T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ BASAMAKTAN DİVERJANS FORMDAKİ BİR KOMPLEKS DİFERENSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ İLE VEKUA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ ARASINDAKİ BAĞINTI

SÜMEYYE DEMİRAL

TEMMUZ 2015

ÖZET

İKİNCİ BASAMAKTAN DİVERJANS FORMDAKİ BİR KOMPLEKS DİFERENSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİ İLE VEKUA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ ARASINDAKİ BAĞINTI

DEMİRAL, Sümeyye

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman:Doç.Dr.Rza MUSTAFAYEV

Temmuz 2015, 54 sayfa

Bu tez dört temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezde geçen temel kavramlar verilmiştir.İkinci bölümde kompleks diferensiyel denklemin çözümleri için polinom operatörleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise polinom operatörleri yardımıyla belli tipten denklemlerin çözümleri ortaya konmuştur. Son bölümde kompleks potansiyeller ile Schrödinger denkleminin çözümleri arasındaki bağıntılar araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Analitik ve Antianalitik fonksiyonlar, Analitik ve Antianalitik üreteçler, Vekua denklemi, Schrödinger denklemi

ABSTRACT

THE RELATION BETWEEN THE SOLUTIONS OF A COMPLEX DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER IN DIVERGENCE FORM AND THE SOLUTIONS OF THE VEKUA EQUATION

DEMİRAL, Sümeyye

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M.Sc. Thesis

Supervisor: Assoc.Prof. Dr. Rza MUSTAFAYEV

July 2015, 54 pages

This thesis consists of four chapters.Information about the purpose of the thesis is given in the first chapter. Polynomial operators for the solution of complex differential equations are analysed in the second chapter. The solutions of certain types of equations with the help of polynomial operators are examined in the third chapter. In the last chapter, the relationship between the solutions of the Schrödinger equation with complex potential was investigated.

Key Words: Analytic and Antianalytic functions, Analytic and Antianalytic generators, Vekua equation, Schrödinger equation

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
D	Kompleks düzlemin bir alt bölgesi
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
r	z ye göre türev operatörü
s	$\bar{z}$ e göre türev operatörü
$P_D(E)$	Pseudo analitik fonksiyonların sınıfı
$P_n(r)$	n inci dereceden holomorf operatör
$\overline{P_m(s)}$	m inci dereceden antiholomorf operatör
Δ	Laplace operatörü
∇	Gradient operatör

1.GİRİŞ

Kompleks kısmi türevli denklemler, fiziksel problemlerden doğal olarak ortaya çıkan denklemlerdir.Örneğin $\omega_{\bar{z}} = A\omega + B\overline{\omega}$ Vekua denkleminin bir özel hali olan $\omega_{\bar{z}} = B\overline{\omega}$ kompleks denkleminin çözümleri kompleks potansiyeller olarak isimlendirilir ve bu denklemin $\omega(z)$ çözümlerinin reel ve sanal kısımları belli tipten Schrödinger denkleminin de çözümleridir.İkinci basamaktan eliptik tipten $\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0$ denklemi de önemli uygulamalara sahip bir kompleks kısmi türevli denklemdir. Bu tür kompleks diferensiyel denklemlerin çözümleri için çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.Bunun için [1,2] kaynaklarına bakılabilir. Gerek $\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0$ denklemi gerekse $\omega_{\bar{z}} = B\overline{\omega}$ potansiyel denklemi bu tezde K.W. Bauer'in tanımladığı kompleks polinom operatörleri yardımıyla incelenmiştir.

1.1.Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı, uygulamalı denklemler olan $\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0$ ve $\omega_{\bar{z}} = B\overline{\omega}$ formundaki kompleks kısmi türevli denklemlerin çözümlerini elde etmek ve bu denklemlerin çözümleri ile $-\Delta u + ku = 0$ formundaki Schrödinger denkleminin çözümleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktır.Diğer bir amaç ise bu alanda yapılmış son makaleleri inceleyebilmek için temel bilgileri ortaya koymaktır.

1.2.Kaynak Özetleri

[1] numaralı kaynaktan öncelikle kompleks polinom operatörleri ve özellikleri öğrenilmiştir.Daha sonra aynı kaynaktan birinci ve ikinci basamaktan eliptik kompleks kısmi türevli denklemlerin bu operatörler yardımıyla nasıl çözüldüğü incelenmiştir. [3] ve [7] numaralı kaynaklardan ise $W_{\bar{z}} = B\overline{W}$ kompleks potansiyel denkleminin çözümlerinin farklı iki metodla nasıl elde edildiği araştırılmıştır. [5] ve [6] numaralı kaynaklardan ise $\omega_{\bar{z}} = A\omega + B\overline{\omega}$ formundaki kompleks denklemlerin çözümleri için Bers'in verdiği metot öğrenilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez içinde kullanacağımız bazı kavramlar açıklanacaktır.

Tanım 2.1.

$D \subset \mathbb{C}$ alt kümesi ve $z_0 \in D$ sabit noktası verilsin. z_0 ın en az bir komşuluğu tamamen D bölgesi tarafından kapsanıyorsa z_0 a D nin bir iç noktası denir.

Tanım 2.2.

Bütün elemanları iç noktalardan oluşan kümeye açık küme denir.

Tanım 2.3.

$D \subset \mathbb{C}$ alt kümesi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ sabit noktası verilsin. z_0 noktasının her komşuluğu hem D ye ait olan hem de D ye ait olmayan elemanlar içeriyorsa z_0 a D nin bir sınır noktası denir.

Tanım 2.4.

Bütün sınır noktalarını kapsayan kümeye kapalı küme denir.

Tanım 2.5.

$D \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin.Her $z \in D$ için $|z| \leq R$ olacak şekilde R reel sayısı varsa D ye sınırlı küme denir.

Tanım 2.6.

$D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde $\omega = f(z)$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in D$ olmak üzere

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

limit değeri varsa, bu limite $f(z)$ nin $z_0 \in D$ noktasındaki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 2.7.

$D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $f: D \to \mathbb{C}$, $z \to \omega = f(z)$ fonksiyonu verilsin. $\mathrm{z}_0 \in D$ sabit olmak üzere, z_0 ın en az bir

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : | z - z_0 | < r\}$$

komşuluğundaki her z noktasında $f'(z)$ türevi varsa $f(z)$ ye $\mathrm{z}_0 \in D$ noktasında analitiktir (holomorftur) denir. D nin her noktasında analitik fonksiyona D de analitiktir denir.

Tanım 2.8.

$D \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin.Her z_1,z_2 $\subset D$ olmak üzere z_1 ve z_2 noktaları tamamen D bölgesi tarafından kapsanan sürekli eğrilerle birleştirilebiliyorsa D ye irtibatlıdır denir.

Tanım 2.9.

Kompleks düzlemde açık ve irtibatlı her kümeye bölge denir.

Tanım 2.10.

$D \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin.Her $z_0 \in D$ için başlangıç ve bitiş noktası z_0 olan ve D nin içinde bulunan her kapalı eğrinin sınırladığı alan tamamen D tarafından kapsanıyorsa D ye basit irtibatlıdır denir.

Tanım 2.11.

$f(x,y)$ iki değişkenli reel değerli bir fonksiyon olsun.Uygun bir D bölgesinde f nin birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli olup aynı zamanda $f_{xx}+f_{yy}=0$ Laplace denklemi sağlanıyorsa f ye harmonik fonksiyon denir.

Temel kompleks türev operatörleri

$$s := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) , \qquad r := \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

şeklinde tanımlıdır.

$D \subset \mathbb{C}$ düzgün sınırlı, basit irtibatlı bir bölge olsun. Bu bölgede reel değerli $\Phi(z)$ fonksiyonuna $\partial\bar{z}$ operatörü uygulanırsa

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = \Phi_{\bar{z}}(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

kompleks değerli fonksiyonu elde edilir.

$f(z) = u + iv$ olmak üzere $\Phi_{\bar{z}} = f$ için

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = u + iv$$

yazılabileceğinden

$$\Phi_x(x,y) = u(x,y) \ , \quad \Phi_y(x,y) = v(x,y)$$

olur. $\Phi(x,y)$ fonksiyonu sürekli kısmi türevlere sahipse, $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$ olacağından $u_y - v_x = 0$ bulunur.

$\Phi_x(x,y) = u(x,y)$ eşitliğinde x e göre integral alınırsa

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(t,y)dt + \alpha(y)$$

$$\Phi_y(x,y) = \int_{x_0}^{x} u_y\,(t,y)dt + \alpha'(y) = v(x,y)$$

ve $u_y - v_x = 0$ ifadesinden $u_y(t,y) = v_t(t,y)$ olup,

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} v_t\,(t,y)dt + \alpha'(y)$$

$$v(x,y) = v(x,y) - v(x_0,y) + \alpha'(y)$$

$$\alpha'(y) = v(x_{0,}y)$$

dir. Burada y ye göre integral alınırsa

$$\alpha(y) = \int_{y_0}^{y} v(x_0,\xi)d\xi + c$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} u(t,y)dt + \alpha(y) = \int_{x_0}^{x} u(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} v(x_0,\xi)d\xi + c$$

bulunur.

Bu formül D bölgesi tarafından kapsanan ve (x_0, y_0) noktasını (x,y) noktasına birleştiren Γ eğrisine genişletilebilir.

$$\Phi(x,y) = \int_{\Gamma} u(x,y)dx + v(x,y)dy + c$$

Şimdi bir $\bar{A}$ operatörünü

$$\overline{A}[f](x,y) = \int_{\Gamma} u(x,y)dx + v(x,y)dy + c$$

şeklinde tanımlayalım.

$f(z) = u + iv$ fonksiyonu için $u_y - v_x = 0$ eşitliği sağlanırsa $\Phi_{\bar{z}} = f$ denklemi sağlanacak şekilde

$$\Phi(x,y) = \overline{A}[f](x,y)$$

ile verilen reel değerli $\Phi(x,y)$ fonksiyon sınıfı bulunabilir.

2.1. $\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0$ Diferensiyel Denklemi İçin Polinom Operatörleri

2.1.1. Holomorf Üreteçler

Diferensiyellenebilir bir ω fonksiyonu için $\bar{\omega}_z = \overline{\omega_{\bar{z}}}$, $\bar{\omega}_{\bar{z}} = \overline{\omega_z}$ olduğu biliniyor.ω reel değerli, yani $\omega = \bar{\omega}$ olduğunda $\omega_{\bar{z}} = \overline{\omega_z}$ şeklinde yazılabilir. $D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde $\omega = g(z)$ fonksiyonu verilsin.Her $z \epsilon D$ için z nin en az bir komşuluğundaki her noktada

$$g'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

türevi varsa $g(z)$ D bölgesinde analitiktir.

$$g(z) = u + iv \quad , \qquad \overline{g(z)} = u - iv$$

ise

$$Reg(z) = \frac{1}{2}[g(z) + \overline{g(z)}]$$

$g(z)$ fonksiyonu analitik olduğundan

$$(Reg(z))_z = \frac{1}{2}g'$$

ve

$$Img(z) = \frac{1}{2i}\left(g(z) - \overline{g(z)}\right) \ , \qquad (Img(z))_z = -\frac{i}{2}g'$$

dir.O halde bir holomorf $g(z)$ fonksiyonu ve onun reel ve sanal kısımları için

$$\begin{cases} g_z = g', \ g_{\bar{z}} = 0 \ , \quad \bar{g}_{\bar{z}} = \overline{(g')} \\ (Reg(z))_z = \frac{1}{2}g' \ , \quad (Img(z))_z = -\frac{i}{2}g' \end{cases}$$

gösterilimi vardır.

