KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

LOKAL MORREY-TİPLİ UZAYLAR ARASINDA GÖMME TEOREMLERİ

TUĞÇE ÜNVER

KASIM 2015

Matematik Anabilim Dalında Tuğçe ÜNVER tarafından hazırlanan LOKAL MORREY - TİPLİ UZAYLAR ARASINDA GÖMME TEOREMLERİ adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Ana Bilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Vagif GULİYEV	________________
Üye	:	Prof. Dr. Kerim KOCA	________________
Üye	:	Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ	________________
Üye	:	Prof. Dr. Ali ARAL	________________
Üye (Danışman)	:	Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV	________________

04/11/2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

LOKAL MORREY-TİPLİ UZAYLAR ARASINDA
GÖMME TEOREMLERİ

ÜNVER, Tuğçe
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora tezi
Danışman: Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV
KASIM 2015, 86 sayfa

Bu tez ilk bölümü giriş ve son bölümü tartışma ve sonuç olmak üzere toplam beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak temel kavram ve teoremler verilmiş, diskretleştirme metodu anlatılmış ve tez boyunca incelenecek fonksiyon uzayları tanımlanmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde Hardy-tipli eşitsizlikler tanıtılmış ve yeni eşitsizlikler karakterize edilmiştir.

Dördüncü bölümde ağırlıklı Lebesgue uzayları ve ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylar arasındaki gömmeler ve ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylarla komplementar ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylar arasındaki gömmeler karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lokal Morrey-tipli Uzaylar, Ağırlıklı Lebesgue Uzayları, Hardy-tipli Eşitsizlikler, Gömmeler

ABSTRACT

EMBEDDINGS BETWEEN WEIGHTED LOCAL MORREY-TYPE SPACES

ÜNVER, Tuğçe
Kirikkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Rza MUSTAFAYEV

NOVEMBER 2015, 86 pages

This thesis consists of five chapters including the introduction and the discussion and conclusion parts.

Basic concepts, definitions and necessary statements for the proof of the main results are given in Chapter 2. Moreover, the discretization method and the weighted local Morrey-type spaces are introduced in this chapter.

In Chapter 3, we recall the solutions of some direct and reverse Hardy-type inequalities and iterated Hardy-type inequalities. The characterization of some new reverse Hardy-type inequalities for supremal operator are given also in this chapter.

Embeddings between weighted Lebesgue spaces and weighted local Morrey-type spaces and embeddings between weighted local Morrey-type spaces and complementary weighted local Morrey-type spaces are characterized in Chapter 4.

Key words: Local Morrey-type Spaces, Weighted Lebesgue Spaces, Hardy-type Inequalities, Embeddings

TEŞEKKÜR

Tezimin oluşması sürecinde bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek beni yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV'e, tez çalışmam boyunca görüş ve önerileriyle tezimin gelişmesine yardımcı olan Sayın Prof. Dr. Amiran GOGATISHVILI'ye, fikir ve tecrübeleriyle tezime katkıda bulunan değerli Tez İzleme Komitesi Üyeleri Sayın Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye ve Sayın Prof. Dr. Ali ARAL'a, büyük fedakarlıklarla bana destek olan aileme, son olarak birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathfrak{M}(A)$	A üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı
$\mathfrak{M}^{+}(A)$	$\mathfrak{M}(A)$ nın negatif olmayan elemanlarının sınıfı
$\mathcal{W}(A)$	ağırlık fonksiyonları sınıfı
$L_p(\mathbb{R}^n)$	p. mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$	p. mertebeden lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$L_{p,v}(\mathbb{R}^n)$	ağırlıklı Lebesgue uzayı
$l^q(\{w_k\}, N, M)$	ağırlıklı diskret Lebesgue uzayı
$M_{p,\lambda}$	Morrey uzayı
$LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$	lokal Morrey-tipli uzay
$LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$	ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzay
${}^{c}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$	komplementar lokal Morrey-tipli uzay
${}^{c}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$	ağırlıklı komplementar lokal Morrey-tipli uzay
Hf	Hardy operatörü
H_nf	n-boyutlu Hardy operatörü
H^*f	dual Hardy operatörü
H_n^*f	n-boyutlu dual Hardy operatörü
Sf	supremal operatör
S^*f	supremal operatörün duali
S_nf	n-boyutlu supremal operatör
S_n^*f	n-boyutlu supremal operatörün duali
Mf	Maksimal operatör

1. GİRİŞ

Reel ve harmonik analizin, maksimal operatör, kesirli maksimal operatör, Riesz potansiyeli, singüler integral operatör gibi, klasik operatörlerinin bir ağırlıklı Lebesgue uzayından diğerine sınırlılığı problemi kapsamlı bir biçimde incelenmiştir. Bahsedilen operatörlerin sınırlı olması için ağırlık fonksiyonları üzerindeki gerek ve yeter koşullar, sayısal parametrelerin büyük çoğunluğu için elde edilmiştir. Literatürdeki sonuçların reel analiz ve kısmi türevli diferensiyel denklemler teorisinde pek çok uygulamaları vardır. Kısmi türevli diferensiyel denklemler teorisinde ağırlıklı Lebesgue uzaylarının yanısıra Morrey uzayları ve bu uzayların genelleştirmeleri de önemli rol oynamaktadır.

$M_{p,\lambda}$ ile gösterilen Morrey uzayları [58] de 1938 yılında C.B. Morrey tarafından Varyasyon Analizi'nde ortaya çıkan regülerlik problemlerinin araştırılabilmesi için $1 \le p < \infty$ ve $0 \le \lambda \le n$ olmak üzere

$$M_{p,\lambda} = \left\{ f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{M_{p,\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $B(x,r)$, $x \in \mathbb{R}^n$ merkezli, r yarıçaplı açık yuvar olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, r>0} r^{\frac{\lambda-n}{p}} \|f\|_{p,B(x,r)}$$

dir. Bilindiği gibi $1 \le p < \infty$ için $M_{p,n} = L_p$, $M_{p,0} = L_\infty$, ve $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise $M_{p,\lambda} = \{0\}$ dır.

Bu uzaylar, özellikle, parabolik ve eliptik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının incelenmesinde oldukça kullanışlıdır (bkz., [31]). Ayrıca bu uzaylarda reel ve harmonik analizin klasik operatölerinin sınırlılık problemleri de incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir (bkz., [1–3, 21, 25, 63, 65, 70]).

$LM_{p\theta,\omega}$ ile gösterilen lokal Morrey-tipli uzaylar ve ${}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}$ ile gösterilen komplementar lokal Morrey-tipli uzaylar ilk olarak 1994'te [45] te V.S. Guliyev tarafından doktora tezinde tanımlanmıştır. [45] te homogen Lie grupları üzerinde tanımlanmış kesirli integral operatörlerin ve singüler integral operatörlerin $LM_{p\theta,\omega}$ üzerinde sınırlı olması için yeterli koşullar elde edilmiştir.

[11] de $LM_{p\theta,\omega}$ lokal Morrey-tipli uzaylar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır: $0 < p, \theta \leq \infty$, ω, $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$LM_{p\theta,\omega} := \left\{ f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{LM_{p\theta,\omega}} < \infty \right\}$$

uzayına lokal Morrey-tipli uzay denir. Burada

$$\|f\|_{LM_{p\theta,\omega}} := \Big\| \|f\|_{p,B(0,r)} \Big\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}$$

dur.

Komplementar lokal Morrey-tipli uzaylar [14] te aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$0 < p, \theta \leq \infty$ ve ω, $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan, ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$${}^{\complement}LM_{p\theta,\omega} := \left\{ f \in \bigcap_{t>0} L_p({}^{\complement}B(0,t)) : \|f\|_{{}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}} < \infty \right\}$$

uzayına komplementar lokal Morrey-tipli uzay denir. Burada

$$\|f\|_{{}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}} := \Big\| \|f\|_{p,{}^{\complement}B(0,r)} \Big\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}$$

dur. Bu uzayların komplementar lokal Morrey-tipli uzaylar olarak adlandırılmalarının sebebi f fonksiyonunun yuvarın tümleyeni üzerinde normunun kullanılmasıdır.

Bu tez boyunca $0 < \theta \leq \infty$ ve

$$\Omega_\theta := \{\omega \in \mathfrak{M}^+(0, \infty) : 0 < \|\omega\|_{\theta,(t,\infty)} < \infty, \ t > 0\},$$

$$^{\mathrm{c}}\Omega_\theta := \{\omega \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) : 0 < \|\omega\|_{\theta,(0,t)} < \infty,\ t > 0\}$$

olmak üzere, lokal Morrey-tipli uzaylar incelenirken $\omega \in \Omega_\theta$ ve komplementar lokal Morrey-tipli uzaylar incelenirken $\omega \in {}^{\mathrm{c}}\Omega_\theta$ olduğu düşünülecektir.

Lokal Morrey-tipli uzaylar ve Morrey uzayları arasındaki ilişki, $0 < \lambda < n$ olmak üzere,

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\|f(x+\cdot)\right\|_{LM^\lambda_{p,\infty}}$$

şeklinde verilebilir. Burada

$$LM^\lambda_{p,\infty} := LM_{p\infty,\omega}\big|_{\omega(r)=r^{\frac{\lambda-n}{p}}}$$

dir.

Lokal Morrey-tipli uzaylar son yıllarda yoğun bir biçimde incelenmektedir. Çalışmalar bir yandan reel ve harmonik analizin önemli operatörlerinin bu uzaylarda incelenmesini (bkz., [46–48] ve [8–20]), diğer yandan bu uzayların fonksiyonel analitik özelliklerinin ve bilinen diğer fonksiyon uzaylarıyla ilişkilerinin araştırılmasını (bkz., [4, 20, 32, 34]) kapsamaktadır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen bir f fonksiyonu için Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) := \sup_{t>0} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(y)|dy$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $|B(x,t)|$, $B(x,t)$ yuvarının Lebesgue ölçüsüdür. $M: f \to Mf$ operatörüne, Hardy-Littlewood maksimal operatörü denir.

Maksimal operatör reel ve harmonik analizde sıklıkla kullanılan önemli bir altlineer operatördür. Bu operatörün davranışı diferensiyellenebilme teorisi başta olmak üzere pek çok alanda oldukça aydınlatıcıdır ve singüler ve potansiyel operatörlerin kontrol edilmesinde oldukça kullanışlıdır (bkz., [30, 42, 43, 49, 71, 72]).

Maksimal operatörün $LM_{p\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $LM_{p\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı genel ω_1, ω_2 fonksiyonları için [10–13, 17] de gösterilmiştir. [11–13, 17] de, p, θ_1 ve θ_2 parametrelerinin belli durumlarında maksimal operatörün $LM_{p\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $LM_{p\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için ω_1 ve ω_2 fonksiyonları üzerindeki gerek ve yeter koşullar elde edilmiş ve aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 1.1. ([11–13, 17]) $1 < p < \infty$, $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \infty$, $\omega_1 \in \Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olsun. Bu durumda maksimal fonksiyonun, $LM_{p\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $LM_{p\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, her $t \in (0,\infty)$ için

$$\left\|\omega_2(r)\left(\frac{r}{t+r}\right)^{\frac{n}{p}}\right\|_{\theta_2,(0,\infty)} \lesssim \|\omega_1\|_{\theta_1,(t,\infty)}$$

eşitsizliğinin t den bağımsız $c > 0$ sabitiyle sağlanmasıdır. Ayrıca,

$$\|M\|_{LM_{p\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n)\to LM_{p\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(t,\infty)}\left\|\omega_2(r)\left(\frac{r}{t+r}\right)^{\frac{n}{p}}\right\|_{\theta_2,(0,\infty)}$$

denkliği doğrudur.

Not 1.1. Teorem 1.1, [11–13] te $\theta_1 \leq p$ ek koşulu altında ispatlanmıştır.

$\theta_2 < \theta_1$ durumunda, maksimal fonksiyonun $LM_{p\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $LM_{p\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için ω_1 ve ω_2 üzerindeki yeter koşullar [17] de verilmiştir. Fakat, maksimal fonksiyonun $LM_{p\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $LM_{p\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olması için ω_1 ve ω_2 üzerindeki gerek ve yeter koşulların bulunması problemi $\theta_2 < \theta_1$ durumunda hâlâ açıktır. [10] da bu problemin çözümü $\theta_1 = \infty$ ve $\omega_1(r) \equiv 1$ özel durumunda verilmiştir. Diğer bir deyişle; [10] da, p_1, p_2 ve θ parametrelerinin bütün mümkün durumlarında, maksimal fonksiyonun $L_{p_1}(\mathbb{R}^n) = LM_{p_1\infty,\mathbf{1}}(\mathbb{R}^n)$ den $LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olması için ω üzerindeki gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir.

Teorem 1.2. ([8, 10]) $0 < p_2 \le p_1 \le \infty$, $0 < \theta \le \infty$ ve $\omega \in \Omega_\theta$ olsun.

(i) $1 < p_2 = p_1$, $0 < \theta \le \infty$ veya $0 < p_2 < p_1$, $1 < p_1$, $\theta = \infty$ ise, bu durumda

$$\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} \approx \left\| r^{n\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)}\omega(r) \right\|_{\theta,(0,\infty)}$$

sağlanır.

Özel olarak, $1 < p \le \infty$, $0 < \theta \le \infty$ ise, bu durumda

$$\|M\|_{L_p(\mathbb{R}^n)\to LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} \approx \|\omega\|_{\theta,(0,\infty)}$$

elde edilir.

(ii) $0 < p_2 < p_1$, $1 < p_1$ ve $\theta < \infty$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} &\approx \left\| t^{n\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)-\frac{1}{s}} \|\omega\|_{\theta,(t,\infty)} \right\|_{s,(0,\infty)} \\ &\approx \left\| t^{n\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)-\frac{1}{s}} \left\| \left(\frac{r}{r+t}\right)^{\frac{n}{p_2}} \omega(r) \right\|_{\theta,(0,\infty)} \right\|_{s,(0,\infty)}\end{aligned}$$

sağlanır. Burada

$$s = \begin{cases} \frac{p_1\theta}{p_1-\theta}, & \theta < p_1 \\ \infty, & \theta \ge p_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

dir.

[10] da kullanılan metot temel olarak aşağıdaki teoremlere dayanmaktadır:

Teorem 1.3. ([8, 10]) $0 < p_2 \le p_1 \le \infty$, $0 < \theta \le \infty$ ve $\omega \in \Omega_\theta$ olsun.

(i) $p_2 = p_1$, $0 < \theta \le \infty$ veya $0 < p_2 < p_1$, $\theta = \infty$ ise, bu durumda

$$\|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} \approx \left\| r^{n\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)}\omega(r) \right\|_{\theta,(0,\infty)} \tag{1.2}$$

dur.

(ii) $0 < p_2 < p_1$ ve $\theta < \infty$ ise, bu durumda

$$\|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} \approx \left\| r^{n\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)-\frac{1}{s}} \|\omega\|_{\theta,(r,\infty)} \right\|_{s,(0,\infty)} \tag{1.3}$$

dur. Burada s, (1.1) deki gibidir.

Teorem 1.4. X ve Y, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir fonksiyonların kuasi-normlu vektör uzayı ve maksimal fonksiyon M, X te sınırlı olsun. Ayrıca, Y latis özelliğini sağlasın; yani

$$0 \le g \le f \qquad \Rightarrow \qquad \|g\|_Y \lesssim \|f\|_Y$$

olsun. Bu durumda, M nin X ten Y ye sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $X \hookrightarrow Y$ dir ve

$$\|M\|_{X\to Y} \approx \|I\|_{X\to Y}$$

denkliği doğrudur.

Belirtelim ki Teorem 1.4, [10] da $X = L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$ ve $Y = LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$ durumunda ispatlanmıştır.

Bu doktora tezinin amacı ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylar arasında

$$LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n, v_1) \overset{c}{\hookleftarrow} LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n, v_2), \tag{1.4}$$

$$LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n, v_1) \overset{c}{\hookrightarrow} LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n, v_2) \tag{1.5}$$

şeklindeki gömmelerin karakterize edilmesidir.

