KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

$L_p[0,\infty)$ UZAYINDA IBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Gülsüm ULUSOY

NİSAN 2015

Matematik Anabilim Dalında Gülsüm ULUSOY tarafından hazırlanan $L_p[0,\infty)$ UZAYINDA IBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Ana Bilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Ali ARAL
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Kerim KOCA
Üye (Danışman)	:	Prof. Dr. Ali ARAL
Üye	:	Prof. Dr. Gülen Başcanbaz Tunca
Üye (Danışman)	:	Prof. Dr. Fatma Taşdelen Yeşildal
Üye	:	Doç. Dr. Ali OLGUN

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Ailem için…

ÖZET

$L_p[0,\infty)$ UZAYINDA IBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

ULUSOY, Gülsüm
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL
NİSAN 2015, 72 sayfa

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin $L_p[0,\infty)$ uzaylarında düzgün yakınsaklığı ve bu yakınsamanın hızı incelenmiştir. Beşinci bölümde Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin türevlerinin, yaklaşım fonksiyonunun türevlerine olan yakınsaklığı incelenmiş, yakınsaklık hızı ve yaklaşım hatası için bir üst sınır verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Durrmeyer Operatör, Ibragimov Gadjiev Operatör, $L_p[0,\infty)$ Yaklaşım, Süreklilik Modülü, K-Fonksiyonel, Ağırlıklı Yaklaşım.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF IBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATORS ON $L_p[0,\infty)$

ULUSOY, Gülsüm
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL
April 2015, 72 pages

This thesis consists of six chapters. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, some fundamental definitions and consepts are given. In the third chapter, Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operators are introduced and some properties are given. In the fourth chapter, uniform convergence of Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operators in the space of $L_p[0,\infty)$ is presented and the rate of this uniform convergence is obtained. In the fifth chapter, the approximation properties of Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operators in weighted speces are given. In the sixth chapter, the approximation of the derivatives of Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operators to the derivatives of the approximating functions is studied and rate of the convergence and an upper bound for the error of approximation are presented.

Key words: Durrmeyer Operators, Ibragimov Gadjiev Operators

$L_p[0,\infty)$ Approximation, Modulus of Continuity,

K-Functional, Weighted Approximation, Korovkin's Theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali ARAL'a teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmam boyunca, tezimin gelişmesine yardımcı olan değerli Tez İzleme Komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Gülen Başcanbaz Tunca ve Sayın Doç. Dr. Ali Olgun hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarımda öneri, bilgi ve tecrübesiyle bana yardımcı olan Sayın Dr. Tuncer ACAR hocama teşekkürlerimi sunarım. Her türlü yardımlarını, bilgilerini benden esirgemeyip bana destek olan Kırıkkale Üniversitesindeki sevgili arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım. Doktora eğitimim boyunca 2211 Yurtiçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında maddi destek veren TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım. Maddi ve manevi her konuda yanımda olan, varlıklarıyla bana daima huzur veren canım aileme en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	Her $x \in [a,b]$ için sürekli fonksiyon uzayı
$B_\rho\,[0,\infty)$	$[0,\infty)$ üzerinde tanımlı $1+x^2$ fonksiyonu ile sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C_\rho\,[0,\infty)$	$B_\rho\,[0,\infty)$ uzayına ait sürekli fonksiyonlar uzayı
$K_\varphi^r(f,t^r)_p$	$L_p[0,\infty)$ uzayında f fonksiyonuna ait K-fonksiyoneli
$\Vert.\Vert_p$	$L_p(a,b)$ uzayında norm
$\Vert.\Vert_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında norm
$\omega\,(f;\delta)$	f fonksiyonuna ait klasik süreklilik modülü
$w_\varphi^r(f,t)_p$	f fonksiyonuna ait L_p uzayında süreklilik modülü
$L_P(a,b)$	p. kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon uzayı
$W_p^r(\varphi,[0,\infty))$	g fonksiyonunun kendisi ve $\varphi^r g^{(r)} \in L_p[0,\infty)$, $r-1$. basamaktan türevi $g^{(r-1)}, [0,\infty)$ da lokal mutlak sürekli olan fonksiyonlar sınıfı
$L_{p,2r}(\mathbb{R}^+)$	$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $\Vert f\Vert_{p,2r} := \left(\int\limits_0^\infty \frac{\vert f(t)\vert^p}{1+t^{2r}}dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ şartını sağlayan ağırlıklı fonksiyon uzayı
$w(t)$	$L_{p,2r}(\mathbb{R}^+)$ uzayında ağırlık fonksiyonu
$\mathcal{H}$	$c>0$, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\int_0^\infty \frac{\vert f(t)\vert}{(1+ct)^{n/c}}dt < \infty$ şartını sağlayan fonksiyonlar sınıfı
$\Vert f\Vert_{C_\alpha}$	$\mathcal{H}$ sınıfına ait norm

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisindeki asıl amaç keyfi bir fonksiyonun daha basit daha kullanışlı diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Weierstrass [1] 1885 yılında kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun polinomlar dizisinin limiti biçiminde gösterilebileceğini yani

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

olacak biçimde (P_n) polinom dizisinin var olduğu göstermiştir.

Daha sonra Bernstein [2] tarafından 1912'de $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşan polinomların tipi hakkında bir teorem ispatlanmıştır.

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, 0 \le x \le 1$$

tipinde polinom dizisi tanımlamış ve bu polinomlar dizisi için keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $x \in [0,1]$ ve her $n \ge n_0$ için

$$|B_n(f;x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir. Weierstrass yaklaşım teoremi herhangi $[a,b]$ aralığı için verilmesine rağmen, Bernstein polinomları $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlıdır. Ancak keyfi $[a,b]$ aralığının ve $[0,1]$ aralığının, $y \in [a,b]$ olmak üzere $x = (a-y)/(a-b)$ ve $y = (b-a)x + a$ dönüşümleri altında birbirine dönüştürülebildikleri gözönüne alındığında Bernstein polinomları, Weierstrass'ın yaklaşım teoremi için keyfi $[a,b]$ aralığı üzerinde de bir ispat yöntemi oluşturmaktadır.

Daha sonra P. P. Korovkin [3] sınırlı aralıklarda lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım problemini ele alarak Korovkin teoremi olarak bilinen ve yaklaşım teorisinde büyük öneme sahip olan teoremi ispatlamıştır. Korovkin teoremine göre eğer $L_n f$ operatörler dizisi f fonksiyonuna $e_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$ fonksiyonları için yakınsaksa $[a,b]$ aralığında tanımlı tüm sürekli f fonksiyonları için de $L_n f$, f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

Bernstein ve Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisine lineer pozitif operatörler dizisi gözüyle bakıldığında, Bernstein polinomları çok araştırılmış ve üzerinde çok fazla çalışılmış, pek çok genelleşmesi ve modifikasyonu yapılmıştır. Bunları yapmaktaki amaç ise, kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde sürekli fonksiyonlara yaklaşım yapmaya imkan tanıyan Bernstein polinomlarının sınırsız aralıklar üzerine taşınması ve yaklaşılmak istenilen fonksiyonun ait olduğu sınıfı genişletmektir. Bunun için sürekli fonksiyonlar uzayından daha genel olan uzayların en önemlilerinden birisi olan Lebesgue uzaylarda çalışılmıştır.

Bu çalışmalar neticesinde Dzjadyk [4], Korovkin'in çözdüğü problemi $L_p[a,b]$ uzayına taşımıştır. Bu teoreme göre $f \in L_p[a,b]$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_{L_p[a,b]} = 0$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart yukarıdaki eşitliğin yalnızca $e_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$ fonksiyonları için sağlanmasıdır. Daha sonra bu doğrultuda bir çok çalışma Bernau [5], Donner [6], Swetits ve Wood [7] tarafından da ele alınmıştır.

1960 yılına gelindiğinde ise J. L Durrmeyer [8] $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesini genişletmek için $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar yerine $[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonları alarak Bernstein operatörünün integral modifikasyonu olan ve Bernstein Durrmeyer operatörleri olarak adlandırılan operatör dizisini tanımlamış ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

1974 yılında A. D. Gadjiev [9] tarafından Korovkin teoreminin tüm $\mathbb{R}^+$' de tanımlı sürekli ve sınırsız fonksiyonlar için geçerli olacak şekilde genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu çalışmalarda $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq Mg(x)$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayı $C_\rho(I)$ ile tanımlanmış ve ağırlıklı uzay olarak adlandırılmıştır. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in I} \frac{|f(x)|}{g(x)}$$

eşitliği ile verilmektedir. Daha sonra A. D. Gadjiev ve A. Aral [11] tarafından sınırsız aralıklarda w ağırlık fonksiyonuna göre $L_{p,w}[0,\infty)$ uzayında ağırlıklı Korovkin Teoremi verilmiştir.

Yaklasım teorisinin esas problemlerinden ikincisi ise yaklaşım hızının bulunması problemidir:

$$\|f(x) - \varphi_n(x)\|_x = \alpha_n \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

ise bu $\varphi_n(x)$'in $f(x)$'e yaklaşım hızını belirtir. Bu hızı bulmak için α_n'in sıfıra giden bir başka dizi ile karşılaştırılması yeterlidir. Yani $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ ise ve β_n'de sıfıra gidiyorsa ($\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$) yukarıdaki eşitsizlik α_n'in β_n'den daha hızlı sıfıra gittiğini gösterir. Fonksiyon uzayında β_n'i süreklilik modülü ile de ifade edebiliriz. Çünkü f'nin süreklilik modülü olan $w(f;\delta)$ sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.

Bu önemli problemin çözümü için 1935 yılında T. Popoviciu [12] [0,1] aralığında sürekli bir f fonksiyonu için süreklilik modülü yardımı ile Bernstein polinomlarının yaklaşım hızını

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{5}{4} w\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olarak belirtmiştir.

Bu tez birinci bölümü giriş bölümü olmak üzere dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavram ve teoremler verilmiş, tez boyunca gözönüne alınacak fonksiyon uzayları tanımlanmıştır. Tezin üçüncü bölümünde Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri tanıtılıp bu operatörün sağlamış olduğu özellikler incelenmiştir. Tezin dördüncü, beşinci ve altıncı bölümleri tamamen orjinal olup aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Dördüncü bölümde bu genelleştirilmiş operatörler için L_p normunda L_p yakınsaklık elde edilmiştir. Ayrıca yaklaşım hızını bulmak için L_p süreklilik modülü kullanılmıştır. Daha sonra da L_p süreklilik modülünün K fonksiyoneline denkliği kullanılarak yaklaşım hızı bulunmuştur.

Beşinci bölümde $L_{p,w}$ ağırlıklı uzaylarında tanımlanan Korovkin tipli teorem ile bu operatör için yaklaşım sonuçları elde edilmiştir.

Son bölümde ise operatörün türevlerinin yaklaşım fonksiyonunun türevine yakınsaklığı incelenmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Tez hazırlanırken H. Hilmi Hacısalihoğlu ve A. D. Gadjiev' in [13], "Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı" kitabından, H. Bohman'ın [14], "On approximation of continuous and of analytic functions" adlı makalesinden, P. P. Korovkin'in [15], "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions" adlı kitabından yararlanılmıştır. Ayrıca Z. Ditzian ve V. Totik'in [16], "Moduli of Smoothness" adlı kitabından, G. A. Anastassiou ve S. Gal'ın [17], "Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation" adlı kitabından, V. Gupta, R. P. Agarwal'ın [18], "Convergence Estimates in Approximation Theory" adlı kitabından faydalanılmıştır.

Tezin orjinal olan bölümlerinde sırasıyla M. Heilmann'nın [19], "Direct and converse results for operators of Baskakov-Durrmeyer type" adlı makalesinden, Z. Ditzian ve K. Ivanov'un [20], "Bernstein-type operators and their derivatives" adlı makalesinden, A. Aral ve T. Acar'ın [21], "On Approximation Properties of Generalized Durrmeyer Operators" adlı makalesinden, P. N. Agrawal ve A.R. Gairola'nın [22], "On certain Durrmeyer type operators" adlı makalesinden, A. D. Gadjiev ve A. Aral'ın [11], "Weighted L_p approximation with positive linear operators on unbounded sets" adlı makalesinden faydalanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Bu bölümde lineer pozitif operatörler ile ilgili bazı temel kavramlar ve özellikler verilecektir. Verilen tanımlar ve özellikler [13] ve [23] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

Tanım 2.1. X ve Y lineer normlu fonksiyon uzayları olsun. $L : X \to Y$ operatörü, her $f, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ $(K, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ $)$ için

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

eşitliğini sağlarsa, L operatörüne X'den Y'ye bir lineer operatör denir.
$\mathcal{L}(X, Y) = \{L : X \to Y : L \text{ lineer operatör}\}$ kümesi bir reel veya komplex vektör uzayıdır.

Tanım 2.2. $L : X \to Y$ lineer operatör ve

$$X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0\}, Y^+ = \{g \in Y : g(t) \geq 0\}$$

olmak üzere, L lineer operatörü X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyorsa, L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Tanım 2.3. $L : X \to Y$ bir operatör olsun. X, L'nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f \in X$ için

$$\|L(f; x)\|_Y \leq M \|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \mathbb{R}^+$ varsa L'ye X'de sınırlı operatör denir.

$$\|L\|_{X \to Y} = \inf\{M : \|L(f; x)\|_Y \leq M \|f\|_X\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

Lemma 2.1. $X \to Y$ sınırlı lineer operatörü için,

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği sağlanır.

2.2. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

$[a,b]$ kompakt aralığında sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatörler dizisi ile yaklaşım için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 2.1.[24]$L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $i = 0,1,2$ için $e_i = t^i$ olmak üzere $[a,b]$ aralığı üzerinde $\lim_{n\to\infty} L_n e_i = e_i$ düzgün olarak mevcut ise, bu durumda $[a,b]$ aralığı üzerinde her $f \in C[a,b]$ için $\lim_{n\to\infty} L_n f = f$ yakınsaması düzgündür.
Ayrıca Teorem 2.1 Bohmann [3] ve Korovkin [5] tarafından da incelenmiş ve aşağıdaki genel formu elde edilmiştir.

Teorem 2.2.(Bohman Korovkin Teoremi)$L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri olmak üzere, $\forall x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} L_n(1;x) &= 1 + \alpha_n(x), \\ L_n(t;x) &= x + \beta_n(x), \\ L_n\left(t^2;x\right) &= x^2 + \gamma_n(x) \end{aligned}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

Teorem 2.1'de $e_i = t^i$, $i = 0,1,2$ fonksiyonları yaklaşım teorisinde önemli bir role sahip olup, Korovkin test-fonksiyonları olarak adlandırılır.

2.3. Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Bir önceki kesimde verdiğimiz tüm teoremler sonlu aralıklar ve sonlu bölgeler üzerinde verilmiştir. Sınırsız aralıklar ve bölgeler üzerinde operatörler tanımlandıkça Korovkin teoreminin sınırsız aralıklar üzerinde verilme gereksinimi oluşmuştur. 1976 yılında A. D. Gadjiev tarafından Korovkin teoreminin tüm $\mathbb{R}$' de geçerli olan şekli aşağıdaki gibi verilmiştir.
$\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere
$\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ olsun. Bu durumda M_f pozitif bir sabit olmak üzere

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f : |f(x)| \leq M_f \rho(x)\} \tag{2.1}$$

ve

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}) : f, \ \mathbb{R} \text{ de sürekli}\}$$

fonksiyon sınıflarını gözönüne alalım. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\rho(x)}, \ x \in \mathbb{R}\right\}$$

normu ile birer normlu uzaydır. Burada ρ'ya ağırlık fonksiyonu, $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir. Ayrıca $k_f \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$C_\rho^k(\mathbb{R}) = \left\{f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f\right\} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanan fonksiyon uzayı $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayı olur.

Teorem 2.3. $\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda
(i) $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki bu operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(\varphi^\nu; x) - \varphi^\nu(x)\|_\rho = 0, \ \nu = 0, 1, 2 \tag{2.3}$$

şartları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_\rho(\mathbb{R})$ fonksiyonu bulunabilir ki

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f^*; x) - f^*(x)\|_\rho \geq 1$$

olur.

(ii) $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına öyle bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi (2.3) koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_\rho^k(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f;x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır.

2.4. Lebesgue Anlamında İntegrallenebilir Fonksiyon Uzayları

$p \geq 1$ olmak üzere (a,b) üzerinde p. kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı $L_p(a,b)$

$$L_p(a,b) = \left\{ f : \int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty, \ p \geq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4. Her $f \in L_p(a,b)$ f'nin normu

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5. f_n ve f fonksiyonları L_p uzayının elemanları olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna p. mertebeden ortalama yakınsaktır$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall n \geq n_0$ için

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon.$$

Bu yakınsaklık çeşidine L_p yakınsaklık da denir. Burada $p \geq 1$ olup

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_x |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

dir.

Buna göre (f_n) dizisi f fonksiyonuna L_p de yakınsaktır$\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

2.5. Hölder ve Minkowski Eşitsizlikleri

Tanım 2.6. $f \in L_p(a,b), g \in L_q(a,b)$ olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan p ve q için

$$\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|\,dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir. Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ seçilerek elde edilen

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwartz eşitsizliği denir.