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace operatörü olmak üzere $4\omega_{z\bar{z}} = \Delta\omega$ dır.

D kompleks düzlemde basit irtibatlı bir bölge olsun.

$$\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0 \qquad (2.1)$$

denklemini göz önüne alalım. A ve B katsayılarının D bölgesinde analitik olduğunu kabul edelim.Dolayısıyla $A(z,\bar{z}) = A(z)$, $B(z,\bar{z}) = B(z)$ dir.

Şimdi

$$H(D) = \{g(z) \colon g(z)\ D\ de\ holomorf\}$$

olmak üzere

$$P_n(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* (z,\bar{z}) r^k$$

$H(D)$ üzerinde n. basamaktan lineer diferensiyel operatörünü göz önüne alalım.Çözümlerin incelenmesinde

$$P_n(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z,\bar{z}) R_0^k$$

formu kullanılacaktır.Burada a_k katsayıları ikinci basamaktan diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$R_0 = a(z)r$ olup, $a(z)$ D de sıfır olmayan holomorf bir fonksiyondur. Şimdi

$$\omega = P_n g\ , \qquad g \in H(D) \qquad (2.2)$$

formunda çözüme sahip olan (2.1) denklemini göz önüne alalım. (2.2) nin bu denklemin çözümü olabilmesi için katsayıların ne olması gerektiğini inceleyelim.

$a_n = 1$ olmak üzere (2.2) ifadesinde gerekli türevler alınıp (2.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} [(a_k)_{z\bar{z}} + A(a_k)_{\bar{z}} + Ba_k] R_0^k g + \sum_{k=0}^{n} (a_k)_{\bar{z}} \frac{R_0^{k+1} g}{a} = 0$$

olur.İkinci toplamda k yerine $k-1$ yazılır ve $a_{-1}=0$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(a_k)_{z\bar{z}}+A(a_k)_{\bar{z}}+Ba_k+\frac{(a_{k-1})_{\bar{z}}}{a}\right]R_0^k g+(a_n)_{\bar{z}}\frac{R_0^{n+1}g}{a}=0$$

olur. $a_n=1$ olduğundan buradan

$$\sum_{k=0}^{n}\left[(a_k)_{z\bar{z}}+A(a_k)_{\bar{z}}+Ba_k+\frac{(a_{k-1})_{\bar{z}}}{a}\right]R_0^k g=0$$

elde edilir. Bu toplamın sıfır olması için katsayılarının sıfır olması gerekir.

Yani

$$(a_k)_{z\bar{z}}+A(a_k)_{\bar{z}}+Ba_k+\frac{(a_{k-1})_{\bar{z}}}{a}=0\ , \quad k=0,1,2,\dots,n-1\ , \quad a_{-1}=0$$

dır. $k=n$ için,

$$\frac{(a_{n-1})_{\bar{z}}}{a}=-B \ \Rightarrow\ (a_{n-1})_{\bar{z}}=-aB$$

olur.

O halde $\omega=P_n g$ formunda çözüme sahip olan (2.1) diferensiyel denkleminin katsayıları arasındaki ilişki $a_n=1$ için,

$$\begin{cases} rsa_k+Asa_k+Ba_k+\frac{s(a_{k-1})}{a}=0\ , & k=0,1,2,\dots,n-1\ , \quad a_{-1}=0 \\ s(a_{n-1})=-aB & ,\quad k=n \end{cases} \tag{2.3}$$

şeklinde olur.

$\mathrm{n}=1$ için (2.3) sistemi

$$\begin{cases} rsa_0+\mathrm{Asa}_0+\mathrm{Ba}_0=0 \\ sa_0=-aB \end{cases} \tag{2.4}$$

sistemine indirgenir. $B \neq 0$ ise (2.4) sistemindeki $(a_0)_{\bar{z}} = -aB$ ifadesinde z ye göre türev alınırsa

$$(a_0)_{z\bar{z}} = -a_z B - aB_z$$

olup, bu değer

$$(a_0)_{z\bar{z}} + A(a_0)_{\bar{z}} + Ba_0 = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$-a_z B - aB_z - aAB + Ba_0 = 0$$

olur. Buradan

$$a_z B + aB_z + aAB - Ba_0 = 0$$

veya

$$a_z + a\frac{B_z}{B} + aA - a_0 = 0$$

elde edilir. $a = 1$ olmak üzere son ifadenin $\bar{z}$ e göre türevi alınırsa

$$\frac{BB_{z\bar{z}} - B_{\bar{z}}B_z}{B^2} + A_{\bar{z}} - (a_0)_{\bar{z}} = 0$$

olup, $(a_0)_{\bar{z}}$ değeri burada yerine yazılırsa

$$(\log B)_{z\bar{z}} + A_{\bar{z}} + B = 0 \qquad (2.5)$$

bulunur.

Lemma2.1.

$n = 1$ için

$$\omega = P_1 g = g' + a_0 g \qquad (2.6)$$

ifadesi (2.1) diferensiyel denkleminin bir çözümüdür ve

$a_0 = A + (\log B)_z$

dır.

İspat:

(2.4) sisteminden $(a_0)_{\bar{z}} = -aB$ ise

$$a_0 = -a \int B d\bar{z}$$

olup, böylece $a = 1$ için

$$a_0 = -\int B d\bar{z}$$

yazılabilir. Burada B yerine (2.5) den $B = -(\log B)_{z\bar{z}} - A_{\bar{z}}$ yazılırsa

$a_0 = A + (\log B)_z$ bulunur.

Şimdi (2.6) ifadesinde $\bar{z}$ e göre türev alınıp a_0 değeri yerine yazılırsa

$\omega_{\bar{z}} = [A_{\bar{z}} + (\log B)_{z\bar{z}}]g$ elde edilir.(2.5) den

$A_{\bar{z}} + (\log B)_{z\bar{z}} = -B \Rightarrow \omega_{\bar{z}} = -Bg$

olup, böylece

$$g = -\frac{\omega_{\bar{z}}}{B}$$

olur.

Bu ise verilen her ω çözümü için bir tek $g(z)$ üretecinin bulunduğunu gösterir.(2.1) denklemindeki A katsayısı belirli şartları sağlarsa daha fazla iddialar ileri sürülebilir.

D bölgesinde $\alpha(z) \neq 0$, $\beta(z) \neq 0$ olmak üzere $A_{\bar{z}} = B[\alpha(\mathrm{z})\overline{\beta(\mathrm{z})} - 1]$ olsun. Bu değer (2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\log B)_{z\bar{z}} + \alpha(z)\overline{\beta(z)}B = 0$$

elde edilir.

$G=\alpha\bar{\beta}B$ için $(\log G)_{z\bar{z}}+G=0$

bulunur. Burada $\log G=2\omega$ olup, buradan

$$2\omega_{z\bar{z}}=-e^{2\omega} \tag{2.7}$$

Liouville denklemi elde edilir.

Teorem 2.1.

a) D^* kompleks düzlemde basit irtibatlı bir bölge ve G, D^* da

$$(\log G)_{z\bar{z}}+G=0$$

denkleminin bir çözümü olsun. D , D^*'da basit irtibatlı kompakt bir bölge olmak üzere , D de

$$G=\frac{-2\Phi'(z)\overline{\Psi'(z)}}{[\Phi(z)+\overline{\Psi(z)}]^2}$$

dır.

Burada $\Phi(z)$ ve $\Psi(z)$ meromorf fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyonlardır.

$i)$ $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ D de en fazla birinci basamaktan sonlu sayıda kutup noktalarına sahiptir.

$ii)$ D de $\Phi(z)$ ve $\Psi(z)$ ortak kutup noktalarına sahip değillerdir.

$iii)$ D de $(\Phi+\bar{\Psi})\Phi'\Psi'\neq 0$ dır.

b) Diğer taraftan D de

$$G=\frac{-2\Phi'(z)\overline{\Psi'(z)}}{[\Phi(z)+\overline{\Psi(z)}]^2}$$

ifadesi $(logG)_{z\bar{z}}+G=0$ için bir çözüm ise $\Phi(z)$ ve $\Psi(z)$ fonksiyonları $i), ii),\ iii)$ şartlarını sağlarlar.

c) D de $(logG)_{z\bar{z}}+G=0$ denkleminin bütün reel değerli çözümleri

$$G = \frac{2\varepsilon f'(z)\overline{f'(z)}}{[1+\varepsilon f(z)\overline{f(z)}]^2} \quad , \quad \varepsilon = \pm 1$$

şeklindedir.Burada $f(z)$ meromorf fonksiyonu D de en fazla birinci basamaktan sonlu sayıda kutup noktasına sahiptir ve D de

$[1+\varepsilon f(z)\overline{f(z)}]f' \neq 0$

dır.

d) D de

$$G = \frac{2\varepsilon f'(z)\overline{f'(z)}}{[1+\varepsilon f(z)\overline{f(z)}]^2} \quad , \quad \varepsilon = \mp 1$$

$(logG)_{z\bar{z}} + G = 0$ için reel değerli bir çözüm ise her bir meromorf $f(z)$ fonksiyonu, $c)$ şıkkındaki şartları sağlar.

Teorem 2.2.

a) D de $B \neq 0$ olmak üzere

$$\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0$$

diferensiyel denkleminin

$$\omega = g' + a_0 g\ , \qquad g(z) \in H(D)$$

formunda bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart A ve B katsayılarının $(\log B)_{z\bar{z}} + A_{\bar{z}} + B = 0$ bağıntısını sağlamasıdır. Bu durumda a_0 katsayısı $a_0 = A + (\log B)_z$ şeklindedir.

b) (2.1) denkleminin D bölgesinde verilen ve (2.2) ile gösterilen her bir ω çözümü için $g(z)$ üreteci tektir ve

$$g(z) = -\frac{\omega_{\bar{z}}}{B}$$

şeklinde tanımlıdır.

c) $A_{\bar{z}} = B[\alpha(z)\overline{\beta(z)} - 1]$ ise, $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ D bölgesinde sıfır olmayan holomorf fonksiyonlar ve $G = \alpha\bar{\beta}B$ olmak üzere $(\log G)_{z\bar{z}} + G = 0$ dır.

Eğer D bölgesi Teorem 2.1. in şartlarını sağlarsa B katsayısı

$$B = -\frac{2\Phi'(z)\overline{\Psi'(z)}}{\alpha(z)\overline{\beta(z)}[\Phi(z) + \overline{\Psi(z)}]^2}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi

$$P_n(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z,\bar{z})R_0^k$$

ifadesindeki $a_k(z,\bar{z})$ katsayılarına belirli şartlar yükleyerek $n \in \mathbb{N}_0$ keyfi sabitleri için çözülebilen (2.3) sistemini yeniden oluşturalım.

Önce D bölgesinde $B \neq 0$ olduğunu kabul edelim.

