; x\right) &= x^2\left[\frac{m(2n+6m)\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n\psi_n(0)}\right] \\ &\quad + x\left[\frac{2n+6m}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n\psi_n(0)}\right] \\ &\quad + \frac{2}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n^2\psi_n^2(0)} \\ &= \left[\frac{(2n+6m)}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n\psi_n(0)}\right] \\ &\quad \times \left[x\left(1 + xm\alpha_n\psi_n(0)\right) + \frac{1}{(n+3m)\alpha_n\psi_n(0)}\right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\left(\frac{2n+6m}{(n-3m)}\right)$ dizisi yakınsak olduğundan

$$M_n\left((t-x)^2; x\right) \leq \frac{C}{(n-2m)\alpha_n\psi_n(0)}\left[\varphi^2(x) + \frac{1}{(n+3m)\alpha_n\psi_n(0)}\right]$$

elde edilir.

4. İBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN NOKTASAL YAKLAŞIM ÖZELLİĞİ

Tezimizin bu bölümündeki teoremde İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin noktasal yakınsaklığı verilmektedir. Ayrıca, verilecek bu teoremde sonlu aralıkta çalışılırsa süreklilik modüllerinin limit durumunda sıfıra gitme özelliğinden düzgün yakınsaklığı verebilmekteyiz. Teoremimizi verelim;

Teorem 4.1 $f \in C_B[0,\infty)$ olsun. Bu durumda her $x \in [0,\infty)$ ve yeterince büyük n'ler için

$$\begin{aligned} |M_n(f;x) - f(x)| &\leq C\omega_2\left(f, \sqrt{\frac{1}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\left(\varphi^2(x) + \frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)} + 1\right)}\right) \\ &\quad + \omega\left(f, \frac{1+2xm\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\varphi^2(x) = x(1 + xm\alpha_n\psi_n(0))$ ve C pozitif bir sabittir.

İspat. Teoremin ispatlamak için önce

$$\widetilde{M_n}(f;x) = M_n(f;x) - f(b_n(x)) + f(x)$$

şeklinde $\widetilde{M_n}$ yardımcı operatörünü tanımlayalım. Burada $b_n(x) = \frac{n^2}{(n-2m)\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}x + \frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)$ şeklindedir. $g \in W_\infty^2$ ve $t \in [0,\infty)$ için

$$g(t) = g(x) + (t-x)\,g'(x) + \int_x^t (t-u)\,g''(u)\,du$$

Taylor açılımına $\widetilde{M_n}$ yardımcı operatörünü uygularsak

$$\widetilde{M_n}(g;x) - g(x) = g'(x)\,\widetilde{M_n}((t-x);x) + \widetilde{M_n}\left(\int_x^t (t-u)\,g''(u)\,du; x\right)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\widetilde{M_n}\left((t-x);x\right) &= \widetilde{M_n}\left(t;x\right) - x\widetilde{M_n}\left(1;x\right) \\
&= M_n\left(t;x\right) - b_n\left(x\right) + x - x.1 \\
&= b_n\left(x\right) - b_n\left(x\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{M_n}\left(\int_x^t (t-u)\, g''(u)\, du; x\right)\right| &\leq \widetilde{M_n}\left(\left|\int_x^t (t-u)\, g''(u)\, du; x\right|\right) \\
&= M_n\left(\left|\int_x^t (t-u)\, g''(u)\, du\right|; x\right) \\
&\quad + \left|\int_x^{b_n(x)} (b_n(x)-u)\, g''(u)\, du\right| \\
&\quad + \int_x^x (x-u)\, g''(u)\, du \\
&= M_n\left(\left|\int_x^t (t-u)\, g''(u)\, du\right|; x\right) \\
&\quad + \left|\int_x^{b_n(x)} (b_n(x)-u)\, g''(u)\, du\right|
\end{aligned}$$

olup eşitliğin sağ tarafının g'' nün supremumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{M_n}\left(\int_x^t (t-u)\, g''(u)\, du; x\right)\right| &\leq \left\|g''\right\| M_n\left(\left|\int_x^t (t-u)\, du\right|; x\right) \\
&\quad + \left\|g''\right\| \left|\int_x^{b_n(x)} (b_n(x)-u)\, du\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|t-u|\leq|t-x|$ ve $\int\limits_x^t du=t-x$ ifadeleri kullanılırsa buradan

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{M_n}\left(\int\limits_x^t (t-u)\,g''(u)\,du;x\right)\right| &\leq \|g''\|\,M_n\left((t-x)^2;x\right)\\&+\|g''\|\left|\int\limits_x^{b_n(x)}(b_n(x)-u)\,du\right| \qquad (4.1)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$M_n\left((t-x)^2;x\right)=\frac{D}{(n-2m)}\left\{\varphi_n^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right\} \qquad (4.2)$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{M_n}(g;x)-g(x)\right| &\leq \left|g'(x)\,\widetilde{M_n}((t-x);x)\right|+\left|\widetilde{M_n}\left(\int\limits_x^t (t-u)\,g''(u)\,du;x\right)\right|\\&\leq \widetilde{M_n}\left(\left|\int\limits_x^t (t-u)\,g''(u)\,du\right|;x\right)\end{aligned}$$

elde edilir. 4.1 ve 4.2 eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{M_n}(g;x)-g(x)\right| &\leq \frac{D}{(n-2m)}\left\{\varphi_n^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right\}\|g''\|\\&+\left|\int\limits_x^{b_n(x)}(b_n(x)-x)\,du\right|\|g''\|\\&= \frac{D}{(n-2m)}\left\{\varphi_n^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right\}\|g''\|\\&+\left|\int\limits_x^{b_n(x)}\left(\frac{1+2xm\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right)du\right|\|g''\|\\&= \left(\frac{D}{(n-2m)}\left\{\varphi_n^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right\}\right.\\&\left.+\left(\frac{1+2xm\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right)^2\right)\|g''\|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{T}{(n-2m)}\left(\varphi^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}+1\right)\|g''\|$$

yazılabilir. Burada $\varphi^2(x)=x\,(1+xm\alpha_n\psi_n(0))$ ve $T:=\max\left(D,\left(\frac{1+2xm\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)\alpha_n\psi_n(0)}\right)^2\right)$ dır.

Böylece

$$\begin{aligned}
|M_n(f;x)| &= \left|(n-m)\,\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}\right.\\
&\quad\left.\times\int_0^\infty f(y)\,\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(y,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}dy\right|\\
&\leq (n-m)\,\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}\\
&\quad\times\int_0^\infty |f(y)|\,\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(y,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}dy\\
&\leq \|f\|\,(n-m)\,\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}\\
&\quad\times\int_0^\infty \frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(y,t,u)\Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\nu}{(\nu)!}dy\\
&= \|f\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$|M_n(f;x)|\leq\|f\|$$

olur. Yardımcı operatörümüzde gerekli düzenlemeler yapılırsa ve her iki tarafın mutlak değerine alınırsa

$$|M_n(f;x)-f(x)|=\left|\widetilde{M_n}(f;x)-f(x)+f(b_n(x))-f(x)\right|$$

elde edelir. Bu son eşitliğin sağ tarafına $\widetilde{M_n}(g;x)$ ve $g(x)$ eklenip çıkartılırsa

$$
\begin{aligned}
\left|M_n(f;x)-f(x)\right| &= \Big|\widetilde{M}_n(f;x)-f(x)+f(b_n(x))-f(x)\\
&\quad +\widetilde{M}_n(g;x)-\widetilde{M}_n(g;x)+g(x)-g(x)\Big|\\
&\le \left|\widetilde{M}_n(f-g;x)\right|+\left|f(x)-g(x)\right|+\left|\widetilde{M}_n(g;x)-g(x)\right|\\
&\quad +\left|f(b_n(x))-f(x)\right|
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin sağ tarafının supremumu alınırsa

$$
\begin{aligned}
\left|M_n(f;x)-f(x)\right| &\le 2\left\|f-g\right\|+\frac{T}{(n-2m)}\left(\varphi^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}+1\right)\left\|g''\right\|\\
&\quad +\omega\left(f,\frac{1+2xm\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right)\\
&\le A\left\|f-g\right\|+\frac{A}{(n-2m)}\left(\varphi^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}+1\right)\left\|g''\right\|\\
&\quad +\omega\left(f,\frac{1+2xm\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $A=\max\{2,T\}$ dır.