Bu problemin çözümünde duallik prensibinden yararlanılacaktır. Duallik prensibi, (1.4) ve (1.5) gömmelerinin karakterizasyonunu, ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylar ile ağırlıklı Lebesgue uzayları arasında

$$L_{p_1,v_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v_2), \tag{1.6}$$

$$L_{p_1,v_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow {}^{\complement}LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v_2), \tag{1.7}$$

$$L_{p_1,v_1}(\mathbb{R}^n) \hookleftarrow LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v_2), \tag{1.8}$$

$$L_{p_1,v_1}(\mathbb{R}^n) \hookleftarrow {}^{\complement}LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v_2) \tag{1.9}$$

şeklindeki gömmelerin optimal sabitlerinin hesaplanması problemine indirger. (1.6)-(1.9) gömmelerinin karakterizasyonu için düz ve ters çok boyutlu Hardy eşitsizliklerinden yararlanılacaktır (bkz., örneğin, [26, 33]) ve bu karakterizasyon, ele alınan problemi iteratif Hardy-tipli eşitsizliklerin çözümüne indirgemektedir. Dikkat edilmelidir ki (1.6)-(1.9) gömmeleri, (1.4)-(1.5) gömmelerinin özel bir durumudur.

(1.4)-(1.5) gömmelerinin karakterizasyonu için literatürdeki eşitsizlikler yeterli olmamaktadır. Bu problemlerin çözümünde supremal operatör için çok boyutlu

$$\|gw\|_{p,\mathbb{R}^n} \le c \left\| v(t) \|g\|_{\infty,{}^{\complement}B(0,t)} \right\|_{q,(0,\infty)} \tag{1.10}$$

ve

$$\|gw\|_{p,\mathbb{R}^n} \le c \left\| v(t) \|g\|_{\infty,B(0,t)} \right\|_{q,(0,\infty)} \tag{1.11}$$

şeklindeki ters Hardy-tipli eşitsizliklere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu eşitsizlikler bu tez kapsamında karakterize edilmiştir. (1.10)-(1.11) eşitsizliklerinin çözümünde [27] ve [33] te verilen diskretleştirme tekniği kullanılmıştır.

(1.6)-(1.9) gömmelerinin karakterizasyonu ayrıca bir öneme de sahiptir. (1.6)-(1.7) gömmelerinin karakterize edilmesi, v_1 ağırlık fonksiyonu A_{p_1}, $1 < p_1 < \infty$, Muckenhoupt sınıfından olduğunda $\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)}$ ve $\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to {}^{\complement}LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)}$ normlarının hesaplanmasına imkân vermektedir (bkz., Sonuç 4.1 ve Sonuç 4.2). Ayrıca (1.8)-(1.9) gömmeleri yardımıyla $LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ ve ${}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ uzaylarının associate uzayları hesaplanabilmektedir (bkz., Teorem 4.6 ve Teorem 4.7).

Bu tez kapsamında (1.4)-(1.5) gömmeleri karakterize edildiğinde, özel olarak, p_1, p_2, q_1, $q_2 \in (0,\infty)$, $p_2 \le \min\{p_1, q_2\}$ ve u_1, u_2 ve v_1, v_2 fonksiyonları sırasıyla $(0,\infty)$ ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_{B(0,t)} f(\tau)^{p_2} v_2(\tau) d\tau\right)^{\frac{q_2}{p_2}} u_2(t) dt\right)^{\frac{1}{q_2}} \le c \left(\int_0^\infty \left(\int_{{}^{\mathrm{c}}B(0,t)} f(\tau)^{p_1} v_1(\tau) d\tau\right)^{\frac{q_1}{p_1}} u_1(t) dt\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

eşitsizliğinin optimal sabitleri de hesaplanmış olacaktır (bu eşitsizliğin $p_1 < p_2$ durumunda her $q_1, q_2 \in (0,\infty]$ için yalnızca sıfıra denk fonksiyonlar için sağlanabileceği Lemma 4.1 de gösterilmiştir).

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez boyunca ana parametrelerden bağımsız ve satırdan satıra değişebilen sabitler c ve C ile belirtilecektir. Fakat, c_1 gibi alt indise sahip sabitler farklı durumlarda değişmemektedir. $\lambda > 0$ ana parametrelerden bağımsız olmak üzere $a \le \lambda b$ durumu $a \lesssim b$ ($b \gtrsim a$) ile gösterilecektir. Eğer $a \lesssim b$ ve $b \lesssim a$ ise a ve b denktir denir ve $a \approx b$ ile ifade edilir. $\mathbf{1}$ ile $\mathbf{1}(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonu gösterilecektir. $B(x,r)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ olmak üzere x merkezli r yarıçaplı açık yuvar ve bu yuvarın tümleyeni ${}^{\mathsf{c}}B(x,r) := \mathbb{R}^n \backslash B(x,r)$ dir.

X ve Y kuasi-normlu iki vektör uzayı olmak üzere $X \subset Y$ ve her $z \in X$ için $\|z\|_Y \le c\|z\|_X$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti varsa, X, Y ye gömülmüştür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. Eğer $X \hookrightarrow Y$ ve $Y \hookrightarrow X$ ise $X = Y$ dir. $X \hookrightarrow Y$ gömmesinin en iyi sabiti $\|\mathrm{I}\|_{X \to Y}$ dir.

$n \ge 1$ ve $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. A üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların sınıfı $\mathfrak{M}(A)$, $\mathfrak{M}(A)$ nın negatif olmayan elemanlarının sınıfı $\mathfrak{M}^+(A)$, A üzerindeki bütün ağırlık fonksiyonlarının (ölçülebilir, hemen hemen her yerde pozitif ve sonlu fonksiyonlar) sınıfı ise $\mathcal{W}(A)$ ile gösterilecektir.

$p \in (0,\infty]$ ve $w \in \mathfrak{M}^+(A)$ olmak üzere $\mathfrak{M}(A)$ üzerinde bir $\|\cdot\|_{p,w,A}$ fonksiyonelini

$$\|f\|_{p,w,A} := \begin{cases} \left(\int_A [|f(x)|w(x)]^p \, dx\right)^{1/p}, & p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_A |f(x)|w(x), & p = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer ek olarak $w \in \mathcal{W}(A)$ ise $L_p(A,w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$L_{p,w}(A) \equiv L_p(A,w) := \{f \in \mathfrak{M}(A) : \ \|f\|_{p,w,A} < \infty\}$$

biçiminde tanımlıdır. A üzerinde $w \equiv 1$ olması durumunda $L_{p,w}(A)$ ve $\|\cdot\|_{p,w,A}$ yerine sırasıyla $L_p(A)$ ve $\|\cdot\|_{p,A}$ yazılır.

Bu tezde aşağıdaki kabul ve gösterimlerden yararlanılacaktır:

(i) Tez boyunca $0/0=0$, $0\cdot(\pm\infty)=0$ ve $1/(\pm\infty)=0$ ve $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$ alınacaktır.

(ii)

$$p' := \begin{cases} \frac{p}{1-p}, & 0<p<1, \\ \infty, & p=1, \\ \frac{p}{p-1}, & 1<p<\infty, \\ 1, & p=\infty. \end{cases}$$

(iii) Eğer $I=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ ve g, I üzerinde monoton ise, $g(a)$ ve $g(b)$ sırasıyla $\lim_{x\to a+} g(x)$ ve $\lim_{x\to b-} g(x)$ dir.

(iv) Tez boyunca

$$p\to q := \begin{cases} \frac{pq}{p-q}, & p>q, \\ \infty, & p\le q \end{cases}$$

gösterimi kullanılacaktır (bkz., [44]).

$N,M\in\overline{\mathbb{Z}}$, $N\le M$, $0<q\le\infty$ ve $\{w_k\}=\{w_k\}_{k=N}^{M}$ pozitif terimli bir dizi olsun. Lebesgue uzayının diskret analoğu $\ell^q(\{w_k\},N,M)$ aşağıdaki gibi verilmektedir: $0<q<\infty$ olmak üzere

$$\ell^q(\{w_k\},N,M)=\left\{\{a_k\}_{k=N}^{M}: \quad \|a_k\|_{\ell^q(\{w_k\},N,M)} := \left(\sum_{k=N}^{M}|a_k w_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\right\}$$

ve

$$\ell^\infty(\{w_k\},N,M)=\left\{\{a_k\}_{k=N}^{M}: \quad \|a_k\|_{\ell^\infty(\{w_k\},N,M)} := \sup_{N\le k\le M}|a_k w_k| < \infty\right\}$$

dur. Eğer $w_k=1$, $N\le k\le M$ ise, $\ell^q(\{w_k\},N,M)$ yerine $\ell^q(N,M)$ yazılır.

$0<p,q\le\infty$ olmak üzere diskret Hölder eşitsizliğinin direkt sonucu olan

$$\|\{a_k b_k\}\|_{\ell^q(N,M)} \le \|\{a_k\}\|_{\ell^r(N,M)}\|\{b_k\}\|_{\ell^p(N,M)} \tag{2.1}$$

eşitsizliği oldukça sık kullanılacaktır. Burada $1/r := (1/q-1/p)_+$ ve her $a\in\mathbb{R}$ için $a_+=a$, $a>0$ ve $a_+=0$, $a\le 0$ alınmıştır.

Çok katlı integralleri kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır.

$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ile $\mathbb{R}^n$ de birim küre yüzeyini gösterelim. Herbir $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ için x in kutupsal koordinatları

$$r = |x| \in (0, \infty), \qquad x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$$

şeklindedir.

$\Phi(x) = (r, x')$ dönüşümü $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ dan $(0, \infty) \times S^{n-1}$ e sürekli, birebir örtendir ve onun (sürekli) tersi $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$ dür. Φ dönüşümünün $\mathbb{R}^n$ deki Lebesgue ölçüsünün $(0, \infty) \times S^{n-1}$ üzerinde türettiği Borel ölçüsünü m_* ile gösterelim, yani: $(0, \infty) \times S^{n-1}$ in herbir ölçülebilir E altkümesi için

$$m_*(E) := m(\Phi^{-1}(E))$$

olsun.

$(0, \infty)$ üzerinde $\rho = \rho_n$ ölçüsünü

$$\rho(E) = \int_E r^{n-1}\, dr$$

olarak tanımlayalım. Burada E, $(0, \infty)$ un Lebesgue ölçülebilir bir altkümesidir.

Teorem 2.1. ([29, s. 78]) S^{n-1} üzerinde

$$m_* = \rho \times \sigma$$

olacak şekilde tek $\sigma = \sigma_{n-1}$ Borel ölçüsü vardır.

Eğer, $\mathbb{R}^n$ de Borel ölçülebilir f fonksiyonu için $f \geq 0$ veya $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx')\, d\sigma(x') r^{n-1}\, dr$$

doğrudur.

2.1. Diskretleştirme

Bu bölümde fonksiyon normları için [27] ve [33] te geliştirilmiş olan diskretleştirme tekniği ele alınacaktır.

Tanım 2.1. $N, M \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N < M$ ve $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ pozitif terimli bir dizi olsun.

$$\tau_k \leq \frac{1}{\alpha}\tau_{k-1}, \qquad \forall k \in \{N+1, \ldots, M\}$$

olacak şekilde en az bir $\alpha \in (1, \infty)$ sayısı varsa, $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ dizisine geometrik azalan dizi denir.

$$\tau_k \geq \alpha\tau_{k-1}, \qquad \forall k \in \{N+1, \ldots, M\}$$

olacak şekilde en az bir $\alpha \in (1, \infty)$ sayısı varsa, $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ dizisine geometrik artan dizi denir.

Tanım 2.2. $N, M \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N < M$ ve $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ pozitif, hemen hemen artmayan bir dizi (yani, $\tau_{n+1} \leq K\tau_n$, $\exists K \geq 1$) olsun.

$$\alpha\tau_k \leq \tau_{k-L}, \qquad \forall k \in \{N+L, \ldots, M\}$$

olacak şekilde $\alpha \in (1, \infty)$ ve $L \in \mathbb{N}$ sayıları varsa, $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ dizisine hemen hemen geometrik artan dizi denir.

$N, M \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N < M$ ve $\{\sigma_k\}_{k=N}^{M}$ pozitif, hemen hemen azalmayan bir dizi (yani, $\sigma_n \leq K\sigma_{n+1}$, $\exists K \geq 1$) olsun.

$$\sigma_k \geq \alpha\sigma_{k-L}, \qquad \forall k \in \{N+L, \ldots, M\}$$

olacak şekilde $\alpha \in (1, \infty)$ ve $L \in \mathbb{N}$ sayıları varsa, $\{\sigma_k\}_{k=N}^{M}$ dizisine hemen hemen geometrik azalan dizi denir.

Not 2.1. $0 < q < \infty$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ hemen hemen geometrik azalandır,

(ii) $\{\tau_k^q\}_{k=N}^{M}$ hemen hemen geometrik azalandır,

(iii) $\{\tau_k^{-q}\}_{k=N}^{M}$ hemen hemen geometrik artandır.

Lemma 2.1. ([55, 56]) $N, M \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N \le M$ ve $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ pozitif terimli bir dizi olsun. Her $m \in \overline{\mathbb{Z}}$: $N < m < M$ için

$$\sum_{k=m}^{M} \tau_k \lesssim \tau_m \quad \Big(\sum_{k=N}^{m} \tau_k \lesssim \tau_m\Big)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ dizisinin hemen hemen geometrik azalan (hemen hemen geometrik artan) olmasıdır.

Lemma 2.2. ([55, 56]) $q \in (0, \infty]$, $N, M \in \overline{\mathbb{Z}}$ ve $N \le M$ olsun. $\{\tau_k\}_{k=N}^{M}$ hemen hemen geometrik azalan bir dizi ise, bu durumda her $a = \{a_k\}_{k=N}^{M} : a_k \ge 0, k = N, N+1, \dots M$ dizisi için

$$\left\| \tau_k \sum_{m=N}^{k} a_m \right\|_{\ell^q(N,M)} \approx \|\tau_k a_k\|_{\ell^q(N,M)}$$

ve

$$\left\| \tau_k \sup_{N \le m \le k} a_m \right\|_{\ell^q(N,M)} \approx \|\tau_k a_k\|_{\ell^q(N,M)}$$

denklikleri a dan bağımsız sabitlerle doğrudur.

Lemma 2.3. ([55, 56]) $q \in (0, \infty]$, $N, M \in \overline{\mathbb{Z}}$ ve $N \le M$ olsun. $\{\sigma_k\}_{k=N}^{M}$ hemen hemen geometrik artan bir dizi ise, bu durumda her $a = \{a_k\}_{k=N}^{M} : a_k \ge 0, k = N, N+1, \dots M$ dizisi için

$$\left\| \sigma_k \sum_{m=k}^{M} a_m \right\|_{\ell^q(N,M)} \approx \|\sigma_k a_k\|_{\ell^q(N,M)}$$

ve

$$\left\| \sigma_k \sup_{k \le m \le M} a_m \right\|_{\ell^q(N,M)} \approx \|\sigma_k a_k\|_{\ell^q(N,M)}$$

denklikleri a dan bağımsız sabitlerle doğrudur.

Aşağıdaki iki lemma klasik Landau rezonans teoremlerinin diskret versiyonlarıdır.

Lemma 2.4. ([37]) $0 < p \le q \le \infty$, $N, M \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N \le M$ ve $\{v_k\}_{k=N}^{M}$ ve $\{w_k\}_{k=N}^{M}$ pozitif terimli iki dizi olsun. Her $\{a_k\}_{k=N}^{M}$ dizisi için

$$\|a_k\|_{\ell^q(\{w_k\},N,M)} \le C\|a_k\|_{\ell^p(\{v_k\},N,M)} \tag{2.2}$$

olacak şekilde en az bir $C > 0$ sabiti varsa, bu durumda

$$\|\{w_k v_k^{-1}\}\|_{\ell^\infty(N,M)} \le C$$

sağlanır.