$c_k \in \mathbb{C}$, $c_0 \neq 0$, $c_n = 1$, D de $\eta(z,\bar{z}) \neq 0$ olmak üzere

$a_k = c_k\eta^{n-k}$, $n \geq 2$ alalım. Böylece

$$\omega = P_n g = \sum_{k=0}^{n} c_k\,\eta^{n-k}R_0^k g$$

olur. Bu son ifadede gerekli türevler alınıp (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} c_k[(n-k)(n-k-1)\eta^{n-k-2}\eta_z\eta_{\bar{z}} + (n-k)\eta^{n-k-1}\eta_{z\bar{z}} + A(n-k)\eta^{n-k-1}\eta_{\bar{z}} + B\eta^{n-k}] \\ \quad + \frac{c_{k-1}}{a}(n+1-k)\eta^{n-k}\eta_{\bar{z}} = 0\,, \quad k = 0,1,2\ldots,n-1\,, \quad c_{-1} = 0 & (2.8) \\ c_{n-1}\eta_{\bar{z}} = -aB\,, \quad k = n & (2.9) \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \neq 0$ dır. (2.8) den $k = 0$ için

$$\frac{an}{\eta}\eta_{z\bar{z}} + \frac{an(n-1)}{\eta^2}\eta_z\eta_{\bar{z}} + \frac{aAn}{\eta}\eta_{\bar{z}} - c_{n-1}\eta_{\bar{z}} = 0 \qquad (2.10)$$

$k = 1$ için

$$c_1\left(\frac{a(n-1)}{\eta}\eta_{z\bar{z}} + \frac{a(n-1)(n-2)}{\eta^2}\eta_z\eta_{\bar{z}} + \frac{aA(n-1)}{\eta}\eta_{\bar{z}} - c_{n-1}\eta_{\bar{z}}\right) + c_0 n\eta_{\bar{z}} = 0 \qquad (2.11)$$

elde edilir. (2.10) ifadesi $c_1(n-1)$ ile (2.11) ifadesi n ile çarpılıp farkları alınırsa

$$[ac_1 n(n-1)]\frac{\eta_z}{\eta^2} + c_1 c_{n-1} - c_0 n^2 = 0$$

olur. Buradan

$$c = \frac{1}{n-1}\left(\frac{c_{n-1}}{n} - \frac{nc_0}{c_1}\right)$$

olmak üzere

$$-\frac{\eta_z}{\eta^2} = \frac{c}{a}$$

elde edilir.

Şimdi $\eta = \overline{\gamma(z)}$, $\gamma(z) \in H(D)$ olsun. Bu durumda $\eta_z = 0$ dır. (2.9) ifadesinde $\eta_{\bar{z}} = \overline{\gamma}'$ yazılırsa

$$B = -\frac{c_{n-1}}{a}\overline{\gamma}' \qquad (2.12)$$

olur. (2.8) denklemi $\eta_z = 0$ için

$$c_k[A(n-k)\eta^{n-k-1}\eta_{\bar{z}} + B\eta^{n-k}] + \frac{c_{k-1}}{a}(n+1-k)\eta^{n-k}\eta_{\bar{z}} = 0\,,\ \ k = 0,1,\ldots,n-1\,,\ \ c_{-1} = 0$$

ifadesine dönüşür. Bu ifadede (2.12) değeri yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{ac_k A(n-k)}{\eta} - c_k c_{n-1} + c_{k-1}(n+1-k)\right)\eta_{\bar{z}}\eta^{n-k} = 0\ ,\ k = 0,1,\ldots n-1,\ \ c_{-1} = 0$$

elde edilir. Burada

$$\frac{ac_k A(n-k)}{\eta} - c_k c_{n-1} + c_{k-1}(n+1-k) = 0$$

olmalıdır.

$k = 0$ için

$$\frac{ac_0 An}{\eta} - c_0 c_{n-1} = 0$$

olup, $\eta = \bar{\gamma}$ olduğundan

$$A = \frac{c_{n-1}}{na}\bar{\gamma}$$

elde edilir. O halde $\eta = \overline{\gamma(z)}$, $\gamma(z) \in H(D)$ için

$$A = \frac{c_{n-1}}{na}\bar{\gamma} \quad , \qquad B = -\frac{c_{n-1}}{a}\overline{\gamma'}$$

bulunur.

D de $\alpha(z) \neq 0$ olmak üzere $\beta(z) = \frac{c_{n-1}}{n}\gamma$ ve $\alpha(z) = \frac{1}{a}$ alınırsa,

$A = \alpha(z)\overline{\beta(z)}$, $B = -n\alpha(z)\overline{\beta'(z)}$ olup, (2.1) diferensiyel denklemi

$$\omega_{z\bar{z}} + \alpha(z)\overline{\beta(z)}\omega_{\bar{z}} - n\alpha(z)\overline{\beta'(z)}\omega = 0 \tag{2.13}$$

denklemine dönüşür. (2.13) denkleminin

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} c_k\, \overline{\beta(z)}^{n-k} R_0^k g\,, \qquad R_0 = \frac{1}{\alpha(z)} r \tag{2.14}$$

formunda bir çözüme sahip olması için $c_k = \binom{n}{k}$ olmalıdır. (2.14) ün türevleri (2.13) de yazılıp gerekli işlemler yapılırsa $c_k = \binom{n}{k}$ olduğu kolayca görülebilir.

Lemma 2.1.

(2.13) diferensiyel denkleminin (2.14) formunda bir çözümü için

$$T = \frac{1}{\overline{\beta'}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

olmak üzere

$$T^{\mu}\omega = \sum_{k=0}^{n-\mu} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(n-k-\mu)!} \bar{\beta}^{n-k-\mu} R_0^k g$$

dır.

İspat: Tümevarım yönteminden kolayca yapılabilir.

Lemma 2.1. den $\mu = n$ için

$$T^{n}\omega = \binom{n}{0} n!\, g(z)$$

olup

$$g(z) = \frac{T^{n}\omega}{n!}$$

bulunur.

Ayrıca,

$$\frac{c}{a} = -\frac{\eta_z}{\eta^2} \tag{2.15}$$

ifadesi $a = \frac{1}{\Phi_1'(z)}$ ve $c \neq 0$ olmak üzere $\left(\frac{1}{\eta}\right)_z = \Phi_1{}'c$ yazılabilir.

Buradan

$$\left(\frac{1}{\eta} - \Phi_1 c\right)_{\mathrm{z}} = 0$$

olup

$$\frac{1}{\eta} - \Phi_1 c = \overline{\Psi(z)}$$

dır. $\Phi_1 c = \Phi$ denirse

$$\eta = \frac{1}{\Phi + \bar{\Psi}} \tag{2.16}$$

elde edilir.

$$\frac{c}{a} = -\frac{\eta_z}{\eta^2} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{\eta^2 c}{\eta_z}$$

olup bu değer (2.9) ifadesinde yazılırsa

$$c_{n-1}\eta_{\bar{z}} = \frac{\eta^2 c}{\eta_z} B$$

bulunur. (2.16) dan η nın türevleri hesaplanıp bu ifadede yerine yazılırsa,

$$B = \frac{c_{n-1}\Phi'\overline{\Psi'}}{c(\Phi + \overline{\Psi})^2}$$

bulunur. Bulunan B değeri

$$\frac{an}{\eta}\eta_{z\bar{z}} + \frac{an(n-1)}{\eta^2}\eta_z\eta_{\bar{z}} + \frac{aAn}{\eta}\eta_{\bar{z}} + aB = 0$$

ifadesinde yazılırsa

$$A = \frac{\Phi'}{n(\Phi + \overline{\Psi})}\left(\frac{c_{n-1}}{c} + n(n+1)\right) \tag{2.17}$$

elde edilir. Burada $\Phi(z)$ ve $\Psi(z) \in H(D)$, D de$(\Phi + \overline{\Psi})\Phi'\Psi' \neq 0$ dır.

$$\lambda = \frac{1}{n}\left(\frac{c_{n-1}}{c} + n(n+1)\right)$$

olmak üzere

$$A = \frac{\lambda\Phi'}{\Phi + \overline{\Psi}}$$

yazılabilir. Bu durumda (2.1) denklemi

$$\omega_{z\bar{z}} + \frac{\lambda\Phi'}{\Phi + \overline{\Psi}}\omega_{\bar{z}} - n(n+1-\lambda)\frac{\Phi'\overline{\Psi'}}{(\Phi + \overline{\Psi})^2}\omega = 0\,, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\,, n \in \mathbb{N} \tag{2.18}$$

formuna dönüşür.

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} c_k\,\eta^{n-k}R^k g\,, \qquad c_n = 1\,, \quad R = \frac{1}{\Phi'}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.19}$$

ifadesinin (2.18) denkleminin çözümü olabilmesi için

$$c_k = \frac{(-1)^{n-k} n!\,(n+1-\lambda)_{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

olmalıdır.(2.19) un türevleri (2.18) de yazılıp gerekli türevler alınırsa bu durum görülebilir. Burada

$$(c)_n = c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(c)_0 = 1$$

gösterimi vardır. Ayrıca $c_k \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq n+1, n+2, \dots, 2n$ olmalıdır.

Lemma2.2.

(2.18) in (2.19) formunda gösterilen her ω çözümü için

$$Q = \frac{(\Phi + \overline{\Psi})^2}{\overline{\Psi'}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

olmak üzere

$$Q^\mu \omega = \sum_{k=0}^{n-\mu} c_k\,(-1)^\mu \frac{(n-k)!}{(n-k-\mu)!} \frac{R^k g}{(\Phi + \overline{\Psi})^{n-k-\mu}}$$

elde edilir.

İspat: Tümevarım yönteminden kolayca yapılabilir.

Yukarıdaki lemmadan $\mu = n$ için

$$g(z) = \frac{Q^n \omega}{n!\,(n+1-\lambda)_n}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.

a) D de $B \neq 0$ olsun.

$\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0$

diferensiyel denkleminin

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} c_k \eta^{n-k} R_0^k g \ , \ \ g \in H(D) \ , \qquad n \geq 2 \tag{2.20}$$

formunda bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$R_0 = a(z)\frac{\partial}{\partial z} \ , \qquad a(z) \in H(D) \ , \qquad a(z) \neq 0$$

$c_k \in \mathbb{C}$, $c_0 \neq 0$, $c_n = 1$, D de $\eta(z,\bar{z}) \neq 0$ olmak üzere

$i)\alpha(z), \beta(z) \in H(D)$

$ii)D$'de $\alpha\beta' \neq 0$

koşullarına uyan α, β için

$1)A = \alpha(z)\overline{\beta(z)}$, $\quad B = -n\alpha(z)\overline{\beta'(z)}$

veya

$i)\Phi(z)$, $\Psi(z) \in H(D)$

$ii)D$ de $(\Phi + \overline{\Psi})\Phi'\Psi' \neq 0$

$iii)\lambda \notin [n+1, n+2, \dots, 2n]$

koşullarına uyan Φ ve Ψ için

$$2) \ \ A = \frac{\lambda\Phi'}{\Phi + \overline{\Psi}} \ , \ \ B = -n(n+1-\lambda)\frac{\Phi'\overline{\Psi'}}{(\Phi + \overline{\Psi})^2}$$

olmasıdır.

b) $\omega_{z\bar{z}} + \alpha(z)\overline{\beta(z)}\omega_{\bar{z}} - n\alpha(z)\overline{\beta'(z)}\omega = 0$, $n \in \mathbb{N}$ $\qquad (2.21)$

diferensiyel denkleminin (2.20) çözümleri

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \bar{\beta}^{n-k} R_0^k g \ , \ R_0 = \frac{1}{\alpha(z)} \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad g(z) \in H(D) \tag{2.22}$$

formunda gösterilebilir.

c) (2.21) denkleminin (2.22) formundaki her ω çözümü için $g(z)$ üreteci tektir

ve

$$g(z) = \frac{T^n \omega}{n!} \quad , \ T = \frac{1}{\overline{\beta'}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

dır.

d)

$$\omega_{z\bar{z}} + \frac{\lambda \Phi'}{\Phi + \overline{\Psi}} \omega_{\bar{z}} - n(n+1-\lambda) \frac{\Phi' \overline{\Psi'}}{(\Phi + \overline{\Psi})^2} \omega = 0 \tag{2.23}$$

diferensiyel denkleminin (2.20) çözümleri

$$\omega = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (n+1-\lambda)_{n-k} \frac{R^k g}{(\Phi + \overline{\Psi})^{n-k}} \quad , \ R = \frac{1}{\Phi'} \frac{\partial}{\partial z} \tag{2.24}$$

şeklinde gösterilebilir.

e) (2.23) diferensiyel denkleminin (2.24) formundaki her ω çözümü için $g(z)$ üreteci tektir ve

$$g(z) = \frac{Q^n \omega}{n! \, (n+1-\lambda)_n} \quad , \qquad Q = \frac{(\Phi + \overline{\Psi})^2}{\overline{\Psi'}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

dır.