Tanım 2.7. $f, g \in L_p(a,b)$ olsun. Bu durumda

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği saglanır. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir.

2.6. Süreklilik Modülü ve Fonksiyonel

Lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisinde önemli çalışmalardan biri de yaklaşımın hızını belirlemek ve bu yaklaşımın hatası için bir üst sınır bulmaktır. Bunu yaparken süreklilik modülü ve K-fonksiyonelini kullanmak en yaygın metodlardan birisidir. Aşağıdaki tanım ve Lemmalar [16] ve [17] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

Tanım 2.8. f, $[a,b]$'de sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x,y \in [a,b] \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|$$

ile tanımlanan ω fonksiyonuna, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Lemma 2.2. f, $[a,b] \subset \mathbb{R}$'de sürekli reel değerli fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlar doğrudur:

(a) $\omega(f,\delta)$ fonksiyonu δ ya göre artandır.

(b) $\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)=0$.

(c) $\lambda>0$ reel sayısı için

$$\omega(f,\lambda\delta)\leq(1+\lambda)\,\omega(f,\delta)$$

dir.

Tanım 2.9. $F=\mathbb{R}$ veya $F=\mathbb{C}$ olmak üzere X , F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $K:X\to F$ operatörüne fonksiyonel denir. Eğer K lineer ise K'ya lineer fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.10. Her pozitif σ için

$$W_{L_p}(f;\sigma)=\sup_{|t|<\sigma}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

ifadesine f'nin L_p uzayındaki süreklilik modülü denir.

2.7. Sınırsız Aralıklarda Tanımlanan Bazı Yaklaşım Operatörleri

$n\in\mathbb{N}$ ve $w_{n,k}(x)=(-1)^k\frac{x^k}{k!}\phi_n^k(x)$ olmak üzere $f\in C[0,\infty)$ için

$$G_n(f;x)=(n-c)\sum_{k=0}^{\infty}w_{n,k}(x)\int\limits_0^{\infty}w_{n,k}(t)\,f(t)\,dt \tag{2.4}$$

ifadesine genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer [19] operatörü denir.

$[0,1]$ aralığında $c=1$ için $\phi_n(x)=(1-x)^n$

$[0,\infty)$ aralığında $c=0$ için $\phi_n(x)=e^{-nx}$

$[0,\infty)$ aralığında $c>0$ için $\phi_n(x)=(1+cx)^{-n/c}$ şeklindedir.

$n \in \mathbb{N}$ ve $v_{n,k}(x) = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \dfrac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$ olmak üzere $f \in C[0,\infty)$ için

$$\mathcal{B}_n(f;x) = (n-1)\sum_{k=0}^{\infty} v_{n,k}(x) \int\limits_0^{\infty} v_{n,k}(t)\, f(t)\, dt \tag{2.5}$$

ifadesine Baskakov Durrmeyer operatörü [25] denir.

$n \in \mathbb{N}$ ve $p_{n,k}(x) = e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$ olmak üzere $f \in C[0,\infty)$ için

$$S_n(f;x) = n\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}(x) \int\limits_0^{\infty} p_{n,k}(t)\, f(t) dt \tag{2.6}$$

ifadesine Szasz Durrmeyer operatörü [26] denir.

3. IBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLERİ

Yaklaşım teorisinde, birçok araştırmacı daha geniş uzaylarda geçerli olan sonuçlar bulmak amacıyla lineer pozitif operatörlerin bir genelleştirilmesini bulmaya çalışmaktadır. Ibragimov ve Gadjiev [27] tarafından 1970'de tanımlanan operatörler de en önemli genelleştirilmiş operatörlerden biridir. Ibragimov Gadjiev operatörleri adı verilen bu operatörler, özel seçimler altında bir çok iyi bilinen Bernstein, Szasz-Mirakjan ve Baskakov operatörlerine dönüşebilen lineer pozitif operatörlerin bir dizisidir. Şimdi bu operatörleri hatırlayalım.

$C(\mathbb{R}^+)$, $[0,\infty)$'da sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. $(\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\psi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$, $C(\mathbb{R}^+)$ uzayına ait $\varphi_n(0)=0$ ve her t için $\varphi_n(t)>0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} 1/n^2\psi_n(0)=0$$

şartını sağlasın. Aynı zamanda $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=0 \text{ and } \lim_{n\to\infty}\alpha_n\psi_n(0)=l_1,\ l_1\geq 0.$$

$K_n(x,t,u)$ fonksiyon dizisi için

$$\left(K_n^{(\nu)}(x,t,u)\right)_{n\in\mathbb{N}} := \left.\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right|_{u=\alpha_n\psi_n(t),t=0}$$

gösterimi olmak üzere,

Ibragimov Gadjiev operatörleri

$$G_n(f;x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)K_n^{(\nu)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{(-\alpha_n\psi_n(0))^\nu}{\nu!}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $K_n(x,t,u)$ $(x,t\in\mathbb{R}^+$ ve $-\infty<u<\infty)$ aşağıdaki üç şartı sağlayan, üç değişkenli fonksiyon dizisidir.

(1) $x,t\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $K_n(x,t,u)$ fonksiyon dizisi u'ya göre analitik ve $x\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}$ için $K_n(x,0,0)=1$,

(2) $x\in\mathbb{R}^+$ ve $\nu=0,1,...,$ için $\left[(-1)^\nu\left.\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right|_{u=u_1,t=0}\right]\geq 0$,

(3) Her $x\in\mathbb{R}^+$, $n,\nu,\in\mathbb{N}$ ve m sabit bir doğal sayı olmak üzere

$$\left.\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\right|_{u=u_1,t=0} = -nx\left[\left.\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{m+n}(x,t,u)\right|_{u=u_1,t=0}\right]$$

dir. Ibragimov Gadjiev operatörlerinin Durrmeyer tipli genelleştirilmesi için yukarıda verilen üç şart yetmemiştir. Durrmeyer genelleştirilmesi için aşağıdaki iki ilave şarta da ihtiyaç duyulmaktadır:

(4) Herhangi bir $u \in \mathbb{R}$ için $K_n(0,0,u) = 1$ ve herhangi bir $p \in \mathbb{N}$ ve sabit $u = u_1$ için

$$\lim_{x\to\infty} x^p K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = 0,$$

(5) Herhangi bir sabit t, u için $K_n(x,t,u)$, $x \in \mathbb{R}^+$'ya göre sürekli türevlenebilir olsun ve sabit bir $u = u_1$ için aşağıdaki eşitlik sağlansın.

$$\frac{d}{dx} K_n(x,0,u_1) = -nu_1 K_{m+n}(x,0,u_1).$$

Bu operatörler de Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri olarak isimlendirilmiş olup özel seçimler altında bir çok iyi bilinen Durrmeyer tipli operatörlere dönüşebilmektedir. Şimdi bu operatörleri hatırlayalım.

Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri [21]

$$\begin{aligned} M_n(f;x) &= (n-m)\,\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\nu=0}^{\infty} K_n^{(\nu)}(x,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{(\nu)!} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} f(y)\,K_n^{(\nu)}(y,0,\alpha_n\psi_n(0))\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\nu}}{(\nu)!}dy \qquad (3.1) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Bu operatörler $K_n(x,t,u)$ çekirdeğinin özel seçimleriyle aşağıdaki Durrmeyer tipli operatörlere dönüşebilmektedir.

(i) $K_n(x,t,u) = K_n(t+ux)$, $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = 1/n$ seçilirse genelleştirilmiş Baskakov Durrmeyer operatörüne (2.4)

(ii) $K_n(x,t,u) = [1+t+ux]^{-n}$, $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = 1/n$ seçilirse Baskakov Durrmeyer operatörüne (2.5),

(iii) $K_n(x,t,u) = e^{-n(t+ux)}$, $\alpha_n = n$, $\psi_n(0) = 1/n$ seçilirse Szasz Durrmeyer operatörüne (2.6) dönüşmektedir.

Ayrıca $M_n(f;x)$ operatörlerinin L_p uzayında yaklaşım özelliklerini çalışabilmek için $K_n(x,t,u)$ dizisinin sağlamış olduğu $(1)-(5)$ koşullarına ek olarak (6) koşulunu gözönüne alıyoruz.

(6) $x \in \mathbb{R}^{+}$, $n \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1, ...,$ için

$$\frac{n+\nu m}{1+u_1 mx} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = n K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)$$

dir. $K_n(x,t,u)$ dizisi (1) şartından u'ya göre analitik olup herhangi bir $u_1 \in \mathbb{R}$ noktasında Taylor serisine açılırsa

$$K_n(x,t,u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,t,u)\bigg|_{u=u_1} \frac{(u-u_1)^{\nu}}{\nu!}$$

olarak yazılabilir. Burada $u = \varphi_n(t)$, $u_1 = \alpha_n \psi_n(t)$ ve $t = 0$ alınırsa

$$K_n(x,0,0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,0,\alpha_n \psi_n(0)) \frac{(-\alpha_n \psi_n(0))^{\nu}}{\nu!}$$

elde edilir. $\varphi_n(0) = 0$ ve $K_n(x,0,0) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa, (1) şartından

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x,0,\alpha_n \psi_n(0)) \frac{(-\alpha_n \psi_n(0))^{\nu}}{\nu!} = 1 \tag{3.2}$$

bulunur.

Lemma 3.1. [21] (5) şartı kullanılırsa

$$\frac{d}{dx} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = \frac{\nu}{x} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) - n u_1 K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)$$

elde edilir.

İspat. (4) şartı υ kez uygulanırsa

$$K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = (-1)^{\nu} n(n+m)...(n+(\nu-1)m x^{\nu} K_{n+\nu m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \tag{3.3}$$

bulunur. Burada (5) şartı uygulanırsa

$$\begin{aligned} & (-1)^{\nu} \frac{d}{dx} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \\ = \; & n(n+m)...(n+(\nu-1)m \left\{ \nu x^{\nu-1} K_{n+\nu m}^{(\nu)}(x,0,u_1) - x^{\nu}(n+\nu m) u_1 K_{n+(\nu+1)m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \right\} \end{aligned}$$

olur. Son olarak (3.3) uygulanırsa sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1. (6) şartı ve Lemma 3.1 kullanılırsa

$$x(1+u_1 mx) \frac{d}{dx} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = (\nu - x u_1 n) K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \tag{3.4}$$

bulunur.

Lemma 3.2. [21] ν, $n \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} M_n\left(t^r;x\right) &= \frac{n^{2r}}{(n-2m)\ldots(n-pm)(n-(r+1)m)(\alpha_n)^r\left(n^2\psi_n(0)\right)^r} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{r} n(n+m)\ldots(n+(j-1)m)\,C_{j,r}\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^j x^j, \end{aligned}$$

dir. Burada $C_{j,r} = \frac{r!}{j!}\binom{r}{j}$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} M_n(1;x) &= 1,\quad M_n(t;x) = \frac{n^2}{(n-2m)\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}x + \frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right) \qquad (3.5) \\ M_n\left(t^2;x\right) &= \frac{n^4}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n^2}\left(\left(\frac{\alpha_n}{n}x\right)^2\frac{(m+n)}{n} + \frac{\alpha_n}{n}\frac{4}{n^2\psi_n(0)}x + \frac{2}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\right). \end{aligned}$$

Lemma 3.3. [21]$K_n(x,t,u)$ çekirdeği için

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx = (-1)^\nu\,\frac{\nu!}{(n-m)\,u_1^{\nu+1}} \qquad (3.6)$$

sağlanır.

İspat: Kısmi integrasyon ve (2) şartı kullanılırsa

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx = -\int_0^\infty x\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx$$

bulunur. Burada Lemma 3.1 kullanılırsa

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx = -\nu\int_0^\infty K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx + nu_1\int_0^\infty K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx$$

olup (4) şartı gözönüne alınırsa

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx = -\nu\int_0^\infty K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx - u_1\int_0^\infty K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1)\,dx$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^\infty K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx = \frac{-u_1}{\nu+1}\int_0^\infty K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1)\,dx$$

bulunup yukarıdaki eşitlik ν kez uygulanıp (2) ve (5) şartı gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\,dx &= -\frac{\nu}{u_1}\int_0^\infty K_n^{(\nu-1)}(x,0,u_1)\,dx \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&= (-1)^\nu \frac{\nu!}{u_1^\nu}\int_0^\infty K_n(x,0,u_1)\,dx \\
&= \frac{\nu!(-1)^{\nu+1}}{(n-m)u_1^\nu}\int_0^\infty \frac{d}{dx}K_{n-m}(x,0,u_1)\,dx \\
&= (-1)^\nu \frac{\nu!}{(n-m)\,u_1^{\nu+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. $L_P[0,\infty)$ UZAYINDA IBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Tezimizin bu bölümünde öncelikle Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin $L_p[0,\infty)$'den $L_p[0,\infty)$'ye dönüşüm yapan sınırlı operatörler olduğunu gösterip sonra ana sonuçların ispatında gerekli olan lemmaları vereceğiz. Daha sonra $L_p[0,\infty)$ uzayına ait fonksiyonlar için düzgün yakınsaklık özelliklerinin mevcut olduğunu göreceğiz. Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri için düzgün yakınsaklığın sınırsız aralıkta $L_p[0,\infty)$ uzaylarında sağlandığını, bu yakınsamanın da L_p normuna göre gerçekleştiğini göstereceğiz. Düzgün yakınsaklıkla ilgili olan teoremi quantitative tipli olarak verip hem düzgün yakınsaklığı hem de bu yakınsamanın hızını aynı anda elde edeceğiz. Bunun için $L_p[0,\infty)$ uzaylarında tanımlı fonksiyonlar için geçerli olan süreklilik modülünden faydalanacağız.

4.1. Ibragimov Gadjiev Durrmeyer Operatörlerinin Sınırlılığı

Teorem 4.1. $n\in\mathbb{N}$, $n>m$, $f\in L_p\left(\mathbb{R}^+\right)$, $1\leq p\leq\infty$ için

$$\left\|M_n f\right\|_p \leq \left\|f\right\|_p \tag{4.1}$$

dir.

İspat. Riesz Thorin Teoreminden ispatı $p=1$ ve $p=\infty$ için yapmak yeterlidir. $p=1$ için

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|M_n\left(f;x\right)\right| dx &\leq (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\int_0^\infty \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(x,0,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^\upsilon}{\upsilon!}dx \\ &\quad\times\int_0^\infty \left|f(y)\right| \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(y,0,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^\upsilon}{\upsilon!}dy \\ &= \int_0^\infty \left|f(y)\right|\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(y,0,u)\left.\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{\left[-\alpha_n\psi_n(0)\right]^\upsilon}{\upsilon!}dy \\ &= \int_0^\infty \left|f(y)\right| dy = \left\|f\right\|_1\end{aligned}$$

elde edilir. $p=\infty$ için

$$|M_n(f;x)| = (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(x,0,u)\mid_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}$$

$$\times\int_0^\infty f(y)\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(y,0,u)\mid_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}dy$$

$$\leq \sup_{y\geq 0}f(y)\left\{(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(x,0,u)\mid_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}\right.$$

$$\left.\times\int_0^\infty\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(y,0,u)\mid_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}dy\right\}\leq\|f\|_\infty M_n(1;x)\leq\|f\|_\infty$$

bulunur.

4.2. Ibragimov Gadjiev Durrmeyer Operatörlerinin L_p Normuna Göre Düzgün Yakınsaklığı

Lemma 4.1. $n\in\mathbb{N}$, $n>(2r+1)m,\ x\in\mathbb{R}^+$ ve $T_{n,r}(x)=[M_n(x-\cdot)^r](x)$ olsun. Bu durumda

$$T_{n,0}(x)=1\quad,\quad T_{n,1}(x)=-\frac{(1+2xu_1m)}{u_1(n-2m)}\tag{4.2}$$

olur. Ayrıca $r\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&[u_1n-u_1m(r+2)]T_{n,r+1}(x)\\ =\ &x(1+u_1mx)[-T'_{n,r}(x)+2rT_{n,r-1}(x)]-(1+2xu_1m)\,(r+1)\,T_{n,r}(x),\end{aligned}\tag{4.3}$$

$$T_{n,2r}(x)=\sum_{i=0}^{r}q_{i,2r}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]^{r-i}\frac{1}{(n-2m)...(n-(2r+1)m)}u_1^{-2i}\tag{4.4}$$

sağlanır. Burada $q_{i,2r}$, n'e göre düzgün sınırlıdır ve $\varphi(x):=\sqrt{x\,(1+xm\alpha_n\psi_n\,(0))}$ şeklindedir.

İspat. Öncelikle (4.2)'yi gösterelim. $r=0$ için sonuç direkt olarak görülür.