Lemma 2.5. ([37]) $0 < q < p \le \infty$, $N, M \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N \le M$ ve $\{v_k\}_{k=N}^{M}$ ve $\{w_k\}_{k=N}^{M}$ pozitif terimli iki dizi olsun. Her $\{a_k\}_{k=N}^{M}$ dizisi için (2.2) sağlanıyorsa, bu durumda

$$\|\{w_k v_k^{-1}\}\|_{\ell^r(N,M)} \le C$$

olup, burada $1/r := 1/q - 1/p$ dir.

Lemma 2.6. ([27]) φ, (a,b) üzerinde negatif olmayan, azalmayan, sonlu ve sağdan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, terimleri (a,b) nin kapanışından olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan kesin artan bir $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $-\infty \le N \le M \le \infty$ dizisi vardır:

(i) Eğer $N > -\infty$ ise, $\varphi(x_N) > 0$; eğer $x_N > a$ ise, her $x \in (a, x_N)$ için $\varphi(x) = 0$;

eğer $M < \infty$ ise, $x_{M+1} := b$;

(ii) $\varphi(x_{k+1}-) \leq 2\varphi(x_k)$, $N \leq k \leq M$;

(iii) $2\varphi(x_k-) \leq \varphi(x_{k+1})$, $N < k < M$.

Tanım 2.3. φ, (a,b) üzerinde negatif olmayan, artmayan, sonlu ve sağdan sürekli bir fonksiyon olsun. Lemma 2.6 da verilen (i)-(iii) koşullarını sağlayan, kesin artan $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $-\infty \leq N \leq M \leq \infty$ dizisine, φ fonksiyonunu diskretleştiren dizi denir.

Not 2.2. $N = -\infty$ ise, $x_N = \lim_{k\to-\infty} x_k$ alınacaktır.

Teorem 2.2. ([27]) $I = (a,b)$ olmak üzere ν, $\varphi(t) = \nu(a,t]$ sonlu olacak şekilde, negatif olmayan bir Borel ölçüsü olsun. $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, φ fonksiyonunu diskretleştiren dizi olmak üzere I üzerindeki negatif olmayan ve artmayan her h fonksiyonu için

$$\int_{(a,b)} h(t)\,d\nu(t) \approx \sum_{k=N}^{M} h(x_k)\nu(a,x_k] \tag{2.3}$$

denkliği h den bağımsız sabitlerle sağlanır.

L_1 normu yerine L_∞ normu alınarak Teorem 2.2 ye benzer bir teoreme ihtiyaç duyulmaktadır. Fakat, bu iki durum arasında önemli bir fark oluşmaktadır. Yukarıdaki durumda $\varphi(t) = \nu(a,t]$, $t \in I$ fonksiyonu sağdan sürekli olduğu halde

$$\varphi(t) := \|u\|_{\infty,(a,t],\nu}, \quad t \in I, \quad u \in M^+(I)$$

fonksiyonu sağdan sürekli değildir. Gerçekten; $I = (0,2)$, $u = \chi_{(0,1]} + 2\chi_{(1,2)}$ ve ν, I da Lebesgue ölçüsü olsun. O halde $\varphi(1) = 1$ olmasına rağmen $\varphi(1+) = 2$ dir. Bu yüzden, bir sonraki teoremde φ fonksiyonu

$$\varphi(t) = \|u\|_{\infty,(a,t+],v} := \lim_{s\to t+} \|u\|_{\infty,(a,s],v}, \quad t \in I$$

şeklinde tanımlanacaktır. Ayrıca bu durumda h üzerindeki koşullar daha ağırdır.

Teorem 2.3. ([27]) v, $I = (a,b)$ üzerinde negatif olmayan bir Borel ölçüsü ve u, her $t \in I$ için $\|u\|_{\infty,(a,t],v} < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $\varphi(t) = \|u\|_{\infty,(a,t+],v}$, $t \in I$ fonksiyonunu diskretleştiren dizi olmak üzere I üzerinde negatif olmayan, artmayan ve sağdan sürekli her h fonksiyonu için

$$\|hu\|_{\infty,(a,b),v} \approx \sup_{N\le k\le M} h(x_k)\|u\|_{\infty,(a,x_k+],v}$$

denkliği h den bağımsız sabitlerle sağlanır.

φ, $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan, azalmayan, sonlu ve sağdan sürekli bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonunu diskretleştiren $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$ dizisi yardımıyla $\{J_k\}_{k=N}^{M}$ ve $\{S_k\}_{k=N}^{M}$ aralıklar dizilerini

$$J_i := (x_i, x_{i+1}], \quad N \le i < M \quad \text{ve} \quad J_M := (x_M, \infty), \quad M < \infty, \tag{2.4}$$

$$S_i := B(0, x_{i+1}) \backslash B(0, x_i), \quad N \le i < M \quad \text{ve} \quad S_M := \mathbb{R}^n \backslash B(0, x_M), \quad M < \infty \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 2.4. ([33]) $0 < q < \infty$ ve v, $(0,\infty)$ üzerinde $\varphi(t) = \|v\|_{q,(0,t)}^q$ sonlu olacak şekilde bir ağırlık fonksiyonu olsun. $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, φ fonksiyonunu diskretleştiren dizi olmak üzere her $g \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left\| v(t) \int_{{}^{\complement}B(0,t)} g(y)dy \right\|_{q,(0,\infty)} \approx \left(\sum_{k=N}^{M} \left(\int_{S_k} g(y)dy \right)^q \|v\|_{q,(0,x_k)}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\left\| v(t) \|g\|_{\infty, {}^{\complement}B(0,t)} \right\|_{q,(0,\infty)} \approx \left(\sum_{k=N}^{M} \|g\|_{\infty,S_k}^{q} \|v\|_{q,(0,x_k)}^{q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

denklikleri g fonksiyonundan bağımsız sabitlerle doğrudur.

Teorem 2.5. ([33]) v, $(0,\infty)$ üzerinde $\varphi(t) = \|v\|_{\infty,(0,t)}$ sonlu olacak şekilde bir ağırlık fonksiyonu olsun. $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $\varphi(t) = \|v\|_{\infty,(a,t+)} := \lim_{s\to t+} \|v\|_{\infty,(a,s)}$, $t \in (0,\infty)$ fonksiyonunu diskretleştiren dizi olmak üzere her $g \in \mathfrak{M}^{+}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left\| v(t) \int_{{}^{\complement}B(0,t)} g(y)dy \right\|_{\infty,(0,\infty)} \approx \sup_{N\le k\le M} \left(\int_{S_k} g(y)dy \right)^{q} \|v\|_{\infty,(0,x_k+)}^{q}$$

ve

$$\left\| v(t) \|g\|_{\infty, {}^{\complement}B(0,t)} \right\|_{\infty,(0,\infty)} \approx \sup_{N\le k\le M} \|g\|_{\infty,S_k} \|v\|_{\infty,(0,x_k+)}$$

denklikleri g den bağımsız sabitlerle doğrudur.

2.2. Ağırlıklı Lokal Morrey-Tipli Uzaylar

Şimdi ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzayların ve ağırlıklı komplementar lokal Morrey-tipli uzayların tanımlarını verelim.

Tanım 2.4. $0 < p,\theta \le \infty$, $\omega \in \mathfrak{M}^{+}(0,\infty)$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v) := \left\{ f \in L_{p,v}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v)} < \infty \right\}$$

uzayına ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzay denir. Burada

$$\|f\|_{LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v)} := \left\| \|f\|_{p,v,B(0,r)} \right\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}$$

dur.

Tanım 2.5. $0 < p,\theta \le \infty$, $\omega \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v) := \left\{ f \in \bigcap_{t>0} L_{p,v}(^{\complement}B(0,t)) : \|f\|_{^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v)} < \infty \right\}$$

uzayına ağırlıklı komplementar lokal Morrey-tipli uzay denir. Burada

$$\|f\|_{^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v)} := \left\| \|f\|_{p,v,^{\complement}B(0,r)} \right\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}$$

dur.

Lemma 2.7. ([12, 14]) $0 < p,\theta \le \infty$, $\omega \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ ve $^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ uzaylarının aşikâr uzaylar olmaması ($\mathbb{R}^n$ üzerinde yalnızca sıfıra denk fonkisyonlar içermemesi) için gerek ve yeter şart sırasıyla

$$\|\omega\|_{\theta,(t,\infty)} < \infty, \quad \exists t > 0$$

ve

$$\|\omega\|_{\theta,(0,t)} < \infty, \quad \exists t > 0$$

olmasıdır.

Not 2.3. Lemma 2.7, [12] ve [14] te $LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n) := LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, \mathbf{1})$ ve $^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n) := {}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, \mathbf{1})$ uzayları için ispatlanmıştır.

Lemma 2.8. (i) $\|\omega\|_{\theta,(t_1,\infty)} = \infty$ olacak şekilde pozitif bir t_1 sabiti varsa, bu durumda $f \in LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ için $B(0,t_1)$ de hemen hemen her yerde $f = 0$ dır.

(ii) $\|\omega\|_{\theta,(0,t_2)} = \infty$ olacak şekilde pozitif bir t_2 sabiti varsa, bu durumda $f \in {}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ için $^{\complement}B(0,t_2)$ de hemen hemen her yerde $f = 0$ dır.

İspat.

(i) $t_1 > 0$ için $\|\omega\|_{\theta,(t_1,\infty)} = \infty$ ve $f \in LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v)} \geq \Big\|\|f\|_{p,v,B(0,t)}\Big\|_{\theta,\omega,(t_1,\infty)} \geq \|\omega\|_{\theta,(t_1,\infty)}\|f\|_{p,v,B(0,t_1)}$$

sağlanır. O halde $\|f\|_{p,v,B(0,t_1)} = 0$ dır. Dolayısıyla $B(0,t_1)$ yuvarında hemen hemen her yerde $f = 0$ dır.

(ii) $t_2 > 0$ için $\|\omega\|_{\theta,(0,t_2)} = \infty$ ve $f \in {}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{{}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v)} \geq \Big\|\|f\|_{p,v,{}^{\complement}B(0,t)}\Big\|_{\theta,\omega,(0,t_2)} \geq \|\omega\|_{\theta,(0,t_2)}\|f\|_{p,v,{}^{\complement}B(0,t_2)}$$

olduğundan $\|f\|_{p,v,{}^{\complement}B(0,t_2)} = 0$ dır. Yani ${}^{\complement}B(0,t_2)$ üzerinde hemen hemen her yerde $f = 0$ dır.

Not 2.4. Lemma 2.7 ve Lemma 2.8 gösterir ki, $LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ uzayları incelenirken, herbir $t > 0$ için $\|\omega\|_{\theta,(t,\infty)} < \infty$ özelliğine sahip $\omega \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ fonksiyonlarını ele almak yeterlidir. Benzer şekilde ${}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ uzayları incelenirken, herbir $t > 0$ için $\|\omega\|_{\theta,(0,t)} < \infty$ özelliğine sahip $\omega \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ fonksiyonlarını ele almak yeterlidir.

Tanım 2.6. $0 < \theta \leq \infty$ olsun.

$$\Omega_\theta := \{\omega \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) : 0 < \|\omega\|_{\theta,(t,\infty)} < \infty,\ t > 0\}$$

ve

$${}^{\complement}\Omega_\theta := \{\omega \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) : 0 < \|\omega\|_{\theta,(0,t)} < \infty,\ t > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

$v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\omega \in \Omega_\theta$ ve $\omega \in {}^{\complement}\Omega_\theta$ olmak üzere $LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ ve ${}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ uzaylarının kuasi-normlu vektör uzayları oldukları kolayca gösterilebilir.

$LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ ve ${}^{\mathsf{c}}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$ uzayları bazı ağırlıklı Lebesgue uzaylarıyla çakışır.

Teorem 2.6. $0 < p \leq \infty$, $\omega \in \Omega_p$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $u(x) = v(x)\|\omega\|_{p,(|x|,\infty)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$LM_{pp,\omega}(\mathbb{R}^n, v) = L_p(\mathbb{R}^n, u)$$

doğrudur.

İspat. Öncelikle $p < \infty$ olsun. Fubini Teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{LM_{pp,\omega}(\mathbb{R}^n,v)} &= \left(\int_0^\infty \omega(t)^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p v(x)^p \chi_{B(0,t)}(x)dx\right)dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p v(x)^p \left(\int_0^\infty \omega(t)^p \chi_{B(0,t)}(x)dt\right)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p v(x)^p \left(\int_{|x|}^\infty \omega(t)^p dt\right)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{p,u,\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $p = \infty$ olsun. Fubini Teoremi'nden

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\infty\infty,\omega}(\mathbb{R}^n, v) &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} \omega(t)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(0,t)} f(x)v(x)\right) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)v(x)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(|x|,\infty)} \omega(t)\right) \\
&= \|f\|_{\infty,u,\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Teorem 2.7. $1 \leq p < \infty$, $\omega \in {}^{\mathsf{c}}\Omega_p$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu taktirde $u(x) = v(x)\|\omega\|_{p,(0,|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$^{c}LM_{pp,\omega}(\mathbb{R}^n, v) = L_p(\mathbb{R}^n, u)$$

dur.

İspat. İspat Teorem 2.6 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Belirtelim ki Teorem 2.6 ve Teorem 2.7, $v = \mathbf{1}$ durumunda sırasıyla [12] ve [14] te ispatlanmıştır.

3. HARDY-TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen tüm dallarının önemli bir konusudur ve yaklaşımlar teorisi, diferensiyel denklemler teorisi gibi çeşitli alanlara uygulamalarda oldukça kullanışlı bir araçtır.

Bu bölümde eşitsizlikler teorisinin özel bir kısmı olan ağırlıklı Lebesgue uzaylarında integral eşitsizlikler ele alınacaktır. Bu ağırlıklı eşitsizlikler 1920'lerin başında G.H. Hardy ve çağdaşlarının karakterize ettikleri eşitsizliklerin genelleştirmeleridir.

3.1. Hardy Eşitsizliğinin Klasik Formu

Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Hardy-tipli eşitsizlikler üzerine çalışmalar 1925 yılında G.H. Hardy tarafından başlatılmıştır. G.H. Hardy [50] de aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır:

$p > 1$ olmak üzere keyfi $f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)\,dx \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu eşitsizlik Hardy'nin integral eşitsizliğinin orjinal formudur. Kısa bir süre sonra [51, Teorem 330] klasik Hardy eşitsizliğinin ilk ağırlıklı modifikasyonu olan

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\epsilon\,dx \le \left(\frac{p}{p-1-\epsilon}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\epsilon\,dx \tag{3.2}$$

eşitsizliği ispatlanmıştır. Burada $p > 1$, $\epsilon < p-1$ ve $f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ dur.

Daha sonra (3.1) eşitsizliği;

- $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le \infty$,
- u ve v ağırlık fonksiyonları,
- p ve q; $0 < q < \infty$, $1 \le p < \infty$ sağlanacak şekilde reel parametreler

olmak üzere

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)^q w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int_a^b f^p(x)v(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

şeklinde genelleştirilmiştir.

Klasik Hardy eşitsizliği G.H. Hardy tarafından ispatlandığından beri bu eşitsizlik, bu eşitsizliğin uygulamaları ve genelleştirmeleri üzerine çok geniş bir kaynakça oluşmuştur.

Literatürdeki sonuçların derlenmesiyle aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1. (bkz., örneğin, [53, 54, 64]) $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$ ve $v, w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ olsun.

$$(Hf)(t) := \int_0^t f(x)\,dx, \qquad f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty), \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\|Hf\|_{q,w,(0,\infty)} \le c\,\|f\|_{p,v,(0,\infty)} \tag{3.4}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul $A(p,q) < \infty$ olmasıdır ve (3.4) eşitsizliğinin en iyi sabiti olan

$$B(p,q) := \sup_{f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)} \|Hf\|_{q,w,(0,\infty)} \,/\, \|f\|_{p,v,(0,\infty)}$$

için $B(p,q) \approx A(p,q)$ sağlanır. Burada

(i) $p \le q$ ise,

$$A(p,q) := \sup_{t \in (0,\infty)} \|v^{-1}\|_{p',(0,t)} \|w\|_{q,(t,\infty)};$$

(ii) $q < p$ ise, $1/r = 1/q - 1/p$ olmak üzere,

$$A(p,q) := \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|_{p',(0,t)}^r \, d\Big(-\|w\|_{q,(t,\infty)}^r\Big)\right)^{\frac{1}{r}}$$

dir.