Bütün $g\in W_\infty^2$ üzerinden infimum alınırsa

$$
\begin{aligned}
\left|M_n(f;x)-f(x)\right| &\le AK_2\left(f,\frac{1}{(n-2m)}\left(\varphi^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}+1\right)\right)\\
&\quad +\omega\left(f,\frac{1+2xm\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Bu son eşitsizlikte 2.2 eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\left|M_n(f;x)-f(x)\right| &\le C\omega_2\left(f,\sqrt{\frac{1}{(n-2m)}\left(\varphi^2(x)+\frac{1}{(n+3m)\,\alpha_n\psi_n(0)}+1\right)}\right)\\
&\quad +\omega\left(f,\frac{1+2xm\alpha_n\psi_n(0)}{(n-2m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right)
\end{aligned}
$$

elde edelir ve böylece teoremin ispat tamamlanmış olur.

5. İBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN AĞIRLIKLI YAKLAŞIM ÖZELLİĞİ

Tezimizin bu bölümünde vereceğimiz teoremlerde İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin ağırlıklı yaklaşımları verilmektedir. Teoremleri vermeden önce bir kaç tane kavrami açıklayalım:

M_f, sadece f fonksiyonuna bağlı pozitif sabit olmak üzere

$$|f(x)| \leq M_f \left(1 + x^2\right)$$

şartını sağlayan $[0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm f fonksiyonlarının uzayını $B_{x^2}[0, \infty)$ ile gösterelim. Yani;

$$B_{x^2}[0, \infty) = \left\{ f : f, \ \ [0, \infty) \ \text{ üzerinde tanımlı ve } \ |f(x)| \leq M_f \left(1 + x^2\right) \ \right\}$$

ve $C_{x^2}[0, \infty)$ uzayı

$$C_{x^2}[0, \infty) = C[0, \infty) \cap B_{x^2}[0, \infty)$$

olmak üzere $f \in C_{x^2}[0, \infty)$ ve

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1 + x^2}$$

limitinin sınırlı olması durumundaki tüm f fonksiyonlarının uzayını $C_{x^2}^k[0, \infty)$ ile gösterelim. Yani;

$$C_{x^2}^k[0, \infty) = \left\{ f \in C_{x^2}[0, \infty) : \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{1 + x^2} = K_f < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzaylarını göz önüne alalım. Bu uzaylar üzerindeki norm ise

$$\|f\|_{x^2} = \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|f(x)|}{1 + x^2}$$

olarak tanımlanır.

Aşağıda vereceğimiz teorem, sınırsız aralıklarda ikinci mertebeden ve klasik süreklilik modulünün limit durumunda sıfıra gitme özelliği sağlamadığı için $[0,\infty)$ sınırsız aralığında ağırlıklı süreklilik modulünü kullanacağız. Ayrıca aşağıdaki teoremde, operatörlerimizin $(1+x^2)^{\frac{5}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre yaklaşımını vermiş olacağız:

Teorem 5.1 $f \in C^k_{x^2}[0,\infty)$ ve yeterince büyük n'ler için

$$\sup_{x\geq 0}\frac{|M_n(f;x)-f(x)|}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} \leq K\Omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n-2m}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada K pozitif bir sabittir.

İspat.

$$\begin{aligned}
&|M_n(f;x)-f(x)| \\
=\ & \left|(n-m)\,\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}(x,t,u)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{(\nu)!}\right. \\
& \left.\times\int_0^{\infty}f(y)\,K_n^{(\nu)}(y,t,u)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{(\nu)!}dy-f(x)\right| \\
\leq\ & (n-m)\,\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}(x,t,u)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{(\nu)!} \\
& \times\int_0^{\infty}|f(y)-f(x)|\,K_n^{(\nu)}(y,t,u)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{(\nu)!}dy
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte 2.7 eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|M_n(f;x)-f(x)| \leq\ & 2\left(1+x^2\right)\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta)\,(n-m)\,\alpha_n\psi_n(0) \\
& \times\sum_{\nu=0}^{\infty}K_n^{(\nu)}(x,t,u)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{(\nu)!}\int_0^{\infty}\left\{1+(y-x)^2\right. \\
& \left.+\frac{|y-x|}{\delta}+(y-x)^2\frac{|y-x|}{\delta}\right\}K_n^{(\nu)}(y,t,u)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{(\nu)!}dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\left(1+x^2\right)\left(1+\delta^2\right)\Omega\left(f;\delta\right)\left\{1+M_n\left((t-x)^2;x\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{\delta}M_n\left(|t-x|;x\right)+\frac{1}{\delta}M_n\left((t-x)^2|t-x|;x\right)\right\} \\
&= 2\left(1+x^2\right)\left(1+\delta^2\right)\Omega\left(f;\delta\right)\left\{1+M_n\left((t-x)^2;x\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{\delta}I_1+\frac{1}{\delta}I_2\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$I_1 = M_n\left(|t-x|;x\right)$$

$$I_2 = M_n\left((t-x)^2|t-x|;x\right)$$

şeklindedir. I_1 ve I_2 ifadelerine Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$I_1 = M_n\left(|t-x|;x\right) \leq M_n\left((t-x)^2;x\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$I_2 = M_n\left((t-x)^2|t-x|;x\right) \leq M_n\left((t-x)^2;x\right)^{\frac{1}{2}} M_n\left((t-x)^4;x\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizliklerle

$$\begin{aligned}
\left|M_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq 2\left(1+x^2\right)\left(1+\delta^2\right)\Omega\left(f;\delta\right)\left\{1+M_n\left((t-x)^2;x\right)\right. \\
&\quad +\frac{1}{\delta}M_n\left((t-x)^2;x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left.+\frac{1}{\delta}M_n\left((t-x)^2;x\right)^{\frac{1}{2}} M_n\left((t-x)^4;x\right)^{\frac{1}{2}}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 3.4 kullanılırsa

$$M_n\left((t-x)^2;x\right) = x^2\left[\frac{m\left(2n+6m\right)}{\left(n-2m\right)\left(n-3m\right)}\right]+\frac{\left(2n+6m\right)\alpha_n\psi_n\left(0\right)x+2}{\left(n-2m\right)\left(n-3m\right)\alpha_n^2\psi_n^2\left(0\right)} \tag{5.1}$$

ve

$$
\begin{aligned}
& M_n\left((t-x)^4;x\right) \\
= \;& \left\{\frac{120m^4+252nm^3-96n^2m^2}{(n-2m)\ldots(n-5m)}\right\}x^4+\left\{\frac{240m^3-174n^2m+504nm^2}{(n-2m)\ldots(n-5m)\,\alpha_n\psi_n(0)}\right\}x^3 \\
& +\left\{\frac{12n^2+432nm-108m+240m^2}{(n-2m)\ldots(n-5m)\,\alpha_n^2\psi_n^2(0)}\right\}x^2+\left\{\frac{120n+120m}{(n-2m)\ldots(n-5m)\,\alpha_n^3\psi_n^3(0)}\right\}x \\
& +\frac{24}{(n-2m)\ldots(n-5m)\,\alpha_n^4\psi_n^4(0)} \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Bu 5.1 ve 5.2 eşitliklerini kullanarak ve $(1+x^2)^{\frac{5}{2}}$ ağırlığı ile her iki tarafın supremumu alınarak