$r=1$ için (3.1) ve (3.5)'den

$$
\begin{aligned}
T_{n,1}(x) &= x-\frac{n^2}{(n-2m)\,\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}x+\frac{1}{n^2\psi_n\,(0)}\right)\\
&= x-\frac{nx}{n-2m}-\frac{1}{(n-2m)u_1}\\
&= -\frac{1+2mxu_1}{(n-2m)u_1}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Şimdi (6.8)'i gösterelim.

$$
\begin{aligned}
&T_{n,r}(x)\\
=\ &(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}\int_0^{\infty}(x-y)^rK_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy
\end{aligned}
$$

olmak üzere burada türev alınırsa,

$$
\begin{aligned}
T'_{n,r}(x) &= (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{d}{dx}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}\\
&\quad\times\int_0^{\infty}(x-y)^rK_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy\\
&\quad+r(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}\\
&\quad\times\int_0^{\infty}(x-y)^{r-1}K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy\\
&= (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{d}{dx}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}\\
&\quad\times\int_0^{\infty}(x-y)^rK_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy\\
&\quad+rT_{n,r-1}(x)
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
&\varphi^2(x)[T'_{n,r}(x)-rT_{n,r-1}(x)]\\
=\ &(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\varphi^2(x)\frac{d}{dx}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}\\
&\times\int_0^{\infty}(x-y)^rK_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy
\end{aligned}
$$

yazılırsa Sonuç 3.1'den

$$
\begin{aligned}
& \varphi^2(x)[T'_{n,r}(x) - rT_{n,r-1}(x)] \\
= \ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}(\upsilon - xu_1 n)K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!} \\
& \times\int_0^{\infty}(x-y)^r K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
& \varphi^2(x)[T'_{n,r}(x) - rT_{n,r-1}(x)] \\
= \ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!} \\
& \times\int_0^{\infty}(\upsilon - xu_1 n)K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(x-y)^r\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy \\
= \ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!} \\
& \times\int_0^{\infty}(\upsilon - xu_1 n - yu_1 n + yu_1 n)K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(x-y)^r\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy \\
= \ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!} \\
& \times\int_0^{\infty}(\upsilon - yu_1 n)K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(x-y)^r\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy - nu_1T_{n,r+1}(x) \\
= \ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!} \\
& \times\int_0^{\infty}\varphi^2(y)\frac{d}{dy}K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(x-y)^r\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dy - nu_1T_{n,r+1}(x)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Son satırda $\varphi^2(y)(x-y)^r = u$, $\dfrac{d}{dy}K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)dy = dv$ alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
& \varphi^2(x)[T'_{n,r}(x) - rT_{n,r-1}(x)] \\
= \ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!} \\
& \times\int_0^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}\left[-(1+2u_1my)(x-y)^r + r\psi^2(y)(x-y)^{r-1}\right]dy \\
& -nu_1T_{n,r+1}(x) \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$r\varphi^2(y)-(1+2u_1my)(x-y)=r\varphi^2(x)-(r+1)(1+2u_1mx)(x-y)+u_1m(r+2)(x-y)^2$$

eşitliği gözönüne alınıp (4.5)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\varphi^2(x)[T'_{n,r}(x)-rT_{n,r-1}(x)]\\=\;&r\varphi^2(x)T_{n,r-1}(x)-(r+1)(1+2u_1mx)T_{n,r}(x)+u_1m(r+2)T_{n,r+1}(x)-nu_1T_{n,r+1}(x)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}&[u_1n-u_1m(r+2)]T_{n,r+1}(x)\\=\;&\varphi^2(x)[2rT_{n,r-1}(x)-T'_{n,r}(x)]-(r+1)(1+2u_1mx)T_{n,r}(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (4.4)'ü gösterelim. İspatı $T_{n,2}(x)$ ve $T_{n,4}(x)$ için gösterip daha sonra genel bir bağıntı elde edelim. (4.2) ve (6.8) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&T_{n,2}(x)[u_1n-3u_1m]\\=\;&x(1+u_1mx)[-T'_{n,1}(x)+2T_{n,0}(x)]-(1+2xu_1m)2T_{n,1}(x)\\=\;&x(1+u_1mx)\left(\frac{2m}{(n-2m)}+2\right)+2(1+2xu_1m)T_{n,1}(x)\\=\;&x(1+u_1mx)\left[\frac{2n-2m}{n-2m}\right]+(1+2xu_1m)^2\frac{2}{u_1(n-2m)}\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}&T_{n,2}(x)\\=\;&\frac{1}{u_1(n-3m)}\left[x(1+u_1mx)\left(\frac{2n-2m}{n-2m}\right)+(1+2xu_1m)^2\frac{2}{u_1(n-2m)}\right]\\=\;&\frac{1}{u_1(n-3m)}\left[x(1+u_1mx)\left(\frac{2n-2m}{n-2m}\right)+(1+4xu_1m+4u_1^2x^2m^2)\frac{2}{u_1(n-2m)}\right]\\=\;&\frac{1}{u_1(n-3m)}\left[x(1+u_1mx)\left(\frac{2n-2m}{n-2m}\right)+(1+4u_1m(x+u_1mx^2)\frac{2}{u_1(n-2m)}\right]\\=\;&\frac{1}{u_1(n-3m)}\left[x(1+u_1mx)\left(\frac{2n-2m}{n-2m}\right)+(1+4u_1m(x+u_1mx^2)\frac{2}{u_1(n-2m)}\right]\\=\;&\frac{\varphi^2}{u_1(n-3m)}\left[\frac{2n-2m}{n-2m}+\frac{8m}{(n-2m)}\right]+\frac{2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\\=\;&\varphi^2\frac{(6m+2n)}{u_1(n-2m)(n-3m)}+\frac{2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
T_{n,2}(x) &= \frac{(2n+6m)}{(n-3m)}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)}+2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}u_1^{-2} \\
&= q_{0,2}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)}+q_{1,2}\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}u_1^{-2} \\
&= \sum_{i=0}^{1} q_{i,2}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]^{1-i}\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}u_1^{-2i} \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $T_{n,3}(x)$'i hesaplayalım. (4.2) ve (4.6) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
& T_{n,3}(x)[u_1n-4u_1m] \\
=\; & \varphi^2\left[-T'_{n,2}(x)+4T_{n,1}(x)\right]-(1+2xu_1m)3T_{n,2}(x) \\
=\; & \varphi^2\left[-\frac{(1+2u_1mx)(2n+6m)}{u_1(n-2m)(n-3m)}-4\frac{(\varphi^2)'}{(n-2m)u_1}\right] \\
& -3(\varphi^2)'\left[\varphi^2\frac{(6m+2n)}{u_1(n-2m)(n-3m)}+\frac{2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\right] \\
=\; & \varphi^2\left[-\frac{(\varphi^2)'(2n+6m)}{u_1(n-2m)(n-3m)}-4\frac{(\varphi^2)'}{(n-2m)u_1}\right] \\
& -3(\varphi^2)'\varphi^2\frac{(6m+2n)}{u_1(n-2m)(n-3m)}-\frac{6(\varphi^2)'}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \\
=\; & \varphi^2(\varphi^2)'\left[\frac{-(2n+6m)u_1-4(n-3m)u_1-3u_1(2n+6m)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\right] \\
& -\frac{6(\varphi^2)'}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \\
=\; & \varphi^2(\varphi^2)'\left[\frac{-2nu_1-6mu_1-4nu_1+12mu_1-6nu_1-18mu_1}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\right] \\
& -\frac{6(\varphi^2)'}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}
\end{aligned}
$$

olur ve

$$
\begin{aligned}
& T_{n,3}(x) \\
=\; & \varphi^2(\varphi^2)'\left[\frac{-u_1(12n+12m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}\right] \\
& -\frac{6(\varphi^2)'}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi (4.6) ve (4.8)'i kullanarak $T_{n,4}(x)$'i bulalım.

$$
\begin{aligned}
& T_{n,4}(x)[u_1n-5u_1m] \\
=\; & x(1+u_1mx)[-T'_{n,3}(x)+6T_{n,2}(x)]-(1+2xu_1m)4T_{n,3}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& T_{n,4}(x)[u_1 n - 5u_1 m] \\
= \;& \varphi^2 \left[\left((1+2xu_1m)^2 + (2u_1m)(x+u_1mx^2) \right) \frac{u_1(12n+12m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right. \\
& + \frac{12u_1m}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \\
& \left. + 6\left[\varphi^2 \frac{(6m+2n)}{u_1(n-2m)(n-3m)} + \frac{2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \right] \right] \\
& -(1+2xu_1m)4\left[\varphi^2(\varphi^2)' \left[\frac{-u_1(12n+12m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right] \right. \\
& \left. - \frac{6(\varphi^2)'}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right]
\end{aligned}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
& T_{n,4}(x)[u_1 n - 5u_1 m] \\
= \;& \left[\varphi^2(1+4xu_1m+4u_1^2m^2x^2+2u_1mx+2u_1^2m^2x^2) \frac{u_1(12n+12m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right. \\
& + \frac{12u_1m}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \\
& \left. + 6\left[\varphi^2 \frac{(6m+2n)}{u_1(n-2m)(n-3m)} + \frac{2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \right] \right] \\
& +(1+2xu_1m)4\left[\varphi^2(\varphi^2)' \left[\frac{u_1(12n+12m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right] \right. \\
& \left. + \frac{6(\varphi^2)'}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
& T_{n,4}(x)[u_1 n - 5u_1 m] \\
= \;& \varphi^2 \left[(1+6u_1mx+6u_1^2m^2x^2) \frac{12u_1(n+m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right. \\
& + \frac{12u_1m}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \\
& \left. + 6\varphi^2 \frac{(6m+2n)}{u_1(n-2m)(n-3m)} + \frac{12}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \right] \\
& + \left[(1+2xu_1m)4\varphi^2(\varphi^2)' \frac{u_1(12n+12m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right. \\
& \left. + \frac{24(\varphi^2)'(1+2xu_1m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& T_{n,4}(x)[u_1n-5u_1m] \\
= \; & \varphi^2\left[(1+6u_1mx+6u_1^2m^2x^2)\frac{12u_1(n+m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}\right. \\
& +\frac{12u_1m}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \\
& \left.+6\varphi^2\frac{u_1(2n+6m)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}+\frac{12}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\right] \\
& +4\left(\varphi^2\right)'\left[\varphi^2\left(\varphi^2\right)'\left(\frac{12u_1(n+m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}\right)\right. \\
& \left.+\frac{6\left(\varphi^2\right)'}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}\right]
\end{aligned}
$$

olur. İfadeler düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
& T_{n,4}(x)[u_1n-5u_1m] \\
= \; & \varphi^2\left[(1+6u_1m\varphi^2)\frac{12u_1(n+m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}+\frac{12u_1m}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}\right. \\
& \left.+6\varphi^2\frac{u_1(2n+6m)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}+\frac{12}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\right] \\
& +4\left(\left(\varphi^2\right)'\right)^2\varphi^2\frac{12u_1(n+m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}+\frac{24\left(\left(\varphi^2\right)'\right)^2}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& T_{n,4}(x)[u_1n-5u_1m] \\
= \; & \varphi^2\left[(1+6u_1m\varphi^2)\frac{12u_1(n+m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}+\frac{12u_1m}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}\right. \\
& \left.+6\varphi^2\frac{u_1(2n+6m)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}+\frac{12}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\right] \\
& +4(1+4u_1m\varphi^2)\varphi^2\frac{12u_1(n+m)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \\
& +\frac{24(1+4u_1m\varphi^2)}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
& T_{n,4}(x)[u_1 n - 5u_1 m] \\
= \; & \varphi^4 \left[6u_1 m \frac{12(n+m)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)(n-4m)} + \frac{6(2n+6m)}{u_1(n-2m)(n-3m)} \right. \\
& \left. + \frac{16u_1 m(12n+12m)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right] \\
& + \varphi^2 \left[\frac{12(n+m)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)(n-4m)} + \frac{12u_1 m}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \right. \\
& \left. + \frac{12}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \right] \\
& + \frac{4.12(n+m)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)(n-4m)} + \frac{96u_1 m}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \Bigg] \\
& + \frac{24}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}
\end{aligned}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
T_{n,4}(x) \; = \; & \varphi^4 \left[\frac{252u_1^2 mn + 120u_1^2 m^2 + 12u_1^2 n^2}{u_1^4(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)} \right] \\
& + \varphi^2 \left[\frac{72u_1 n + 120u_1 m}{u_1^4(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)} \right] \\
& + \frac{24}{u_1^4(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
T_{n,4}(x) \; = \; & \frac{12n^2 + 152mn + 120m^2}{(n-4m)(n-5m)} \left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1} \right]^2 \frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
& + \frac{72n + 120m}{(n-5m)} \left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1} \right] \frac{1}{(n-2m)} u_1^{-2} \frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
& + 24 \frac{u_1^{-4}}{(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)} \\
= \; & q_{0,4} \left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1} \right]^2 \frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
& + q_{1,4} \left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1} \right] \frac{1}{(n-2m)} u_1^{-2} \frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
& + q_{2,4} \frac{u_1^{-4}}{(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)} \\
= \; & \sum_{i=0}^{2} q_{i,4} \left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1} \right]^{2-i} \frac{1}{(n-2m)...(n-(2r+1)m)} u_1^{-2i} \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

şeklinde de ifade edilebilir. (4.7) ve (4.9) gözönüne alınıp genelleştirilirse (4.4) bulunur.

Lemma 4.2. $r \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$|T_{n,2r}(x)| \leq C\left[(n-(2r+1)m)u_1\right]^{-r}\left(\varphi^2(x)+((n-(2r+1)m)u_1)^{-1}\right)^r \quad (4.10)$$

dir. Burada C, n'den bağımsız sabittir.

İspat.

$$T_{n,2}(x) = \frac{(2n+6m)}{(n-3m)}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)} + 2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}u_1^{-2} \quad (4.11)$$

şeklinde olduğu (4.7)'de gösterilmişti. Burada
$x \in \left[0, \frac{1}{u_1(n-rm)}\right]$ için

$$\begin{aligned}
\varphi^2(x) &= x + u_1 m x^2 \\
&\leq \frac{1}{u_1(n-rm)} + u_1 m \frac{1}{u_1^2(n-rm)^2} \\
&= \frac{u_1(n-rm)+u_1 m}{u_1^2(n-rm)^2} \\
&= \frac{n-rm+m}{(n-rm)^2 u_1}
\end{aligned}$$

olup (4.11)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
|T_{n,2}(x)| &\leq \frac{(2n+6m)}{(n-3m)}\left[\frac{n-rm+m}{(n-rm)^2u_1^2}\right]\frac{1}{(n-2m)} + 2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}u^{-2} \\
&\leq C(u_1(n-rm))^{-2} + C(u_1(n-rm))^{-2} \\
&= C(u_1(n-rm))^{-2}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan
$x \in \left[\frac{1}{u_1(n-rm)}, \infty\right)$ için

$$\begin{aligned}
\left[(n-rm)u_1\varphi(x)^2\right]^{-1} &= \left[(n-rm)u_1(x+u_1mx^2)\right]^{-1} \\
&= \left[(n-rm)u_1\left(\frac{1}{(n-rm)u_1} + \frac{u_1 m}{(n-rm)^2u_1^2}\right)\right]^{-1} \\
&= \left(\frac{n-rm+m}{n-rm}\right)^{-1} = \frac{n-rm}{n-rm+m} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu ifadeyi (4.11)'de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
|T_{n,2}(x)| &= \frac{(2n+6m)}{(n-3m)}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)} + 2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}u_1^{-2} \\
&\leq \frac{1}{(n-2m)}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]\frac{(2n+6m)}{(n-3m)} + 2((n-rm)u_1\varphi(x)^2)^{-1}\frac{\varphi(x)^2}{u_1(n-2m)} \\
&= \frac{u_1^{-1}\varphi^2(x)}{(n-2m)}\left[\frac{2n+6m}{n-3m} + 2((n-rm)u_1\varphi(x)^2)^{-1}\right] \\
&\leq C\frac{u_1^{-1}\varphi^2(x)}{(n-2m)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.10) eşitsizliği $r = 1$ için sağlanmış olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
T_{n,4}(x) &= \frac{12n^2+252mn+120m^2}{(n-4m)(n-5m)}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]^2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
&\quad +\frac{72n+120m}{(n-5m)}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)}u_1^{-2}\frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
&\quad +24\frac{u_1^{-4}}{(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)}
\end{aligned}$$

olduğu görülmüştü.

$x \in \left[0, \dfrac{1}{u_1(n-rm)}\right]$ için $\varphi(x) \leq \dfrac{m-rm+n}{(n-rm)^2u_1}$ olup

$$\begin{aligned}
|T_{n,4}(x)| &\leq q_{0,4}\left[\frac{m-rm+n}{(n-rm)^2u_1^2}\right]^2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
&\quad +q_{1,4}\left[\frac{m-rm+n}{(n-rm)^2u_1^2}\right]\frac{1}{(n-2m)}u_1^{-2}\frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
&\quad +q_{2,4}\frac{u_1^{-4}}{(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)} \\
&\leq C(u_1(n-rm))^{-4}
\end{aligned}$$

dir. $x \in \left[\dfrac{1}{u_1(n-rm)}, \infty\right)$ için $[(n-rm)u_1\varphi(x)^2]^{-1} \leq 1$ olup

$$
\begin{aligned}
& |T_{n,4}(x)| \\
\leq\ & q_{0,4}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]^2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}+q_{1,4}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)}u_1^{-2}\frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
& +q_{2,4}\frac{u_1^{-4}}{(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)} \\
\leq\ & q_{0,4}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]^2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
& +q_{1,4}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]^2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}((n-rm)u_1\varphi^2(x))^{-1} \\
& +q_{2,4}\left[\frac{\varphi^2(x)}{u_1}\right]^2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)}((n-rm)u_1\varphi^2(x))^{-2} \\
=\ & \frac{(\varphi^2(x))^2u_1^{-2}}{(n-2m)(n-3m)}\left[q_{0,4}+q_{1,4}((n-rm)u_1\varphi^2(x))^{-1}+q_{2,4}((n-rm)u_1\varphi^2(x))^{-2}\right] \\
\leq\ & C\frac{(\varphi^2(x))^2u_1^{-2}}{(n-2m)(n-3m)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (4.10) eşitsizliği $r=2$ için sağlanmış olur. Böyle devam edilerek genelleştirme yapılırsa (4.10) eşitsizliği gösterilmiş olur.