2.1.2. Antiholomorf Üreteçler

Şimdi

$$\overline{P_m(s)} = \sum_{k=0}^{m} b_k(z,\bar{z})s^k \quad , \qquad m \in \mathbb{N}$$

diferensiyel operatörünü göz önüne alalım.Bu kısımda

$$\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0 \qquad (2.25)$$

denkleminin

$\omega = \overline{P_m}\bar{f}$, $\quad f \in H(D)$

formunda çözüme sahip olması için gerekli koşullar ortaya konacaktır. Burada $b_k(z,\bar{z})$ katsayıları D de ikinci basamaktan sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

$m = 1$ için,

$$\omega = \overline{P_1}\bar{f} = b_0\bar{f} + b_1\overline{f'}$$

ifadesinin gerekli türevleri alınıp (2.25) denkleminde yazılırsa,

$$[(b_1)_z + Ab_1]\overline{f''} + [(b_1)_{z\bar{z}} + (b_0)_z + A(b_1)_{\bar{z}} + Ab_0 + Bb_1]\overline{f'}$$

$$+[(b_0)_{z\bar{z}} + A(b_0)_{\bar{z}} + Bb_0]\bar{f} = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin sıfır olması katsayılarının sıfır olması ile mümkündür.Bu durumda

$$(b_1)_z + Ab_1 = 0 \qquad (2.26)$$

$$(b_1)_{z\bar{z}} + (b_0)_z + A(b_1)_{\bar{z}} + Ab_0 + Bb_1 = 0 \qquad (2.27)$$

$$(b_0)_{z\bar{z}} + A(b_0)_{\bar{z}} + Bb_0 = 0 \qquad (2.28)$$

olmalıdır. (2.26) denkleminin $\bar{z}$ e göre türevi alınırsa

$$(b_1)_{z\bar{z}} + A_{\bar{z}}b_1 + A(b_1)_{\bar{z}} = 0 \;\Rightarrow\; -A_{\bar{z}}b_1 = (b_1)_{z\bar{z}} + A(b_1)_{\bar{z}}$$

olur. Bu değer (2.27) de yerine yazılırsa

$$b_1(B - A_{\bar{z}}) + (b_0)_z + Ab_0 = 0$$

elde edilir.

$B - A_{\bar{z}} = 0$ ise $(b_0)_z + Ab_0 = 0$ olup, buradan

$\frac{(b_0)_z}{b_0} = -A$ ve (2.26) dan $\frac{(b_1)_z}{b_1} = -A$

elde edilir. Buradan

$$\left(\frac{b_1}{b_0}\right)_z = 0$$

bulunur.Böylece

$$\frac{b_1}{b_0} = \overline{\alpha(z)} \Rightarrow b_1 = \bar{\alpha} b_0$$

elde edilir. Bu değer

$\omega = b_1\overline{f'} + b_0\bar{f}$ ifadesinde yerine yazılırsa, $\omega = b_0(\bar{\alpha}\overline{f'} + \bar{f})$ olur.

Yani,

$$f_1 = \alpha f' + f$$

olmak üzere

$$\omega = b_0\overline{f_1}$$

olur.

Eğer D de $B - sA \neq 0$ ise, $(2.26), (2.27), (2.28)$ ifadeleri kullanılarak

$$[\log(B - A_{\bar{z}})]_{z\bar{z}} + B = 2A_{\bar{z}} \ ,$$

$$b_0 = (b_1)_{\bar{z}} + b_1[\log(B - A_{\bar{z}})]_{\bar{z}} \ ,$$

$$(b_1)_z + b_1 A = 0$$

elde edilir. Bulunan b_0 değeri

$\omega = b_1\bar{f}' + b_0\bar{f}$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$\omega = (b_1\bar{f})_{\bar{z}} + [\log(B - A_{\bar{z}})]_{\bar{z}}(b_1\bar{f})$

olduğu görülür.O halde verilen bir ω çözümü için $b_1\bar{f}$ fonksiyonu tek olarak tanımlıdır ve

$$b_1\bar{f} = \frac{A\omega + \omega_z}{A_{\bar{z}} - B}$$

şeklindedir.

Özel olarak $\alpha(z), \beta(z) \in H(D)$ ve D de $\alpha\beta\left(2\alpha\bar{\beta} - 1\right) \neq 0$ olmak üzere

$$A_{\bar{z}} = \frac{\alpha(z)\overline{\beta(z)} - 1}{2\alpha(z)\overline{\beta(z)} - 1}B$$

seçilir ve $A_{\bar{z}}$ değeri

$[\log(B - A_{\bar{z}})]_{z\bar{z}} + B = 2A_{\bar{z}}$

ifadesinde yazılırsa

$$\left[\log\left(\frac{B}{2\alpha\bar{\beta} - 1}\right)\right]_{z\bar{z}} + \left[\log\left(\alpha\bar{\beta}\right)\right]_{z\bar{z}} + \frac{B}{2\alpha\bar{\beta} - 1} = 0$$

olup,

$$G = \frac{B}{2\alpha\bar{\beta} - 1}$$

alınırsa

$(\log G)_{z\bar{z}} + G = 0$

elde edilir.Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.4

a) $\omega_{z\bar{z}} + A(z,\bar{z})\omega_{\bar{z}} + B(z,\bar{z})\omega = 0$, D de $B - A_{\bar{z}} \neq 0$ diferensiyel denkleminin

$$\omega = b_1\overline{f'} + b_0\bar{f} \quad , \quad f \in H(D) \qquad (2.29)$$

formunda bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart A ve B katsayılarının

$$[\log(B - A_{\bar{z}})]_{z\bar{z}} + B = 2A_{\bar{z}}$$

denklemini sağlamalarıdır. Bu durumda b_0 ve b_1 katsayıları ,

$$(b_1)_z + b_1 A = 0$$

$$b_0 = (b_1)_{\bar{z}} + b_1[\log(B - A_{\bar{z}})]_{\bar{z}}$$

bağıntılarını sağlamak üzere

$$\omega = b_1\overline{f'} + b_0\bar{f}$$

gösterimi

$$\omega = (b_1\bar{f})_{\bar{z}} + [\log(B - A_{\bar{z}})]_{\bar{z}}\,(b_1\bar{f})$$

formunu alır.

b) (2.1) diferensiyel denkleminin

$$\omega = b_1\overline{f'} + b_0\bar{f}$$

formunda verilen her bir ω çözümü için $b_1\bar{f}$ fonksiyonu tektir ve

$$b_1\bar{f} = \frac{A\omega + \omega_z}{A_{\bar{z}} - B}$$

dır.

c) Eğer $\alpha(z), \beta(z) \in H(D)$, D de $\alpha\beta(2\alpha\bar{\beta} - 1) \neq 0$ ve

$$A_{\bar{z}} = \frac{\alpha(z)\overline{\beta(z)} - 1}{2\alpha(z)\overline{\beta(z)} - 1}B$$

ise $G = B(2\alpha\bar{\beta} - 1)^{-1}$ olmak üzere $(\log G)_{z\bar{z}} + G = 0$ diferensiyel denklemi elde edilir.

Eğer D bölgesi basit irtibatlı, kompakt ise B katsayısı

$$B = \frac{-2(2\alpha\bar{\beta} - 1)\Phi'\overline{\Psi'}}{(\Phi + \overline{\Psi})^2}$$

formunda gösterilebilir. Burada $\Phi(z)$ ve $\Psi(z)$ fonksiyonları Teorem 2.1 in $c)$ seçeneğindeki şartları sağlarlar.

d) $\mathrm{B} - \mathrm{A}_{\bar{\mathrm{z}}} = 0$ olması durumunda (2.1) denklemi

$$rb_0 + b_0 A = 0$$

$$b_1 = \overline{\alpha(z)} b_0 \quad , \qquad \alpha(z) \in H(D)$$

olmak üzere

$\omega = b_1 \overline{f'} + b_0 \bar{f} \quad , \quad f \in H(D)$ şeklinde bir çözüme sahiptir.

3. $\omega_{\bar{z}} = b_{(F,G)}\overline{\omega}$ DİFERENSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde kompleks potansiyel denklemi olarak bilinen $\omega_{\bar{z}} = b_{(F,G)}\overline{\omega}$ formundaki kompleks diferensiyel denklemi inceleyeceğiz.

Tanım 3.1.

$\omega \in P_D(E)$ olmak üzere, $\omega_{\bar{z}} = a(z,\bar{z})\omega + b(z,\bar{z})\overline{\omega}$ formundaki denkleme Vekua denklemi, bu denklemin çözümlerine de genelleştirilmiş analitik fonksiyon denir.

$D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde $E := (F,G)$ belirleyici çift olmak üzere pseudo analitik fonksiyonların sınıfı $P_D(E)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.

$\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit irtibatlı bir D bölgesini göz önüne alalım. Bu bölgede tanımlı F, G fonksiyonları

$i)$ $\forall\, z \in D$ için $Im[\overline{F(z)}G(z)] > 0$

$ii)$ $\forall\, z \in D$ için $F, G \in H_D^1$

koşullarını sağlıyorsa $E := (F,G)$ fonksiyon çiftine üretici çift denir.

H_D^1 , D de tanımlı, Hölder sürekli, birinci basamaktan diferensiyellenebilir fonksiyon uzayıdır.

Tanım 3.3.

$\Delta = F\bar{G} - \bar{F}G$ olmak üzere

$a_E := -(\bar{F}G_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}\bar{G})/\Delta$, $b_E := (FG_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}G)/\Delta$

$A_E := -(\bar{F}G_z - F_z\bar{G})/\Delta$, $B_E := (FG_z - F_zG)/\Delta$

fonksiyonlarına karakteristik katsayılar denir.

$G = fF$, $f \in P_D(A)$ olmak üzere $\omega_{\bar{z}} = a_E\omega + b_E\bar{\omega}$ denklemine $\omega = We^A$

dönüşümü uygulanırsa $a_E = A_{\bar{z}}$ için $W_{\bar{z}} = b_E\bar{W}e^{\bar{A}-A}$ bulunur.

$\alpha = b_E e^{\bar{A}-A}$ alınırsa

$$W_{\bar{z}} = \alpha\bar{W} \tag{3.1}$$

olur. Burada $\alpha(z,\bar{z})$ diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. (3.1) de z ye göre türev alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$W_{z\bar{z}} - (\log\alpha)_z W_{\bar{z}} - \alpha\bar{\alpha}W = 0$$

elde edilir.

$$\omega_{\bar{z}} = b_{(F,G)}\bar{\omega}\ ,\ \ \omega \in P_D(E) \tag{3.2}$$

denklemini göz önüne alalım.