$$
\begin{aligned}
& \sup_{x\geq 0}\frac{|M_n(f;x)-f(x)|}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
\leq \;& 2\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta)\left\{1+\frac{m(2n+6m)}{(n-2m)(n-3m)}+\frac{1}{\delta}\left[\frac{m(2n+6m)}{(n-2m)(n-3m)}\right]^{\frac{1}{2}}\right. \\
& \left.+\frac{1}{\delta}\left(\frac{m(2n+6m)}{(n-2m)(n-3m)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{120m^4+252nm^3-96n^2m^2}{(n-2m)\ldots(n-5m)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \\
\leq \;& 2\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta)\left\{1+\frac{C}{n-2m}+\frac{1}{\delta}\frac{C}{\sqrt{n-2m}}+\frac{1}{\delta}\frac{C}{(n-2m)^{\frac{3}{2}}}\right\}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada C her biri birbirinden farklı sabitlerdir. $\delta=\frac{1}{\sqrt{n-2m}}$ seçilirse ve yeterince büyük n ler için

$$
\sup_{x\geq 0}\frac{|M_n(f;x)-f(x)|}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\leq K\Omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n-2m}}\right)
$$

elde edilir ve istenilen sonuç elde edilip ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2 Her $f\in C_{x^2}^k[0,\infty)$ fonksiyonu için

$$
\lim_{n\to\infty}\|M_n(f;x)-f\|_{x^2}=0 \qquad (5.3)
$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı için Akif D. Gadzhiev ([8]) makalesinden

$$\lim_{n\to\infty} \left\| M_n\left(t^{\nu},x\right) - x^{\nu} \right\|_{x^2} = 0, \quad \nu = 0,1,2. \tag{5.4}$$

koşullarını sağlaması yeterli olacaktır.

Lemma 3.4 den

$$\left\| M_n\left(1,x\right) - 1 \right\|_{x^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| M_n\left(1,x\right) - 1 \right|}{1+x^2} = 0$$

5.4 eşitliğinin $\nu = 0$ için doğruluğunu gösterir.

Lemma 3.4 ve $n > 2m$ için

$$\begin{aligned}
M_n\left(t,x\right) - x &= \frac{n^2}{\left(n-2m\right)\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}x + \frac{1}{n^2\varphi_n\left(0\right)}\right) - x \\
&= \frac{n}{\left(n-2m\right)}x + \frac{1}{\left(n-2m\right)\alpha_n\psi_n\left(0\right)} - x \\
&= x\left(\frac{n}{\left(n-2m\right)} - 1\right) + \frac{1}{\left(n-2m\right)\alpha_n\psi_n\left(0\right)}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğinin her iki tarafını $C_{x^2}^k\left[0,\infty\right)$ uzayına göre normu alınırsa

$$\begin{aligned}
\left\| M_n\left(t,x\right) - x \right\|_{x^2} &= \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left| M_n\left(t,x\right) - x \right|}{1+x^2} \\
&= \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x\left(\frac{n}{(n-2m)} - 1\right) + \frac{1}{(n-2m)\alpha_n\psi_n(0)}}{1+x^2} \\
&\leq \left(\frac{n}{\left(n-2m\right)} - 1\right)\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{x}{1+x^2} \\
&\quad + \frac{1}{\left(n-2m\right)\alpha_n\psi_n\left(0\right)}\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

burada $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2} < 1$ ve $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ olduğundan

$$\left\| M_n\left(t,x\right) - x \right\|_{x^2} \leq \left(\frac{n}{\left(n-2m\right)} - 1\right) + \frac{1}{\left(n-2m\right)\alpha_n\psi_n\left(0\right)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da $n \to \infty$ için 5.4 eşitliğinin $\nu = 1$ için doğruluğunu gösterir.

Benzer şekilde $n > 3m$ için

$$\begin{aligned} M_n\left(t^2, x\right) - x^2 &= \frac{n^4}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n^2}\left\{\left(\frac{\alpha_n}{n}x\right)^2 \frac{(m+n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}\frac{4}{n^2\psi_n(0)}x \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\right\} - x^2 \\ &= x^2\left\{\frac{n(m+n)}{(n-2m)(n-3m)} - 1\right\} + x\frac{4n}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n\psi_n(0)} \\ &\quad + \frac{2}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n^2\psi_n^2(0)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde eşitliğinin her iki tarafının $C_{x^2}^k[0,\infty)$ uzayına göre normu alınırsa

$$\begin{aligned} \left\|M_n\left(t^2, x\right) - x^2\right\|_{x^2} &= \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{\left|M_n\left(t^2,x\right) - x^2\right|}{1+x^2} \\ &\leq \left\{\frac{n(m+n)}{(n-2m)(n-3m)} - 1\right\} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x^2}{1+x^2} \\ &\quad + \frac{4n}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n\psi_n(0)} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2} \\ &\quad + \frac{2}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n^2\psi_n^2(0)} \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{x^2}{1+x^2} < 1$, $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{1+x^2} < 1$ ve $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\|M_n\left(t^2, x\right) - x^2\right\|_{x^2} &\leq \left\{\frac{n(m+n)}{(n-2m)(n-3m)} - 1\right\} + \frac{4n}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n\psi_n(0)} \\ &\quad + \frac{2}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n^2\psi_n^2(0)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da $n \to \infty$ için 5.4 eşitliğinin $\nu = 2$ için doğruluğunu gösterir. Böylelikle 5.4 eşitliğinin tüm koşulları sağlandığı için 5.3 eşitliğimiz doğrudur.

Teorem 5.3 $\alpha > 0$ olmak üzere $f \in C_{x^2}[0,\infty)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{|M_n(f,x) - f(x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} = 0$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Her $x_0 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|M_n(f,x) - f(x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} &\leq \sup_{x\leq x_0} \frac{|M_n(f,x) - f(x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} + \sup_{x\geq x_0} \frac{|M_n(f,x) - f(x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} \\
&\leq \sup_{x\leq x_0} \frac{|M_n(f,x) - f(x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} + \sup_{x\geq x_0} \frac{|M_n(f,x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} \\
&\quad + \sup_{x\geq x_0} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} \\
&\leq \|M_n(f) - f\|_{C[0,x_0]} + \sup_{x\geq x_0} \frac{\left|M_n\left(\frac{f(t)(1+t^2)}{1+t^2}, x\right)\right|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} \\
&\quad + \sup_{x\geq x_0} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} \\
&\leq \|M_n(f) - f\|_{C[0,x_0]} + \|f\|_{x^2} \sup_{x\geq x_0} \frac{|M_n(1+t^2,x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} \\
&\quad + \sup_{x\geq x_0} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki son eşitsizliğin ilk terimi aralık sınırlı olduğundan Teorem 4.1 den sıfıra gider. Lemma 3.4'ten her bir $x_0 > 0$ için, kolaylıkla görülür ki $n \to \infty$ için

$$\sup_{x\geq x_0} \frac{|M_n(1+t^2,x)|}{(1+x^2)^{1+\alpha}} \to 0$$

dır. Son olarak eşitsizliğinin son kısmı $x_0 > 0$ sayısını yeterince büyük seçersek ifade sıfıra gider.

6. İBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLERİN TÜREVİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİĞİ

Bu bölümde $\left(M_n^{(r)}f\right)(x)$'in $f^{(r)}(x)$'e noktasal yakınsaklığını vereceğiz.