Şimdi aşağıdaki ana sonuçlarda kullanacağımız bir yardımcı operatör tanımlayalım.

Lemma 4.3. $n,r\in\mathbb{N}$, $n>m$ ve $s\in\mathbb{R}^+$ için

$$
\begin{aligned}
& H_{n,r}(s) \\
=\ & r(n-m)u_1\left\{\int_s^\infty\int_0^s-\int_0^s\int_s^\infty\right\}(s-y)^{r-1} \\
& \times\sum_{\upsilon=0}^\infty K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}dydx \quad (4.12)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 4.4. $n,r\in\mathbb{N}$, $n>2rm$ için

$$
\begin{aligned}
H_{n,r}(s) &= s^rK_{n-m}(s,0,u_1)-n\frac{u_1^2}{\upsilon+1}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
&\quad\times\sum_{k=0}^\infty K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1)\int_0^\infty K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^rdy, \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

$$H_{n,0}(s)=1, \quad H_{n,1}(s)=0\ , \quad H_{n,2}(s)=\frac{2\varphi^2(s)}{u_1(n-2m)}, \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} & [u_1 n - u_1 m(r+1)]H_{n,r+1}(s) \\ = \;& \varphi^2(s)[-H'_{n,r}(s)+2rH_{n,r-1}(s)] - r(1+2su_1m)H_{n,r}(s), \ r\geq 2, \end{aligned} \tag{4.15}$$

ve

$$H_{n,2r}(s)=\sum_{i=0}^{r-1} q_{i,2r}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^{r-i}\frac{1}{(n-2m)...(n-2rm)}u_1^{-2i}, \ r>0, \tag{4.16}$$

dir. Burada $q_{i,2r}$, n' e göre düzgün sınırlıdır.

İspat. İlk olarak (4.13) eşitliğini gösterelim. (1) ve Lemma 3.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & H_{n,r}(s) \\ = \;& u_1 r(n-m)\left\{\int_0^\infty\int_0^s - \int_0^s\int_0^s - \int_0^s\int_0^\infty + \int_0^s\int_0^s\right\}(s-y)^{r-1} \\ & \times\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^v}{(v)!}K_n^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^v}{(v)!}dydx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_{n,r}(s) \\ = \;& u_1 r(n-m)\int_0^s (s-y)^{r-1}\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^v}{(v)!} \\ & \times\int_0^\infty K_n^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^v}{(v)!}dxdy \\ & -u_1 r(n-m)\int_0^s\int_0^\infty (s-y)^{r-1}\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^v}{(v)!} \\ & \times K_n^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^v}{(v)!}dydx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_{n,r}(s) \\ = \;& s^r - u_1 r(n-m)\sum_{v=0}^{\infty}\int_0^s K_n^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^v}{(v)!} \\ & \times\int_0^\infty (s-y)^{r-1}K_n^{(v)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^v}{(v)!}dydx \end{aligned} \tag{4.17}$$

bulunur. $n > 2mr$ olmak üzere (4.17)'de kısmi integrasyon uygulanırsa

$$r\int_0^{\infty}(s-y)^{r-1}K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)dy = \int_0^{\infty}(s-y)^r\frac{d}{dy}(K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1))dy + \begin{cases} s^r & \upsilon=0,t=0 \\ 0 & \upsilon\neq 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

elde edilir. Burada (3) şartı ve Lemma 3.1 gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) &= \frac{\nu}{x}(-nx)\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}\right] - nu_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \\
&= \nu(-n)\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}}K_{n+m}(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}\right] - nu_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \\
&= (-n)\left[\nu K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}\right] + u_1K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olduğu görülür. (4.19) ve $K_{n-m}(0,0,u)=1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$-(n-m)u_1\int_0^s K_n^{(0)}(x,0,u_1)s^r dx = s^r\int_0^s \frac{d}{dx}K_{n-m}^{(0)}(x,0,u_1)dx \tag{4.20}$$

bulunur. Yukarıda elde edilen (4.18) ve (4.20), (4.17)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&H_{n,r}(s) \\
= \;& s^rK_{n-m}(s,0,u_1) + u_1(n-m)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^s K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!} \\
&\times\int_0^{\infty}(s-y)^r n[\upsilon K_{n+m}^{(\upsilon-1)}(y,0,u_1) + u_1K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)]\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dydx \\
= \;& s^rK_{n-m}(s,0,u_1) + u_1n(n-m) \\
&\times\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}(\upsilon+1)K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^r\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon+1}}{(\upsilon+1)!} \\
&\times\int_0^s K_n^{(\upsilon+1)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon+1}}{(\upsilon+1)!}dxdy \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}u_1K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^r\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}\int_0^s K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}dxdy\Bigg\} \\
= \;& s^rK_{n-m}(s,0,u_1) + u_1n\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^r\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{(\upsilon)!} \\
&\times\frac{u_1}{\upsilon+1}\int_0^s(n-m)\left[u_1K_n^{(\upsilon+1)}(x,0,u_1) + (\upsilon+1)K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\right]dxdy
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.19) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
H_{n,r}(s) &= s^r K_{n-m}(s,0,u_1) - u_1 n \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^r \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
&\quad \times \frac{u_1}{\upsilon+1} \int_0^s \frac{d}{dx} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(x,0,u_1) dx dy \\
&= s^r K_{n-m}(s,0,u_1) - n \frac{u_1^2}{\upsilon+1} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1) \int_0^{\infty} K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^r dy
\end{aligned}$$

(4.13) elde edilmiş olur. Şimdi (4.15)'yı elde edelim. $H_{n,1}(s)$ ve $H_{n,2}(s)$, (4.13)'den kolayca elde edilir. (4.13)'de operatörün türevi alırsa

$$\begin{aligned}
H_{n,r}^{'}(s) &= r s^{r-1} K_{n-m}(s,0,u_1) + s^r K_{n-m}^{'}(s,0,u_1) - n \frac{u_1^2}{\upsilon+1} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{ds} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1) \int_0^{\infty} K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^r dy \\
&\quad - n \frac{u_1^2}{\upsilon+1} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \sum_{k=0}^{\infty} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1) \\
&\quad \times \int_0^{\infty} K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1) r (s-y)^{r-1} dy
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
H_{n,r}^{'}(s) &= s^r K_{n-m}^{'}(s,0,u_1) + r H_{n,r-1}(s) - n \frac{u_1^2}{\upsilon+1} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{ds} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1) \int_0^{\infty} K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^r dy
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç 3.1 gözönüne alınırsa

$$\varphi^2(s) \frac{d}{ds} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(y,t,u) = (\upsilon + 1 - s u_1 (n-m)) K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(y,t,u) \tag{4.21}$$

olduğu görülür. (4.21) eşitliği kullanılıp ifadeler düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\varphi^2(s)[H_{n,r}^{'}(s) - r H_{n,r-1}(s)] \\
&= \varphi^2(s) s^r K_{n-m}^{'}(s,0,u_1) - n \frac{u_1^2}{\upsilon+1} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \frac{[-\alpha_n \psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1) \int_0^{\infty} (\upsilon + 1 - s u_1 (n-m)) K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^r dy
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$(\upsilon+1-(n-m)su_1)=(\upsilon-(n+m)yu_1)-(n+m)u_1(s-y)+(1+2msu_1)$$

eşitliği kullanılarak eşitliğin her iki tarafına $(n{+}m)u_1H_{n,r+1}(s){-}(1{+}2msu_1)H_{n,r}(s)$ eklenirse

$$\begin{aligned}
&\varphi^2(s)[H_{n,r}^{'}(s)-rH_{n,r-1}(s)]+(n+m)u_1H_{n,r+1}(s)-(1+2msu_1)H_{n,r}(s)\\
=\;&\varphi^2(s)s^rK_{n-m}^{'}(s,0,u_1)-n\frac{u_1^2}{\upsilon+1}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\sum_{k=0}^{\infty}K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1)\\
&\times\int_0^\infty(\upsilon+1-su_1(n-m))K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^rdy\\
&+(n+m)u_1H_{n,r+1}(s)-(1+2msu_1)H_{n,r}(s)\\
=\;&\varphi^2(s)s^rK_{n-m}^{'}(s,0,u_1)-n\frac{u_1^2}{\upsilon+1}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\sum_{k=0}^{\infty}K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1)\\
&\times\int_0^\infty[(\upsilon-(n+m)yu_1)-(n+m)u_1(s-y)+(1+2msu_1)]K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^rdy\\
&+(n+m)u_1H_{n,r+1}(s)-(1+2msu_1)H_{n,r}(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\varphi^2(s)[H_{n,r}^{'}(s)-rH_{n,r-1}(s)]+(n+m)u_1H_{n,r+1}(s)-(1+2msu_1)H_{n,r}(s)\\
=\;&\varphi^2(s)s^rK_{n-m}^{'}(s,0,u_1)-n\frac{u_1^2}{\upsilon+1}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1)\int_0^\infty[(\upsilon-(n+m)yu_1)]K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^rdy\\
&+[u_1(n+m)s^{r+1}-(1+2msu_1)s^r]K_{n-m}(s,0,u_1)
\end{aligned}$$

olur. Sonuç 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\varphi^2(s)[H_{n,r}^{'}(s)-rH_{n,r-1}(s)]+(n+m)u_1H_{n,r+1}(s)-(1+2msu_1)H_{n,r}(s)\\
=\;&\varphi^2(s)s^rK_{n-m}^{'}(s,0,u_1)-n\frac{u_1^2}{\upsilon+1}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1)\int_0^\infty\varphi^2(y)\frac{d}{dy}K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^rdy\\
&+[u_1(n+m)s^{r+1}-(1+2msu_1)s^r]K_{n-m}(s,0,u_1)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
& \varphi^2(s)[H'_{n,r}(s) - rH_{n,r-1}(s)] + (n+m)u_1 H_{n,r+1}(s) - (1+2msu_1)H_{n,r}(s) \\
= \; & \varphi^2(s)s^r K'_{n-m}(s,0,u_1) - n\frac{u_1^2}{\upsilon+1}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1)[\varphi^2(y)(s-y)^r K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\,|_0^\infty \\
& - \int_0^\infty K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)[-r(s-y)^{r-1}\varphi^2(y) + (1+2u_1my)(s-y)^r] \\
& + [u_1(n+m)s^{r+1} - (1+2msu_1)s^r]K_{n-m}(s,0,u_1) \\
= \; & \varphi^2(s)s^r K'_{n-m}(s,0,u_1) - n\frac{u_1^2}{\upsilon+1}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,t,u)\int_0^\infty [r\varphi^2(y) - (1+2msu_1)(s-y)]K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^{r-1}dy \\
& + [u_1(n+m)s^{r+1} - (1+2msu_1)s^r]K_{n-m}(s,0,u_1)
\end{aligned}
$$

olur.

$$
r\varphi^2(y) - (1+2u_1my)(s-y) = r\varphi^2(s) - (r+1)(1+2u_1ms)(s-y) + u_1m(r+2)(s-y)^2
$$

eşitliği yardımıyla

$$
\begin{aligned}
& \varphi^2(s)[H'_{n,r}(s) - rH_{n,r-1}(s)] + (n+m)u_1 H_{n,r+1}(s) - (1+2msu_1)H_{n,r}(s) \\
= \; & \varphi^2(s)s^r K'_{n-m}(s,0,u_1) - n\frac{u_1^2}{\upsilon+1}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!}\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{(\upsilon)!} \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} K_{n-m}^{(\upsilon+1)}(s,0,u_1)\int_0^\infty [r\varphi^2(s) - (r+1)(1+2u_1ms)(s-y) + u_1m(r+2)(s-y)^2] \\
& \times K_{n+m}^{(\upsilon)}(y,0,u_1)(s-y)^{r-1}dy \\
& + [u_1(n+m)s^{r+1} - (1+2msu_1)s^r]K_{n-m}(s,0,u_1)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan ifadeler düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
& \varphi^2(s)[H'_{n,r}(s) - rH_{n,r-1}(s)] + (n+m)u_1H_{n,r+1}(s) - (1+2msu_1)H_{n,r}(s) \\
= \; & u_1m(r+2)H_{n,r+1}(s) - u_1m(r+2)s^{r+1}K_{n-m}(s,0,u_1) \\
& -(r+1)(1+2u_1ms)H_{n,r}(s) + (r+1)(1+2u_1ms)s^rK_{n-m}(s,0,u_1) \\
& +r\varphi^2(s)H_{n,r-1}(s) - r\varphi^2(s)s^{r-1}K_{n-m}(s,0,u_1) + \varphi^2(s)s^rK'_{n-m}(s,0,u_1) \\
& +[u_1(n+m)s^{r+1} - (1+2msu_1)s^r]K_{n-m}(s,0,u_1) \\
= \; & u_1m(r+2)H_{n,r+1}(s) - (r+1)(1+2u_1ms)H_{n,r}(s) + r\varphi^2(s)H_{n,r-1}(s) \\
& +\varphi^2(s)s^rK'_{n-m}(s,0,u_1) + u_1(n-m)s^{r+1}K_{n-m}(s,0,u_1) \\
= \; & u_1m(r+2)H_{n,r+1}(s) - (r+1)(1+2u_1ms)H_{n,r}(s) + r\varphi^2(s)H_{n,r-1}(s) \\
& +s^r(0-u_1(n-m)s)K_{n-m}(s,0,u_1) + u_1(n-m)s^{r+1}K_{n-m}(s,0,u_1) \\
= \; & u_1m(r+2)H_{n,r+1}(s) - (r+1)(1+2u_1ms)H_{n,r}(s) + r\varphi^2(s)H_{n,r-1}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& [u_1n - u_1m(r+1)]H_{n,r+1}(s) \\
= \; & \varphi^2(s)[-H'_{n,r}(s) + 2rH_{n,r-1}(s)] - (1+2u_1ms)rH_{n,r}(s)
\end{aligned}$$

olup (4.15) gösterilmiş olur. Şimdi (4.16)'yi gösterelim. İspatı öncelikle $H_{n,2}(s)$ ve $H_{n,4}(s)$ için gösterelim. $H_{n,2}(s)$ (4.14) ve (4.15)'dan

$$\begin{aligned}
& H_{n,2}(s)[u_1n - 2u_1m] \\
= \; & s(1+u_1ms)[-H'_{n,1}(s) + 2H_{n,0}(s)] - (1+2su_1m)H_{n,1}(s) \\
= \; & 2\varphi^2(s)
\end{aligned}$$

olup

$$H_{n,2}(s) = \frac{2\varphi^2(s)}{u_1(n-2m)} \tag{4.22}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
H_{n,2}(s) &= 2\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)} \\
&= \sum_{i=0}^{0} q_{i,2}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^{1-i}\frac{1}{(n-2m)}u_1^{-2i}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $H_{n,3}(s)$'i hesaplayalım. (4.14) ve (4.15)'den

$$\begin{aligned}
& H_{n,3}(s)[u_1 n - 2u_1 m] \\
= \;& s(1+u_1 ms)[-H_{n,2}^{'}(s) + 4H_{n,1}(s)] - 2(1+2su_1 m)H_{n,2}(s) \\
= \;& 2\varphi^2(s)\left[-\frac{(1+2u_1 ms)}{u_1(n-2m)}\right] - 4\frac{\varphi^2(s)(1+2u_1 ms)}{u_1(n-2m)} \\
= \;& -6\frac{\varphi^2(s)(1+2u_1 ms)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bnezer şekilde $H_{n,4}(s)$

$$\begin{aligned}
& H_{n,4}(s)[u_1 n - 4u_1 m] \\
= \;& s(1+u_1 ms)[-H_{n,3}^{'}(s) + 6H_{n,2}(s)] - (1+2su_1 m)3H_{n,3}(s) \\
= \;& \varphi^2(s)\left[\frac{12\varphi^2(s)}{u_1(n-2m)} + 6\left[\frac{(1+2u_1 ms)^2 + \varphi^2(s)2u_1 m}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\right]\right] \\
& +18\frac{\varphi^2(s)((\varphi^2(s))')^2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \\
= \;& \frac{12(\varphi^2(s))^2}{u_1(n-2m)} + 6\frac{\varphi^2(s)((\varphi^2(s))')^2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} + \frac{12u_1 m(\varphi^2(s))^2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \\
& +18\frac{\varphi^2(s)((\varphi^2(s))')^2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H_{n,4}(s)[u_1 n - 4u_1 m] \\
= \;& \frac{12(\varphi^2(s))^2}{u_1(n-2m)} + 6\frac{\varphi^2(s)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} + 24\frac{u_1 m(\varphi^2(s))^2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \\
& + \frac{12u_1 m(\varphi^2(s))^2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} + 18\frac{\varphi^2(s)}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \\
& +72\frac{u_1 m(\varphi^2(s))^2}{u_1^2(n-2m)(n-3m)} \\
= \;& \frac{12u_1 n + 72u_1 m}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}(\varphi^2(s))^2 + \frac{24}{u_1^2(n-2m)(n-3m)}\varphi^2(s)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
& H_{n,4}(s) \\
= \;& \frac{12n + 72m}{u_1^2(n-2m)(n-3m)(n-4m)}(\varphi^2(s))^2 + \frac{24}{u_1^3(n-2m)(n-3m)(n-4m)}\varphi^2(s)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada ifadeler düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
& H_{n,4}(s) \\
= \; & \frac{12n+72m}{n-4m}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^2 \frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
& +24\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)}u_1^{-2}\frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
= \; & q_{0,4}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^2 \frac{1}{(n-2m)(n-3m)(n-4m)} \\
& +q_{1,4}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)}u_1^{-2}\frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
= \; & \sum_{i=0}^{1} q_{i,4}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^{2-i}\frac{1}{(n-2m)...(n-4m)}u_1^{-2i} \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu şekilde devam edilerek genelleştirme yapılırsa (4.16) elde edilmiş olur.