F reel değerli ve $a_{(F,G)} = 0$ ise

$$G_{\bar{z}} = \frac{F_{\bar{z}}}{F}\bar{G}\ ,\quad G \in P_D(E)$$

olup , bu değer

$$b_E := (FG_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}G)/\Delta$$

ifadesinde yazılırsa

$$b_{(F,G)} = \frac{F_{\bar{z}}}{F}$$

bulunur.

G fonksiyonunun

$$G(z) = h(z)F^n(z)\ ,\quad h \in C^1(D)\ ,\quad n \in Z$$

şeklinde bir gösterime sahip olduğunu varsayalım. Böylece

$h_{\bar{z}} = 0$, $nh = \bar{h}$ ve h, D de holomorf olmak üzere

$n\bar{h} = h$ ise $n(h - \bar{h}) = h - \bar{h}$

olup, buradan $n = -1$ bulunur. h_1 reel değerli ve $h_1 = c \in \mathbb{R}$

$G(z) = h(z)F^n(z) = icF^{-1}$ olduğundan $E = (F, icF^{-1}) \in E_D$, $c \in \mathbb{R}^+$
olur.Bu durumda karakteristik katsayılar

$a_{(F,icF^{-1})} = 0$, $b_{(F,icF^{-1})} = (\text{Log} \mid F \mid)_{\bar{z}}$, $A_{(F,icF^{-1})} = 0$, $B_{(F,icF^{-1})} = (\text{Log} \mid F \mid)_z$

şeklindedir.

(3.2) denklemi

$$\omega = F\varphi + icF^{-1}\Psi$$

formunda bir çözüme sahiptir.Burada φ, Ψ reel değerli kompleks değişkenli fonksiyonlardır.Bu durumda

$$F\varphi_{\bar{z}} + icF^{-1}\Psi_{\bar{z}} = 0$$

denklemi sağlanmak zorundadır.Bu denklem ise

$$F^2\varphi_x - c\Psi_y = 0$$

$$F^2\varphi_y + c\Psi_x = 0$$

sistemine denktir.

Şimdi Teorem2.3. deki

$$\omega_{z\bar{z}} + \frac{\lambda\Phi'}{\Phi + \overline{\Psi}}\omega_{\bar{z}} - n(n + 1 - \lambda)\frac{\Phi'\overline{\Psi'}}{(\Phi + \overline{\Psi})^2}\omega = 0$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

$\lambda = n - m$ için bu denklem

$$\omega_{z\bar{z}} + (n - m)\frac{\Phi'}{\Phi + \overline{\Psi}}\omega_{\bar{z}} - n(m + 1)\frac{\Phi'\overline{\Psi'}}{(\Phi + \overline{\Psi})^2}\omega = 0 \qquad n, m \in N_0 \tag{3.3}$$

denklemine dönüşür.Bu denklemlerin çözümleri, $f(z)$ ve $g(z)$ D de holomorf fonksiyonlar olmak üzere

$$\omega = D_n g + D_{m^*}\bar{f}$$

formundadır. Burada D_n ve D_m^* operatörleri

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n+m-k)!}{k!\,(n-k)!\,w^{n-k}} R^k \quad , \qquad D_m^* = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(n+m-k)!}{k!\,(m-k)!\,w^{n-k}} S^k$$

şeklinde tanımlıdır.

(3.3) de $n = m$ alınırsa $G = \frac{\Phi'\overline{\Psi'}}{(\Phi+\overline{\Psi})^2}$ olmak üzere

$$\omega_{z\bar{z}} - n(n+1)G\omega = 0 \ , \ n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü de

$$\omega = H_n g + H_n^* \bar{h} \tag{3.5}$$

formunda olup,

$$A_k^n = \frac{(-1)^{n-k}(2n-k)!}{k!\,(n-k)!} \ , \ R = \frac{1}{\Phi'}\frac{\partial}{\partial z} \ , \ S = \frac{1}{\overline{\Psi'}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ , \qquad w = \Phi + \overline{\Psi}$$

olmak üzere

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{w^{n-k}} R^k , \quad H_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k^n}{w^{n-k}} S^k$$

dır.

4.KOMPLEKS POTANSİYEL DENKLEMİ İLE SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, genel Vekua denkleminin bir özel hali olan ve önceki bölümlerde kompleks potansiyel denklemi olarak isimlendirilen $\omega_{\bar{z}} = b\overline{\omega}$ formundaki denklemin çözümlerini ve özelliklerini inceleyeceğiz.

Teorem 4.1.

Basit irtibatlı, düzgün sınırlı bir $D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde $\alpha(z)$ analitik bir fonksiyon ve $(\alpha + \bar{\alpha})\alpha_z \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$W_{\bar{z}} = \frac{m\overline{\alpha_z}}{\alpha + \bar{\alpha}}\overline{W} \tag{4.1}$$

denkleminin çözümü

$$W = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}}\left[mR^k\varphi - (m-k)\overline{R^k\varphi}\right], \qquad R = \frac{1}{\alpha_z}\partial z$$

şeklinde olup, burada $\varphi,\ D$ de analitik bir fonksiyondur.

İspat: (3.4) ve (3.5) den W nin reel ve sanal kısımları sırasıyla

$u = H_{m-1}g + \overline{H_{m-1}g}$ ve $v = H_m h + \overline{H_m h}$ formunda olup $g(z)$ ve $h(z)$, D de keyfi holomorf fonksiyonlardır.Bu durumda

$$W = u + iv = H_{m-1}g + \overline{H_{m-1}g} + i(H_m h + \overline{H_m h})$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k^{m-1}}{(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k-1}}R^k g + \overline{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k^{m-1}}{(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k-1}}R^k g}$$

$$+i\sum_{k=0}^{m} \frac{A_k^{m}}{(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}}R^k h + i\,\overline{\sum_{k=0}^{m} \frac{A_k^{m}}{(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}}R^k\, h}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-k-1}(2m-k-2)!}{k!\,(m-k-1)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k-1}} [R^k g + \overline{R^k g}]$$

$$+i \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(2m-k)!}{k!\,(m-k)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}} [R^k h + \overline{R^k h}]$$

yazılabilir.Bu ifadenin reel kısmında k yerine $k-1$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{(k-1)!\,(m-k)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}} \left[R^{k-1} g + \overline{R^{k-1} g}\right]$$

$$+i \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(2m-k)!}{k!\,(m-k)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}} [R^k h + \overline{R^k h}]$$

olur.Burada ilk toplam sembolü k ile çarpılıp bölünürse

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}} [k\left(R^{k-1} g + \overline{R^{k-1} g}\right) + i(2m-k)(R^k h + \overline{R^k h})]$$

elde edilir.

$2g = R\varphi$ için $kR^{k-1}g = \frac{k}{2}R^k\varphi$, $k\overline{R^{k-1}g} = \frac{k}{2}\overline{R^k\varphi}$

$2ih = \varphi$ için $2imR^k h - ikR^k h = mR^k\varphi - \frac{k}{2}R^k\varphi$

ve $2im\overline{R^k h} - ik\overline{R^k h} = -m\overline{R^k\varphi} + \frac{k}{2}\overline{R^k}\varphi$

yazılırsa,

$$W = Q_m^* = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}} [mR^k\varphi - (m-k)\overline{R^k\varphi}]$$

çözümü bulunur.

(4.1) de $m = 1$ için

$$W_{\bar{z}} = \frac{\overline{\alpha_z}}{\alpha+\bar{\alpha}} \overline{W}$$

denkleminin çözümü

$$W=\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^{1-k}(1-k)!}{k!\,(1-k)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{1-k}}\left[\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k\varphi-(1-k)\overline{\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k\varphi}\right]$$

olup, $k=0{,}1$ değerleri için bu denklemin çözümü

$$W(z)=\frac{\varphi_z}{\alpha_z}-\frac{\varphi-\bar{\varphi}}{\alpha+\bar{\alpha}} \tag{4.2}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.

$\alpha(z)$, D bölgesinde $\alpha+\bar{\alpha}\neq 0$ koşulunu sağlayan analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$\omega_{\bar{z}}=-\frac{\alpha_z}{\alpha+\bar{\alpha}}\bar{\omega} \tag{4.3}$$

Vekua denkleminin genel çözümü

$$\omega=\Psi_z-(\Psi+\bar{\Psi})\frac{\alpha_z}{\alpha+\bar{\alpha}} \tag{4.4}$$

dır. Burada Ψ keyfi analitik bir fonksiyondur.

İspat: Bu teoremin ispatı için [7] kaynağına bakılabilir.

Şimdi (4.2) ve (4.4) çözümleri arasındaki bağıntıyı inceleyelim. (4.4) ifadesi $\frac{i}{\alpha_z}$ ile çarpılırsa

$$\frac{i\omega}{\alpha_z}=\frac{i\Psi_z}{\alpha_z}-\frac{i(\Psi+\bar{\Psi})}{\alpha+\bar{\alpha}}$$

olur. $i\Psi=\varphi$ alınırsa $i\bar{\Psi}=-\bar{\varphi}$ olup,

$$\frac{i\omega}{\alpha_z}=\frac{\varphi_z}{\alpha_z}-\frac{\varphi-\bar{\varphi}}{\alpha+\bar{\alpha}}$$

elde edilir. O halde ω ile W arasındaki bağıntı

$$W=\frac{i\omega}{\alpha_z}$$

dır.Bu fonksiyon aynı zamanda

$$W_{\bar{z}} = \frac{\overline{\alpha_z}}{\alpha + \bar{\alpha}} \overline{W}$$

denkleminin çözümüdür.

$D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde genel Vekua denklemi olarak bilinen

$$\omega_{\bar{z}} = A(z,\bar{z})\omega + B(z,\bar{z})\bar{\omega} \ , \ A,B \in L_p(D,\mathbb{C}) \ , \ p > 1$$

denkleminin özel hali $\omega_{\bar{z}} = B(z,\bar{z})\bar{\omega}$ denklemidir. Bu denklemin potansiyel teori ve Schrödinger denklemi ile ilişkisi vardır. Bunlardan birisi

f, kompleks değişkenli, reel değerli, ikinci basamaktan sürekli kısmi türevlere sahip ve D üzerinde sıfır değerini almayan bir fonksiyon olmak üzere

$$W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f} \overline{W} \ , \ z \in D \tag{4.5}$$

formundaki denklemdir.Bu denklemin çözümü kompleks potansiyellerdir.

$$\upsilon(z,\bar{z}) = \frac{\Delta f}{f} \quad , \qquad \eta(z,\bar{z}) = 2\left(\frac{f_{\bar{z}}}{f}\right)^2 - \upsilon(z,\bar{z})$$

potansiyellerini göz önüne alalım.Burada υ ve η kompleks değişkenli reel değerli fonksiyonlardır.

Aşağıdaki teorem iki sabit Schrödinger denkleminin çözümleri ve (4.5) deki Vekua denkleminin çözümleri arasındaki basit ilişkiyi gösterir.

Teorem 4.3.

$W = W_1 + iW_2$, (4.5) denkleminin bir çözümü ise ,

$W_1 = ReW$ fonksiyonu $-\Delta W_1 + \upsilon W_1 = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

$W_2 = ImW$ fonksiyonu da Schrödinger denklemi olan $-\Delta W_2 + \eta W_2 = 0$

denkleminin çözümüdür.