Aşağıda tanımlanan $\mathcal{H}$ sınıfı, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar sınıfını da içerir. Şimdi

$$\mathcal{H} \equiv \left\{ f : \int_0^\infty \frac{|f(t)|}{(1+ct)^{n/c}} dt < \infty,\ c>0\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

fonksiyon sınıfı tanımlayalım.

Lemma 6.1 f, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde r kez türevlenebilir ve $\alpha > 0$, $t \to \infty$ için $f^{(r-1)}(t) = \mathcal{O}(t^\alpha)$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $r = 0,1,2,...$ ve $n > \alpha + rm$ için

$$\frac{d^r}{dx^r} M_n(f;x) = (n-m)u_1 \beta(n,r) \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \int_0^\infty f^{(r)}(y) p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)\, dy \tag{6.1}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) = K_{n+mr}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}$$

ve

$$\beta(n,r) = \prod_{j=0}^{r-1} \frac{(-1)^r (n+jm)}{(n-m(j+1))},\ \ \beta(n,0) = 1$$

dır.

İspat. Öncelikle $M_n(f;x)$ operatörünün birinci türevi

$$\frac{d}{dx} M_n(f;x) = (n-m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d}{dx} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} \int_0^\infty f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} dy \tag{6.2}$$

şeklindedir. Bu eşitlikte Lemma 3.1 ve 3. şart kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) &= \frac{\nu}{x}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) - nu_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \\
&= \frac{\nu}{x}\left\{-nxK_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1)\right\} - nu_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \\
&= -n\left[\nu K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\right] \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılabilir. Bu son eşitliği 6.2'de yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}M_n(f;x) &= (n-m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{(-n)\left[\nu K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\right]\right\} \\
&\quad \times\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}dy
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada toplamlar ayrı ayrı yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}M_n(f;x) \\
&= (n-m)u_1\sum_{\nu=1}^{\infty}(-n)\nu K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}dy \\
&\quad +(n-m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}(-n)u_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}dy
\end{aligned}
$$

olur. İlk toplamda ν yerine $\nu+1$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}M_n(f;x) \\
&= (n-m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}(-n)(\nu+1)K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \\
&\quad \times\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!}dy \\
&\quad +(n-m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}(-n)u_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} \\
&\quad \times\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}dy
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada ifadeler düzenlenip ve 6.3 kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} M_n\left(f;x\right) \\
= \quad & (n-m)u_1(-n) \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right) \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \\
& \times \int_0^{\infty} \left[-u_1 K_n^{(\nu+1)}\left(y,0,u_1\right) \frac{(-u_1)}{\nu+1} + u_1 K_n^{(\nu)}\left(y,0,u_1\right) \right] f(y) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} dy \\
= \quad & (n-m)u_1(-n) \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right) \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \\
& \times \int_0^{\infty} \left[\frac{u_1^2}{\nu+1} K_n^{(\nu+1)}\left(y,0,u_1\right) + u_1 K_n^{(\nu)}\left(y,0,u_1\right) \right] f(y) dy \\
= \quad & u_1 n \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right) \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \frac{u_1}{\nu+1} \\
& \times \int_0^{\infty} -(n-m) \left[u_1 K_n^{(\nu+1)}\left(y,0,u_1\right) + (\nu+1) K_n^{(\nu)}\left(y,0,u_1\right) \right] f(y) dy \\
= \quad & u_1 n \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right) \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \frac{u_1}{\nu+1} \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} K_{n-m,\nu+1}\left(y,0,u_1\right) f(y) dy
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanır. Burada kısmi integrasyon kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} (M_n f)(x) \\
= \quad & u_1 n \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right) \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \frac{u_1}{\nu+1} \\
& \times \left[f(y) K_{n+m,\nu+1}\left(y,0,u_1\right) |_0^{\infty} - \int_0^{\infty} K_{n-m,\nu+1}\left(y,0,u_1\right) f'(y) dy \right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. 1. ve 4. şartlar göz önüne alınılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}M_n\left(f;x\right) \\
= \quad & \frac{(n-m)u_1^2 n}{(n-m)}\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)\frac{\left[-u_1\right]^{\nu}}{(\nu)!}\int_0^{\infty}K_{n-m,\nu+1}\left(y,0,u_1\right)\frac{\left[-u_1\right]^{\nu}}{(\nu+1)!}f'(y)dy
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$
p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right) := K_n^{(\nu)}\left(y,0,u_1\right)\frac{\left[-u_1\right]^{\nu}}{\nu!}
$$

ifadesi göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}M_n\left(f;x\right) \\
= \quad & \frac{-(n-m)u_1 n}{(n-m)}\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)\frac{\left[-u_1\right]^{\nu}}{(\nu)!} \\
& \times\int_0^{\infty}K_{n-m,\nu+1}\left(y,0,u_1\right)\frac{\left[-u_1\right]^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f'(y)dy \\
= \quad & \frac{-(n-m)u_1 n}{(n-m)}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+m,\nu}\left(x,0,u_1\right)\int_0^{\infty}p_{n-m,\nu+1}\left(y,0,u_1\right)f'(y)dy \qquad (6.4)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $M_n\left(f;x\right)$ operatörümüzün ikinci türevini bulalım. Burada 6.3 eşitliği kullanılırsa

$$
\frac{d^2}{dx^2}K_n^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right) = (-n)\left[\nu\frac{d}{dx}K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1\frac{d}{dx}K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\right] \qquad (6.5)
$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$
\frac{d}{dx}K_{n+m}^{(\nu-1)}\left(x,0,u_1\right) = -(n+m)\left[(\nu-1)K_{n+2m}^{(\nu-2)}(x,0,u_1) + u_1K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1)\right]
$$

ve

$$
\frac{d}{dx}K_{n+m}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right) = -(n+m)\left[\nu K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\right]
$$

olup 6.5'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \\
= \; & (-n)\Big[\nu\Big[-(n+m)\Big[(\nu-1)K_{n+2m}^{(\nu-2)}(x,0,u_1)+u_1K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1)\Big]\Big] \\
& + u_1\Big[-(n+m)\Big[\nu K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1)+u_1K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\Big]\Big]\Big] \\
= \; & n(n+m)\Big[\nu(\nu-1)K_{n+2m}^{(\nu-2)}(x,0,u_1)+2u_1\nu K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) \\
& +u_1^2K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\Big]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu ifade $M_n(f;x)$ operatörümüzün ikinci türevinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}M_n(f;x) \\
= \; & (n-m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}dy \\
= \; & (n-m)n(n+m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[\nu(\nu-1)K_{n+2m}^{(\nu-2)}(x,0,u_1) \\
& + 2u_1\nu K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1)+u_1^2K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\Big] \\
& \times\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}dy
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada toplamlar ayrılıp birinci toplamda ν yerine $\nu+2$, ikinci toplamda ν yerine $\nu+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}M_n(f;x) \\
= \; & (n-m)n(n+m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+2)(\nu+1)K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu+2}}{(\nu+2)!} \\
& \times\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu+2)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu+2}}{(\nu+2)!}dy \\
& +(n-m)n(n+m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}2u_1(\nu+1)K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \\
& \times\int_0^\infty f(y)K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!}dy
\end{aligned}$$

$$+(n-m)n(n+m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}u_1^2K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}$$
$$\times\int_0^{\infty}f(y)K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]\nu}{\nu!}dy$$