Lemma 4.5. $n, r \in \mathbb{N}, n > 2(r+1)m$ ve $s \in \mathbb{R}^+$ için

$$
|H_{n,2r}(s)| \leq C\left[(n-(2r+1)m)u_1\right]^{-r}\left(\varphi^2(s) + ((n-(2r+1)m)u_1)^{-1}\right)^r, \qquad (4.24)
$$

dir. Burada C, n ve s'den bağımsız sabittir.

İspat.

$$
H_{n,2}(s) = \frac{2\varphi^2(s)}{u_1(n-2m)} \qquad (4.25)
$$

şeklinde olduğu (4.22)'de gösterilmişti. Burada

$s \in \left[0, \dfrac{1}{u_1(n-rm)}\right]$ için $\quad \varphi^2(s) \leq \dfrac{m-rm+n}{(n-rm)^2u_1}$ olup (4.25)'de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
|H_{n,2}(s)| & \leq 2\left[\frac{m-rm+n}{(n-rm)^2u_1^2}\right]\frac{1}{(n-2m)} \\
& \leq C(u_1(n-rm))^{-2}
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer taraftan

$s \in \left[\dfrac{1}{u_1(n-rm)}, \infty\right)$ için

$$\begin{aligned}
\left[(n-rm)u_1\varphi(s)^2\right]^{-1} &= [(n-rm)u_1(s+u_1ms^2)]^{-1} \\
&= \left[(n-rm)u_1\left(\frac{1}{(n-rm)u_1}+\frac{u_1m}{(n-rm)^2u_1^2}\right)\right]^{-1} \\
&= \left(\frac{n-rm+m}{n-rm}\right)^{-1} = \frac{n-rm}{n-rm+m} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu ifadeyi (4.25)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
|H_{n,2}(s)| &= 2\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)} \\
&= 2\frac{u_1^{-1}\varphi^2(s)}{(n-2m)} \\
&\leq C\frac{u_1^{-1}\varphi^2(s)}{(n-2m)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.24) eşitsizliği $r=1$ için sağlanmış olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
H_{n,4}(s) &= \frac{12n^2+152mn+120m^2}{(n-4m)(n-5m)}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
&+\frac{72n+120m}{(n-5m)}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]\frac{1}{(n-2m)}u_1^{-2}\frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
&+24\frac{u_1^{-4}}{(n-2m)(n-3m)(n-4m)(n-5m)}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olduğu (4.23) eşitliğinde görülmüştü.

$s \in \left[0, \dfrac{1}{u_1(n-rm)}\right]$ için $\varphi^2(s) \leq \dfrac{m-rm+n}{(n-rm)^2u_1}$ olup (4.26)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|H_{n,4}(s)| &\leq q_{0,4}\left[\frac{m-rm+n}{(n-rm)^2u_1^2}\right]^2\frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
&+q_{1,4}\left[\frac{m-rm+n}{(n-rm)^2u_1^2}\right]\frac{1}{(n-2m)}u_1^{-2}\frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
&\leq C(u_1(n-rm))^{-4}
\end{aligned}$$

olur.

$s \in \left[\dfrac{1}{u_1(n-rm)}, \infty\right)$ için $\left[(n-rm)u_1\varphi(s)^2\right]^{-1} \leq 1$ olup (4.26)'de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&|H_{n,4}(s)| \\
\leq\ & q_{0,4}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^2 \frac{1}{(n-2m)(n-3m)} + q_{1,4}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right] \frac{1}{(n-2m)} u_1^{-2} \frac{1}{(n-3m)(n-4m)} \\
\leq\ & q_{0,4}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^2 \frac{1}{(n-2m)(n-3m)} \\
& + q_{1,4}\left[\frac{\varphi^2(s)}{u_1}\right]^2 \frac{1}{(n-2m)(n-3m)}((n-rm)u_1^2\varphi(s))^{-1} \\
=\ & \frac{(\varphi^2(s))^2 u_1^{-2}}{(n-2m)(n-3m)}\left[q_{0,4} + q_{1,4}((n-rm)u_1^2\varphi(s))^{-1}\right] \\
\leq\ & C\frac{(\varphi^2(s))^2 u_1^{-2}}{(n-2m)(n-3m)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (4.24) eşitsizliği $r = 2$ için sağlanmış olur. Böyle devam edilerek genelleştirme yapılırsa (4.24) elde edilir.

Yukarıda $K_n(x,t,u)$ dizisinin sağlamış olduğu $(1)-(6)$ şartlarına aşağıdaki koşulu ekleyelim.

(7) $n \in \mathbb{N}$ ve $(\alpha_{n,r})$, n'e göre yakınsak diziler olsun. Bu durumda

$$(1+u_1mx)^{-r} K_n^{(v)}(x,0,u_1) = K_{n+rm}^{(v)}(x,0,u_1)\alpha_{n,r} \tag{4.27}$$

dir.

Lemma 4.6. $n, r \in \mathbb{N}$, $n > m(r+1)$, $t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $f(t) = (1+u_1mt)^{-r}$ için $K_n(x,t,u)$ fonksiyon dizisinin $(1)-(7)$ şartlarını sağlasın. Bu durumda

$$M_n\left((1+u_1mt)^{-r};x\right) \leq C(1+u_1mx)^{-r}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

yazılabilir. Burada C, n'den bağımsız sabittir.

İspat. $m = 0$ için ispat açıktır. $m > 0$ için operatörün tanımı ve (4.27) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
M_n(f;x) &= (n-m)u_1 \sum_{v=0}^{\infty} K_n^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^v}{v!} \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(v)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^v}{v!} dy \\
&= (n-m)u_1 \sum_{v=0}^{\infty} K_n^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^v}{v!} \alpha_{n,r} \int_0^{\infty} K_{n+rm}^{(v)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^v}{v!} dy
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada Lemma 3.3 kullanılırsa

$$M_n(f;x) = (n-m)u_1 \sum_{v=0}^{\infty} K_n^{(v)}(x,0,u_1)\alpha_{n,r}\frac{[-u_1]^v}{v!}(-1)^v \frac{v!}{(n-m+rm)u_1^{v+1}}$$

elde edilir. (4.27)'de n yerine $n-rm$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & M_n(f;x) \\ = \;& (n-m)u_1 \sum_{v=0}^{\infty}(1+u_1mx)^{-r}K_{n-rm}^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^v}{v!} \\ & \times \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n-rm,r}}\frac{[-u_1]^v}{v!}(-1)^v\frac{v!}{(n-m+rm)u_1^{v+1}} \\ = \;& \frac{(n-m)}{(n-m+rm)}\sum_{v=0}^{\infty}(1+u_1mx)^{-r}K_{n-rm}^{(v)}(x,0,u_1)\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n-rm,r}}\frac{[-u_1]^v}{v!} \\ \leq \;& C(1+u_1mx)^{-r}\sum_{v=0}^{\infty}K_{n-rm}^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^v}{v!} \end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.2) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} M_n(f;x) \;&\leq\; (1+u_1mx)^{-r}\sum_{v=0}^{\infty}K_{n-rm}^{(v)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^v}{v!} \\ &=\; (1+u_1mx)^{-r} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yaklaşım hızı verilirken $L_p[0,\infty)$ uzayında tanımlı süreklilik modülü,

$$w_\varphi^r(f,t)_p = \sup_{0<h\leq r}\left\|\Delta_h^r\varphi f\right\|_p, \quad f\in L_p[0,\infty), \quad 1\leq p\leq\infty, \quad \varphi(x) = x\sqrt{1+u_1mx}$$

olup $\left[x-\frac{r}{2}H, x+\frac{r}{2}H\right]\subset[0,\infty)$ için

$$\Delta_H^r f(x) = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k f\left(x+\left(\frac{r}{2}-k\right)H\right)$$

tanımlanır. Diğer durumlarda ise $\Delta_H^r f(x) = 0$ dır. Ayrıca $W_p^r(\varphi,[0,\infty))$ ve $\overline{W}_p^r(\varphi,[0,\infty))$ uzayları

$$W_p^r(\varphi,[0,\infty)) = \left\{g\in L_p[0,\infty) : g^{(r-1)}\in AC_{loc}(0,\infty); \varphi^r g^{(r)}\in L_p[0,\infty)\right\},$$

$$\overline{W}_p^r(\varphi,[0,\infty))=\left\{g\in L_p[0,\infty):g^{(r-1)}\in AC_{loc}(0,\infty);g^{(r)},\varphi^r g^{(r)}\in L_p[0,\infty)\right\}$$

olmak üzere $w_\varphi^r(f,t)_p$ süreklilik modülü

$$K_\varphi^r(f,t^r)_p=\inf_{g\in w_P^r(\psi,[0,\infty))}\left\{\|f-g\|_p+t^r\left\|\varphi^r g^{(r)}\right\|_p\right\},$$

$$\overline{K}_\varphi^r(f,t^r)_p=\inf_{g\in \overline{w}_P^r(\psi,[0,\infty))}\left\{\|f-g\|_p+t^r\left\|\varphi^r g^{(r)}\right\|_p+t^{2r}\left\|g^{(r)}\right\|_p\right\},$$

şeklinde tanımlı K fonksiyoneline denktir.

Teorem 4.2. $n\in\mathbb{N}$, $n>3m$ olmak üzere $f\in L_p(\mathbb{R}^+)$, $1\le p\le\infty$ için

$$\|M_nf-f\|_p\le C\left\{w_\varphi^2(f,((n-3m)u_1)^{-1/2})_p+((n-3m)u_1))^{-1}\|f\|_p\right\}$$

dir.

İspat. Burada $w_\varphi^2(f,((n{-}3m)u_1)^{-1/2})$ süreklilik modülü ve $\overline{K}_\varphi^2(f,((n{-}3m)u_1)^{-1})_p$ fonksiyonelinin denkliğini kullanacağız. Bunun için aşağıdaki eşitliği göstermemiz yeterlidir.

$$\|M_nf-f\|_p\le C\overline{K}_\varphi^2(f,((n-3m)u_1)^{-1})_p+((n-3m)u_1))^{-1}\|f\|_p.$$

$g\in\overline{W}_p^2(\varphi,\mathbb{R}^+)$ için Teorem 4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|M_n(f-g+g)-(f-g+g)\|_p &\le \|M_n(f-g)+(f-g)+M_ng-g\|_p\\ &\le \|M_n(f-g)\|_p+\|(f-g)\|_p+\|M_ng-g\|_p\\ &\le \|f-g\|_p+\|f-g\|_p+\|M_ng-g\|_p\\ &\le 2\|f-g\|_p+\|M_ng-g\|_p \end{aligned}\tag{4.28}$$

bulunur. Şimdi yukarıdaki son eşitsizlikteki ikinci terimi hesaplayalım. g fonksiyonunun Taylor açılımı

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+R_2(g,t,x),$$

şeklinde olup kalan terim

$$R_2(g,t,x)=\int_x^t(t-u)g''(u)du$$

dir. Yukarıdaki eşitliğin operatör altındaki görüntüsü

$$M_n\left(g;x\right)-g(x)=M_n\left[(t-x)g'(x)\right]+\left[M_n(R_2(g,t,x))\right](x) \tag{4.29}$$

dir. Şimdi aşağıdaki eşitsizliği gösterelim.

$$\left\|M_n(R_2(g,.,x))\right\|_p\leq C((n-3m)(u_1))^{-1}\left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_p. \tag{4.30}$$

Bunun için Riesz Thorin Teoremini kullanacağız. İspat için $p=1$ ve $p=\infty$ durumlarını göstermek yeterlidir. $p=\infty$ için

$$\begin{aligned}|R_2(g,t,x)| &\leq \left\|(\varphi^2+((n-3m)(u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \\ &\quad\times\left|\int_x^t |t-u|\left[\varphi^2+((n-3m)(u_1))^{-1}\right]^{-1}du\right|\end{aligned} \tag{4.31}$$

olur. $x<t$ için

$$\frac{|t-u|}{[\varphi(u)^2+((n-3m)(u_1))^{-1}]}\leq\frac{|t-x|}{[\varphi(x)^2+((n-3m)u_1))^{-1}]} \tag{4.32}$$

dir. (4.32) eşitsizliği (4.31)'da yerine yazılırsa

$$|R_2(g,t,x)|\leq\left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_\infty(t-x)^2((n-3m)u_1) \tag{4.33}$$

bulunur. $x>t$ için

$$|t-u|\,x\leq|t-x|\,u$$

ve

$$\frac{u\,|t-u|}{\varphi(u)^2+((n-3m)u_1))^{-1}}\leq\frac{x\,|t-x|}{\varphi(x)^2+((n-3m)u_1))^{-1}}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}&\frac{|t-u|}{[\varphi(u)^2+((n-3m)u_1))^{-1}]}\\ \leq\ &\frac{|t-x|}{x}\left\{\frac{x}{\varphi(x)^2+((n-3m)u_1))^{-1}}+\frac{t}{\varphi(t)^2+((n-3m)u_1))^{-1}}\right\}\end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.34) eşitsizliği (4.31)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&|R_2(g,t,x)|\\ \leq\ &\left\|(\varphi^2+((n-3m)(u_1))^{-1})g''\right\|_\infty\\ &\times\frac{(t-x)^2}{x}\left\{\frac{x}{\varphi(x)^2+((n-3m)u_1))^{-1}}\right.\\ &\left.+\frac{t}{\varphi(t)^2+((n-3m)u_1))^{-1}}\right\}\end{aligned} \tag{4.35}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{|t-u|}{[\varphi(u)^2+((n-3m)u_1))^{-1}]} \leq \frac{|t-u|}{((n-3m)u_1)^{-1}}$$

dir. $x \in [0, \dfrac{1}{u_1(n-3m)}]$ için

$$((n-3m)u_1)[\varphi(x)^2+((n-3m)u_1))^{-1}] \leq C_1$$

dir. Burada C_1, n'den bağımsız sabittir. (4.33) eşitsizliği ve Lemma 4.2 gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
& |M_n(R_2(g,t,x);x)| \\
\leq\ & \left\|(\varphi^2+((n-3m)(u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \\
& \times(M_n(t-x)^2)(x)((n-3m)u_1) \\
\leq\ & \left\|(\varphi^2+((n-3m)(u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \\
& \times C_1[\varphi(x)^2+((n-3m)(u_1))^{-1}]^{-1}T_{n,2}(x) \\
\leq\ & C((n-3m)u_1)^{-1}\left\|(\varphi^2+((n-3m)(u_1))^{-1})g''\right\|_\infty
\end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. $x \in \left[\dfrac{1}{u_1(n-3m)}, \infty\right)$ için (4.35), Lemma 4.2 ve

$$\frac{t}{\varphi(t)^2+((n-3m)u_1))^{-1}} \leq \frac{1}{1+u_1mt}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|M_n(R_2(g,t,x);x)| \leq\ & \left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \\
& \times\left\{\frac{1}{[\varphi(x)^2+((n-3m)u_1))^{-1}]}T_{n,2}(x)\right. \\
& \left.+\frac{1}{x}\left[M_n\left[(t-x)^2\frac{t}{\varphi(t)^2+((n-3m)u_1))^{-1}}\right]\right](x)\right\} \\
\leq\ & \left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \left\{C_1((n-3m)u_1)^{-1}\right. \\
& \left.+\frac{1}{x}\left[M_n\left[(t-x)^2\frac{1}{1+u_1mt}\right]\right](x)\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada Cauchy Schwarz eşitsizliği ve Lemma 4.6 'dan