İspat: $W_{z\bar{z}} = \Delta W$ olmak üzere (4.5) denkleminin her iki tarafının z ye göre türevi alınırsa

$$(W_{\bar{z}})_z = \left(\frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W}\right)_z = \frac{f\Delta f - ({f_x}^2 + {f_y}^2)}{f^2}\overline{W} + \frac{f_{\bar{z}}}{f}\,\overline{(W_{\bar{z}})}$$

$$W_{z\bar{z}} = \frac{f\Delta f - ({f_x}^2 + {f_y}^2)}{f^2}\overline{W} + \frac{f_{\bar{z}}}{f}\frac{f_z}{f}W$$

$$= \frac{\Delta f}{f}W_1 + i\left(2\frac{{f_x}^2 + {f_y}^2}{f^2} - \frac{\Delta f}{f}\right)W_2$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\Delta f}{f}W_1 + i\left(2\frac{{f_x}^2 + {f_y}^2}{f^2} - \frac{\Delta f}{f}\right)W_2 = \Delta W_1 + i\Delta W_2$$

yazılabilir. Reel ve sanal kısımların birbirine eşitlenmesiyle

$$\Delta W_1 = \frac{\Delta f}{f}W_1 \quad \Rightarrow \quad -\Delta W_1 + \upsilon(z,\bar{z})W_1 = 0$$

$$\Delta W_2 = \left(2\frac{{f_x}^2 + {f_y}^2}{f^2} - \frac{\Delta f}{f}\right)W_2 \quad \Rightarrow \quad -\Delta W_2 + \eta(z,\bar{z})W_2 = 0$$

olup, böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu teoreme göre W_1 reel değerli çözümü verildiğinde W_2 reel değerli çözümü ve W_2 çözümü verildiğinde W_1 reel değerli çözümü bulunabilir.Fakat bu durum denklemlerin kompleks çözümleri için geçerli değildir.

$\bar{A}$ operatörünün

$$\bar{A}[f](x,y) = \int_{\Gamma} u(x,y)dx + v(x,y)dy + c$$

şeklinde tanımlı olduğunu ve $f(z) = u + iv$ fonksiyonu için $u_y - v_x = 0$ eşitliği sağlanırsa $\Phi_{\bar{z}} = f$ denklemi sağlanacak şekilde reel değerli Φ fonksiyonunun

$$\Phi(x,y) = \bar{A}[f](x,y)$$

şeklinde bir gösterime sahip olduğunu göstermiştik.

Teorem 4.4.

W_1 , $-\Delta W_1 + \upsilon(z,\bar{z})W_1 = 0$ denkleminin çözümü olsun. Bu durumda

$-\Delta W_2 + \eta(z,\bar{z}\,)W_2 = 0$ denkleminin çözümü,

$$W_2 = f^{-1}\bar{A}\big(if^2\partial\bar{z}(f^{-1}W_1)\big)$$

olarak belirlenebilir.

Bu çözüm c keyfi reel sabit olmak üzere cf^{-1} ilave terimiyle tek bir

biçimdedir.

$-\Delta W_2 + \eta(z,\bar{z}\,)W_2 = 0$ denkleminin W_2 reel çözümü verildiğinde

$-\Delta W_1 + \ \upsilon(z,\bar{z})W_1 = 0$ denkleminin çözümü

$$W_1 = -f\bar{A}\left(\frac{i}{f^2}\partial\bar{z}(fW_2)\right)$$

şeklinde olup, bu çözüm cf ilave terimiyle tek türlüdür.

İspat:

$$W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W}$$

denkleminin çözümünün

$W = f\Phi + if^{-1}\Psi$ olması için gerek ve yeter şart $f\Phi_{\bar{z}} + if^{-1}\Psi_{\bar{z}} = 0$

olmasıdır.

$W = W_1 + iW_2$ olduğundan

$$\Phi = \frac{W_1}{f} \quad , \quad \Psi = W_2 f$$

yazılabilir. Ayrıca

$$f\Phi_{\bar{z}} + if^{-1}\Psi_{\bar{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_{\bar{z}} - if^{2}\Phi_{\bar{z}} = 0$$

dır.Buradan

$$\Psi_{\bar{z}} = if^{2}\Phi_{\bar{z}}$$

dır.

$$\Phi_{\bar{z}} = f \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = \bar{A}[f](x,y)$$

olduğu kullanılırsa

$$\Psi_{\bar{z}} = if^{2}\Phi_{\bar{z}} \quad \Rightarrow \quad \Psi(x,y) = \bar{A}[if^{2}\Phi_{\bar{z}}](x,y)$$

yazılabilir.Diğer taraftan

$$W_2 = \frac{\Psi}{f} \quad \Rightarrow \quad W_2 = f^{-1}\bar{A}[if^{2}\partial\bar{z}\Phi] = f^{-1}\bar{A}[if^{2}\partial\bar{z}(W_1 f^{-1})]$$

ve

$$\Phi_{\bar{z}} = \frac{\Psi_{\bar{z}}}{if^{2}} \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = \bar{A}\left[\frac{\Psi_{\bar{z}}}{if^{2}}\right](x,y)$$

olup, böylece

$$W_1 = \Phi f \quad \Rightarrow \quad W_1 = f\bar{A}[-if^{-2}\partial\bar{z}\Psi] = -f\bar{A}[if^{-2}\partial\bar{z}(fW_2)]$$

elde edilir.

Eğer $\upsilon(z,\bar{z}) = 0$ ve $f(z) = 1$ ise $W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W}$ denklemi $W_{\bar{z}} = 0$ homojen Cauchy-Riemann denklemine dönüşür ve W_1 reel harmonik fonksiyon verildiğinde $W = W_1 + iW_2$ fonksiyonu analitik olacak şekilde W_1 in W_2 harmonik konjugesi bir sabit farkıyla oluşturulabilir.Tersine W_2 harmonik fonksiyonu verildiğinde $W = W_1 + iW_2$ analitik olacak şekilde W_2 nin W_1 harmonik konjugesi yine bir sabit farkıyla sonsuz farklı şekilde belirlenebilir.

Not 4.1. $W = W_1 + iW_2$ olmak üzere $W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W}$ denklemi

$$f(f^{-1}W_1)_{\bar{z}} + if^{-1}(fW_2)_{\bar{z}} = 0$$

olarak da yazılabilir. Gerçekten;

$$W_{\bar{z}} = (W_1)_{\bar{z}} + i(W_2)_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}(W_1 - iW_2)$$

$$\Rightarrow (W_1)_{\bar{z}} - \frac{f_{\bar{z}}}{f}W_1 + i(W_2)_{\bar{z}} + i\frac{f_{\bar{z}}}{f}W_2 = 0$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{f(W_1)_{\bar{z}} - f_{\bar{z}}W_1}{f^2}\right) + \frac{i}{f}(f(W_2)_{\bar{z}} + f_{\bar{z}}W_2) = 0$$

$$\Rightarrow f(f^{-1}W_1)_{\bar{z}} + if^{-1}(fW_2)_{\bar{z}} = 0$$

olarak bulunur.

Teorem 4.5.

$W = W_1 + iW_2$, (4.5) denkleminin bir çözümü ve $f = б^{1/2}$ olsun.

Bu takdirde

$u = б^{-1/2}W_1$, D de $div(б\nabla u) = 0$ denkleminin çözümüdür.Ayrıca

$v = б^{1/2}W_2$ de $div(б^{-1}\nabla v) = 0$ denkleminin çözümüdür.

İspat: $f(f^{-1}W_1)_{\bar{z}} + if^{-1}(fW_2)_{\bar{z}} = 0$ ifadesinde $f = б^{1/2}$ yazılırsa

$$б^{1/2}\left(\frac{W_1}{б^{1/2}}\right)_{\bar{z}} + i\frac{1}{б^{1/2}}(б^{1/2}W_2)_{\bar{z}} = 0$$

olup, bu ifade $б^{1/2}$ ile çarpılır ve z ye göre türev alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[б\left(\frac{W_1}{б^{1/2}}\right)_{\bar{z}}\right] + i\Delta\left(б^{1/2}W_2\right) = 0$$

olur.Buradan

$$Re\ \frac{\partial}{\partial z}\left[б\left(\frac{W_1}{б^{1/2}}\right)_{\bar{z}}\right] = 0 \quad ,$$

$$б\Delta(W_1б^{-1/2}) + \nablaб\nabla\left(W_1б^{-1/2}\right) = 0$$

yazılabilir.Böylece

$$div\left(б\nabla\left(W_1 б^{-1/2}\right)\right) = div(б\nabla u) = 0$$

bulunur. Diğer taraftan

$$б^{1/2}\left(\frac{W_1}{б^{1/2}}\right)_{\bar{z}} + i\frac{1}{б^{1/2}}(б^{1/2}W_2)_{\bar{z}} = 0$$

ifadesi $\frac{1}{б^{1/2}}$ ile çarpılır ve ∂z operatörü uygulanırsa

$$\Delta\left(\frac{W_1}{б^{1/2}}\right) + i\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{б}\left(б^{1/2}W_2\right)_{\bar{z}}\right] = 0$$

olur.Buradan

$$Re\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{б}(б^{1/2}W_2)_{\bar{z}}\right] = 0 \ ,$$

$$\frac{1}{б}\Delta\left(б^{1/2}W_2\right) + \nabla\left(\frac{1}{б}\right)\nabla\left(б^{1/2}W_2\right) = 0 \ ,$$

$$div\left[\frac{1}{б}\nabla\left(б^{1/2}W_2\right)\right] = 0 \ ,$$

$$div\left(\frac{1}{б}\nabla v\right) = 0$$

elde edilir.Burada $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ gradient operatörüdür.

Teorem 4.6.

u , $div(б\nabla u) = 0$ denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $f = б^{1/2}$ olmak üzere

$W = б^{1/2}u + iб^{-1/2}v$ fonksiyonu $W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W}$ denkleminin bir çözümü ise

bu takdirde $v = \bar{A}(iбu_{\bar{z}})$ fonksiyonu

$$div(б^{-1}\nabla v) = 0 \tag{4.6}$$

için bir çözümdür.

Tersine (4.6) nın v çözümü verilsin. Bu takdirde $div(б\nabla u) = 0$ denkleminin çözümü $u = -\bar{A}(iб^{-1}v_{\bar{z}})$ dir.

İspat: Teorem 4.5.den

$$u = б^{-1/2}W_1 \quad \Rightarrow \quad W_1 = б^{1/2}u$$

$$v = б^{1/2}W_2 \quad \Rightarrow \quad W_2 = б^{-1/2}v$$

olup,

$$W_2 = f^{-1}\bar{A}\left(if^2\partial\bar{z}(f^{-1}W_1)\right)$$

olduğu göz önüne alınır ve $f = б^{1/2}$ yerine yazılıra

$$W_2 = б^{-1/2}\bar{A}\left(iб\partial\bar{z}\left(б^{-1/2}W_1\right)\right)$$

olur. $W_2 = б^{-1/2}v$ olduğundan

$$б^{-1/2}\bar{A}\left(iб\partial\bar{z}\left(б^{-1/2}W_1\right)\right) = б^{-1/2}v$$

yazılabilir.Buradan

$$v = \bar{A}[iбu_{\bar{z}}]$$

elde edilir.