eşitliği bulunur. Bu son eşitlik düzenlenilirse

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}M_n(f;x)\\
=\;& (n-m)n(n+m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\\
&\times\int_0^{\infty}\Bigg[(\nu+2)(\nu+1)\frac{[-u_1]^2}{(\nu+1)(\nu+2)}\frac{[-u_1]^2}{(\nu+1)(\nu+2)}K_n^{(\nu+2)}(y,0,u_1)\\
&+2u_1(\nu+1)\frac{[-u_1]}{(\nu+1)}\frac{[-u_1]}{(\nu+1)}K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1)+u_1^2K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\Bigg]f(y)dy\\
=\;& (n-m)n(n+m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\\
&\times\int_0^{\infty}\Bigg[\frac{{u_1}^4}{(\nu+1)(\nu+2)}K_n^{(\nu+2)}(y,0,u_1)+2\frac{u_1^3}{(\nu+1)}K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1)\\
&+u_1^2K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\Big]f(y)dy \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bize gerekli olacak

$$\frac{d^2}{dx^2}K_{n-2m}^{(v+2)}(y,0,u_1)$$

ifadesini bulalım. 6.3 eşitliği kullanılırsa

$$\frac{d}{dx}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1)=-(n-2m)\left[(\nu+2)K_{n-m}^{(\nu+1)}(x,0,u_1)+u_1K_{n-m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\right]$$

bulunur. Burada tekrardan türev alınılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\\
= \;& -(n-2m)\left[(\nu+2)\frac{d}{dx}K_{n-m}^{(\nu+1)}(x,0,u_1)+u_1\frac{d}{dx}K_{n-m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\right]\\
= \;& -(n-2m)\left[(\nu+2)\left[-(n-m)\left[(\nu+1)K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)+u_1K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1)\right]\right]\right]\\
& -(n-2m)\left[u_1\left[-(n-m)\left[(\nu+2)K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1)+u_1K_n^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\right]\right]\right]\\
= \;& (n-m)(n-2m)\left[u_1^2K_n^{(\nu+2)}(x,0,u_1)+2u_1(\nu+2)K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1)\right.\\
& \left.+(\nu+1)(\nu+2)K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son eşitlik $\dfrac{u_1^2}{(n-m)(n-2m)(\nu+1)(\nu+2)}$ ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_1^2}{(n-m)(n-2m)(\nu+1)(\nu+2)}\frac{d^2}{dx^2}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\\
= \;& \frac{{u_1}^4}{(\nu+1)(\nu+2)}K_n^{(\nu+2)}(x,0,u_1)+2\frac{u_1^3}{(\nu+1)}K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1)+u_1^2K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}M_n(f;x)\\
= \;& (n-m)n(n+m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\\
&\times\frac{u_1^2}{(n-m)(n-2m)(\nu+1)(\nu+2)}\int_0^{\infty}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(y,0,u_1)f(y)dy
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}M_n(f;x)\\
= \;& \frac{(n-m)n(n+m)u_1^3}{(n-m)(n-2m)(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\\
&\times\int_0^{\infty}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(y,0,u_1)f''(y)dy\\
= \;& \frac{(n-m)n(n+m)u_1}{(n-m)(n-2m)}\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\\
&\times\int_0^{\infty}f''(y)K_{n-2m}^{(\nu+2)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu+2}}{(\nu+2)!}dy
\end{aligned}
$$

olur ve

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}M_n\left(f;x\right) \\
= \; & \frac{(n-m)\left(-1\right)^2 n(n+m)u_1}{(n-m)(n-2m)}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+2m,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\
& \times\int_0^{\infty}f''(y)p_{n-2m,\nu+2}\left(y,0,u_1\right)dy \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. $\frac{d}{dx}M_n\left(f;x\right)$ ve $\frac{d^2}{dx^2}M_n\left(f;x\right)$ eşitliklerini gözönüne alınıp genelleştirme yapılırsa

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^r}{dx^r}M_n\left(f;x\right) \\
= \; & (n-m)u_1\left(\prod_{j=0}^{r-1}\frac{\left(-1\right)^r(n+mj)u_1^r}{\left[n-m\left(j+1\right)\right]\left(\nu+\left(j+1\right)\right)}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+mr}^{(\nu)}\left(x,0,u_1\right)\frac{\left[-u_1\right]^{\nu}}{\nu!} \\
& \times\int_0^{\infty}K_{n-mr}^{(\nu+r)}\left(y,0,u_1\right)\frac{\left[-u_1\right]^{\nu}}{\nu!}f^{(r)}(y)dy \\
= \; & \frac{\left(-1\right)^r(n-m)n(n+m)\left(n+2m\right)...\left(n+m\left(r-1\right)\right)u_1}{(n-m)(n-2m)\left(n-3m\right)...\left(n-rm\right)}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\
& \times\int_0^{\infty}f^{(r)}(y)p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & (n-m)u_1\frac{\left(-1\right)^r n(n+m)\left(n+2m\right)...\left(n+m\left(r-1\right)\right)}{(n-m)(n-2m)\left(n-3m\right)...\left(n-rm\right)}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\
& \times\int_0^{\infty}f^{(r)}(y)p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)dy \\
= \; & (n-m)u_1\prod_{j=0}^{r-1}\frac{\left(-1\right)^r(n+jm)}{\left(n-m\left(j+1\right)\right)}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\
& \times\int_0^{\infty}f^{(r)}(y)p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)dy
\end{aligned}
$$

bulunur.

Sonuç 6.1 Lemma 6.1'den

$$\begin{aligned}\frac{d^r}{dx^r}(M_n 1)(x) &= (n-m)u_1 \prod_{j=0}^{r-1} \frac{(-1)^r (n+jm)}{(n-m(j+1))} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)\,dy\end{aligned}$$

eşitliği görülür ve Lemma 3.2'den

$$\frac{d^r}{dx^r}(M_n 1)(x) = \frac{(n-m)u_1 \beta(n,r)}{(n-m(r+1))\,u_1} \tag{6.8}$$

elde edilir.

Lemma 6.2 $r,s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $n > mr$ olmak üzere

$$\mathcal{M}_{r,n,s}(x) = u_1[n-m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \int_0^{\infty} p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^s dy$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{r,n,s+1}(x) &= \frac{\varphi^2(x)}{u_1[n-m(r+s+2)]}[\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) + 2s\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)] \\ &\quad + \frac{(s+r+1)(1+2u_1mx)}{u_1[n-m(r+s+2)]}\mathcal{M}_{r,n,s}(x)\end{aligned} \tag{6.9}$$

dır. Burada $\varphi(x) = \sqrt{x(1+u_1mx)}$ ve $n > m(r+s+2)$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{r,n,0}(x) &= 1, \\ \mathcal{M}_{r,n,1}(x) &= \frac{(r+1)(1+2u_1mx)}{u_1n - u_1m(r+2)}, \\ \mathcal{M}_{r,n,2}(x) &= \frac{\varphi^2(x)2u_1(n-m) + (1+2u_1mx)^2(r+1)(r+2)}{[u_1n-u_1m(r+2)]\,[u_1n-u_1m(r+3)]}\end{aligned}$$

dır. Tüm $x \in [0,\infty)$ için $\mathcal{M}_{r,n,s}(x) = \mathcal{O}\left((u_1n)^{-\left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor}\right)$ mevcuttur. Ayrıca $\lfloor \alpha \rfloor$, α'nın tam sayı kısmıdır.