Not 3.1. Teorem 3.1 de literatürde mevcut olan pek çok sonuç tek bir teorem altında ifade edilmiştir. Kısaca özetlenecek olursa, (3.4) eşitsizliğinin karakterizasyonu $p = q > 1$ durumunda; G. Tomaselli [75], G. Talenti [74], B. Muckenhoupt [59], $1 < p \le q < \infty$ durumunda; J.S. Bradley [7], V.S. Kokilashvili [52], V.G. Maz'ja ve A.L. Rozin [57], $1 < q < p < \infty$ durumunda; V.G. Maz'ja ve A.L. Rozin [57], $0 < q < 1$, $p > 1$ durumunda G. Sinnamon [69] ve $p = 1$, $0 < q < \infty$ durumunda G. Sinnamon ve V.D. Stepanov [73] tarafından yapılmıştır.

Matematiksel analizin oldukça yoğun incelenen bu alanında pek çok makale ve kitap yayınlanmıştır. Daha kapsamlı sonuçlar ve detaylı tarihsel gelişim süreci için [53], [54] ve [64] e bakılabilir.

Dual operatör için benzer sonuçlar aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2. (bkz., örneğin [53, 54, 64]) $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$ ve $v, w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ olsun.

$$(H^* f)(t) := \int_t^\infty f(x)\,dx, \qquad f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty), \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\left\|H^* f\right\|_{q,w,(0,\infty)} \le c\,\|f\|_{p,v,(0,\infty)} \tag{3.5}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul $A^*(p,q) < \infty$ olmasıdır ve (3.5) eşitsizliğinin en iyi sabiti olan

$$B^*(p,q) := \sup_{f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)} \left\| H^* f \right\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{p,v,(0,\infty)}$$

için $B^*(p,q) \approx A^*(p,q)$ sağlanır. Burada

(i) $p \leq q$ ise,

$$A^*(p,q) := \sup_{t \in (0,\infty)} \|v^{-1}\|_{p',(t,\infty)} \|w\|_{q,(0,t)};$$

(ii) $q < p$ ise, $1/r = 1/q - 1/p$ olmak üzere,

$$A^*(p,q) := \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^r_{p',(t,\infty)} \, d\Big(\|w\|^r_{q,(0,t)} \Big) \right)^{\frac{1}{r}}$$

dir.

Supremal operatör ve duali için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.3. $0 < q < \infty$ ve $v, w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ olsun.

$$(Sf)(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (0,t)} f(x), \qquad f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty), \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\|Sf\|_{q,w,(0,\infty)} \leq c \, \|f\|_{\infty,v,(0,\infty)}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^q_{\infty,(0,t)} \, d\Big(-\|w\|^q_{q,(t,\infty)} \Big) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)} \|Sf\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{\infty,v,(0,\infty)} \approx \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^q_{\infty,(0,t)} \, d\Big(-\|w\|^q_{q,(t,\infty)} \Big) \right)^{\frac{1}{q}}$$

doğrudur.

İspat.

$$\|Sf\|_{q,w,(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(0,t)} f(x)\right)^q d\left(-\|w\|^q_{q,(t,\infty)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \|f\|_{\infty,v,(0,\infty)}\left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^q_{\infty,(0,t)} d\left(-\|w\|^q_{q,(t,\infty)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğundan

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \|Sf\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{\infty,v,(0,\infty)} \leq \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^q_{\infty,(0,t)} d\left(-\|w\|^q_{q,(t,\infty)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

sağlanır.

Diğer taraftan

$$\|Sf\|_{q,w,(0,\infty)} \leq c\|f\|_{\infty,v,(0,\infty)}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. $f = v^{-1}$ alınırsa,

$$\left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^q_{\infty,(0,t)} d\left(-\|w\|^q_{q,(t,\infty)}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \|Sf\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{\infty,v,(0,\infty)}$$

doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4. $0 < q < \infty$ ve $v, w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ olsun.

$$(S^*f)(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(t,\infty)} f(x), \qquad f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty), \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\left\|S^*f\right\|_{q,w,(0,\infty)} \leq c\|f\|_{\infty,v,(0,\infty)}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^q_{\infty,(t,\infty)} d\left(\|w\|^q_{q,(0,t)}\right)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \left\|S^* f\right\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{\infty,v,(0,\infty)} \approx \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^q_{\infty,(t,\infty)}\, d\Big(\|w\|^q_{q,(0,t)}\Big)\right)^{\frac{1}{q}}$$

doğrudur.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 3.3 tekine benzer şekilde yapılabilir.

3.2. n-Boyutlu Hardy-Tipli Eşitsizlikler

M. Christ ve L. Grafakos, [22] de n-boyutlu

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B(0,|x|)|}\int_{B(0,|x|)} f(y)\,dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\,dx, \qquad 1<p<\infty$$

eşitsizliğinin her $f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ için sağlandığını ve bu eşitsizliğin en iyi sabitinin $(p/(p-1))^p$ olduğunu göstermişlerdir. [26] da, P. Drábek, H.P. Heining ve A. Kufner bu eşitsizliği n-boyutlu ağırlık fonksiyonlarıyla $1<p<\infty$ ve $0<q<\infty$ parametrelerinin tüm durumlarına genelleştirmişlerdir.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{B(0,|x|)} f(y)\,dy\right)^q u(x)\,dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, v(x)\,dx\right)^{1/p} \tag{3.6}$$

eşitsizliğinin $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sağlanması için gerek ve yeter koşullar bir boyutlu durumdakine benzerdir. Kutupsal koordinatlar kullanılarak keyfi $w\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ fonksiyonları için $u(x)=w(|x|)/|x|^{n-1}$, $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ olduğunda (3.6) eşitsizliğinin

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_{B(0,t)} f(y)\,dy\right)^q w(t)\,dt\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, v(x)\,dx\right)^{1/p} \tag{3.7}$$

eşitsizliğine denk olduğu açıktır.

Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 3.5. ([26]) $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ ve $v \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$(H_n f)(t) := \int_{B(0,t)} f(x)\,dx, \qquad f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n), \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\|H_n f\|_{q,w,(0,\infty)} \le c\,\|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} \tag{3.8}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul $A_n(p,q) < \infty$ olmasıdır ve (3.8) eşitsizliğinin en iyi sabiti olan

$$B_n(p,q) := \sup_{f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \|H_n f\|_{q,w,(0,\infty)} \,/\, \|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n}$$

için $B_n(p,q) \approx A_n(p,q)$ sağlanır. Burada

(i) $p \le q$ ise,

$$A_n(p,q) := \sup_{t \in (0,\infty)} \|v^{-1}\|_{p',B(0,t)} \|w\|_{q,(t,\infty)};$$

(ii) $q < p$ ise, $1/r = 1/q - 1/p$ olmak üzere,

$$A_n(p,q) := \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^r_{p',B(0,t)}\, d\Big(-\|w\|^r_{q,(t,\infty)} \Big) \right)^{\frac{1}{r}}$$

dir.

Teorem 3.6. ([26]) $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ ve $v \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$(H_n^* f)(t) := \int_{{}^{\mathfrak{c}}B(0,t)} f(x)\,dx, \qquad f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n), \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\left\|H_n^* f\right\|_{q,w,(0,\infty)} \le c\,\|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} \tag{3.9}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul $A_n^*(p,q) < \infty$ olmasıdır ve (3.9) eşitsizliğinin en iyi sabiti olan

$$B_n^*(p,q) := \sup_{f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \left\| H_n^* f \right\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n}$$

için $B_n^*(p,q) \approx A_n^*(p,q)$ sağlanır. Burada

(i) $p \le q$ ise,

$$A_n^*(p,q) := \sup_{t \in (0,\infty)} \|v^{-1}\|_{p', {}^{\mathfrak{c}}B(0,t)} \|w\|_{q,(0,t)};$$

(ii) $q < p$ ise, $1/r = 1/q - 1/p$ olmak üzere,

$$A_n^*(p,q) := \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|_{p', {}^{\mathfrak{c}}B(0,t)}^r \, d\left(\|w\|_{q,(0,t)}^r \right) \right)^{\frac{1}{r}}$$

dir.

Teorem 3.7. $0 < q < \infty$, $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ ve $v \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$(S_n f)(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in B(0,t)} f(x), \qquad f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n), \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\|S_n f\|_{q,w,(0,\infty)} \le c \, \|f\|_{\infty,v,\mathbb{R}^n}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|_{\infty,B(0,t)}^q \, d\left(-\|w\|_{q,(t,\infty)}^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda

$$\sup_{f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \|S_n f\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{\infty,v,\mathbb{R}^n} \approx \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|_{\infty,B(0,t)}^q \, d\left(-\|w\|_{q,(t,\infty)}^q \right) \right)^{\frac{1}{q}}$$

doğrudur.

İspat.

$$\|S_n f\|_{q,w,(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(0,t)} f(x)\right)^q d\Big(-\|w\|_{q,(t,\infty)}^q\Big)\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \|f\|_{\infty,v,\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|_{\infty,B(0,t)}^q d\Big(-\|w\|_{q,(t,\infty)}^q\Big)\right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğundan

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \|S_n f\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{\infty,v,\mathbb{R}^n} \leq \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|_{\infty,B(0,t)}^q d\Big(-\|w\|_{q,(t,\infty)}^q\Big)\right)^{\frac{1}{q}}$$

sağlanır.

Diğer taraftan

$$\|S_n f\|_{q,w,(0,\infty)} \leq c\,\|f\|_{\infty,v,\mathbb{R}^n}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. $f = v^{-1}$ alınırsa,

$$\left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|_{\infty,B(0,t)}^q d\Big(-\|w\|_{q,(t,\infty)}^q\Big)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \|S_n f\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{\infty,v,\mathbb{R}^n}$$

doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.8. $0 < q < \infty$, $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ ve $v \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$(S_n^* f)(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in {}^{\complement}B(0,t)} f(x), \qquad f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n), \qquad t>0$$

olmak üzere

$$\left\|S_n^* f\right\|_{q,w,(0,\infty)} \leq c\,\|f\|_{\infty,v,\mathbb{R}^n}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|_{\infty,{}^{\complement}B(0,t)}^q d\Big(\|w\|_{q,(0,t)}^q\Big)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \left\|S^*_n f\right\|_{q,w,(0,\infty)} / \|f\|_{\infty,v,\mathbb{R}^n} \approx \left(\int_0^\infty \|v^{-1}\|^q_{\infty,{}^{c}B(0,t)}\, d\left(\|w\|^q_{q,(0,t)}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

doğrudur.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 3.7 dekine benzer şekilde yapılabilir.

3.3. Ters Hardy-Tipli Eşitsizlikler

E. Sawyer, [68] de $0 < p < 1$ durumunda (3.4) ve (3.5) eşitsizliklerinin yalnızca sıfıra denk fonksiyonlarla sağlanabileceğini göstermiştir. Bu gözlem ters Hardy eşitsizliği olarak adlandırılan

$$\|Hf\|_{q,w,(0,\infty)} \geq c\|f\|_{p,v,(0,\infty)} \tag{3.10}$$

eşitsizliğinin $0 < p \leq 1$ durumunda araştırılmasına sebep olmuştur.

Bu eşitsizlikler E.T. Copson tarafından [23] ve [24] te karakterize edilen seriler için ters eşitsizliklerin integral formlarıdır. Seriler için eşitsizlikler ayrıca [6] ve [44] te araştırılmıştır.

(3.10) eşitsizliği ilk olarak [5] te P.R. Beesack ve H.P. Heinig tarafından incelenmiş ve $0 < q \leq p \leq 1$ durumunda v ve w ağırlık fonksiyonları üzerine ya gerek ya da yeter koşullar elde edilmiş ve tam bir karakterizasyon yapılamamıştır. Bu eşitsizliğin diskret analoğu [44] te karakterize edilmiş ve ispatlarda kullanılan tekniğin integral eşitsizlikler için de geçerli olabileceği belirtilmiş ve $0 < p < 1$, $p < q < \infty$ durumunda optimal sabitler hesaplanmıştır.

$0 < p,q < 1$ durumunda (3.10) eşitsizliği D.V. Prokhorov tarafından [66] da karakterize edilmiştir. Daha sonra W.D. Evans, A. Gogatishvili ve B. Opic [27] de $0 < p \leq 1$ ve $0 < q \leq \infty$ durumlarında (3.10) eşitsizliğinin tüm ölçülebilir fonksiyonlar sınıfında doğru olması için v ve w ağırlık fonksiyonları üzerindeki gerek ve yeter şartları diskretleştirme metodunu kullanarak elde etmiş ve bu eşitsizliğin tam karakterizasyonunu yapmışlardır.

n-boyutlu ters Hardy eşitsizliklerinin, yani

$$\|gw\|_{p,\mathbb{R}^n} \leq C \left\| v(t) \int_{{}^{\complement}B(0,t)} g(y)dy \right\|_{q,(0,\infty)} \tag{3.11}$$

ve

$$\|gw\|_{p,\mathbb{R}^n} \leq C \left\| v(t) \int_{B(0,t)} g(y)dy \right\|_{q,(0,\infty)} \tag{3.12}$$

eşitsizliklerinin karakterizasyonu [33] te A. Gogatishvili ve R. Mustafayev tarafından $0 < p \leq 1$ ve $0 < q \leq \infty$ durumunda, [27] de verilen diskretleştirme tekniğinin n-boyutlu analoğu kullanılarak yapılmıştır.

Belirtelim ki, (3.12) eşitsizliğinin çözümünü değişken değiştirmesi yardımıyla (3.11) in karakterizasyonuna indirgemek mümkündür. Diskretleştirme metodu ayrıca (3.12) eşitsizliğinin çözümü için de kullanılabilir.

h, $I := (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde azalmayan ve sonlu bir fonksiyon olsun. λ fonksiyonunu, I nın alt aralıklarında

$$\begin{aligned}
\lambda([y,z]) &= h(z+) - h(y-), \\
\lambda([y,z)) &= h(z-) - h(y-), \\
\lambda((y,z]) &= h(z+) - h(y+), \\
\lambda((y,z)) &= h(z-) - h(y+)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

şekilde tanımlayalım. Böylece, λ negatif olmayan, toplamsal ve regüler bir fonksiyondur. Bilinmektedir ki, λ nın I üzerinde negatif olmayan bir Borel ölçüsüne genişlemesi tektir (bkz., [67], 10. Bölüm).

$J \subseteq I$ olduğunda $\int_J f\,dh$ Lebesgue-Stieltjes integrali $\int_J f\,d\lambda$ şeklinde tanımlanır. h artmayan ve sonlu bir fonksiyon olduğunda Lebesgue-Stieltjes integrali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\int_J f\,dh := -\int_J f\,d(-h).$$

h, (a,b) üzerinde azalmayan, sonlu, sağdan sürekli bir fonksiyon ve J, (a,b) nin, (α,β), $[\alpha,\beta)$ veya $(\alpha,\beta]$ formunda bir alt aralığı olsun. (3.13) te verilen formüller yardımıyla

$$\int_{(\alpha,\beta)} dh = h(\beta-) - h(\alpha), \tag{3.14}$$

$$\int_{[\alpha,\beta)} dh = h(\beta-) - h(\alpha-), \tag{3.15}$$

$$\int_{(\alpha,\beta]} dh = h(\beta) - h(\alpha) \tag{3.16}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Şimdi aşağıdaki ifadeleri kabul edelim:

Kabul 3.1. $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to [0,\infty]$ ve $h : I \to [0,\infty]$ olsun. h, I üzerinde artmayan ve soldan sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer $h : I \to [0,\infty)$ ise, bu durumda $\int_I f\,dh$ bilinen Lebesgue-Stieltjes integralidir (Burada h fonksiyonuna karşılık gelen λ ölçüsü, $[\alpha,\beta) \subset (a,b)$ ise, $\lambda([\alpha,\beta)) = h(\beta) - h(\alpha)$ ile verilir (bkz., (3.13)). Eğer $c \in I$ olmak üzere herhangi bir (c,b) aralığı üzerinde $h = \infty$ ise, $\int_I f\,dh$ integrali yalnızca $[c,b)$ üzerinde $f = 0$ olduğunda tanımlıdır ve

$$\int_I f\,dh = \int_{(a,c)} f\,dh$$

olarak kabul edilir.