Benzer şekilde $div(б\nabla u) = 0$ denkleminin çözümü

$$W_1 = -f\bar{A}[if^{-2}\partial\bar{z}(fW_2)]$$

ifadesinde $f = б^{1/2}$ yazılırsa

$$W_1 = -б^{1/2}\bar{A}[iб^{-1}\partial\bar{z}(б^{1/2}W_2)]$$

olur. $W_1 = б^{1/2}u$ olduğundan

$$-б^{1/2}\bar{A}\left[iб^{-1}\partial\bar{z}\left(б^{1/2}W_2\right)\right] = б^{1/2}u$$

yazılabilir.Burada

$u = -\bar{A}[i\text{б}^{-1}v_{\bar{z}}]$

elde edilir.Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.

$\alpha\,, D$ de analitik bir fonksiyon, $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_0 = Re\alpha$ ve $\alpha_1 = Im\alpha$ olsun.

$f = \alpha_0^m$ olmak üzere

$$\frac{m\overline{\alpha_z}}{\alpha + \bar{\alpha}} = \frac{\partial_{\bar{z}} f}{f}$$

eşitliği vardır.

İspat:

$$\frac{m\overline{\alpha_z}}{\alpha + \bar{\alpha}} = \frac{m\partial_{\bar{z}}(\alpha_0 - i\alpha_1)}{\alpha + \bar{\alpha}}$$

$$= \frac{m\partial_{\bar{z}}(2\alpha_0 - (\alpha_0 + i\alpha_1)}{2\alpha_0}$$

$$= \frac{m\partial_{\bar{z}}(2\alpha_0)}{2\alpha_0} - \frac{m\partial_{\bar{z}}(\alpha)}{2\alpha_0}$$

$$= \frac{m(\alpha_0)_{\bar{z}}}{\alpha_0}$$

$$= \frac{\partial_{\bar{z}}(\alpha_0)^m}{\alpha_0^m}$$

$$= \frac{\partial_{\bar{z}} f}{f}$$

olup, böylece ispat tamamlanır.

Bu sonuçtan Teorem 4.1. aşağıdaki gibi ifade edilebilir :

Teorem 4.7.

α_0 , D de sıfırdan farklı reel değerli harmonik bir fonksiyon , $f = \alpha_0^m$, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W}$$

denkleminin çözümü

$$W = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(\alpha+\bar{\alpha})^{m-k}}\left[m\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k \varphi - (m-k)\overline{\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k \varphi}\right] \qquad (4.7)$$

şeklindedir.

İspat: Teorem4.1. den

$$W_{\bar{z}} = \frac{m\overline{\alpha_z}}{\alpha+\bar{\alpha}}\overline{W}$$

denkleminin çözümünün (4.7) formunda olduğu biliniyor.

Lemma 4.1. den

$$\frac{m\overline{\alpha_z}}{\alpha+\bar{\alpha}} = \frac{\partial_{\bar{z}} f}{f}$$

olduğundan $f = \alpha_0^m$ için $W_{\bar{z}} = \frac{m\overline{\alpha_z}}{\alpha+\bar{\alpha}}\overline{W}$ denklemi $W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W}$ denklemine eşit olup, $W_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{W}$ denkleminin çözümü de (4.7) formundadır.

Teorem 4.8.

α_0 , D de sıfır değerini almayan reel değerli harmonik bir fonksiyon ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p = m(m-1)\left(\frac{(\alpha_0)_{\bar{z}}}{\alpha_0}\right)^2$ için

$$-\Delta W_1 + pW_1 = 0$$

Schrödinger denkleminin genel çözümü

$$W_1 = Re\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(2\alpha_0)^{m-k}}\left[m\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k\varphi-(m-k)\overline{\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k\varphi}\right]$$

ve $\quad q = m(m+1)\left(\frac{(\alpha_0)_{\bar{z}}}{\alpha_0}\right)^2$ için

$$-\Delta W_2 + qW_2 = 0$$

Schrödinger denkleminin genel çözümü

$$W_2 = Im\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(2\alpha_0)^{m-k}}\left[m\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k\varphi-(m-k)\overline{\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k\varphi}\right]$$

formundadır.

Burada $\alpha\,,D$ de analitik bir fonksiyon $Re\alpha=\alpha_0$ ve $\varphi\,,D$ de keyfi analitik bir fonksiyondur.

İspat: $f=\alpha_0^m$ ve α_0 harmonik bir fonksiyon olmak üzere W, (4.5) denkleminin bir çözümü ise $W_1 = ReW$, $W_2 = ImW$ sırasıyla

$-\Delta W_1 + pW_1 = 0$, $-\Delta W_2 + qW_2 = 0$ denklemlerinin çözümleridir.Tersine Teorem 4.4. den $-\Delta W_1 + pW_1 = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü (4.5) in çözümünün reel kısmı, $-\Delta W_2 + qW_2 = 0$ denkleminin herhangi bir çözümü de (4.5) in çözümünün sanal kısmıdır.Sonuç olarak (4.7) denkleminin reel ve sanal kısımları ayrılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.9.

$\alpha_0\,,D$ de sıfır değerini almayan reel değerli harmonik bir fonksiyon ve $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere $б=\alpha_0^{2m}$ ise $div(б\nabla u)=0$ denkleminin çözümü

$$u = б^{-1/2}Re\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(2\alpha_0)^{m-k}}\left[m\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k\varphi-(m-k)\overline{\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k\varphi}\right]$$

ve $div(б^{-1}\nabla v)=0$ denkleminin çözümü

$$v = б^{1/2} Im \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}(2m-1-k)!}{k!\,(m-k)!\,(2\alpha_0)^{m-k}} \left[m\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k \varphi - (m-k)\overline{\left(\frac{1}{\alpha_z}\partial z\right)^k} \varphi \right]$$

formundadır.

İspat: Teorem 4.5. den $u = б^{-1/2}W_1$ ve $v = б^{1/2}W_2$ olduğundan Teorem 4.8. in kullanılmasıyla teoremin doğruluğu doğrudan görülür.

f, reel değerli sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere $(-\Delta + \upsilon)f = 0$ denkleminin bir çözümü olsun. Burada υ reel değerli bir fonksiyondur.

$$\Psi_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{\Psi}$$

denkleminin keyfi bir çözümü Ψ olmak üzere

$$\omega = \Psi_z + p\Psi + q\overline{\Psi} \tag{4.8}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.Teorem 4.3. den

$-\Delta\Psi_1 + \upsilon\Psi_1 = 0$ ve $-\Delta\Psi_2 + \eta\Psi_2 = 0$

olduğu kullanılırsa

$$-\Delta\Psi_1 + \upsilon\Psi_1 - i\Delta\Psi_2 + i\eta\Psi_2 = 0$$

$$\Delta\Psi_1 + i\Delta\Psi_2 = \upsilon\Psi_1 + i\eta\Psi_2$$

$$\Psi_1 = Re\Psi = \frac{\Psi + \overline{\Psi}}{2} \quad , i\Psi_2 = Im\Psi = \frac{\Psi - \overline{\Psi}}{2}$$

$$\Delta\Psi = \partial_{\bar{z}}\Psi_z = \upsilon\left(\frac{\Psi + \overline{\Psi}}{2}\right) + \eta\left(\frac{\Psi - \overline{\Psi}}{2}\right)$$

yazılabilir.

(4.8) fonksiyonuna $\partial\bar{z}$ operatörü uygulanırsa

$$\omega_{\bar{z}} = \frac{\upsilon}{2}(\Psi + \overline{\Psi}) + \frac{\eta}{2}(\Psi - \overline{\Psi}) + p_{\bar{z}}\Psi + p\frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{\Psi} + q_{\bar{z}}\overline{\Psi} + q\overline{\Psi_z}$$

$$\omega_{\bar{z}} = q\overline{\Psi_z} + \overline{\Psi}\left[\frac{\upsilon - \eta}{2} + p\frac{f_{\bar{z}}}{f} + q_{\bar{z}}\right] + \Psi\left[\frac{\upsilon + \eta}{2} + p_{\bar{z}}\right] \tag{4.9}$$

olur.

Diğer taraftan (4.8) fonksiyonunun eşleniği alınıp q ile çarpılırsa

$$q\overline{\omega} = q\overline{\Psi_z} + \bar{p}q\overline{\Psi} + q\bar{q}\Psi \qquad (4.10)$$

elde edilir.

$$\omega_{\bar{z}} = q\overline{\omega}$$

denkleminin bir ω çözümü bulunabilir.

(4.9) ve (4.10) ifadelerindeki eşitlenirse

$$\frac{\upsilon - \eta}{2} + p\frac{f_{\bar{z}}}{f} + q_{\bar{z}} = \bar{p}q \qquad (4.11)$$

$$\frac{\upsilon + \eta}{2} + p_{\bar{z}} = q\bar{q} \qquad (4.12)$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\upsilon + \eta}{2} = \left(\frac{| f_{\bar{z}} |}{f}\right)^2$$

dir.

$p = q + \bar{u}$ formunda bir p fonksiyonunu göz önüne alalım.Burada u kompleks değerli bir fonksiyondur. (4.11) ve (4.12) de $p = q + \bar{u}$ yazılırsa

$$q_{\bar{z}} - q\bar{q} + q\frac{f_{\bar{z}}}{f} - qu + \bar{u}\frac{f_{\bar{z}}}{f} + \frac{\upsilon - \eta}{2} = 0$$

$$q_{\bar{z}} - q\bar{q} + \overline{u_z} + \left(\frac{| f_{\bar{z}} |}{f}\right)^2 = 0$$

olur.

g, reel değerli sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere

$$q = -\frac{g_z}{g} \qquad (4.13)$$

özel formu için

$$q_{\bar{z}} = \frac{-g_{z\bar{z}}g + g_z g_{\bar{z}}}{g^2} = -\frac{g_{z\bar{z}}}{g} + \frac{g_z}{g}\frac{g_{\bar{z}}}{g}$$

olup, buradan

$$q_{\bar{z}} - q\bar{q} = -\frac{\Delta g}{g} \tag{4.14}$$

elde edilir.

$$q_{\bar{z}} - q\bar{q} + q\frac{f_{\bar{z}}}{f} - qu + \bar{u}\frac{f_{\bar{z}}}{f} + \frac{\upsilon - \eta}{2} = 0$$

ifadesinde (4.13) ve (4.14) kullanılırsa

$$-\frac{\Delta g}{g} - \frac{g_z}{g}\frac{f_{\bar{z}}}{f} + \frac{g_z}{g}u + \bar{u}\frac{f_{\bar{z}}}{f} + \frac{\upsilon - \eta}{2} = 0 \tag{4.15}$$

bulunur.

$$u = \frac{f_{\bar{z}}}{f}$$

için

$$\overline{u_z} = \frac{\Delta f}{f} - \left(\frac{|\, f_{\bar{z}}\, |}{f}\right)^2$$

ve

$$\upsilon(z,\bar{z}) = \frac{\Delta f}{f} \quad , \qquad \eta(z,\bar{z}) = 2\left(\frac{f_{\bar{z}}}{f}\right)^2 - \upsilon(z,\bar{z}\,)$$

olduğu kullanılırsa

$$\frac{\upsilon - \eta}{2} = \frac{\Delta f}{f} - \left(\frac{|\, f_{\bar{z}}\, |}{f}\right)^2$$

elde edilir.Buradan

$$\frac{\upsilon - \eta}{2} = \overline{u_z}$$

olduğu görülür.Bu durumda (4.15) denklemi

$$-\frac{\Delta g}{g}+\left(\frac{|\,f_{\bar{z}}\,|}{f}\right)^2+\overline{u_z}=0 \qquad (4.16)$$

denklemine dönüşür.

$$u=\frac{f_{\bar{z}}}{f} \;\Rightarrow\; Reu=\frac{f_x}{f}\;, \qquad Imu=-\frac{f_y}{f}\;, \qquad \partial y\frac{f_x}{f}-\partial x\frac{f_y}{f}=0$$

dır. $u=\Phi_{\bar{z}}$ olacak şekilde reel değerli bir Φ fonksiyonu vardır.