İspat. Öncelikle rekürans bağıntısı gösterelim:

$$\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) = [u_1n - u_1m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^2(x) \frac{d}{dx} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \times \int_0^{\infty} p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^s dy$$

$$-s\varphi^2(x)[u_1n - u_1m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \times \int_0^{\infty} p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^{s-1} dy$$

$$= [u_1n - u_1m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi^2(x) \frac{d}{dx} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \times \int_0^{\infty} p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^s dy - s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)$$

yazılabilir. Sonuç 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) \\
&= [u_1n - u_1m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} [\nu - xu_1(n+mr)] p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \\
&\quad \times \int_0^{\infty} p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^s\, dy - s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x) \\
&= [u_1n - u_1m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \int_0^{\infty} [\nu + r - yu_1(n-mr) - r(1+2mxu_1) \\
&\quad +(n-mr)(yu_1 - xu_1)] p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^s dy - s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) &= [u_1 n - u_1 m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\
&\quad \times \left\{ \int_0^\infty [\nu + r - yu_1(n-mr)]\, p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)(y-x)^s dy \right. \\
&\quad - \int_0^\infty r(1+2mxu_1) p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)(y-x)^s dy \\
&\quad \left. + \int_0^\infty (n-mr)(yu_1 - xu_1) p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)(y-x)^s dy \right\} \\
&\quad - s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)
\end{aligned}
$$

olur. Burada bir kez daha Sonuç 3.1 göz önüne alınılırsa

$$
\begin{aligned}
&\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) \\
= &\ [u_1 n - u_1 m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \int_0^\infty \varphi^2(y) \frac{d}{dy} p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)(y-x)^s dy \\
&- r(1+2mxu_1)\mathcal{M}_{r,n,s}(x) + (n-mr)u_1\mathcal{M}_{r,n,s+1} - s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) \\
= &\ [u_1 n - u_1 m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\
&\times \int_0^\infty p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)[-(1+2u_1 my)(y-x)^s - s\varphi^2(y)(y-x)^{s-1}]dy \\
&- r(1+2mxu_1)\mathcal{M}_{r,n,s}(x) + (n-mr)u_1\mathcal{M}_{r,n,s+1}(x) \\
&- s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x) \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

olur. Son eşitlikte

$$
\begin{aligned}
-s\varphi^2(y)-(1+2u_1my)(y-x) &= -s\varphi^2(x)-(s+1)(1+2u_1mx)(y-x)\\
&\quad -u_1m(s+2)(y-x)^2
\end{aligned}
$$

eşitliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) &= -s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)-(s+1)(1+2u_1mx)\mathcal{M}_{r,n,s}(x)\\
&\quad -u_1m(s+2)\mathcal{M}_{r,n,s+1}(x)-r(1+2u_1mx)\mathcal{M}_{r,n,s}(x)\\
&\quad +(n-mr)u_1\mathcal{M}_{r,n,s+1}(x)-s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x),
\end{aligned}
$$

olur. Momentler bu rekürans bağıntısıyla kolaylıkla elde edilebilir.

Lemma 6.3 [21] $x\in(0,\infty)$ ve $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere

$$
(x(1+u_1mx))^r\frac{d^r}{dx^r}p_{n,\nu}(x,0,u_1)=\sum_{2i+j\le r,i,j\ge0}(u_1n)^i((\nu-xu_1n))^j q_{i,j,r}(x)\,p_{n,\nu}(x,0,u_1),
$$

burada $q_{i,j,r}(x)$, n ve k'den bağımsız olup $p_{n,\nu}(x,0,u_1)=K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}$ dır.

İspat. $r=0$ için ispat açıktır. Kabul edelim ki r için 6.1 doğru olsun. Şimdi $r+1$ için 6.1'in doğru olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}p_{n,\nu}(x,t,u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^r}{dx^r}p_{n,\nu}(x,t,u)\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(\sum_{2i+j\le r,i,j\ge0}(u_1n)^i((\nu-xu_1n))^j\frac{q_{i,j,r}(x)}{(\varphi^2(x))^r}p_{n,\nu}(x,t,u)\right)\\
&= \sum_{2i+j\le r,i,j\ge0}(u_1n)^i\Bigg[j((\nu-xu_1n))^{j-1}(-u_1n)\frac{q_{i,j,r}(x)}{(\varphi^2(x))^r}p_{n,\nu}(x,t,u)\\
&\quad +((\nu-xu_1n))^j\frac{q'_{i,j,r}(x)}{(\varphi^2(x))^r}p_{n,\nu}(x,t,u)\\
&\quad +((\nu-xu_1n))^j\frac{q_{i,j,r}(x)}{(\varphi^2(x))^r}\frac{d}{dx}p_{n,\nu}(x,t,u)\\
&\quad +((\nu-xu_1n))^j q_{i,j,r}(x)(-r)\left(\varphi^2(x)\right)^{-r-1}\left(\varphi^2(x)\right)'p_{n,\nu}(x,t,u)\Bigg]
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} p_{n,\nu}(x,t,u) \\
= \; & p_{n,\nu}(x,t,u) \Bigg(\sum_{2i+j\le r, i,j\ge 0} (u_1 n)^i (-(j+1)) ((\nu - x u_1 n))^j \frac{q_{i-1,j+1,r}(x)}{(\varphi^2(x))^{r+1}} \varphi^2(x) \\
& + (u_1 n)^i ((\nu - x u_1 n))^j \frac{q'_{i,j,r}(x)}{(\varphi^2(x))^{r+1}} \varphi^2(x) \\
& + (u_1 n)^i ((\nu - x u_1 n))^j \frac{q_{i,j,r}(x)}{(\varphi^2(x))^{r}} \frac{(\nu - x u_1 n)}{\varphi^2(x)} p_{n,\nu}(x,t,u) \\
& + (u_1 n)^i ((\nu - x u_1 n))^j \frac{q_{i,j,r}(x)}{(\varphi^2(x))^{r+1}} (-r) \left(\varphi^2(x)\right)' p_{n,\nu}(x,t,u) \Bigg) \\
= \; & p_{n,\nu}(x,t,u) \sum_{2i+j\le r, i,j\ge 0} (u_1 n)^i ((\nu - x u_1 n))^j \frac{q_{i,j,r+1}(x)}{(\varphi^2(x))^{r+1}}
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
q_{i,j,r+1}(x) &= (-(j+1)) q_{i-1,j+1,r}(x) \varphi^2(x) + q'_{i,j,r}(x) \varphi^2(x) \\
&\quad + q_{i,j-1,r}(x) + (-r) q_{i,j,r}(x) \left(\varphi^2(x)\right)'
\end{aligned}
$$

eşitliği gözönüne alınırsa $2i+j \le r$ ve $i,j \ge 0$ için $q_{i,j,r}(x) = 0$ dır. Böylece $r+1$ için 6.1 sağlanır. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Buradaki $q_{i,j,r}$'leri $r=1$ ve $r=2$ için inceleyelim.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} p_{n,\nu}(x) &= \frac{d}{dx} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{(\nu)!} \\
&= \frac{[-u_1]^\nu}{(\nu)!} \frac{d}{dx} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)
\end{aligned}
$$

olur ve Sonuç 3.1'den

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} p_{n,\nu}(x) &= \frac{(\nu - x u_1 n)}{x(1+u_1 m x)} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{(\nu)!} \\
&= \frac{(\nu - x u_1 n)}{x(1+u_1 m x)} p_{n,\nu}(x)
\end{aligned}
$$

olur ve $r=1$ iken $q_{i,j,r}(x)$, $i=j=0$ ise $q_{0,0,1}(x)=0$ ve $i=0,\ j=1$ ise $q_{0,1,1}(x)=1$ bulunur. Şimdi $r=2$ için gösterelim.