Kabul 3.2. $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to [0,\infty]$ ve $h : I \to [-\infty,0]$ olsun. h, I üzerinde azalmayan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer $h : I \to (-\infty,0]$ ise, bu durumda $\int_I f\,dh$ bilinen Lebesgue-Stieltjes integralidir. Eğer $c \in I$ olmak üzere herhangi bir (a,c) aralığında

$h = -\infty$ ise, bu durumda $\int_I f\,dh$ yalnızca $(a,c]$ üzerinde $f = 0$ olduğunda tanımlıdır ve

$$\int_I f\,dh = \int_{(c,b)} f\,dh$$

olarak kabul edilir.

Teorem 3.9. ([33]) $v \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ olsun ve $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ fonksiyonu $\|w\|_{q,(t,\infty)} < \infty$, $t \in (0,\infty)$ özelliğini sağlasın.

$$\|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} \le c\,\|H_n f\|_{q,w,(0,\infty)}, \quad f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n) \tag{3.17}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul $C_n(p,q) < \infty$ olmasıdır ve (3.17) eşitsizliğinin en iyi sabiti olan

$$D_n(p,q) := \sup_{f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} / \|H_n f\|_{q,w,(0,\infty)}$$

için $D_n(p,q) \approx C_n(p,q)$ sağlanır. Burada

(i) $0 < q \le p \le 1$ ise,

$$C_n(p,q) := \sup_{t \in (0,\infty)} \|v\|_{p', {}^{\mathfrak{c}}B(0,t)} \|w\|^{-1}_{q,(t,\infty)};$$

(ii) $0 < p \le 1$, $p < q \le \infty$ ise, $1/r = 1/p - 1/q$ ve $\|w\|_{q,(t-,\infty)} := \lim_{s \to t-} \|w\|_{q,(s,\infty)}$, $t \in (0,\infty)$ olmak üzere,

$$C_n(p,q) := \left(\int_{(0,\infty)} \|v\|^r_{p', {}^{\mathfrak{c}}B(0,t)}\, d\left(\|w\|^{-r}_{q,(t-,\infty)} \right) \right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\|v\|_{p',\mathbb{R}^n}}{\|w\|_{q,(0,\infty)}}$$

dur.

Teorem 3.10. ([33]) $v \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ olsun ve $w \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ fonksiyonu $\|w\|_{q,(0,t)} < \infty, t \in (0,\infty)$ özelliğini sağlasın.

$$\|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} \le c\left\|H_n^* f\right\|_{q,w,(0,\infty)}, \quad f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n) \tag{3.18}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul $C_n^*(p,q) < \infty$ olmasıdır ve (3.18) eşitsizliğinin en iyi sabiti olan

$$D_n^*(p,q) := \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} / \|H_n^* f\|_{q,w,(0,\infty)}$$

için $D_n^*(p,q) \approx C_n^*(p,q)$ sağlanır. Burada

(i) $0 < q \le p \le 1$ ise,

$$C_n^*(p,q) := \sup_{t\in(0,\infty)} \|v\|_{p',B(0,t)} \|w\|_{q,(0,t)}^{-1};$$

(ii) $0 < p \le 1,\ p < q \le \infty$ ise, $1/r = 1/p - 1/q$ ve $\|w\|_{q,(0,t+)} := \lim_{s\to t+} \|w\|_{q,(0,s)}$, $t \in (0,\infty)$ olmak üzere,

$$C_n^*(p,q) := \left(\int_{(0,\infty)} \|v\|_{p',B(0,t)}^r \, d\Big(-\|w\|_{q,(0,t+)}^{-r}\Big)\right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\|v\|_{p',\mathbb{R}^n}}{\|w\|_{q,(0,\infty)}}$$

dur.

Not 3.2. $q < \infty$ olsun. Bu durumda her $t \in (0,\infty)$ için

$$\|w\|_{q,(t-,\infty)} = \|w\|_{q,(t,\infty)} \quad \text{ve} \quad \|w\|_{q,(0,t+)} = \|w\|_{q,(0,t)}$$

olduğundan Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 daki koşullar sırasıyla

$$C_n(p,q) := \left(\int_{(0,\infty)} \|v\|_{p',{}^{\mathrm{c}}B(0,t)}^r \, d(\|w\|_{q,(t,\infty)}^{-r})\right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\|v\|_{p',\mathbb{R}^n}}{\|w\|_{q,(0,\infty)}}$$

ve

$$C_n^*(p,q) := \left(\int_{(0,\infty)} \|v\|_{p',B(0,t)}^r \, d(-\|w\|_{q,(0,t)}^{-r})\right)^{\frac{1}{r}} + \frac{\|v\|_{p',\mathbb{R}^n}}{\|w\|_{q,(0,\infty)}}$$

şekline gelir.

Tezin amacında belirtilmiş olan (1.6)-(1.9) gömmelerinin karakterizasyonunu yapmak için bazı yeni eşitsizliklerin çözümlerinin bulunmasına ihtiyaç vardır. Bundan sonraki kısımda,

$$\|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} \le c \left\|S^*_n f\right\|_{q,w,(0,\infty)}, \quad f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n) \tag{3.19}$$

ve

$$\|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} \le c \|S_n f\|_{q,w,(0,\infty)}, \quad f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n) \tag{3.20}$$

eşitsizliklerinin karakterizasyonu yapılacaktır.

Öncelikle aşağıdaki diskretleştirme lemmasını verelim:

Lemma 3.1. $0 < p, q \le \infty$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, $w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ için $\|w\|_{q,(0,t)} < \infty$, $t \in (0,\infty)$ şartı sağlansın. $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $\varphi(t) := \|w\|_{q,(0,t+)}$ fonksiyonunu diskretleştiren dizi olmak üzere (3.19) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$A := \left\| \left\{ \|v\|_{p,S_k} \|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)} \right\} \right\|_{\ell^\rho(N,M)} < \infty \tag{3.21}$$

ve

$$x_N > 0 \quad \text{ise,} \quad B(0,x_N) \quad \text{üzerinde hemen hemen her yerde} \quad v = 0 \tag{3.22}$$

olmasıdır. Burada $1/\rho := (1/p - 1/q)_+$ dır.

(3.19) eşitsizliğinin en iyi sabiti için $c \approx A$ doğrudur.

İspat. $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $\varphi(t) = \|w\|_{q,(0,t+)}$ fonksiyonunu diskretleştiren dizi ve $\{S_k\}_{k=N}^{M}$, (2.5) ile tanımlı dizi olmak üzere, Teorem 2.4 ve Teorem 2.5 ten, her $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left\|S^* f\right\|_{q,w,(0,\infty)} \approx \left\| \|f\|_{\infty,S_k} \|w\|_{q,(0,x_k+)} \right\|_{\ell^q(N,M)} \tag{3.23}$$

doğrudur. Lemma 2.6 dan

$$x_N > 0 \quad \text{ise,} \quad \|w\|_{q,(0,x_N)} = 0; \tag{3.24}$$

$$M < \infty \quad \text{ise}, \quad x_{M+1} = \infty;$$

ve

$$\|w\|^q_{q,(0,x_{k+1})} \leq 2\|w\|^q_{q,(0,x_k+)}, \quad N \leq k \leq M; \tag{3.25}$$

$$2\|w\|^q_{q,(0,x_k)} \leq \|w\|^q_{q,(0,x_{k+1}+)}, \quad N < k < M \tag{3.26}$$

özellikleri sağlanır.

Yeter koşul. (3.21) ve (3.22) sağlansın.

$$\|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} = \left\| \left\{ \|f\|_{p,v,S_k} \right\} \right\|_{\ell^p(N,M)}, \quad f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n) \tag{3.27}$$

ve

$$\|f\|_{p,v,S_k} = \|fv\|_{p,S_k} \leq \|f\|_{\infty,S_k}\|v\|_{p,S_k}, \; N \leq k \leq M \tag{3.28}$$

olduğundan, (2.1) ve (3.23) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} &\leq \left\| \left\{ \|f\|_{\infty,S_k}\|v\|_{p,S_k} \right\} \right\|_{\ell^p(N,M)} \\
&\leq \left\| \left\{ \|v\|_{p,S_k}\|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)} \right\} \right\|_{\ell^\rho(N,M)} \left\| \left\{ \|f\|_{\infty,S_k}\|w\|_{q,(0,x_k+)} \right\} \right\|_{\ell^p(N,M)} \\
&\approx \left\| \left\{ \|v\|_{p,S_k}\|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)} \right\} \right\|_{\ell^\rho(N,M)} \left\| S^* f \right\|_{q,w,(0,\infty)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $c \lesssim A$ dır.

Gerek koşul. (3.19) eşitsizliği doğru olsun. O halde (3.19) ve (3.23) ten her $f \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ için

$$\left\| \left\{ \|f\|_{p,v,S_k} \right\} \right\|_{\ell^p(N,M)} \lesssim c \left\| \left\{ \|f\|_{\infty,S_k}\|w\|_{q,(0,x_k+)} \right\} \right\|_{\ell^q(N,M)} \tag{3.29}$$

sağlanır.

$f_k \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$, $N \leq k \leq M$ fonksiyonları

$$\operatorname{supp} f_k \subset S_k,\ \|f_k\|_{\infty,S_k} = 1,\ \|f_k\|_{p,v,S_k} \gtrsim \|v\|_{p,S_k} \tag{3.30}$$

özelliklerini sağlamak üzere

$$f = \sum_{k=N}^{M} a_k f_k \tag{3.31}$$

test fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\{a_k\}_{k=N}^{M}$ negatif olmayan sayıların herhangi bir dizisidir. Bu durumda (3.29) dan

$$\left\|\left\{a_k \|v\|_{p,S_k}\right\}\right\|_{\ell^p(N,M)} \lesssim c \left\|\left\{a_k \|w\|_{q,(0,x_k+)}\right\}\right\|_{\ell^q(N,M)} \tag{3.32}$$

elde edilir. Lemma 2.4 ve Lemma 2.5 kullanılırsa,

$$A = \left\|\left\{\|v\|_{p,S_k} \|w\|_{q,(0,x_k+)}^{-1}\right\}\right\|_{\ell^p(N,M)} \lesssim c \tag{3.33}$$

sağlanır.

Diğer yandan, $x_N > 0$ olmak üzere (3.19) eşitsizliği, $f = \chi_{B(0,x_N)}$ fonksiyonu ile test edilirse, (3.24) ten, $\|v\|_{p,B(0,x_N)} = 0$ olduğu görülür. O halde $B(0,x_N)$ üzerinde hemen hemen her yerde $v = 0$ olmalıdır.

Lemma 3.2. $0 < q \le p \le \infty$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, $w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ için $\|w\|_{q,(0,t)} < \infty$, $t \in (0,\infty)$ koşulu sağlansın. $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $\varphi(t) := \|w\|_{q,(0,t+)}$ fonksiyonunu diskretleştiren dizi olmak üzere (3.21) ve (3.22) özelliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A_1 := \left\|\|v\|_{p,(B(0,x))} \|w\|_{q,(0,x)}^{-1}\right\|_{\infty,(0,\infty)} \tag{3.34}$$

olmasıdır.

Ayrıca, $A \approx A_1$ dir.

İspat. Yeter koşul. $A_1 < \infty$ olsun. (3.24) kullanılarak

$$x_N > 0 \text{ ise, } \|v\|_{p,(B(0,x_N))} = 0 \tag{3.35}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.22) doğrudur.

(3.25) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} A &= \sup_{N\le k\le M} \|v\|_{p,S_k}\|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)} \le 2^{1/q} \sup_{N\le k\le M} \|v\|_{p,S_k}\|w\|^{-1}_{q,(0,x_{k+1})} \\ &\le 2^{1/q} \sup_{N\le k\le M} \|v\|_{p,B(0,x_{k+1})}\|w\|^{-1}_{q,(0,x_{k+1})} \le 2^{1/q}A_1 \end{aligned}$$

sağlanır.

Gerek koşul. (3.21) ve (3.22) nin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\| \|v\|_{p,B(0,x)}\|w\|^{-1}_{q,(0,x)} \right\|_{\infty,(0,\infty)} \\ &= \sup_{N\le k\le M} \left\| \|v\|_{p,B(0,x)}\|w\|^{-1}_{q,(0,x)} \right\|_{\infty,J_k} \\ &\le \sup_{N\le k\le M} \|v\|_{p,B(0,x_{k+1})} \left\| \|w\|^{-1}_{q,(0,x)} \right\|_{\infty,J_k} \\ &\le \sup_{N\le k\le M} \|v\|_{p,B(0,x_{k+1})}\|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.22) ve (2.5) uygulanırsa,

$$A_1 \le \sup_{N\le k\le M} \left(\sum_{i=N}^{k} \|v\|^p_{p,S_i} \right)^{1/p} \|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)}, \quad p < \infty$$

ve

$$A_1 \le \sup_{N\le k\le M} \left(\sup_{N\le i\le k} \|v\|^p_{p,S_i} \right)^{1/p} \|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)}, \quad p = \infty$$

yazılabilir. $\left\{ \|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)} \right\}_{k=N}^{M}$ dizisinin hemen hemen geometrik azalan olduğu dikkate alınırsa, Lemma 2.2 den,

$$A_1 \lesssim \sup_{N \le k \le M} \|v\|_{p,S_k} \|w\|^{-1}_{q,(0,x_k+)} = A$$

elde edilir.

Lemma 3.3. $0 < p < q \le \infty$, $1/r = 1/p - 1/q$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, $w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ için $\|w\|_{q,(0,t)} < \infty$, $t \in (0,\infty)$ şartı sağlansın. Bu taktirde $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $\varphi(t) = \|w\|_{q,(0,t+)}$, $t \in (0,\infty)$ fonksiyonunu diskretleştiren dizi olmak üzere (3.21) ve (3.22) özelliklerinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A_2 := \left(\int_{(0,\infty)} \|v\|^r_{p,B(0,x)} d\left(-\|w\|^{-r}_{q,(0,x+)} \right) \right)^{1/r} + \|v\|_{p,\mathbb{R}^n} \|w\|^{-1}_{q,(0,\infty)} < \infty$$

olmasıdır.

Ayrıca, $A \approx A_2$ dir.

İspat. $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$, $\varphi(t) = \|w\|_{q,(0,t+)}$, $t \in (0,\infty)$ fonksiyonunu diskretleştiren dizi ve $\{S_k\}_{k=N}^{M}$, (2.5) ile tanımlanmış olsun. Lemma 2.6 dan (3.24)-(3.26) sağlanır. (3.26) dan

$$2\|w\|_{q,(0,x_{k+1})} \le \|w\|_{q,(0,x_{k+2}+)} \le \|w\|_{q,(0,x_{k+3})}, \qquad N < k+1 < M$$

eşitsizliği doğrudur. Dolayısıyla

$$\|w\|^{-r}_{q,(0,x_{k+3})} \le 2^{-r} \|w\|_{q,(0,x_{k+1})}$$

sağlanır ve

$$\|w\|^{-r}_{q,(0,x_{k+1})} - \|w\|^{-r}_{q,(0,x_{k+3})} \ge (1 - 2^{-r}) \|w\|^{-r}_{q,(0,x_{k+1})}, \qquad N \le k \le M-2$$

yazılabilir.