$\Phi=\ln f$ seçilirse $u=\frac{f_{\bar{z}}}{f}=\Phi_{\bar{z}}$ dir.

Böylece (4.16) denklemi $u=\frac{f_{\bar{z}}}{f}$ için

$$-\frac{\Delta g}{g}+\left(\frac{|\,f_{\bar{z}}\,|}{f}\right)^2+\frac{\upsilon-\eta}{2}=0 \qquad (4.17)$$

formunda da yazılabilir. (4.17) den

$$\frac{\upsilon-\eta}{2}=-\left(\frac{|\,f_{\bar{z}}\,|}{f}\right)^2+\upsilon \qquad (4.18)$$

dır.

(4.18) den η çözülüp (4.17) de yerine yazılır

$$-\frac{\Delta g}{g}+\left(\frac{|\,f_{\bar{z}}\,|}{f}\right)^2+\frac{\upsilon}{2}-\frac{1}{2}\left[2\left(\frac{f_{\bar{z}}}{f}\right)^2-\upsilon\right]=0$$

ve buradan

$$-\frac{\Delta g}{g}+\upsilon=0 \quad\Rightarrow\quad -\Delta g+\upsilon g=0$$

bulunur.Bu denklem Schrödinger denklemidir.

Teorem 4.10.

g fonksiyonu $(-\Delta+\upsilon)g=0$ denkleminin reel değerli sıfırdan farklı bir çözümü, υ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\omega_{\bar{z}} + \frac{g_z}{g}\overline{\omega} = 0$$

denkleminin çözümü

$$\omega = \Psi_z + \frac{\partial z(f/g)}{f/g}\Psi - \frac{g_z}{g}\overline{\Psi}$$

formundadır.Burada f, $(-\Delta + \upsilon)g = 0$ için reel değerli bir çözüm ve Ψ,

$$\Psi_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{f}\overline{\Psi}$$

denkleminin çözümüdür.

İspat:

$$\omega_{\bar{z}} = -\frac{g_z}{g}\overline{\omega}$$

denkleminin çözümü (4.8) formundadır.

$p = q + \bar{u}$ ifadesinde q ve u değerleri yerine yazılırsa

$$p = -\frac{g_z}{g} + \frac{f_z}{f}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$p = \left(\frac{f}{g}\right)_z \frac{g}{f}$$

elde edilir. Bu değer (4.8) çözümünde yerine yazılırsa

$$\omega = \Psi_z + \frac{\partial z(f/g)}{f/g}\Psi - \frac{g_z}{g}\overline{\Psi}$$

çözümü bulunur.

Not 4.3.

$g,$ harmonik bir fonksiyon olsun. Teorem 4.10. da $\upsilon = 0$, $f = 1$ alınırsa Teorem 4.2. bu teoremin bir sonucu olur.

Not 4.4.

$$\omega_{\bar{z}} = -\frac{g_z}{g}\overline{\omega} \;, \qquad W_{\bar{z}} = \frac{g_{\bar{z}}}{g}\overline{W}$$

denklemlerinin çözümleri arasında ilişki vardır. Eğer W , $W_{\bar{z}} = \frac{g_{\bar{z}}}{g}\overline{W}$ denkleminin bir çözümü ise

$$\omega = W_z - \frac{g_z}{g}\overline{W}$$

sağlanır.

$$W_{\bar{z}} = A_E W + B_E \overline{W} \quad , \quad \omega_{\bar{z}} = a_E \omega + b_E \overline{\omega}$$

Vekua denklemlerini göz önüne alalım. $W_{\bar{z}} = \frac{g_{\bar{z}}}{g}\overline{W}$ denkleminin çözümünün $W = F\Phi + G\Psi$ olması için gerek ve yeter şart $F\Phi_{\bar{z}} + G\Psi_{\bar{z}} = 0$ olmasıdır. $W = F\Phi + G\Psi$ olmak üzere $F\Phi_{\bar{z}} + G\Psi_{\bar{z}} = 0$ olması şartıyla

$$\omega = \dot{W} = \frac{d(F,G)W}{dz} = W_z - A_E W - B_E \overline{W}$$

eşitliği vardır. [5]

$F = g$, $G = ig^{-1}$ için $A_E = 0$, $B_E = \frac{g_z}{g}$ olur. Buradan

$$\omega = \dot{W} = W_z - \frac{g_z}{g}\overline{W}$$

bulunur.Burada A_E, B_E, a_E, b_E karakteristik katsayılardır.
Tersine ω , $\omega_{\bar{z}} = -\frac{g_z}{g}\overline{\omega}$ denkleminin bir çözümü ise

$$W(z) = \frac{1}{2}\left[g(z) Re \int_{z_0}^{z} \frac{\omega(\xi)}{g(\xi)} d\xi + \frac{i}{g(z)} Im \int_{z_0}^{z} g(\xi)\omega(\xi) d\xi \right]$$

ifadesi $W_{\bar{z}} = \frac{g_{\bar{z}}}{g}\overline{W}$ denkleminin bir çözümüdür. z_0, D bölgesinde keyfi bir noktadır.Buradan $W(z)$ nin $\omega(z)$ nin antitürevi olduğu görülür.

Teorem 4.11.

g, $(-\Delta + \upsilon)g = 0$ denkleminin reel değerli sıfırdan farklı bir çözümü, υ reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$W_{\bar{z}} = \frac{g_{\bar{z}}}{g}\overline{W}$$

denkleminin genel çözümü

$$W(z) = \frac{g(z)}{2} Re \int_{z_0}^{z} \frac{1}{g(\xi)} \left(\partial_\xi \Psi(\xi) + \frac{\partial_\xi (f(\xi)/g(\xi))}{f(\xi)/g(\xi)} \Psi(\xi) - \frac{\partial_\xi g(\xi)}{g(\xi)} \overline{\Psi(\xi)} \right) d\xi$$

$$+ \frac{i}{2g(\xi)} Im \int_{z_0}^{z} g(\xi) \left(\partial_\xi \Psi(\xi) + \frac{\partial_\xi\, (f(\xi)/g(\xi))}{f(\xi)/g(\xi)} \Psi(\xi) - \frac{\partial_\xi g(\xi)}{g(\xi)} \overline{\Psi(\xi)} \right) d\xi$$

dır.

İspat:

$$\omega\,, \ \ \omega_{\bar{z}} = -\frac{g_z}{g}\overline{\omega}$$

denkleminin çözümü ise

$$W(z) = \frac{1}{2}\left[g(z) Re \int_{z_0}^{z} \frac{\omega(\xi)}{g(\xi)} d\xi + \frac{i}{g(z)} Im \int_{z_0}^{z} g(\xi)\omega(\xi) d\xi \right] \qquad (4.19)$$

ifadesinin de $W_{\bar{z}} = \frac{g_{\bar{z}}}{g}\overline{W}$ denkleminin çözümü olduğunu biliyoruz. Teorem 4.10. dan (4.19) da

$$\omega(\xi) = \Psi_\xi + \frac{\partial_\xi (f/g)}{f/g} \Psi - \frac{g_\xi}{g} \overline{\Psi}$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$W(z) = \frac{g(z)}{2} Re \int_{z_0}^{z} \frac{1}{g(\xi)} \left(\partial_\xi \Psi(\xi) + \frac{\partial_\xi (f(\xi)/g(\xi))}{f(\xi)/g(\xi)} \Psi(\xi) - \frac{\partial_\xi g(\xi)}{g(\xi)} \overline{\Psi(\xi)} \right) d\xi$$

$$+ \frac{i}{2g(\xi)} Im \int_{z_0}^{z} g(\xi) \left(\partial_\xi \Psi(\xi) + \frac{\partial_\xi (f(\xi)/g(\xi))}{f(\xi)/g(\xi)} \Psi(\xi) - \frac{\partial_\xi g(\xi)}{g(\xi)} \overline{\Psi(\xi)} \right) d\xi$$

çözümü bulunur.

Örnek 4.1.

c, keyfi kompleks sabit olmak üzere $\Psi_{\bar{z}} = c\overline{\Psi}$ denklemini inceleyelim. Ψ,

$$-\Delta\Psi + | c |^2 \Psi = 0 \qquad (4.20)$$

Helmholtz denkleminin çözümüdür.

Ψ_1, (4.20) nin reel değerli çözümü ise $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ olmak üzere $\Psi_{\bar{z}} = c\overline{\Psi}$ denkleminin çözümü olacak şekilde Ψ_2 reel değerli fonksiyonu vardır.

Burada

$$f = e^{ax+by}, \quad a = Re\, c \,, \quad b = Im\, c$$

dir. Teorem 4.4.den

$$\Psi_2 = e^{-(ax+by)}\bar{A}[ie^{2(ax+by)}\partial\bar{z}(\Psi_1 e^{-(ax+by)})]$$

$$\Psi_1 = -e^{ax+by}\bar{A}[ie^{-2(ax+by)}\partial\bar{z}(e^{ax+by}\Psi_2]$$

bulunur.

Böylece $\Psi_{\bar{z}} = c\overline{\Psi}$ denklemi Helmholtz denklemi ile ilişkilendirilebilir.

5.SONUÇ

Bu tezde, önce kompleks kısmi türevli denklemlerin çözümlerini ortaya koymada güçlü bir metot olan polinom operatörleri verilmiş ve daha sonra polinom operatörü metodu ile belli tipten denklemlerin çözümleri keyfi bir analitik fonksiyona bağlı olarak elde edilmiştir.Son bölümde kompleks potansiyellerle Schrödinger denkleminin çözümü arasında belli bir bağıntının olması için gerekli koşullar ortaya konmuştur.Bu tez orijinal sonuç içermemektedir.Ancak ileri bir araştırma konusu olarak tezde ele alınan yöntemler kullanılarak daha genel sonuçlar ortaya konulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Bauer, K.W. and Ruscheweyh, S., Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. Springer-Verlag, Berlin,1980.

[2] S. Şengül, Bauer Operatörleri Yardımıyla $\omega_{z\bar{z}} + A\omega_z + B\omega_{\bar{z}} + D\omega = 0$ Formundaki Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Ankara, 1990.

[3] Koca, K., Über eine Darstellung von Lösungen der komplexen Differentialgleichung $\omega_{\bar{z}} = b_{(F,G)}\overline{\omega}$, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 28, 387-393,1993.

[4] Kravchenko, V.V., On a Relation of Pseudoanalytic Function Theory to the Two-Dimensional Stationary Schrödinger Equation and Taylor Series in Formal Powers for its Solutions. Journal of Physics A: Mathematical and General,38(18), 3947-3964. Mexico, 2005.

[5] Bers, L., Theory of Pseudo-Analytic Functions. New York,1952.

[6] Bers, L., An Outline of the Theory of Pseudoanalytic Functions. Bulletin the American Mathematical Society, 62, 291–331. New York,1956.

[7] Čanak,M.,Über die Explizit-Losbaren Vekuasche Differentialgleichungen.
Publications de L'Institut Mathématique,Nouvelle Série,74(88),103–110, 2003.

[8] Kravchenko,V.V.,On Explicitly Solvable Vekua Equations and Explicit Solution of the Stationary Schrödinger Equation and of the Equation $div(\sigma\nabla u) = 0$. Mexico, 2007.