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}p_{n,\nu}(x) \\
= & \frac{d}{dx}\left[p_{n,\nu}(x)\frac{(\nu-xu_1n)}{x(1+u_1mx)}\right] \\
= & \frac{(\nu-xu_1n)}{x(1+u_1mx)}\frac{d}{dx}p_{n,\nu}(x)+p_{n,\nu}(x)\frac{d}{dx}\frac{(\nu-xu_1n)}{x(1+u_1mx)} \\
= & p_{n,\nu}(x)\frac{(\nu-xu_1n)}{x(1+u_1mx)}\frac{(\nu-xu_1n)}{x(1+u_1mx)} \\
& -p_{n,\nu}(x)\frac{u_1nx(1+u_1mx)+(\nu-xu_1n)(1+2u_1mx)}{x^2(1+u_1mx)^2} \\
= & \frac{p_{n,\nu}(x)}{x^2(1+u_1mx)^2}\left\{(\nu-xu_1n)^2-(1+2u_1mx)(\nu-xu_1n)-u_1nx(1+u_1mx)\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda

$$
q_{i,j,r}(x)=\begin{cases} q_{0,0,2}(x)=0 \\ q_{0,1,2}(x)=-(1+2u_1mx) \\ q_{0,2,2}(x)=1 \\ q_{1,0,2}(x)=x(1+u_1mx) \end{cases}
$$

bulunur.

Teorem 6.1 $f\in\mathcal{H}$, $\mathbb{R}^+$ nın her alt aralığında sınırlı olup sabit bir $x\in(0,\infty)$ noktasında $(r+2)$. dereceden türeve sahip olsun. $y\to\infty$ ve bazı $\alpha>0$ için $f(y)=\mathcal{O}(y^\alpha)$ ise

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}u_1n\left\{\frac{(n-m(r+1))u_1}{(n-m)u_1\beta(n,r)}(M_n^{(r)}f)(x)-f^{(r)}(x)\right\} \quad = \quad & (r+1)(1+2l_1mx)f^{(r+1)}(x) \\
& +l_1\varphi^2(x)f^{(r+2)}(x)
\end{aligned}
$$

eşitliği doğrudur.

İspat. f 'nın

$$f\left(y\right)=\sum_{i=0}^{r+2}\frac{f^{(i)}\left(x\right)}{i!}\left(y-x\right)^{i}+\varepsilon\left(y,x\right)\left(y-x\right)^{r+2}$$

Taylor açılımından

$$f^{(r)}(y)-f^{(r)}(x)=f^{(r+1)}(x)(y-x)+\frac{f^{(r+2)}(x)}{2!}(y-x)^{2}+\left[\varepsilon\left(y,x\right)\left(y-x\right)^{r+2}\right]^{(r)} \tag{6.11}$$

eşitlik yazılabilir. Burada $y\rightarrow x$ için $\varepsilon\left(y,x\right)\rightarrow 0$ dır. 6.8 eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&u_1 n\left\{\frac{\left(n-m\left(r+1\right)\right)u_1}{(n-m)u_1\beta\left(n,r\right)}(M_n^{(r)}f)(x)-f^{(r)}\left(x\right)\right\}\\
=\;& u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right)\\
&\times\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)\left[f^{(r)}(y)-f^{(r)}\left(x\right)\right]dy
\end{aligned}$$

yazılabilir. 6.11 eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&u_1 n\left\{\frac{\left(n-m\left(r+1\right)\right)u_1}{(n-m)u_1\beta\left(n,r\right)}(M_n^{(r)}f)(x)-f^{(r)}\left(x\right)\right\}\\
=\;& u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right)\\
&\times\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)\left[f^{(r+1)}\left(x\right)\left(y-x\right)+\frac{f^{(r+2)}\left(x\right)}{2!}\left(y-x\right)^{2}\right.\\
&\left.+\frac{d^r}{dy^r}\left[\varepsilon\left(y,x\right)\left(y-x\right)^{r+2}\right]\right]dy\\
=\;& f^{(r+1)}\left(x\right)u_1 nM_{r,n,1}+\frac{f^{(r+2)}\left(x\right)}{2!}u_1 nM_{r,n,2}+u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right)u_1\\
&\times\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right)\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)\frac{d^r}{dy^r}\left[\varepsilon\left(y,x\right)\left(y-x\right)^{r+2}\right]dy\\
=\;& f^{(r+1)}\left(x\right)u_1 nM_{r,n,1}+\frac{f^{(r+2)}\left(x\right)}{2!}u_1 nM_{r,n,2}+I_n
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} I_n &= u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right) u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)\left[\varepsilon\left(y,x\right)\left(y-x\right)^{r+2}\right]^{(r)} dy \end{aligned}$$

dır. $u = p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)$ and $dv = \left[\varepsilon\left(y,x\right)\left(y-x\right)^{r+2}\right]^{(r)} dy$ seçilerek r kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_n = \frac{u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right) u_1}{\beta\left(n,r\right)} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n,\nu}^{(r)}\left(x,0,u_1\right) \int_0^{\infty} p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right) \varepsilon\left(y,x\right)\left(y-x\right)^{r+2} dy$$

elde edilir. Teoremin ispatını bitermek için $n \to \infty$ için $I_n \to 0$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Lemma 6.3'ten

$$\begin{aligned} \left|I_n\right| &\leq \frac{u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right) u_1}{\beta\left(n,r\right)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{2i+j\leq r, i,j\geq 0} \left(u_1 n\right)^i \left|\nu - x u_1 n\right|^j \\ &\quad \times \frac{\left|q_{i,j,r}\left(x\right)\right|}{\left(x\left(1+u_1 m x\right)\right)^r} p_{n,\nu}\left(x,0,u_1\right) \int_0^{\infty} p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right)\left|\varepsilon\left(y,x\right)\right|\left|y-x\right|^{r+2} dy \\ &\leq C \frac{u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right) u_1}{\beta\left(n,r\right)} \sum_{2i+j\leq r, i,j\geq 0} \left(u_1 n\right)^i \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\nu - x u_1 n\right|^j p_{n,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right)\left|\varepsilon\left(y,x\right)\right|\left|y-x\right|^{r+2} dy \end{aligned}$$

yazılabilir. Cauchy Schwartz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left|I_n\right| &\leq C \frac{u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right) u_1}{\beta\left(n,r\right)} \sum_{2i+j\leq r, i,j\geq 0} \left(u_1 n\right)^i \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n,\nu}\left(x,0,u_1\right)\left|\nu - x u_1 n\right|^{2j}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n,\nu}\left(x,0,u_1\right)\left(\int_0^{\infty} p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right)\left|\varepsilon\left(y,x\right)\right|\left|y-x\right|^{r+2} dy\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \frac{u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right) u_1}{\beta\left(n,r\right)} \left(u_1 n\right)^{\frac{r}{2}} \\ &\quad \times \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n,\nu}\left(x,0,u_1\right)\left(\int_0^{\infty} p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right)\left|\varepsilon\left(y,x\right)\right|\left|y-x\right|^{r+2} dy\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $C = C(x) = \sup\limits_{2i+j\leq r, i,j\geq 0} \dfrac{|q_{i,j,r}(x)|}{(x(1+u_1mx))^r}$ dır.
Belirli bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $0 < |y-x| < \delta$ olduğunda $|\varepsilon(y,x)| < \varepsilon$ olacak şekiilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu durumda $|y-x| \geq \delta$ olduğunda $s \geq 0$ olmak üzere $|\varepsilon(y,x)| \leq K|y-x|^s$ eşitsizliği yazılabilir. Cauchy Schwartz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty p_{n,\nu}(y,0,u_1)|\varepsilon(y,x)||y-x|^{r+2}dy\right)^2 \\
\leq\ &\int_0^\infty p_{n,\nu}(y,0,u_1)dy \int_0^\infty p_{n,\nu}(y,0,u_1)(\varepsilon(y,x))^2(y-x)^{2r+4}dy
\end{aligned}$$

yazılabilir ve Lemma 3.2' den

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty p_{n,\nu}(y,0,u_1)|\varepsilon(y,x)||y-x|^{r+2}dy\right)^2 \\
=\ &\frac{1}{(n-m)u_1}\left(\int\limits_{|y-x|<\delta} p_{n,\nu}(y,0,u_1)(\varepsilon(y,x))^2(y-x)^{2r+4}dy\right. \\
&\left.+\int\limits_{|y-x|\geq\delta} p_{n,\nu}(y,0,u_1)(\varepsilon(y,x))^2(y-x)^{2r+4}dy\right) \\
=\ &\frac{1}{(n-m)u_1}\left(\int\limits_{|y-x|<\delta} p_{n,\nu}(y,0,u_1)(\varepsilon(y,x))^2(y-x)^{2r+4}dy\right. \\
&\left.+\int\limits_{|y-x|\geq\delta} p_{n,\nu}(y,0,u_1)K^2(y-x)^{2s+2r+4}dy\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 6.2'den