$$
\begin{aligned}
& |M_n(R_2(g,t,x);x)| \\
\leq\ & \left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \left\{C_1((n-3m)u_1)^{-1}\right. \qquad (4.37)\\
& +\frac{1}{x}\left[\left[M_n(t-x)^4\right](x)\right]^{1/2}\left[\left[M_n(1+u_1mt)^{-2}\right](x)\right]^{1/2}\Big\} \\
\leq\ & \left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \left\{C_1((n-3m)u_1)^{-1}\right. \\
& \left.+\frac{1}{x}\left[T_{n,4}(x)\right]^{1/2}C_2(1+u_1mx)^{-1}\right\} \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $x\in\left[\dfrac{1}{u_1(n-3m)},\infty\right)$ için $(1+u_1mx)^{-1}\leq 2\dfrac{x}{\varphi(x)^2+((n-3m)(u_1))^{-1}}$ olup (4.38) eşitsizliği ve Lemma 4.2'den

$$
\begin{aligned}
& |M_n(R_2(g,t,x));x| \\
\leq\ & \left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \left\{C_1((n-3m)u_1)^{-1}\right. \\
& \left.+\frac{2C_2}{[\varphi(x)^2+((n-3m)u_1))^{-1}]}\left[T_{n,4}(x)\right]^{1/2}\right\} \\
\leq\ & C((n-3m)u_1)^{-1}\left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_\infty \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece (4.36) ve (4.39)'den (4.30) ifadesi $p=\infty$ için ispatlanmış olur. $p=1$ için (4.30) eşitsizliği, Fubini teoremi ve Lemma 4.5 gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \|M_n(R_2(g,t,x);x)\|_1 \\
\leq\ & (n-m)\,\alpha_n\psi_n(0)\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} \\
& \times\int_0^\infty K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}\left|\int_x^t (t-u)g''(u)du\right| dydx \\
\leq\ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} \\
& \times\int_0^x K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}\int_t^x (u-t)\left|g''(u)\right| dudydx \\
& +(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} \\
& \times\int_x^\infty K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}\left|\int_x^t (t-u)g''(u)\right| dudydx
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
& \|M_n(R_2(g,t,x);x)\|_1 \\
\leq\ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\int_0^{\infty}\left|g''(u)\right|\left\{\int_u^{\infty}\int_0^{u}-\int_0^{u}\int_u^{\infty}\right\}(u-t) \\
& \times\sum_{k=0}^{\infty}K_n^{(\upsilon)}(x,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{\upsilon!}K_n^{(\upsilon)}(y,0,u_1)\frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^{\upsilon}}{\upsilon!}dydxdu \\
=\ & \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left|g''(u)\right|\left|H_{n,2}(s)\right|du \\
\leq\ & C\int_0^{\infty}|g''(u)|\,((n-3m)u_1)^{-1}[\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1}]du \\
=\ & C((n-3m)u_1)^{-1}\left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1))^{-1})g''\right\|_1 .
\end{aligned}
$$

elde edilir. $1<p<\infty$ için (4.30) ifadesi Riesz Thorin teoreminden açıktır. Böylece (4.28) ifadesi gösterilmiş olur.

$g\in\overline{W}_p^2(\varphi,\mathbb{R}^+)$ olmak üzere [16]'da verilen Teorem 9.5.3'in (a) ve (c) koşullarından

$$
\begin{aligned}
\|M_ng-g\|_p \leq\ & C((n-3m)u_1)^{-1} \\
& \times\left\{\|g'\|_p^{[0,1]}+\|(1+2u_1m\cdot)g'\|_p^{[1,\infty)}\right. \\
& \left.+\left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1})g''\right\|_p\right\} \\
\leq\ & C((n-3m)u_1)^{-1} \\
& \times\left\{\|g\|_p+\left\|(\varphi^2g''\right\|_p+\left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1})g''\right\|_p\right\}
\end{aligned}
$$

dir. Bu ifade (4.28) ile birleştirilirse

$$
\begin{aligned}
\|M_nf-f\|_p \leq\ & 2\|f-g\|_p+C((n-3m)u_1)^{-1} \\
& \times\left\{\|f-g\|_p+\|f\|_p+\left\|\varphi^2g''\right\|_p+\left\|(\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}g''\right\|_p\right\} \\
\leq\ & C\left\{\|f-g\|_p+((n-3m)u_1)^{-1}\|f\|_p\right. \\
& \left.+((n-3m)u_1)^{-1}\left\|\varphi^2g''\right\|_p+((n-3m)u_1)^{-2}\|g''\|_p\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $g\in\overline{W}_p^2(\varphi,\mathbb{R}^+)$ için infimum alınırsa

$$
\|M_nf-f\|_p\leq C\left\{\overline{K}_{\varphi}^2(f,((n-3m)u_1)_p^{-1}+((n-3m)u_1)^{-1}\|f\|_p\right\}
$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3. $n \in \mathbb{N}$, $n > 5m$ olmak üzere $f \in L_p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|M_n f - f\|_p = 0$$

dir.

İspat. İspat için Teorem 4.2'deki

$$\|M_n f - f\|_p \leq C[K_\varphi^2(f, ((n-rm)u_1)^{-1})_p + ((n-rm)u_1)^{-1} \|f\|_p]$$

eşitsizliğini göz önüne alınırsa her $f \in W_p^2(\varphi, [0,\infty))$ için K fonksiyonelinin tanımdan

$$\left\| \|M_n f - f\|_p \right\| \leq C[((n-rm)u_1)^{-1} \left\|\varphi^2 f''\right\|_p + ((n-rm)u_1)^{-1} \|f\|_p]$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \|M_n f - f\|_p = 0$$

olduğu görülebilir.

5. IBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLERİ İÇİN AĞIRLIKLI YAKLAŞIM

Bu bölümde Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri için $L_{p,2r}(\mathbb{R}^+)$ ağırlıklı uzayında yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

$$L_{p,2r}(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}; \|f\|_{p,2r} := \left(\int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{1+t^{2r}} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, (1 \le p < \infty)$$

ağırlıklı uzay olmak üzere öncelikle aşağıda $M_n(f;x)$ operatörlerinin $L_{p,2r}(\mathbb{R}^+)$'den $L_{p,2r}(\mathbb{R}^+)$'ye dönüşüm yapan sınırlı operatörler olduğunu gösterelim.

Lemma 5.1. $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f \in L_{p,2r}(\mathbb{R}^+)$, $1 \le p \le \infty$ için

$$\|M_n f\|_{p,2r} \le \|f\|_{p,2r} \tag{5.1}$$

dir.

İspat. Öncelikle ispatı $p = 1$ yapalım. (3.1) ve (2) özelliğinden

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{|M_n(f;x)|}{1+x^{2r}} dx \\
\le\ & (n-m)\alpha_n\psi_n(0) \sum_{\upsilon=0}^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon} K_n(x,0,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} dx \\
& \times \int_0^\infty \frac{|f(y)|}{1+y^{2r}} \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon} K_n(y,0,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} dy \\
& + (n-m)\alpha_n\psi_n(0) \sum_{\upsilon=0}^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon} K_n(x,0,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} dx \\
& \times \int_0^\infty \frac{|f(y)|}{1+y^{2r}} y^{2r} \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon} K_n(y,0,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} dy
\end{aligned}$$

olur. Lemma 3.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{|M_n(f;x)|}{1+x^{2r}} dx \le\ & \int_0^\infty \frac{|f(y)|}{1+y^{2r}} \sum_{\upsilon=0}^\infty \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon} K_n(y,0,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} dy \\
& + \int_0^\infty \frac{|f(y)|}{1+y^{2r}} y^{2r} \sum_{\upsilon=0}^\infty \frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon} K_n(y,0,u) \Big|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} dy
\end{aligned}$$

bulunur. (3.2) ve (4) özelliğinden

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{|M_n(f;x)|}{1+x^{2r}}dx &\leq \int_0^\infty \frac{|f(y)|}{1+y^{2r}}dy \\
&\quad + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \sup_{y\geq 0} y^{2r} \left.\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(y,0,u)\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} \int_0^\infty \frac{|f(y)|}{1+y^{2r}}dy \\
&\leq \|f\|_{1,2r}(1+C),
\end{aligned}$$

bulunur ki (5.1), $p=1$ için doğru olur. Şimdi ispatı $p=\infty$ için gösterelim.

$$\begin{aligned}
|M_n(f;x)| &= (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \left.\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(x,0,u)\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} \\
&\quad \times \int_0^\infty \frac{|f(y)|}{1+y^{2r}}(1+y^{2r}) \left.\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(y,0,u)\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}dy \\
&\leq \|f\|_{\infty,2r}\left\{(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \left.\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(x,0,u)\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}\right. \\
&\quad \times \int_0^\infty \left.\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(y,0,u)\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}dy \\
&\quad + (n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \left.\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(x,0,u)\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!} \\
&\quad \left.\times \int_0^\infty y^{2r} \left.\frac{\partial^\upsilon}{\partial u^\upsilon}K_n(y,0,u)\right|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}} \frac{[-\alpha_n\psi_n(0)]^\upsilon}{\upsilon!}dy\right\}.
\end{aligned}$$

olur. Burada (3.1) gözönüne alınırsa

$$|M_n(f;x)| \leq \|f\|_{\infty,2r}\left\{M_n(1);x) + M_n\left(t^{2r}\right);x\right\}$$

bulunur. Lemma 3.2'den

$$\|M_n f\|_{\infty,2r} = \sup_{x\geq 0}\frac{|M_n(f;x)|}{1+x^{2r}} \leq C\|f\|_{\infty,2r}$$

elde edilir ki $p=\infty$ için (5.1) gösterilmiş olur. Burada Riesz Thorin Teoremi kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.[11] Sabit bir $p\in[1,\infty)$ için w fonksiyonu

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2p}w(t)dt < \infty$$

şartını sağlayan pozitif sürekli bir fonksiyon olsun.

$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $L_{p,w}(\mathbb{R})$'den $L_{p,w}(\mathbb{R})$'ye dönüşüm yapan ve

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(t^i;x)-x^i\right\|_{p,w}=0, \qquad i=0,1,2$$

şartlarını sağlayan düzgün sınırlı lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda her $f\in L_{p,w}(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|L_nf-f\|_{p,w}=0$$

olur.

$w(x)=(1+x^{2r)^{-1}}$ seçilirse aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2. $r\in\mathbb{N}$ olmak üzere $f\in L_{p,2r}(\mathbb{R}^+)$ ve $1\le p<\infty$, $r-p>1/2$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\|M_nf-f\|_{p,2r}=0$$

dir.

İspat. Teorem 5.1'e göre aşağıdaki üç durumu göstermek yeterlidir.

$$\lim_{n\to\infty}\|M_n(t^\nu;x)-x^\nu\|_{p,w}=0, \quad \nu=0,1,2. \tag{5.2}$$

$M_n(1;x)=1$ olduğundan (6.6), $\nu=0$ için sağlanmış olur. Lemma 3.2'den $n>2m$ için

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \frac{|M_n(t;x)-x|^p}{1+x^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
=&\left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2r}}\left|\frac{n^2}{(n-2m)\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}x+\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)-x\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
=&\left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2r}}\left|\left(\frac{n}{(n-2m)}-1\right)x+\frac{1}{(n-2m)\alpha_n\psi_n(0)}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
\le&\left(\frac{n}{(n-2m)}-1\right)\left(\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+\frac{1}{(n-2m)\alpha_n\psi_n(0)}\left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2r}}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

bulunur ve (6.6), $n \to \infty$ olduğunda $\nu = 1$ için sağlanır. Benzer şekilde $n > 3m$ için

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty \frac{\left|M_n\left(t^2;x\right)-x^2\right|^p}{1+x^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
= \quad & \left(\frac{n(m+n)}{(n-2m)(n-3m)}-1\right)\left(\int_0^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
& + \left(\frac{4n}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n\psi_n(0)}\right)\left(\int_0^\infty \frac{x^{p}}{1+x^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
& + \frac{2}{(n-2m)(n-3m)(\alpha_n\psi_n(0))^2}\left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^{2r}}dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

olur ve (6.6), $n \to \infty$ olduğunda $\nu = 2$ için sağlanmış olur.

6. IBRAGIMOV GADJIEV DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN TÜREVİNİN YAKLAŞIMI

Bu bölümde $\left(M_n^{(r)}f\right)(x)$'in $f^{(r)}(x)$'e norm yakınsaklığını, yakınsaklık hızı ve hata miktarı ile vereceğiz.

Aşağıda tanımlanan $\mathcal{H}$ sınıfı, $\mathbb{R}^+$ üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar sınıfını da içerir.

$$\mathcal{H} \equiv \left\{ f : \int_0^\infty \frac{|f(t)|}{(1+ct)^{n/c}} dt < \infty,\ c>0\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Bu uzaydaki norm ise $\|\cdot\|_{C_\alpha}$ şeklinde gösterilip $\|f\|_{C_\alpha} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{|f(t)|}{t^\alpha}$ olarak tanımlanır.

Lemma 6.1. f fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde r kez türevlenebilir ve $\alpha > 0$, $t \to \infty$ için $f^{(r-1)}(t) = \mathcal{O}(t^\alpha)$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $r = 0, 1, 2, ...$ ve $n > \alpha + rm$ için

$$\frac{d^r}{dx^r}(M_n f)(x) = (n-m)u_1 \beta(n,r) \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \int\limits_0^\infty f^{(r)}(y) p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)\,dy \tag{6.1}$$

şeklindedir. Burada

$$p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) = K_{n+mr}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}$$

ve

$$\beta(n,r) = \prod_{j=0}^{r-1} \frac{(-1)^r (n+jm)}{(n-m(j+1))}, \beta(n,0) = 1$$

olarak ifade edilir.

İspat. Öncelikle operatörün birinci türevini alalım.

$$\frac{d}{dx}(M_n f)(x) = (n-m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d}{dx} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} \int\limits_0^\infty f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} dy$$

olup (4.19)'den

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(M_n f)(x) \\
= \quad & (n-m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty}(-n)[\nu K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1 K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)] \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \\
& \times \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} dy
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(M_n f)(x) \\
= \quad & (n-m)u_1 \sum_{\nu=1}^{\infty}(-n)\nu K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} dy \\
& + (n-m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty}(-n)u_1 K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} dy
\end{aligned}$$

olur. İlk toplamda ν yerine $\nu+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(M_n f)(x) \\
= \quad & (n-m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty}(-n)(\nu+1) K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \\
& \times \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!} dy \\
& + (n-m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty}(-n)u_1 K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \\
& \times \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ifadeler düzenlenip (4.19) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(M_n f)(x) \\
= \;& (n-m)u_1(-n)\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \\
&\times \int_0^{\infty}\left[-u_1 K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1)\,\frac{(-u_1)}{\nu+1} + u_1 K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\right] f(y)\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}dy \\
= \;& (n-m)u_1(-n)\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \\
&\times \int_0^{\infty}\left[\frac{u_1^2}{\nu+1} K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1) + u_1 K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\right] f(y)dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(M_n f)(x) \\
= \;& u_1 n\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!}\frac{u_1}{\nu+1} \\
&\times \int_0^{\infty} -(n-m)\left[u_1 K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1) + (\nu+1) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\right] f(y)dy \\
= \;& u_1 n\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!}\frac{u_1}{\nu+1}\int_0^{\infty}\frac{d}{dx}K_{n-m,\nu+1}(y,0,u_1)\,f(y)dy
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $u = f(y)$ ve $dv = \frac{d}{dx}K_{n-m,\nu+1}(y,0,u_1)$ denirse

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(M_n f)(x) \\
= \;& u_1 n\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!}\frac{u_1}{\nu+1} \\
&\times \left[f(y)K_{n+m,\nu+1}(y,0,u_1)\,|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} K_{n-m,\nu+1}(y,0,u_1)\,f'(y)dy \right]
\end{aligned}$$

olur. (1) ve (4) şartlarından

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}M_n f(x) \\
= \;& \frac{(n-m)u_1^2 n}{(n-m)}\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!}\int_0^{\infty} K_{n-m,\nu+1}(y,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu+1)!}f'(y)dy
\end{aligned}$$

bulunur.