$N \le M-2$ olsun. (3.25) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
A^r &= \sum_{k=N}^{M} \|v\|^r_{p,S_k} \|w\|^{-r}_{q,(0,x_k+)} \\
&\lesssim \sum_{k=N}^{M} \|v\|^r_{p,S_k} \|w\|^{-r}_{q,(0,x_{k+1})} \\
&= \sum_{k=N}^{M-2} \|v\|^r_{p,S_k} \|w\|^{-r}_{q,(0,x_{k+1})} + \|v\|^r_{p,S_{M-1}} \|w\|^{-r}_{q,(0,x_M)} + \|v\|^r_{p,S_M} \|w\|^{-r}_{q,(0,x_{M+1})} \\
&\lesssim \sum_{k=N}^{M-2} \|v\|^r_{p,S_k} \left(\|w\|^{-r}_{q,(0,x_{k+1})} - \|w\|^{-r}_{q,(0,x_{k+3})} \right) + \|v\|^r_{p,S_{M-1}} \left(\|w\|^{-r}_{q,(0,x_M)} - \|w\|^{-r}_{q,(0,\infty)} \right) \\
&\qquad + \|v\|^r_{p,S_M} \|w\|^{-r}_{q,(0,x_{M+1})}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $h(t) = -\|w\|_{q,(0,t+)}$, $t \in (0,\infty)$ ve $[\alpha,\beta) = [x_{k+1}, x_{k+3})$, $N \le k \le M-2$ veya $[\alpha,\beta) = [x_M, b)$ alınarak (3.15) ten

$$
\begin{aligned}
A^r &\lesssim \sum_{k=N}^{M-2} \|v\|^r_{p,S_k} \int_{[x_{k+1},x_{k+3})} d\left(-\|w\|^{-r}_{q,(0,t+)}\right) + \|v\|_{p,S_{M-1}} \int_{[x_M,\infty)} d\left(-\|w\|^{-r}_{q,(0,t+)}\right) \\
&\qquad + 2\|v\|^r_{p,\mathbb{R}^n} \|w\|^{-r}_{q,(0,\infty)} \\
&\le \sum_{k=N}^{M-2} \int_{[x_{k+1},x_{k+3})} \|v\|^r_{p,B(0,t)} d\left(-\|w\|^{-r}_{q,(0,t+)}\right) + \int_{[x_M,\infty)} \|v\|^r_{p,B(0,t)} d\left(-\|w\|^{-r}_{q,(0,t+)}\right) \\
&\qquad + 2\|v\|^r_{p,\mathbb{R}^n} \|w\|^{-r}_{q,(0,\infty)} \\
&\lesssim \int_{(0,\infty)} \|v\|^r_{p,B(0,t)} d\left(-\|w\|^{-r}_{q,(0,t+)}\right) + \|v\|^r_{p,\mathbb{R}^n} \|w\|^{-r}_{q,(0,\infty)} \\
&\approx A_2^r
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu durumda

$$
A \lesssim A_2 \tag{3.36}
$$

sağlanır.

Yeter koşul. $A < \infty$ olsun ve (3.22) sağlansın. (3.22), (3.16) ve (3.14) uygulanarak

$$
A_2^r \approx \int_{(0,\infty)} \|v\|^r_{p,B(0,x)} d\left(-\|w\|^{-r}_{q,(0,x_k+)}\right) + \|v\|_{p,\mathbb{R}^n} \|w\|^{-r}_{q,(0,\infty)}
$$

$$\approx \sum_{k=N}^{M} \int_{J_k} \|v\|_{p,B(0,x)}^r d\left(-\|w\|_{q,(0,x_k+)}^{-r}\right) + \|v\|_{p,\mathbb{R}^n} \|w\|_{q,(0,\infty)}^{-r}$$
$$\leq \sum_{k=N}^{M-1} \|v\|_{p,B(0,x_{k+1})}^r \int_{J_k} d\left(-\|w\|_{q,(0,x_k+)}^{-r}\right) + \|v\|_{p,\mathbb{R}^n}^r \int_{(x_M,\infty)} d\left(-\|w\|_{q,(0,x_k+)}^{-r}\right)$$
$$+ \|v\|_{p,\mathbb{R}^n}^r \|w\|_{q,(0,\infty)}^{-r}$$
$$\lesssim \sum_{k=N}^{M-1} \|v\|_{p,B(0,x_{k+1})}^r \|w\|_{q,(0,x_k+)}^{-r} + \|v\|_{p,\mathbb{R}^n}^r \|w\|_{q,(0,x_M+)}^{-r}$$

elde edilir. (3.22) nin tekrar uygulanmasıyla

$$A_2^r \lesssim \sum_{k=N}^{M} \left(\sum_{i=N}^{k} \|v\|_{p,S_i}^r \right) \|w\|_{q,(0,x_k+)}^{-r}$$

eşitsizliği sağlanır. $\left\{ \|w\|_{q,(0,x_k+)}^{-r} \right\}_{k=N}^{M}$ dizisi hemen hemen geometrik azalan olduğundan, Lemma 2.6 dan,

$$A_2 \lesssim \left(\sum_{k=N}^{M} \|v\|_{p,S_k}^r \|w\|_{q,(0,x_k+)}^{-r} \right)^{1/r} = A \tag{3.37}$$

sağlanır.

(3.36) ve (3.37) den $A \approx A_2$ olduğu görülür.

Şimdi (3.19) eşitsizliğinin karakterizasyonunu verebiliriz.

Teorem 3.11. $0 < p, q \leq \infty$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, $w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ için $\|w\|_{q,(0,t)} < \infty$, $t \in (0,\infty)$ koşulu sağlansın.

(i) $0 < q \leq p \leq \infty$ ise, (3.19) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A_1 := \left\| \|v\|_{p,B(0,x)} \|w\|_{q,(0,x)}^{-1} \right\|_{\infty,(0,\infty)} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda (3.19) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx A_1$ dir.

(ii) $0 < p < q \leq \infty$ ve $1/r = 1/p - 1/q$ ise, (3.19) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A_2 = \left(\int_{(0,\infty)} \|v|^r_{p,B(0,x)} d\left(-\|w|^{-r}_{q,(0,x+)} \right) \right)^{1/r} + \|v|_{p,\mathbb{R}^n} \|w|^{-1}_{q,(0,\infty)} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda (3.19) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx A_2$ dir.

İspat. (i) $0 < q \le p \le \infty$ olsun. Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 den iddianın doğruluğu görülür.

(ii) $0 < p < q \le \infty$ olsun. Lemma 3.1 ve Lemma 3.3 ten iddianın doğruluğu görülür.

(3.20) eşitsizliğinin karakterizasyonu aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.12. $0 < p, q \le \infty$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, $w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ için $\|w\|_{q,(t,\infty)} < \infty$, $t \in (0,\infty)$ koşulu sağlansın.

(i) $0 < q \le p \le \infty$ ise, (3.20) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A_1^* := \sup_{t \in (0,\infty)} \|v\|_{p,{}^{\complement}B(0,t)} \|w\|^{-1}_{q,(t,\infty)} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda (3.20) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx A_1^*$ dır.

(ii) $0 < p < q \le \infty$ ve $1/r = 1/q - 1/p$ ise, (3.19) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A_2^* = \left(\int_{(0,\infty)} \|v\|^r_{p,{}^{\complement}B(0,x)} d\left(\|w\|^{-r}_{q,(x-,\infty)} \right) \right)^{1/r} + \|v\|_{p,\mathbb{R}^n} \|w\|^{-1}_{q,(0,\infty)} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda (3.20) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx A_2^*$ dır.

İspat. Teoremi ispatlamak için $y = F(x) := \dfrac{x}{|x|^2}$, $x \neq 0$ dönüşümü kullanılacaktır. Bu dönüşümün Jakobiyeni için

$$|\det J_F(x)| = |x|^{-2n}, \quad x \neq 0$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten,

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{|x|^2-2x_1^2}{|x|^4} & -\frac{2x_1x_2}{|x|^4} & \dots & -\frac{2x_1x_n}{|x|^4} \\ -\frac{2x_2x_1}{|x|^4} & \frac{|x|^2-2x_2^2}{|x|^4} & \dots & -\frac{2x_2x_n}{|x|^4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{2x_nx_1}{|x|^4} & -\frac{2x_nx_2}{|x|^4} & \dots & \frac{|x|^2-2x_n^2}{|x|^4} \end{pmatrix}$$

ve

$$J_{F^{-1}}(F(x)) = \begin{pmatrix} |x|^2-2x_1^2 & -2x_1x_2 & \cdots & -2x_1x_n \\ -2x_2x_1 & |x|^2-2x_2^2 & \cdots & -2x_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2x_nx_1 & -2x_nx_2 & \cdots & |x|^2-2x_n^2 \end{pmatrix} = |x|^{4n} J_F(x)$$

olduğundan

$$J_{F^{-1}}(F(x)) = |x|^{4n} J_F(x) \tag{3.38}$$

sağlanır.

$$J_{F^{-1}}(F(x)) J_F(x) = I$$

ve (3.38) kullanılırsa

$$|x|^{4n} J_F(x) J_F(x) = I.$$

elde edilir. Böylece

$$|\det J_F(x)| = |x|^{-2n}$$

bulunur.

$0 < p, q < \infty$ olsun. (3.20) eşitsizliğinin sol tarafına $x = \frac{y}{|y|^2}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,v,\mathbb{R}^n} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) v^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p\left(\frac{y}{|y|^2}\right) v^p\left(\frac{y}{|y|^2}\right) |y|^{-2n} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(f\left(\frac{y}{|y|^2}\right) |y|^{-2n} \right)^p \left(v\left(\frac{y}{|y|^2}\right) |y|^{2n\left(1-\frac{1}{p}\right)} \right)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilir.

$x = \dfrac{y}{|y|^2}$ dönüşümü için $|x| = |y|^{-1}$ olduğundan, $|x| \leq t \Leftrightarrow |y| \geq \dfrac{1}{t}$ doğrudur. Bu durumda

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(0,t)} f(x) = \operatorname*{ess\,sup}_{y\in {}^{\complement}B(0,\frac{1}{t})} f\left(\frac{y}{|y|^2}\right) \tag{3.40}$$

dir. (3.20) eşitsizliğinin sağ tarafına önce $x = \dfrac{y}{|y|^2}$, sonra $\tau = \dfrac{1}{t}$ dönüşümleri uygulanırsa, (3.40) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{q,w,(0,\infty)} &= \left(\int_{(0,\infty)} w^q(t)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in {}^{\complement}B(0,\frac{1}{t})} f\left(\frac{y}{|y|^2}\right)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{(0,\infty)} w^q\left(\frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{\tau^2}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in {}^{\complement}B(0,\tau)} f\left(\frac{y}{|y|^2}\right)\right)^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.41}$$

doğrudur. $f\left(\dfrac{y}{|y|^2}\right)|y|^{-2n} = h(y)$ denilirse, (3.39) ve (3.41) den

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^p(y)\left(v\left(\frac{y}{|y|^2}\right)|y|^{2n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\int_{(0,\infty)} w\left(\frac{1}{\tau}\right)^q \frac{1}{\tau^2}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in {}^{\complement}B(0,\tau)} h(y)|y|^{2n}\right)^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

sağlanır. $h(y)|y|^{2n} = \tilde{f}(y)$ denilirse,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}^p(y)\left(v\left(\frac{y}{|y|^2}\right)|y|^{-\frac{2n}{p}}\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\int_{(0,\infty)}\left(w\left(\frac{1}{\tau}\right)\frac{1}{\tau^{2/q}}\right)^q\left(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in {}^{\complement}B(0,\tau)} \tilde{f}(y)\right)^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $\tilde{v}(y) := v\left(\dfrac{y}{|y|^2}\right)|y|^{-\frac{2n}{p}}$, $\tilde{w} := w\left(\dfrac{1}{\tau}\right)\dfrac{1}{\tau^{2/q}}$ olmak üzere, (3.20) eşitsizliği

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}^p(y)\tilde{v}(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\int_{(0,\infty)} \tilde{w}^q(\tau)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{y\in {}^{\complement}B(0,\tau)} \tilde{f}(y)\right)^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine denktir.

(i) $0 < q \le p < \infty$ olsun. Teorem 3.11 den

$$
\begin{aligned}
c &\approx \sup_{t>0} \|\tilde{v}\|_{p,B(0,t)} \|\tilde{w}\|^{-1}_{q,(0,t)} \\
&= \sup_{t>0} \left(\int_{B(0,t)} v\left(\frac{y}{|y|^2}\right)^p |y|^{-2n} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty w\left(\frac{1}{\tau}\right)^q \frac{1}{\tau^2} d\tau \right)^{-\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

doğrudur. $y = \dfrac{x}{|x|^2}$ ve $\tau = \dfrac{1}{t}$ dönüşümleri yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
c &\approx \sup_{t>0} \left(\int_{{}^{\complement}B(0,\frac{1}{t})} v^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{t}}^\infty w^q(t) dt \right)^{-\frac{1}{q}} \\
&= \left\| \|v\|_{p,{}^{\complement}B(0,x)} \|w\|_{q,(x,\infty)} \right\|_{\infty,(0,\infty)} \\
&= A_1^*
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) $0 < p < q < \infty$ olsun. Teorem 3.11 den

$$
c \approx \left(\int_{(0,\infty)} \|\tilde{v}\|^r_{p,B(0,x)} d\left(-\|\tilde{w}\|^{-r}_{q,(0,t)} \right) \right)^{\frac{1}{r}} + \|\tilde{v}\|_{p,\mathbb{R}^n} \|\tilde{w}\|^{-1}_{q,(0,\infty)}
$$

yazılabilir. (i) şıkkındaki dönüşümler uygulanarak $c \approx A_2^*$ olduğunu görmek kolaydır.

$p = \infty$ ve $q = \infty$ durumlarında ispat benzer şekilde yapılabilir.

Not 3.3. Belirtelim ki, (3.19) ve (3.20) eşitsizliklerinin $n = 1$ durumunda karakterizasyonu [62] de daha genel durumda yapılmıştır.

3.4. İteratif Hardy-Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde (1.4)-(1.5) gömmelerinin karakterizasyonu için oldukça önemli olan

$$\Big(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{U(t)}\int_0^t \Big(\int_s^\infty h(z)dz\Big)^p u(s)ds\Big)^{\frac{q}{p}} w(t)dt\Big)^{\frac{1}{q}} \le c\|h\|_{\theta,v,(0,\infty)}, \quad h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty), \quad (3.42)$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} w(t)\Big(\frac{1}{U(t)}\int_0^t \Big(\int_s^\infty h(z)dz\Big)^p u(s)ds\Big)^{\frac{1}{p}} \le c\|h\|_{\theta,v,(0,\infty)}, \quad h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) \quad (3.43)$$

eşitsizlikleri ele alınacaktır. (3.42) ve (3.43) eşitsizlikleri $p = 1$ durumunda [28] de (ayrıca bkz. [35]) ispatsız olarak verilmiştir. $p = \infty$ durumu [38] de ve $\theta = 1$ durumu [39] ve [73] te v ağırlık fonksiyonunun özel durumunda incelenmiştir. Yakın zamanda [40] ve [41] de, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ durumlarında eşitsizliklerin karakterizasyonu bu tezde ele alınan diskretleştirme tekniğinden farklı bir diskretleştirme yöntemiyle verilmiştir.

Bu bölümde u, v ve w, $(0,\infty)$ üzerinde ağırlık fonksiyonları olmak üzere U ve V_θ fonksiyonlarını

$$U(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau \quad \text{ve} \quad V_\theta(t) = \int_t^\infty v(\tau)^{1-\theta'} d\tau, \quad 1 < \theta < \infty$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca, u, $(0,\infty)$ üzerinde $U(t) > 0$ sağlanacak şekilde bir ağırlık fonksiyonudur.

Tanım 3.1. U, $[0,\infty)$ üzerinde kesin artan ve $U(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} U(t) = \infty$ özelliklerine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda U fonksiyonuna admissible denir. Admissible fonksiyonlar sınıfı Ads ile gösterilir.

$U \in Ads$ olmak üzere, φ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde artan bir fonksiyona ve φ/U fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde azalan bir fonksiyona denk ise, φ ye U-kuasikonkavdır denir.

$$\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\varphi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{U(t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{U(t)}{\varphi(t)} = 0$$

özelliklerini sağlayan U-kuasikonkav φ fonksiyonuna non-degeneredir denir. Non-degenere

U-kuasikonkav fonksiyonlar sınıfı Q_U ile gösterilir.