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n,\nu}\left(x,0,u_1\right)\left(\int_0^{\infty} p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right)\left|\varepsilon\left(y,x\right)\right|\left|y-x\right|^{r+2}dy\right)^2 \\
\leq\ & \frac{\left(n-m\right)u_1}{\left(n-m\right)^2 u_1^2}\int_I p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right)\left(\varepsilon\left(y,x\right)\right)^2\left(y-x\right)^{2r+4}dy \\
& +\frac{K^2\left(n-m\right)u_1}{\left(n-m\right)^2 u_1^2}\int_{|y-x|\geq\delta} p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right)\left(y-x\right)^{2s+2r+4}dy \\
=\ & \left(\varepsilon\left(y,x\right)\right)^2\mathcal{O}\left(\left[u_1 n\right]^{-(r+4)}\right)+K^2 O\left(\left[u_1 n\right]^{-(r+s+4)}\right) \\
=\ & \left(\varepsilon\left(y,x\right)\right)^2\mathcal{O}\left(\left[u_1 n\right]^{-(r+4)}\right)+\mathcal{O}\left(\left[u_1 n\right]^{-(r+s+4)}\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Böylece Lemma 6.2'den

$$
\begin{aligned}
\left|I_n\right| &\leq C\frac{u_1 n\left(n-m\left(r+1\right)\right)u_1}{\beta\left(n,r\right)}\left[u_1 n\right]^{-\left(\frac{r}{2}\right)}\left(\varepsilon\left(y,x\right)\right)^2\mathcal{O}\left(\left[u_1 n\right]^{-(r+4)}\right)^{\frac{1}{2}}+o\left(1\right) \\
&\leq \varepsilon+o\left(1\right),\ s>0
\end{aligned}
$$

dır. ε keyfi olduğundan $n\to\infty$ için $I_n\to 0$ olur.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmamızda öncelikle lineer pozitif operatörlerin yaklaşım teorilerinde temel olan Korovkin teoremleri verilmiş, süreklilik modülü ve ağırlıklı uzaylarda süreklilik modülü incelenmiştir.

Daha sonra İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri diye adlandırılan operatörlerin tanımı verilmiş ve bu operatörlerin noktasal yakınsaklığı, ağırlıklı fonksiyonlarıyla direk yaklaşım ve yakınsaklık hızı elde edilmiştir. Son olarakda İbragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin türevlerinin yaklaşım fonksiyonunun türevlerine olan yakınsaklığı incelenmiş ve bu operatörlerin noktasal yakınsaklığı verilmiştir.

Sonuç olarak, literatüre yeni kazandırılan operatör yaklaşım teorisinde çalışılan operatörlerin özel seçimler altında istenilen Durrmeyer tipli operatöre indirgenebilir. Bu iyi bilinen Durrmeyer tipli operatörler için verilen benzer sonuçlar elde edilebileceği gibi ileri ki yıllarda tanımlanabilecek yeni tipli Durrmeyer operatörleri için de tezde incelenen teoremler ve lemmalar verilmiş olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Weierstrass, K. G., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsber. Akad. Berlin, 633–639, 789–805, 1885.

[2] Bernstein, S., Démonstration du théorème de Weierstrass, fondeé sur le calcul des probabilités, Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 13: 1-2, 1912-1913.

[3] Korovkin, P.P., Convergence of positive linear operators in the space of continuous functions, (Russian) Dokl. Akad. Nauk. SSSR 90, 961-964, 1953.

[4] Dzyadik, V. K., On the approximation of functions by linear positive operators and singular integrals, Mat. Sbornik Vol. 70; pp. 508-517, 1966.

[5] Bernstein S.N., Démonstration du théorème de Weierstrass fondéesur le calcul des probabilités, Comm. Soc. Math. Kharkow, 13, 1–2, 1912/1913.

[6] J. L. Durrmeyer, Une formule d'inversion de la Transformee Laplace, Applications a la Theorie des Moments, These de 3e Cycle, Faculte des Sciencesde I'Universite de Paris, 1967.

[7] Gadjiev, A. D., Efendiyev, R. O. and Ibikli, E. On Korovkin's type theorem in the space of locally integrable functions, Czech. Math. J. Vol. 20; pp.781-786, 2003.

[8] Gadzhiev A.D.,Theorems of the of P.P Korovkin type theorems, Math. Zametki, 20(5) 781-786; Math. Notes 20 (5-6) (1976) 996-998, (English Translation) 1976.

[9] Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, 1-71 p., Ankara, 1995.

[10] Bohman, H., On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat., 2, 43-56, 1952.

[11] Korovkin, P. P., On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 90, 961–964, 1953.

[12] Ditzian, Z., Totik, V., Moduli of Smoothness, Springer Series in Computational Mathematics 9, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Newyork, 1987.

[13] Anastassiou, G. A. and Gal, S.G., Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation. Birkhäuser, Boston, 2000.

[14] Gupta, V., Agarwal, R. P., Convergence Estimates in Approximation Theory, Springer, 2014.

[15] Heilmann M., Direct and converse results for operators of Baskakov-Durrmeyer type, Approx. Theory Appl., 5, no. 1, 105–127, 1989.

[16] Ditzian Z., Ivanov K., Bernstein-type operators and their derivatives, J. Approx. Theory, 56, 72-90, 1989.

[17] Aral A., Acar T., On Approximation Properties of Generalized Durrmeyer Operators, (submitted).

[18] Agrawal, P. N., Gairola, A. R., On certain Durrmeyer type operators, Math. Commun, 14, no. 2, 307–316, 2009.

[19] Popoviciu, T., Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare, Lucrările Ses. Gen. Şt. Acad. Române din 1–4, 1950, translated into English by D. Kacsó, On the proof of Weierstrass' theorem using interpolation polynomials, East J. Approx., 4, 107–110, 1998.

[20] Gadjiev A. D., Ibragimov I.I., On a sequence of linear positive operators, Soviet Math. Dokl., 11, 1092-1095, 1970.

[21] Agrawal, P. N., Gupta V., Kumar A. S., Generalized Baskakov-Durrmeyer type operators, Rend. Circ. Mat. Palermo, (2) 63, no. 2, 193–209, 2014.

[22] Ispir, N., On modified Baskakov operators on weighted spaces, Turk. J. Math., 26, No. 3, 355-365, 2001.

[23] Aral, A., Approximation by Ibragimov-Gadjiev operators in polynomial weighted space, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 19, 35-44, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Emre DENİZ

Doğum Yeri: Kırıkkale

Doğum Tarihi: 27/07/1987

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Kırıkkale Lisesi, 2004

Lisans: Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2009

Yüksek Lisans: Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bil. Enst., Matematik, 2011

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları: 1-) Ulusoy, G., Deniz, E., Aral, A., Simultaneous Approximation with Generelized Durrmeyer Operators, Applied Mathematics and Computation, 260 (2015) 126-134,.

2-) Deniz, E., Aral, A., Convergence properties of Ibragimov-Gadjiev-Durrmeyer operatos, Creat. Math. Inform., 24 (2015), No.1, 17-26.