$$p_{n,\nu}(y) = K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}$$

gösterimi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}M_n f(x) \\
= \quad & \frac{-(n-m)u_1 n}{(n-m)}\sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{(\nu)!} \\
&\times\int_0^\infty K_{n-m,\nu+1}(y,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!}f'(y)dy \qquad (6.2) \\
= \quad & \frac{-(n-m)u_1 n}{(n-m)}\sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+m,\nu}(x,0,u_1)\int_0^\infty p_{n-m,\nu+1}(y,0,u_1)f'(y)dy \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi operatörün ikinci türevini bulalım. Burada (4.19) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\frac{d^2}{dx^2}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) = (-n)\left[\nu\frac{d}{dx}K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1\frac{d}{dx}K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\right]$$

olur. Burada

$$\frac{d}{dx}K_{n+m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) = -(n+m)\left[(\nu-1)K_{n+2m}^{(\nu-2)}(x,0,u_1) + u_1 K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1)\right]$$

ve

$$\frac{d}{dx}K_{n+m}^{(\nu)}(x,0,u_1) = -(n+m)\left[\nu K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1 K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\right]$$

olup aşağıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \\
= \quad & (-n)\left[\nu\left[-(n+m)\left[(\nu-1)K_{n+2m}^{(\nu-2)}(x,0,u_1) + u_1 K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1)\right]\right]\right. \\
&\left. + u_1\left[-(n+m)\left[\nu K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1 K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\right]\right]\right] \\
= \quad & n(n+m)\left[\nu(\nu-1)K_{n+2m}^{(\nu-2)}(x,0,u_1) + 2u_1\nu K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1^2 K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan bu ifade operatörün ikinci türevinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}(M_n f)(x) \\
= \;& (n-m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} dy \\
= \;& (n-m)n(n+m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big[\nu(\nu-1) K_{n+2m}^{(\nu-2)}(x,0,u_1) \\
& + 2u_1 \nu K_{n+2m}^{(\nu-1)}(x,0,u_1) + u_1^2 K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \Big] \\
& \times \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} dy
\end{aligned}
$$

olur. Burada toplamlar ayrılıp birinci toplamda ν yerine $\nu+2$, ikinci toplamda ν yerine $\nu+1$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}(M_n f)(x) \\
= \;& (n-m)n(n+m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+2)(\nu+1) K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu+2}}{(\nu+2)!} \\
& \times \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu+2)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu+2}}{(\nu+2)!} dy \\
& + (n-m)n(n+m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2u_1(\nu+1) K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \\
& \times \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu+1}}{(\nu+1)!} dy \\
& + (n-m)n(n+m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} u_1^2 K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} \\
& \times \int_0^{\infty} f(y) K_n^{(\nu)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} dy
\end{aligned}
$$

bulunur. İfadeler düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}(M_n f)(x) \\
= \;& (n-m)n(n+m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \\
&\times \int_0^{\infty}\Bigg[(\nu+2)(\nu+1)\frac{[-u_1]^2}{(\nu+1)(\nu+2)}\frac{[-u_1]^2}{(\nu+1)(\nu+2)}K_n^{(\nu+2)}(y,0,u_1) \\
&+ 2u_1(\nu+1)\frac{[-u_1]}{(\nu+1)}\frac{[-u_1]}{(\nu+1)}K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1) + u_1^2 K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\Bigg] f(y)dy \\
= \;& (n-m)n(n+m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!}\frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \\
&\times \int_0^{\infty}\Bigg[\frac{{u_1}^4}{(\nu+1)(\nu+2)}K_n^{(\nu+2)}(y,0,u_1) + 2\frac{u_1^3}{(\nu+1)}K_n^{(\nu+1)}(y,0,u_1) \\
&+ u_1^2 K_n^{(\nu)}(y,0,u_1)\Big] f(y)dy \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi

$$\frac{d^2}{dx^2}K_{n-2m}^{(v+2)}(y,0,u_1)$$

ifadesini bulalım. (4.19) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\frac{d}{dx}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1) = -(n-2m)\left[(\nu+2)K_{n-m}^{(\nu+1)}(x,0,u_1) + u_1 K_{n-m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\right]$$

olur. Burada tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1) \\
= \;& -(n-2m)\left[(\nu+2)\frac{d}{dx}K_{n-m}^{(\nu+1)}(x,0,u_1) + u_1\frac{d}{dx}K_{n-m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\right] \\
= \;& -(n-2m)\left[(\nu+2)\left[-(n-m)\left[(\nu+1)K_n^{(\nu)}(x,0,u_1) + u_1 K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1)\right]\right]\right] \\
& -(n-2m)\left[u_1\left[-(n-m)\left[(\nu+2)K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1) + u_1 K_n^{(\nu+2)}(x,0,u_1)\right]\right]\right] \\
= \;& (n-m)(n-2m)\left[u_1^2 K_n^{(\nu+2)}(x,0,u_1) + 2u_1(\nu+2)K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1)\right. \\
& \left. + (\nu+1)(\nu+2)K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadeyi $\dfrac{u_1^2}{(n-m)(n-2m)(\nu+1)(\nu+2)}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
&\frac{u_1^2}{(n-m)(n-2m)(\nu+1)(\nu+2)}\frac{d^2}{dx^2}K_{n-2m}^{(\nu+2)}(x,0,u_1) \\
= \;& \frac{{u_1}^4}{(\nu+1)(\nu+2)}K_n^{(\nu+2)}(x,0,u_1) + 2\frac{u_1^3}{(\nu+1)}K_n^{(\nu+1)}(x,0,u_1) + u_1^2 K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade 6.4'de köşeli parantez içindeki ifadeye eşittir. Böylece

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}(M_n f)(x) \\
= \; & (n-m)n(n+m)u_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \\
& \times \frac{u_1^2}{(n-m)(n-2m)(\nu+1)(\nu+2)} \int_0^{\infty} K_{n-2m}^{(\nu+2)}(y,0,u_1) f(y)dy
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}(M_n f)(x) \\
= \; & \frac{(n-m)n(n+m)u_1^3}{(n-m)(n-2m)(\nu+1)(\nu+2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \\
& \times \int_0^{\infty} K_{n-2m}^{(\nu+2)}(y,0,u_1) f''(y)dy \\
= \; & \frac{(n-m)n(n+m)u_1}{(n-m)(n-2m)} \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{n+2m}^{(\nu)}(x,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu}}{\nu!} \\
& \times \int_0^{\infty} f''(y) K_{n-2m}^{(\nu+2)}(y,0,u_1) \frac{[-u_1]^{\nu+2}}{(\nu+2)!} dy
\end{aligned}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2}(M_n f)(x) \\
= \; & \frac{(n-m)(-1)^2 n(n+m)u_1}{(n-m)(n-2m)} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+2m,\nu}(x,0,u_1) \\
& \times \int_0^{\infty} f''(y) p_{n-2m,\nu+2}(y,0,u_1)\, dy
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

elde edilir. (6.3) ve (6.5) gözönüne alınıp genelleştirme yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^r}{dx^r}(M_n f)(x) \\
= \ &(n-m)u_1\left(\prod_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^r\,(n+mj)u_1^r}{[n-m\,(j+1)]\,(\nu+(j+1))}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}K_{n+mr}^{(\nu)}\,(x,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!} \\
&\times\int_0^\infty K_{n-mr}^{(\nu+r)}\,(y,0,u_1)\,\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}f^{(r)}(y)dy \\
= \ &\frac{(-1)^r\,(n-m)n(n+m)\,(n+2m)\,...\,(n+m\,(r-1))\,u_1}{(n-m)(n-2m)\,(n-3m)\,...\,(n-rm)}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\,(x,0,u_1) \\
&\times\int_0^\infty f^{(r)}(y)p_{n-rm,\nu+r}\,(y,0,u_1)\,dy \\
= \ &(n-m)u_1\frac{(-1)^r\,n(n+m)\,(n+2m)\,...\,(n+m\,(r-1))}{(n-m)(n-2m)\,(n-3m)\,...\,(n-rm)}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\,(x,0,u_1) \\
&\times\int_0^\infty f^{(r)}(y)p_{n-rm,\nu+r}\,(y,0,u_1)\,dy \\
= \ &(n-m)u_1\prod_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^r\,(n+jm)}{(n-m\,(j+1))}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\,(x,0,u_1) \\
&\times\int_0^\infty f^{(r)}(y)p_{n-rm,\nu+r}\,(y,0,u_1)\,dy
\end{aligned}
$$

bulunur.

Sonuç 6.1. Lemma 6.1'den

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^r}{dx^r}(M_n 1)(x) \\
= \ &(n-m)u_1\prod_{j=0}^{r-1}\frac{(-1)^r\,(n+jm)}{(n-m\,(j+1))}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\,(x,0,u_1)\int_0^\infty p_{n-rm,\nu+r}\,(y,0,u_1)\,dy
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Lemma 3.3 ve (3.2) gözönüne alınırsa

$$
\frac{d^r}{dx^r}(M_n 1)(x)=\frac{(n-m)u_1\beta\,(n,r)}{(n-m\,(r+1))\,u_1} \tag{6.6}
$$

bulunur.

Lemma 6.2. $r,s\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $n>m(r+s+2)$ ve $\varphi(x)=\sqrt{x(1+u_1mx)}$

olmak üzere

$$\mathcal{M}_{r,n,s}\left(x\right)=u_1[n-m(r+1)]\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right)\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)\left(y-x\right)^s dy$$

olsun. Buradan aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{r,n,s+1}\left(x\right) &= \frac{\varphi^2(x)}{u_1[n-m(r+s+2)]}[\mathcal{M}'_{r,n,s}(x)+2s\mathcal{M}_{r,n,s-1}\left(x\right)] \\ &\quad +\frac{(s+r+1)(1+2u_1mx)}{u_1[n-m(r+s+2)]}\mathcal{M}_{r,n,s}(x). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Ayrıca

$$\mathcal{M}_{r,n,0}\left(x\right)=1,$$

$$\mathcal{M}_{r,n,1}\left(x\right)=\frac{(r+1)(1+2u_1mx)}{u_1n-u_1m(r+2)},$$

$$\mathcal{M}_{r,n,2}\left(x\right)=\frac{\varphi^2(x)2u_1(n-m)+(1+2u_1mx)^2(r+1)(r+2)}{\left[u_1n-u_1m(r+2)\right]\left[u_1n-u_1m(r+3)\right]}$$

olup tüm $x\in\mathbb{R}^+$ için $\mathcal{M}_{r,n,s}\left(x\right)=\mathcal{O}\left((u_1n)^{-\left\lfloor\frac{s+1}{2}\right\rfloor}\right)$ mevcuttur. Burada $\lfloor\alpha\rfloor$, α'nın tamsayı kısmıdır.

İspat: Öncelikle (6.7) eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) &= [u_1n-u_1m(r+1)]\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi^2(x)\frac{d}{dx}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\ &\quad \times\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)\left(y-x\right)^s dy \\ &\quad -s\varphi^2(x)[u_1n-u_1m(r+1)]\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\ &\quad \times\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)\left(y-x\right)^{s-1} dy \\ &= [u_1n-u_1m(r+1)]\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi^2(x)\frac{d}{dx}p_{n+rm,\nu}\left(x,0,u_1\right) \\ &\quad \times\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}\left(y,0,u_1\right)\left(y-x\right)^s dy-s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)\end{aligned}$$

olup Sonuç 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x)\\
=\ &[u_1n-u_1m(r+1)]\sum_{\nu=0}^{\infty}[\nu-xu_1(n+mr)]\,p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1)\\
&\times\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^s\,dy-s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)\\
=\ &[u_1n-u_1m(r+1)]\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1)\int_0^{\infty}[\nu+r-yu_1(n-mr)-r(1+2mxu_1)\\
&+(n-mr)(yu_1-xu_1)]\,p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^sdy-s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) =\ &[u_1n-u_1m(r+1)]\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1)\\
&\times\left\{\int_0^{\infty}[\nu+r-yu_1(n-mr)]\,p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^sdy\right.\\
&-\int_0^{\infty}r(1+2mxu_1)p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^sdy\\
&\left.+\int_0^{\infty}(n-mr)(yu_1-xu_1)p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^sdy\right\}\\
&-s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada tekrar Sonuç 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x)\\
=\ &[u_1n-u_1m(r+1)]\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1)\int_0^{\infty}\varphi^2(y)\frac{d}{dy}p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)(y-x)^sdy\\
&-r(1+2mxu_1)\mathcal{M}_{r,n,s}(x)+(n-mr)u_1\mathcal{M}_{r,n,s+1}-s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x)
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin ilk kısmında kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
& \varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) \\
= \; & [u_1 n - u_1 m(r+1)] \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \\
& \times \int_0^{\infty} p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)\left[-(1+2u_1 my)(y-x)^s - s\varphi^2(y)(y-x)^{s-1}\right]dy \\
& -r(1+2mxu_1)\mathcal{M}_{r,n,s}(x) + (n-mr)u_1\mathcal{M}_{r,n,s+1}(x) \\
& -s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x) \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

bulunur. (6.8)'da

$$
\begin{aligned}
-s\varphi^2(y) - (1+2u_1 my)(y-x) &= -s\varphi^2(x) - (s+1)(1+2u_1 mx)(y-x) \\
&\quad -u_1 m(s+2)(y-x)^2
\end{aligned}
$$

eşitliği gözönüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\varphi^2(x)\mathcal{M}'_{r,n,s}(x) &= -s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x) - (s+1)(1+2u_1 mx)\mathcal{M}_{r,n,s}(x) \\
&\quad -u_1 m(s+2)\mathcal{M}_{r,n,s+1}(x) - r(1+2u_1 mx)\mathcal{M}_{r,n,s}(x) \\
&\quad +(n-mr)u_1\mathcal{M}_{r,n,s+1}(x) - s\varphi^2(x)\mathcal{M}_{r,n,s-1}(x),
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lemma 6.3. [28] $x \in (0,\infty)$ ve $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
& (x(1+u_1 mx))^r \frac{d^r}{dx^r} p_{n,\nu}(x,0,u_1) \\
= \; & \sum_{2i+j \le r, i,j \ge 0} (u_1 n)^i ((\nu - xu_1 n))^j q_{i,j,r}(x) p_{n,\nu}(x,0,u_1)
\end{aligned}
$$

sağlanır. Burada $q_{i,j,r}(x)$, n ve k'dan bağımsız olup $p_{n,\nu}(x,0,u_1) = K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{\nu!}$ ile gösterilsin.

İspat. $r = 0$ için ispat açıktır. Kabul edelimki r için (6.1) doğru olsun. Şimdi

$r+1$ için (6.1)'in doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}p_{n,\nu}(x,t,u) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^r}{dx^r}p_{n,\nu}(x,t,u)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\left((\nu-xu_1n)\right)^j\frac{q_{i,j,r}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^r}p_{n,\nu}(x,t,u)\right) \\
&= \sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\left[j\left((\nu-xu_1n)\right)^{j-1}(-u_1n)\frac{q_{i,j,r}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^r}p_{n,\nu}(x,t,u)\right. \\
&\quad+\left((\nu-xu_1n)\right)^j\frac{q'_{i,j,r}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^r}p_{n,\nu}(x,t,u) \\
&\quad+\left((\nu-xu_1n)\right)^j\frac{q_{i,j,r}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^r}\frac{d}{dx}p_{n,\nu}(x,t,u) \\
&\quad\left.+\left((\nu-xu_1n)\right)^j q_{i,j,r}(x)(-r)\left(\varphi^2(x)\right)^{-r-1}\left(\varphi^2(x)\right)'p_{n,\nu}(x,t,u)\right]
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}p_{n,\nu}(x,t,u) \\
&= p_{n,\nu}(x,t,u)\left(\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i(-(j+1))\left((\nu-xu_1n)\right)^j\frac{q_{i-1,j+1,r}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^{r+1}}\varphi^2(x)\right. \\
&\quad+(u_1n)^i\left((\nu-xu_1n)\right)^j\frac{q'_{i,j,r}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^{r+1}}\varphi^2(x) \\
&\quad+(u_1n)^i\left((\nu-xu_1n)\right)^j\frac{q_{i,j,r}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^r}\frac{(\nu-xu_1n)}{\varphi^2(x)}p_{n,\nu}(x,t,u) \\
&\quad\left.+(u_1n)^i\left((\nu-xu_1n)\right)^j\frac{q_{i,j,r}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^{r+1}}(-r)\left(\varphi^2(x)\right)'p_{n,\nu}(x,t,u)\right) \\
&= p_{n,\nu}(x,t,u)\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\left((\nu-xu_1n)\right)^j\frac{q_{i,j,r+1}(x)}{\left(\varphi^2(x)\right)^{r+1}}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}
q_{i,j,r+1}(x) &= (-(j+1))q_{i-1,j+1,r}(x)\varphi^2(x)+q'_{i,j,r}(x)\varphi^2(x) \\
&\quad+q_{i,j-1,r}(x)+(-r)q_{i,j,r}(x)\left(\varphi^2(x)\right)'
\end{aligned}$$

eşitliği gözönüne alınırsa $2i+j\le r$ ve $i,j\ge 0$ için $q_{i,j,r}(x)=0$ dır. Böylece $r+1$ için (6.1) sağlanır. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Buradaki $q_{i,j,r}$'leri $r=1$ ve $r=2$ durumları için görelim.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}p_{n,\nu}(x) &= \frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^\nu}{(\nu)!} \\
&= \frac{[-u_1]^\nu}{(\nu)!}\frac{d}{dx}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)
\end{aligned}$$

olup, Sonuç 3.1'den

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}p_{n,\nu}(x) &= \frac{(\nu - xu_1n)}{x(1+u_1mx)}K_n^{(\nu)}(x,0,u_1)\frac{[-u_1]^{\nu}}{(\nu)!} \\ \frac{d}{dx}p_{n,\nu}(x) &= \frac{(\nu - xu_1n)}{x(1+u_1mx)}p_{n,\nu}(x)\end{aligned}$$

olup $r = 1$ iken $q_{i,j,r}(x)$, $i = j = 0$ ise $q_{0,0,1}(x) = 0$ ve $i = 0, j = 1$ ise $q_{0,1,1}(x) = 1$ olur. Şimdi $r = 2$ için gösterelim.

$$\begin{aligned}& \frac{d^2}{dx^2}p_{n,\nu}(x) \\ = & \frac{d}{dx}\left[p_{n,\nu}(x)\frac{(\nu - xu_1n)}{x(1+u_1mx)}\right] \\ = & \frac{(\nu - xu_1n)}{x(1+u_1mx)}\frac{d}{dx}p_{n,\nu}(x) + p_{n,\nu}(x)\frac{d}{dx}\frac{(\nu - xu_1n)}{x(1+u_1mx)} \\ = & p_{n,\nu}(x)\frac{(\nu - xu_1n)}{x(1+u_1mx)}\frac{(\nu - xu_1n)}{x(1+u_1mx)} \\ & -p_{n,\nu}(x)\frac{u_1nx(1+u_1mx) + (\nu - xu_1n)(1+2u_1mx)}{x^2(1+u_1mx)^2} \\ = & \frac{p_{n,\nu}(x)}{x^2(1+u_1mx)^2}\left\{(\nu - xu_1n)^2 - (1+2u_1mx)(\nu - xu_1n) - u_1nx(1+u_1mx)\right\}\end{aligned}$$

Bu durumda

$$q_{i,j,r}(x) = \begin{cases} q_{0,0,2}(x) = 0 \\ q_{0,1,2}(x) = -(1+2u_1mx) \\ q_{0,2,2}(x) = 1 \\ q_{1,0,2}(x) = x(1+u_1mx) \end{cases}$$

bulunur..