Tanım 3.2. $U \in Ads$ ve w, $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\varphi(t) = U(t)\int_0^\infty \frac{w(s)\,ds}{U(s)+U(t)}, \qquad t \in (0,\infty)$$

biçiminde tanımlı φ fonksiyonuna w-nın U-ya göre temel fonksiyonu, $w(s)\,ds$ ye ise φ-nin U-ya göre gösterim ölçüsü adı verilir.

Şimdi

$$\mathcal{U}(x,t) := \frac{U(x)}{U(t)+U(x)}$$

fonksiyonununu tanımlayalım.

Not 3.4. φ, w-nın U-ya göre temel fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_0^\infty \frac{w(\tau)\,d\tau}{U(\tau)+U(t)} < \infty,\ t>0, \quad \text{ve} \int_0^1 \frac{w(\tau)\,d\tau}{U(\tau)} = \int_1^\infty w(\tau)\,d\tau = \infty$$

sağlanıyorsa, $\varphi \in Q_U$ dur.

Öncelikle (3.42) eşitsizliğinin karakterizasyonunu hatırlatalım.

Teorem 3.13. ([40, Teorem 3.1]) $0<q<\infty$, $0<p<\infty$, $1<\theta<\infty$, v ve w, $(0,\infty)$ üzerinde ağırlık fonksiyonları ve u fonksiyonu $U \in Ads$ olacak şekilde bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \mathcal{U}(x,\tau)^{\frac{q}{p}} w(\tau)\,d\tau, \quad x \in (0,\infty) \tag{3.44}$$

ile tanımlı $\varphi \in Q_{U^{\frac{q}{p}}}$ olmak üzere (3.42) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

(i) $\theta \le \min\{p,q\}$ ise,

$$A_1 := \sup_{x\in(0,\infty)} \left(\int_0^\infty \mathcal{U}(x,\tau)^{\frac{q}{p}} w(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{U}(t,x)^{\frac{1}{p}} V_\theta(t)^{\frac{1}{\theta'}} < \infty$$

olmasıdır ve (3.42) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx A_1$ dir.

(ii) $q < \theta \le p$ ise, $l = \theta q/(\theta - q)$ olmak üzere,

$$A_2 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathcal{U}(x,\tau)^{\frac{q}{p}} w(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{l-q}{q}} w(x) \sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{U}(t,x)^{\frac{l}{p}} V_\theta(t)^{\frac{l}{\theta'}}\,dx\right)^{\frac{1}{l}} < \infty$$

olmasıdır ve (3.42) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx A_2$ dir.

(iii) $p < \theta < q$ ise, $r = \theta p/(\theta - p)$ olmak üzere,

$$A_3 := \sup_{x\in(0,\infty)} \left(\int_0^\infty \mathcal{U}(x,\tau)^{\frac{q}{p}} w(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \mathcal{U}(t,x)^{\frac{r}{p}} V_\theta(t)^{\frac{r}{p'}} v(t)^{1-\theta'}\,dt\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

olmasıdır ve (3.42) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx A_3$ tür.

(iv) $\max\{p,q\} < \theta$ ise, $r = \theta p/(\theta - p)$ ve $l = \theta q/(\theta - q)$ olmak üzere,

$$A_4 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \mathcal{U}(x,\tau)^{\frac{q}{p}} w(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{l-q}{q}} w(x) \left(\int_0^\infty \mathcal{U}(t,x)^{\frac{r}{p}} V_\theta(t)^{\frac{r}{p'}} v(t)^{1-\theta'}\,dt\right)^{\frac{l}{r}} dx\right)^{\frac{1}{l}} < \infty$$

olmasıdır ve (3.42) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx A_4$ tür.

Not 3.5.

$$\varphi(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,x)} U(t) \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(t,\infty)} \frac{w(\tau)}{U(\tau)},\ t \in (0,\infty)$$

şeklinde tanımlı φ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde her noktada sonlu olsun.

$$\limsup_{t\to 0+} w(t) = \limsup_{t\to +\infty} \frac{1}{w(t)} = \limsup_{t\to 0+} \frac{U(t)}{w(t)} = \limsup_{t\to +\infty} \frac{w(t)}{U(t)} = 0$$

sağlanıyorsa, $\varphi \in Q_U$ dur.

Şimdi (3.43) eşitsizliğinin karakterizasyonunu verelim.

Teorem 3.14. ([40, Teorem 3.2]) $0 < p < \infty$, $1 < \theta \leq \infty$, v ve w, $(0,\infty)$ üzerinde ağırlık fonksiyonları ve u, $U \in Ads$ olacak şekilde bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$$\varphi(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} w(t)\mathcal{U}(x,t)^{\frac{1}{p}}, \ x \in (0,\infty) \tag{3.45}$$

ile tanımlı $\varphi \in Q_{U^{\frac{1}{p}}}$ olmak üzere (3.43) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

(i) $\theta \leq p$ ise,

$$B_1 := \sup_{x\in(0,\infty)} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,\infty)} w(\tau)\mathcal{U}(t,x)^{\frac{1}{p}} \sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{U}(t,x)^{\frac{1}{p}} V_\theta(t)^{\frac{1}{\theta'}} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda (3.43) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx B_1$ dir.

(ii) $p < \theta$ ise, $r = \theta p/(\theta - p)$ olmak üzere,

$$B_2 := \sup_{x\in(0,\infty)} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,\infty)} w(\tau)\mathcal{U}(x,\tau)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \mathcal{U}(t,x)^{\frac{r}{p}} V_\theta(t)^{\frac{r}{p'}} v(t)^{1-\theta'}\, dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda (3.43) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx B_2$ dir.

Şimdi v bir ağırlık fonksiyonu, $0 \leq a < b \leq \infty$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$v_\theta(a,b) = \begin{cases} \left(\int\limits_a^b [v(t)]^{1-\theta'}\, dt \right)^{\frac{1}{\theta'}}, & 1 < \theta < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{a<t<b} [v(t)]^{-1}, & \theta = 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Teorem 3.15. ([38, Teorem 4.2 ve 4.4]) $1 \leq \theta < \infty$, $0 < q < \infty$ ve $u \in \mathcal{W}(0,\infty) \cap C(0,\infty)$ olsun. v, $w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ fonksiyonları için

$$0 < \int_x^\infty v(\tau)\, d\tau < \infty \quad \text{ve} \quad 0 < \int_x^\infty w(\tau)\, d\tau < \infty, \quad x > 0$$

özellikleri sağlansın. Bu durumda

$$\left(\int_0^\infty \left(\sup_{\tau\in(0,t)} u(\tau)\int_\tau^\infty h(z)\,dz\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int_0^\infty h(t)^\theta v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{3.46}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\theta \le q$ ise

$$C_1 := \sup_{x\in(0,\infty)}\left(\left[\sup_{\tau\in(0,x)} u(\tau)\right]^q \int_x^\infty w(\tau)\,d\tau + \int_0^x \left[\sup_{\tau\in(0,t)} u(\tau)\right]^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}} v_\theta(x,\infty) < \infty$$

olmasıdır . Bu durumda (3.46) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx C_1$ dir.

(ii) $q < \theta$ ise, $1/r = 1/q - 1/\theta$ olmak üzere,

$$C_2 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left[\sup_{\tau\in(0,t)} u(\tau)\right]^q w(t)\,dt\right)^{\frac{r}{\theta}} \left[\sup_{\tau\in(0,x)} u(\tau)\right]^q \left[v_\theta(x,\infty)\right]^r w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

$$C_3 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty w(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{r}{\theta}} \left[\sup_{\tau\in(0,x)} \left[\sup_{y\in(0,\tau)} u(y)\right] v_\theta(\tau,\infty)\right]^r w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

olmasıdır . Bu durumda (3.46) eşitsizliğinin en iyi sabiti $c \approx C_2 + C_3$ tür.

4. GÖMME TEOREMLERİ

4.1. $L_{p_1}(\mathbb{R}^n, v_1)$ ile $LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v_2)$ ve ${}^{c}LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v_2)$ Arasındaki Gömmeler

Öncelikle (1.6) ve (1.7) gömmelerini karakterize edelim.

Teorem 4.1. $0 < p_2 \leq p_1 \leq \infty$, $0 < \theta \leq \infty$, $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega \in \Omega_\theta$ olsun.

(i) $p_1 \leq \theta$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \left\|v_1^{-1}v_2\right\|_{p_1\to p_2,B(0,t)} \|\omega\|_{\theta,(t,\infty)}$$

dır.

(ii) $\theta < p_1$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \left(\int_{(0,\infty)} \left\|v_1^{-1}v_2\right\|_{p_1\to p_2,B(0,t)}^{p_1\to\theta} d\Big(-\|\omega\|_{\theta,(t,1)}^{p_1\to\theta}\Big)\right)^{\frac{1}{p_1\to q}}$$

dır.

İspat. Öncelikle $p_2 < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)} &= \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\left\|\|f\|_{p_2,v_2,B(0,t)}\right\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}}{\|f\|_{p_1,v_1,\mathbb{R}^n}} \\ &= \left(\sup_{g\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\|H_n(|g|)\|_{\frac{\theta}{p_2},\omega^{p_2},(0,\infty)}}{\|g\|_{\frac{p_1}{p_2},[v_1v_2^{-1}]^{p_2},\mathbb{R}^n}}\right)^{\frac{1}{p_2}}\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.5 uygulanarak iddianın doğru olduğu görülür.

$p_2 = \infty$ olması durumunda

$$\|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)} = \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\left\|\|f\|_{\infty,v_2,B(0,t)}\right\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}}{\|f\|_{\infty,v_1,\mathbb{R}^n}}$$

$$= \sup_{g \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\|S_n(|g|)\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}}{\|g\|_{\infty,v_1 v_2^{-1},\mathbb{R}^n}}$$

olduğundan Teorem 3.7 nin göz önüne alınmasıyla yine iddianın doğru olduğu görülür.

Aşağıdaki teorem benzer şekilde ispatlanabilir:

Teorem 4.2. $0 < p_2 \le p_1 \le \infty$, $0 < \theta \le \infty$, $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega \in {}^{\mathsf{c}}\Omega_\theta$ olsun.

(i) $p_1 \le \theta$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to {}^{\mathsf{c}}LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \left\|v_1^{-1} v_2\right\|_{p_1\to p_2,{}^{\mathsf{c}}B(0,t)} \|\omega\|_{\theta,(0,t)}$$

dir.

(ii) $\theta < p_1$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to {}^{\mathsf{c}}LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \left(\int_{(0,\infty)} \left\|v_1^{-1} v_2\right\|_{p_1\to p_2,{}^{\mathsf{c}}B(0,t)}^{p_1\to\theta} d\left(\|\omega\|_{\theta,(0,t)}^{p_1\to\theta}\right)\right)^{\frac{1}{p_1\to q}}$$

dur.

Teorem 4.3. X ve Y, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir fonksiyonların kuasi-normlu vektör uzayı ve maksimal fonksiyon X üzerinde sınırlı olsun. Ayrıca, Y latis özelliğini sağlasın, yani

$$0 \le g \le f \qquad \Rightarrow \qquad \|g\|_Y \lesssim \|f\|_Y$$

olsun. Bu durumda, maksimal fonksiyon M nin X ten Y ye sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $X \hookrightarrow Y$ dir. Bu durumda

$$\|M\|_{X\to Y} \approx \|I\|_{X\to Y}$$

dir.

İspat. $|f| \le Mf$ olduğundan Y nin latis özelliği kullanılarak

$$\|I\|_{X\to Y} = \sup_{f\nsim 0} \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X} \lesssim \sup_{f\nsim 0} \frac{\|Mf\|_Y}{\|f\|_X} = \|M\|_{X\to Y}$$

elde edilir.

Diğer yandan, her $g \in X$ için $\|g\|_Y \le \|g\|_X \|I\|_{X\to Y}$ olduğundan

$$\|M\|_{X\to Y} = \sup_{f\nsim 0} \frac{\|Mf\|_Y}{\|f\|_X} \le \left(\sup_{f\nsim 0} \frac{\|Mf\|_X}{\|f\|_X} \right) \|I\|_{X\to Y} = \|M\|_{X\to X} \|I\|_{X\to Y}$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3, maksimal fonksiyonun $L_{p_1}(\mathbb{R}^n, v_1)$ uzayından $LM_{p\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n, v_2)$ uzayına ve $L_{p_1}(\mathbb{R}^n, v_1)$ uzayından ${}^{\complement}LM_{p\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n, v_2)$ uzayına sınırlılığının araştırılması problemini, maksimal fonksiyon $L_{p_1}(\mathbb{R}^n, v_1)$ de sınırlı olduğunda sırasıyla (1.6) ve (1.7) gömmelerinin karakterizasyonuna indirger.

Tanım 4.1. $1 < p < \infty$ ve $w \in W(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\mathbb{R}^n$ deki her B yuvarı için

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w(x)^{-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \le c_p$$

sağlanacak şekilde $c_p > 0$ sabiti varsa, $w \in A_p$ dir denir.

Bilinmektedir ki, A_p Muckenhoupt sınıfı, maksimal fonksiyonun ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığını karakterize eder. Yani, M nin $L_p(\mathbb{R}^n, w)$ de sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ olmasıdır (bkz., [60]).

Aşağıdaki ifadeler, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 nin, Teorem 4.3 ile kombinasyonunun sonuçlarıdır.

Sonuç 4.1. $1 < p_1 < \infty$, $0 < p_2 < \infty$, $p_2 \le p_1$, $0 < \theta \le \infty$, $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega \in \Omega_\theta$ olsun. Ayrıca, $v_1 \in A_{p_1}$ sağlansın.

(i) $p_1 \le \theta$ ise,

$$\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n, v_1) \to LM_{p_2 \theta, \omega}(\mathbb{R}^n, v_2)} \approx \sup_{t \in (0,\infty)} \left\| v_1^{-1} v_2 \right\|_{p_1 \to p_2, B(0,t)} \|\omega\|_{\theta,(t,\infty)}$$

dur.

(ii) $\theta < p_1$ ise,

$$\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n, v_1) \to LM_{p_2 \theta, \omega}(\mathbb{R}^n, v_2)} \approx \left(\int_{(0,\infty)} \|v_1^{-1} v_2\|_{p_1 \to p_2, B(0,t)}^{p_1 \to \theta} \, d\left(- \|\omega\|_{\theta,(t,1)}^{p_1 \to \theta} \right) \right)^{\frac{1}{p_1 \to q}}$$

dur.

Sonuç 4.2. $1 < p_1 < \infty$, $0 < p_2 < \infty$, $0 < \theta \le \infty$, $p_2 \le p_1$, $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega \in {}^{\complement}\Omega_\theta$ olsun. Ayrıca, $v_1 \in A_{p_1}$ sağlansın.

(i) $p_1 \le \theta$ ise,

$$\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n, v_1) \to {}^{\complement}LM_{p_2 \theta, \omega}(\mathbb{R}^n, v_2)} \approx \sup_{t \in (0,\infty)} \left\| v_1^{-1} v_2 \right\|_{p_1 \to p_2, {}^{\complement}B(0,t)} \|\omega\|_{\theta,(0,t)}$$

dir.

(ii) $\theta < p_1$ ise,

$$\|M\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n, v_1) \to {}^{\complement}LM_{p_2 \theta, \omega}(\mathbb{R}^n, v_2)} \approx \left(\int_{(0,\infty)} \|v_1^{-1} v_2\|_{p_1 \to p_2, {}^{\complement}B(0,t)}^{p_1 \to \theta} \, d\left(\|\omega\|_{\theta,(0,t)}^{p_1 \to \theta} \right) \right)^{\frac{1}{p_1 \to q}}$$

dur.

Şimdi (1.8) ve (1.9) gömmelerinin karakterizasyonunu verelim:

Teorem 4.4. $0 < p_1 \le p_2 \le \infty$, $0 < \theta \le \infty$, v_1, $v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega \in \Omega_\theta$ olsun.

(i) $\theta \le p_1$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)\to L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \left\|v_1 v_2^{-1}\right\|_{p_2\to p_1,{}^{\mathfrak{c}}B(0,t)} \|\omega\|_{\theta,(t,\infty)}^{-1}$$

dur.