Teorem 6.1. $f \in \mathcal{H}$ fonksiyonu , $\mathbb{R}^+$ nın sonlu her alt aralığında sınırlı ve bazı $0 < \alpha \leq s$ ve $y \to \infty$ için $f(y) = O(y^{\alpha})$ özelliğinde olsun. Eğer $f^{(r+1)}$ var ve $\delta > 0$ için $(a-\delta, b+\delta) \subset \mathbb{R}^+$ aralığında sürekli ise, yeterince büyük n'ler için

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^r}{dx^r}(M_nf)(x) - f^{(r)}(x)\right\| &\leq C_1(u_1n)^{-1}\left(\left\|f^{(r)}\right\| + \left\|f^{(r+1)}\right\|\right) \\ &+C_2(u_1n)^{-\frac{1}{2}} \times \omega\left(f^{(r+1)}, (u_1n)^{-\frac{1}{2}}\right) + O\left((u_1n)^{\frac{r-s}{2}}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliğini verebiliriz. Ayrıca $s > 1$ ve C_1 , C_2 sürekli değişen sabitlerdir. $\|.\|$ ise $[a, b]$ aralığındaki supremum normudur.

İspat: f'in Taylor açılımından

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{i=0}^{r+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(y-x)^i + \frac{\left\{f^{(r+1)}(\zeta) - f^{(r+1)}(x)\right\}}{(r+1)!}(y-x)^{r+1}\chi(y) \\ &\quad + h(y,x)(1-\chi(y)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada ζ, y ve x arasında ve $\chi(y)$, $(a-\delta, b+\delta)$ aralığının karakteristik fonksiyonudur. Burada
$y \in (a-\delta, b+\delta)$ ve $x \in [a,b]$ için

$$f(y) = \sum_{i=0}^{r+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(y-x)^i + \frac{\left\{f^{(r+1)}(\zeta) - f^{(r+1)}(x)\right\}}{(r+1)!}(y-x)^{r+1}$$

şeklindedir ve $y \in \mathbb{R}^+ \setminus (a-\delta, b+\delta)$ ve $x \in [a,b]$ için

$$h(y,x) = f(y) - \sum_{i=0}^{r+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(y-x)^i$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} (M_n^{(r)} f)(x) - f^{(r)}(x) &= (n-m)u_1\beta(n,r) \sum_{i=0}^{r+1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \\ &\quad \times \int_0^\infty p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1) \frac{d^r}{dy^r}(y-x)^i \, dy \\ &\quad + (n-m)u_1\beta(n,r) \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \int_0^\infty p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1) \\ &\quad \times \Bigg[\frac{\left\{f^{(r+1)}(\zeta) - f^{(r+1)}(x)\right\}}{(r+1)!}(y-x)^{r+1}\chi(y) \\ &\quad + h(y,x)(1-\chi(y)) \Bigg]^{(r)} dy - f^{(r)}(x) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} I_1 &= (n-m)u_1\beta(n,r)\sum_{i=0}^{r+1}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \\ &\times\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)\frac{d^r}{dy^r}(y-x)^i\,dy-f^{(r)}(x), \\ I_2 &= (n-m)u_1\beta(n,r)\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1)\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1) \\ &\times\left[\frac{\left\{f^{(r+1)}(\zeta)-f^{(r+1)}(x)\right\}}{(r+1)!}(y-x)^{r+1}\chi(y)\right]^{(r)}dy, \\ I_3 &= (n-m)u_1\beta(n,r)\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}(x,0,u_1) \\ &\times\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}(y,0,u_1)\left[h(y,x)(1-\chi(y))\right]^{(r)}dy \end{aligned}$$

şeklindedir. Lemma 6.2 ve $i<r$ için $\frac{d^r}{dx^r}(y-x)^i=0$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} I_1 &= (n-m)u_1\beta(n,r)\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}(x)\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}(y)f^{(r)}(x)\,dy \\ &\quad -f^{(r)}(x)+(n-m)u_1\beta(n,r)\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n+rm,\nu}(x)\int_0^{\infty}p_{n-rm,\nu+r}(y)f^{(r+1)}(x)(y-x)\,dy \\ &= f^{(r)}(x)\left\{\frac{(n-m)u_1\beta(n,r)}{u_1[n-m(r+1)]}M_{r,n,0}(x)-1\right\}+\frac{(n-m)u_1\beta(n,r)}{u_1[n-m(r+1)]}M_{r,n,1}(x)f^{(r+1)}(x) \end{aligned}$$

bulunur. $\delta>0$ ve $C=\sup\limits_{2i+j\le r,i,j\ge 0}\dfrac{|q_{i,j,r}(x)|}{(x(1+u_1mx))^r}$ için Lemma 6.3'den

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left|(n-m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{d^r}{dx^r}p_{n,\nu}(x)\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\frac{\left\{f^{(r+1)}(\zeta)-f^{(r+1)}(x)\right\}}{(r+1)!}(y-x)^{r+1}\chi(y)\,dy\right| \\ &\le (n-m)u_1\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j\frac{|q_{i,j,r}(x)|}{(x(1+u_1mx))^r} \\ &\quad\times\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\frac{\left|f^{(r+1)}(\zeta)-f^{(r+1)}(x)\right|}{(r+1)!}\left|(y-x)\right|^{r+1}dy \\ &\le C(n-m)u_1\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j \\ &\quad\times\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\left(1+\frac{|y-x|}{\delta}\right)\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)|y-x|^{r+1}dy \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
|I_2| &= C(n-m)u_1\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j \\
&\quad\times\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\left(|y-x|^{r+1}+\frac{|y-x|^{r+2}}{\delta}\right)dy \\
&\le C(n-m)u_1\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j \\
&\quad\times\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{r+1}\,dy \\
&\quad+C(n-m)u_1\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j \\
&\quad\times\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,\frac{|y-x|^{r+2}}{\delta}\,dy \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada integral için Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le C(n-m)u_1\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j \\
&\quad\times\left(\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{2r+2}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\frac{1}{\delta}C(n-m)u_1\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j \\
&\quad\times\left(\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{2r+4}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\sqrt{(n-m)\,u_1}\,\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j \\
&\quad\times\left(\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{2r+2}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\frac{1}{\delta}C\sqrt{(n-m)\,u_1}\,\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\le r,i,j\ge 0}(u_1n)^i\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\left|\nu-xu_1n\right|^j \\
&\quad\times\left(\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{2r+4}\,dy\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi sonsuz toplamlar için Cauchy Schwarz eşitsizliğini uygulayalım.

$$
\begin{aligned}
|I_2| \leq\; & C\sqrt{(n-m)\,u_1}\,\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\leq r,i,j\geq 0}(u_1n)^i\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\,(\nu-xu_1n)^{2j}\right)^{1/2} \\
& \times\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{2r+2}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
& +\frac{1}{\delta}C\sqrt{(n-m)\,u_1}\,\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\leq r,i,j\geq 0}(u_1n)^i\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\,(\nu-xu_1n)^{2j}\right)^{1/2} \\
& \times\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{2r+4}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\; & C\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\leq r,i,j\geq 0}(u_1n)^i\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\,(\nu-xu_1n)^{2j}\right)^{1/2} \\
& \times\left((n-m)\,u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{2r+2}\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \\
& +\frac{1}{\delta}C\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\leq r,i,j\geq 0}(u_1n)^i\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\,(\nu-xu_1n)^{2j}\right)^{1/2} \\
& \times\left((n-m)\,u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}p_{n,\nu}(x)\int_0^{\infty}p_{n,\nu}(y)\,|y-x|^{2r+4}\,dy\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|I_2| \leq\; & C\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\leq r,i,j\geq 0}(u_1n)^i\,(u_1n)^{j/2}\,(u_1n)^{\frac{-r-1}{2}} \\
& +\frac{1}{\delta}C\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\sum_{2i+j\leq r,i,j\geq 0}(u_1n)^i\,(u_1n)^{j/2}\,(u_1n)^{\frac{-r-2}{2}} \\
\leq\; & C\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\left\{(u_1n)^{r/2}\,(u_1n)^{\frac{-r-1}{2}}+\frac{1}{\delta}\,(u_1n)^{r/2}\,(u_1n)^{\frac{-r-2}{2}}\right\} \\
\leq\; & C\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)\left\{(u_1n)^{-1/2}+\frac{1}{\delta}\,(u_1n)^{-1}\right\} \\
=\; & C\,(u_1n)^{-1/2}\,\omega\left(f^{(r+1)},\delta\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\delta=(u_1n)^{-\frac{1}{2}}$ seçilirse

$$
|I_2|\leq C\,(u_1n)^{-\frac{1}{2}}\,\omega\left(f^{(r+1)},(u_1n)^{-\frac{1}{2}}\right)
$$

bulunur. Herhangi bir $s\in\mathbb{N}$ ve $s\geq\alpha$ için $h\,(y,x)=O\,(t^{\alpha})$ olduğundan

$h\left(y,x\right)=O\left(t-x\right)^{s}$ şeklinde yazılabilir. Burada I_2 için yapılanlar tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}\left|I_3\right| &\leq K(n-m)u_1\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{2i+j\leq r,i,j\geq 0}\left(u_1 n\right)^{i}p_{n,\nu}\left(x,0,u_1\right)\left|\nu-xu_1 n\right|^{j}\\ &\quad\times\int\limits_{|y-x|\geq\delta}p_{n,\nu}\left(y,0,u_1\right)\left|y-x\right|^{s}dy,\end{aligned}$$

olur. Burada K sabit bir sayıdır. $s>r+1$ için

$$\left|I_3\right|\leq K\left(u_1 n\right)^{-1/2}$$

bulunur. $n\to\infty$ için $I_3\to 0$ olup ispat tamamlanır.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

$L_p[0,\infty)$ uzayında integrallenebilen fonksiyonlar için Ibragimov Gadjiev Durrmeyer tipli operatörlerin düzgün yaklaşım problemi ve bu operatörlerin K fonksiyoneli kullanılarak yaklaşım hızları bulunmuştur. Ayrıca Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörleri için ağırlıklı uzaylarda yaklaşım sonuçları elde edilmiştir. Son olarak ise Ibragimov Gadjiev Durrmeyer operatörlerinin türevlerinin, yaklaşım fonksiyonunun türevlerine olan yakınsaklığı incelenmiş, yakınsaklık hızı ve yaklaşım hatası için bir üst sınır verilmiştir.

Sonuç olarak, literatüre yeni kazandırılan ve yaklaşım teoride Durrmeyer tipli operatörlerin bir kombinasyonu olan operatörlerin, integrallenebilen uzaylardaki yaklaşım özellikleri başta olmak üzere, birçok yaklaşım özelliği sunulmuştur. Çalışılan operatörlerin özel seçimler altında istenilen Durrmeyer tipli operatöre indirgenebileceği gözönüne alınırsa, literatürde Durrmeyer tipli operatörler için verilen benzer sonuçlar elde edileceği gibi, tanımlanması muhtemel yeni tip Durrmeyer operatörleri içinde tezde irdelenen yaklaşım sonuçları verilmiş olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Weierstrass, K. G., Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsber. Akad. Berlin, 633–639, 789–805, 1885. [Ayrıca bkz: "Mathematische Werke", Vol. 3, 1–37, Berlin: Mayer & Müller 1903.]

[2] Bernstein, S., Démonstration du théorème de Weierstrass, fondeé sur le calcul des probabilités, Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 13: 1-2, 1912-1913.

[3] Korovkin, P.P., Convergence of positive linear operators in the space of continuous functions, (Russian) Dokl. Akad. Nauk. SSSR 90, 961-964, 1953.

[4] Dzyadik, V. K. 1966. On the approximation of functions by linear positive operators and singular integrals, Mat. Sbornik Vol. 70; pp. 508-517 (in Russian).

[5] Bernau, S. J. 1974. Theorems of Korovkin type for Lp spaces, Pacic J. Math.Vol.53; pp. 11-19.

[6] Donner, K. 1981. Korovkin theorems in Lp spaces, J. Functional Analysis 42;Vol.pp. 12-28.

[7] Swetits, J. J. and Wood, B. 1996. On degree of Lp approximation with positive linear operators, Journal of Approximation Theory 87; 239-241.

[8] Durrmeyer, J. L., Une formule d'inversion de la Transformee Laplace, Applications a la Theorie des Moments, These de 3e Cycle, Faculte des Sciencesde I'Universite de Paris, 1967.

[9] Gadjiev A. D., Positive linear operators in weighted spaces of functions of several variables, Izv. Akad. Nauk Azerbaijan. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk 1 4, 32–37, 1980.

[10] Gadjiev, A. D., Efendiyev, R. O. and Ibikli, E. 2003. On Korovkin's type theorem in the space of locally integrable functions, Czech. Math. J. Vol. 20; pp.781-786.

[11] Gadjiev A. D., Aral A., Weighted L_p -approximation with positive linear operators on unbounded sets, Appl. Math. Lett., 20 (2007), no. 10, 1046–1051.

[12] Popoviciu, T. "Sur I'approximation des functios convexes D'ordre superiour" Mathematica(Cluj), 10: 49-54, 1935.

[13] Hacıyev, A. ve Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, 1-71 p., Ankara, 1995.

[14] Bohman, H., On approximation of continuous and of analytic functions, Ark. Mat., 2, 43-56, 1952.

[15] Korovkin, P. P., On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 90, 961–964, 1953.

[16] Ditzian, Z., Totik, V., Moduli of Smoothness, Springer Series in Computational Mathematics 9, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Newyork, 1987.

[17] Anastassiou, G. A. and Gal, S.G., Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation. Birkhäuser, Boston, 2000.

[18] Gupta, V., Agarwal, R. P., Convergence Estimates in Approximation Theory, Springer, 2014.

[19] Heilmann M., Direct and converse results for operators of Baskakov-Durrmeyer type, Approx. Theory Appl., 5 (1989), no. 1, 105–127.

[20] Ditzian Z., Ivanov K., Bernstein-type operators and their derivatives, J. Approx. Theory, 56, (1989), 72-90.

[21] Aral A., Acar T., On Approximation Properties of Generalized Durrmeyer Operators, (submitted).

[22] Agrawal, P. N., Gairola, A. R., On certain Durrmeyer type operators, Math. Commun, 14 (2009), no. 2, 307–316.

[23] Stancu, D. D., Agratini, O., Gh. Coman & R. Trâmbiţaş, Analiză Numerică şi Teoria Aproximării, vol. I, Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană, 2001.

[24] Popoviciu, T., Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare, Lucrările Ses. Gen. Şt. Acad. Române din 1–4, 1950, translated into English by D. Kacsó, On the proof of Weierstrass' theorem using interpolation polynomials, East J. Approx., 4, 107–110, 1998.

[25] Sahai A., Prasad G., On simultaneous approximation by modified Lupas operators, J. Approx. Theory, 45 (12) (1985), 122–128.

[26] Mazhar S. M., Totik V., Approximation by modified Szasz operators, Acta Sci. Math., 49 (1985), 257-269.

[27] Gadjiev A. D., Ibragimov I.I., On a sequence of linear positive operators, Soviet Math. Dokl., 11 (1970), 1092-1095.

[28] Agrawal, P. N., Gupta V., Kumar A. S., Generalized Baskakov-Durrmeyer type operators, Rend. Circ. Mat. Palermo, (2) 63 (2014), no. 2, 193–209.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülsüm ULUSOY
Doğum Tarihi : 03.06.1987
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Kırıkkale Anadolu Lisesi
Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2006-2010
Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D., 2010-2012

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl/Yıllar:

Yayınları (SCI) :

1-) Ulusoy, G., Deniz, E., Aral, A., Simultaneous Approximation with Generelized Durrmeyer Operators, Applied Mathematics and Computation, 260 (2015) 126-134,