(ii) $p_1 < \theta$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)\to L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)} \approx \left(\int_{(0,\infty)} \left\|v_1 v_2^{-1}\right\|_{p_2\to p_1,{}^{\mathfrak{c}}B(0,t)}^{\theta\to p_1} d\left(\|\omega\|_{\theta,(t-,\infty)}^{-\theta\to p_1}\right)\right)^{\frac{1}{q\to p_1}} + \left\|v_1 v_2^{-1}\right\|_{p_2\to p_1,\mathbb{R}^n} \|\omega\|_{\theta,(0,\infty)}^{-1}$$

dur.

İspat. $p_2 < \infty$ olsun.

$$\begin{aligned}\|\mathrm{I}\|_{LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)\to L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)} &= \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\|f\|_{p_1,v_1,\mathbb{R}^n}}{\left\|\|f\|_{p_2,v_2,B(0,r)}\right\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}} \\ &= \left(\sup_{g\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\|g\|_{\frac{p_1}{p_2},(v_1v_2^{-1})^{p_2},\mathbb{R}^n}}{\|H_n(|g|)\|_{\frac{\theta}{p_2},\omega^{p_2},(0,\infty)}}\right)^{1/p_2}\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.9 un göz önüne alınmasıyla iddianın doğruluğu görülür.

$p_2 = \infty$ ise,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{I}\|_{LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)\to L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)} &= \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\|f\|_{p_1,v_1,\mathbb{R}^n}}{\left\|\|f\|_{p_2,v_2,B(0,r)}\right\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}} \\ &= \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\|g\|_{p_1,v_1v_2^{-1},\mathbb{R}^n}}{\|S_n(|g|)\|_{\theta,\omega,(0,\infty)}}\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.12 uygulanarak ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem benzer şekilde ispatlanabilir:

Teorem 4.5. $0 < p_1 \le p_2 \le \infty$, $0 < \theta \le \infty$, $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega \in {}^{\mathfrak{c}}\Omega_\theta$ olsun.

(i) $\theta \le p_1$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathfrak{c}}LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)\to L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \left\|v_1 v_2^{-1}\right\|_{p_2\to p_1,B(0,t)} \|\omega\|_{\theta,(0,t)}^{-1}$$

dir.

(ii) $p_1 < \theta$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathfrak{c}}LM_{p_2\theta,\omega}(\mathbb{R}^n,v_2)\to L_{p_1}(\mathbb{R}^n,v_1)} \approx \left(\int_{(0,\infty)} \left\|v_1 v_2^{-1}\right\|_{p_2\to p_1,B(0,t)}^{\theta\to p_1} d\Big(-\|\omega\|_{\theta,(0,t+)}^{-\theta\to p_1}\Big)\right)^{\frac{1}{\theta\to p_1}} + \left\|v_1 v_2^{-1}\right\|_{p_2\to p_1,\mathbb{R}^n} \|\omega\|_{\theta,(0,\infty)}^{-1}$$

dir.

Tanım 4.2. $\|\cdot\|_X$, $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ üzerinde tanımlı homogen bir fonksiyonel olsun. $\|f\|_X < \infty$ özelliğini sağlayan fonksiyonların kümesini X ile gösterelim.

$$\|f\|_{X'} = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx\right| : \|g\|_X \le 1\right\}$$

olmak üzere $\|f\|_{X'} < \infty$ şartını sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar kümesine, X uzayının associate uzayı denir.

Lokal Morrey-tipli ve komplementar lokal Morrey-tipli uzayların associate uzayları [32] de hesaplanmıştır. Teorem 4.4 ve Teorem 4.5, ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzayların associate uzaylarının karakterizasyonuna imkân sağlamaktadır.

Teorem 4.6. $1 \le p \le \infty$, $0 < \theta \le \infty$, $\omega \in \Omega_\theta$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$X = LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$$

olmak üzere,

(i) $\theta \le 1$ durumunda

$$\|f\|_{X'} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \|f\|_{p',v^{-1},{}^{\complement}B(0,t)} \|\omega\|^{-1}_{\theta,(t,\infty)}$$

denkliği f fonksiyonundan bağımsız sabitlerle doğrudur;

(ii) $\theta > 1$ durumunda

$$\|f\|_{X'} \approx \left(\int_{(0,\infty)} \|f\|^{\theta'}_{p',v^{-1},{}^{\complement}B(0,t)} d\left(\|\omega\|^{-\theta'}_{\theta,(t-,\infty)} \right) \right)^{1/\theta'} + \frac{\|f\|_{p',v^{-1},\mathbb{R}^n}}{\|\omega\|_{\theta,(0,\infty)}}$$

denkliği f fonksiyonundan bağımsız sabitlerle doğrudur.

Teorem 4.7. $1 \le p \le \infty$, $0 < \theta \le \infty$, $\omega \in {}^{\complement}\Omega_\theta$ ve $v \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$X = {}^{\complement}LM_{p\theta,\omega}(\mathbb{R}^n, v)$$

olmak üzere,

(i) $\theta \le 1$ durumunda

$$\|f\|_{X'} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \|f\|_{p',v^{-1},B(0,t)} \|\omega\|^{-1}_{\theta,(0,t)}$$

denkliği f fonksiyonundan bağımsız sabitlerle doğrudur;

(ii) $\theta > 1$ durumunda

$$\|f\|_{X'} \approx \left(\int_{(0,\infty)} \|f\|^{\theta'}_{p',v^{-1},B(0,t)} d\left(\|\omega\|^{-\theta'}_{\theta,(0,t+)} \right) \right)^{1/\theta'} + \frac{\|f\|_{p',v^{-1},\mathbb{R}^n}}{\|\omega\|_{\theta,(0,\infty)}}$$

denkliği f fonksiyonundan bağımsız sabitlerle doğrudur.

4.2. $LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n, v_1)$ ve ${}^{\complement}LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n, v_2)$ Arasındaki Gömmeler

Bu kısımda (1.4) ve (1.5) gömmelerinin karakterizasyonu verilecektir.

$x > 0$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$v(x) := v_1(x)^{-1} v_2(x), \quad V(x) := \|v\|_{p_1 \to p_2, B(0,x)}, \quad \text{ve} \quad \mathcal{V}(t,x) := \frac{V(t)}{V(t) + V(x)}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

Lemma 4.1. $0 < p_1, p_2, \theta_1, \theta_2 \leq \infty$ ve $p_1 < p_2$ olsun. $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{\complement}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olmak üzere ${}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n, v_1) \not\hookrightarrow LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n, v_2)$ dir.

İspat. ${}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n, v_1) \hookrightarrow LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n, v_2)$ gömmesinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\|f\|_{LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \leq c\, \|f\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif ve sonlu bir c sabiti vardır. Herhangi bir $\tau \in (0, \infty)$ için $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$: $\operatorname{supp} f \subset B(0, \tau)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \|f\|_{LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} &= \Big\| \|f\|_{p_2,v_2,B(0,t)} \Big\|_{\theta_2,\omega_2,(0,\infty)} \\ &\geq \Big\| \|f\|_{p_2,v_2,B(0,t)} \Big\|_{\theta_2,\omega_2,(\tau,\infty)} \\ &\geq \|\omega_2\|_{\theta_2,(\tau,\infty)}\, \|f\|_{p_2,v_2,B(0,\tau)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

ve

$$\begin{aligned} \|f\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)} &= \Big\| \|f\|_{p_1,v_1,{}^{\complement}B(0,t)} \Big\|_{\theta_1,\omega_1,(0,\infty)} \\ &= \Big\| \|f\|_{p_1,v_1,{}^{\complement}B(0,t)} \Big\|_{\theta_1,\omega_1,(0,\tau)} \\ &\leq \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,\tau)}\, \|f\|_{p_1,v_1,B(0,\tau)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitsizlikleri doğrudur. (4.1) ve (4.2) birlikte ele alınırsa,

$$\|\omega_2\|_{\theta_2,(\tau,\infty)}\, \|f\|_{p_2,v_2,B(0,\tau)} \leq c\, \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,\tau)}\, \|f\|_{p_1,v_1,B(0,\tau)}$$

sağlanır. $\omega_1 \in {}^{\complement}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olduğundan, $L_{p_1}(B(0,\tau), v_1) \hookrightarrow L_{p_2}(B(0,\tau), v_2)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir, çünkü $p_1 < p_2$ dir.

Teorem 4.8. $0 < p_1 = \theta_1 < \infty$, $0 < p_2 = \theta_2 < \infty$, $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{\mathrm{c}}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olsun. Bu durumda

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \Big\| \|\omega_1\|^{-1}_{p_1,(0,|\cdot|)} \|\omega_2\|_{p_2,(|\cdot|,\infty)} \Big\|_{p_1\to p_2,v,(0,\infty)}$$

sağlanır.

İspat. Teorem 2.6 ve Teorem 2.7 den, $p_1 = \theta_1$, $p_2 = \theta_2$ olması durumunda $w_1(x) = v_1(x)\|\omega_1\|_{p_1,(0,|x|)}$ ve $w_2(x) = v_2(x)\|\omega_2\|_{p_2,(|x|,\infty)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} &= \|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,w_1)\to L_{p_2}(\mathbb{R}^n,w_2)} \\ &\approx \Big\| \|\omega_1\|^{-1}_{p_1,(0,|\cdot|)} \|\omega_2\|_{p_2,(|\cdot|,\infty)} \Big\|_{p_1\to p_2,v,(0,\infty)}\end{aligned}$$

doğrudur.

Teorem 4.9. $0 < p_1, p_2, \theta_1, \theta_2 < \infty$, $p_1 = \theta_1$ ve $p_2 \neq \theta_2$ olsun. $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{\mathrm{c}}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olmak üzere,

(i) $p_1 \leq \theta_2$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \Big\| \|\omega_1\|^{-1}_{p_1,(0,|\cdot|)} \Big\|_{p_1\to p_2,v,B(0,t)} \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

dur;

(ii) $\theta_2 < p_1$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \left(\int_0^\infty \Big\| \|\omega_1\|^{-1}_{p_1,(0,|\cdot|)} \Big\|^{p_1\to\theta_2}_{p_1\to p_2,v,B(0,t)} d\Big(-\,\omega_2\|^{p_1\to\theta_2}_{\theta_2,(t,\infty)} \Big) \right)^{\frac{1}{p_1\to\theta_2}}$$

dir.

İspat. Teorem 2.7 den, $w_1(x) = v_1(x)\|\omega_1\|_{p_1,(0,|x|)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} = \|\mathrm{I}\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n,w_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}$$

yazılabilir. Teorem 4.1 göz önüne alınırsa, iddianın doğruluğu görülür.

Teorem 4.10. $0 < p_1, p_2, \theta_1, \theta_2 < \infty$, $p_1 \neq \theta_1$ ve $p_2 = \theta_2$ olsun. $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{\mathrm{c}}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olmak üzere,

(i) $\theta_1 \leq p_2$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,t)} \Big\| \|\omega_2\|_{p_2,(|\cdot|,\infty)} \Big\|_{p_1\to p_2,v,B(0,t)}$$

dir;

(ii) $p_2 < \theta_1$ ise,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} &\\ \approx \bigg(\int_0^\infty \Big\| \|\omega_2\|_{p_2,(|\cdot|,\infty)} \Big\|^{\theta_1\to p_2}_{p_1\to p_2,v,B(0,t)} d\Big(-\|\omega_1\|^{-\theta_1\to p_2}_{\theta_1,(0,t)} \Big) \bigg)^{\frac{1}{\theta_1\to p_2}} &\\ + \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)} \Big\| \|\omega_2\|_{p_2,(|\cdot|,\infty)} \Big\|_{p_1\to p_2,v,\mathbb{R}^n} &\end{aligned}$$

dir.

İspat. Teorem 2.6 dan $w_2(x) = v_2(x)\|\omega_2\|_{p_2,(|x|,\infty)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} = \|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to L_{p_2}(\mathbb{R}^n,w_2)}$$

doğrudur. Teorem 4.5 uygulanarak ispat tamamlanır.

Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 4.2. $0 < p_1, p_2, \theta_1, \theta_2 < \infty$, $p_2 \le p_1$ ve $p_2 < \theta_2$ olsun. $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{\complement}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olmak üzere

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} = \left\{ \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\|\mathrm{I}\|^{p_2}_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to L_{p_2}\left(\mathbb{R}^n, v_2(\cdot)H^*g(|\cdot|)^{\frac{1}{p_2}}\right)}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}} \right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

dir.

İspat. Duallik prensibi uygulanıp, supremumların yerleri değiştirilirse,

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{I}\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \\
&= \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\|f\|_{LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}}{\|f\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)}} \\
&= \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{\|f\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)}} \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\left(\int_0^\infty \left(\int_{B(0,\tau)} f(x)^{p_2} v_2(x)^{p_2}\,dx\right) g(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p_2}}}{\|g\|^{\frac{1}{p_2}}_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}} \\
&= \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{1}{\|g\|^{\frac{1}{p_2}}_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}} \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\left(\int_0^\infty \left(\int_{B(0,\tau)} f(x)^{p_2} v_2(x)^{p_2}\,dx\right) g(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p_2}}}{\|f\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Fubini Teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{I}\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \\
&= \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{1}{\|g\|^{\frac{1}{p_2}}_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}} \sup_{f\in\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{p_2} v_2(x)^{p_2} \left(\int_{|x|}^\infty g\right) dx\right)^{\frac{1}{p_2}}}{\|f\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)}} \\
&= \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{1}{\|g\|^{\frac{1}{p_2}}_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}} \|\mathrm{I}\|_{{}^{\complement}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to L_{p_2}\left(\mathbb{R}^n, v_2(\cdot)H^*g(|\cdot|)^{\frac{1}{p_2}}\right)} \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Teorem 4.11. $0 < p_1, p_2, \theta_1, \theta_2 < \infty$, $p_2 < p_1$ ve $\theta_1 \le p_2 < \theta_2$ olsun. Ayrıca $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{\mathsf{c}}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olduğunu kabul edelim. $V \in Ads$ ve

$$\varphi_1(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} V(t)\mathcal{V}(x,t)\,\|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,t)} \in Q_{V^{\frac{1}{p_1\to p_2}}}$$

olmak üzere,

(i) $p_1 \le \theta_2$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_1(x) \sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{V}(t,x)\,\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

dur;

(ii) $\theta_2 < p_1$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_1(x)\left(\int_0^\infty \mathcal{V}(t,x)^{p_1\to\theta_2}\, d\left(-\|\omega_2\|^{p_1\to\theta_2}_{\theta_2,(t,\infty)}\right)\right)^{\frac{1}{p_1\to\theta_2}}$$

dir.

İspat. Lemma 4.2 den,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} = \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{1}{\|g\|^{\frac{1}{p_2}}_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}} \|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to L_{p_2}\left(\mathbb{R}^n,v_2(\cdot)H^*g(|\cdot|)^{\frac{1}{p_2}}\right)}$$

eşitliği doğrudur. $\theta_1 \le p_2$ olduğundan, Teorem [4.5, (i)] nin uygulanmasıyla,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \left\{ \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_1\|^{-p_2}_{\theta_1,(0,t)} \left\|H^*g(|\cdot|)\right\|_{\frac{p_1}{p_1-p_2},v^{p_2},B(0,t)}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}} \right\}^{\frac{1}{p_2}} \tag{4.4}$$

elde edilir. Kutupsal koordinatlar kullanılarak,

$$\left\|H^* g(|\cdot|)\right\|_{\frac{p_1}{p_1-p_2}, v^{p_2}, B(0,t)} = \left(\int_{B(0,t)} v(x)^{\frac{p_1 p_2}{p_1-p_2}} \left(\int_{|x|}^{\infty} g\right)^{\frac{p_1}{p_1-p_2}} dx\right)^{\frac{p_1-p_2}{p_1}}$$
$$= \left(\int_0^t \left(\int_r^{\infty} g\right)^{\frac{p_1}{p_1-p_2}} \left(\int_{S^{n-1}} v(rx')^{\frac{p_1 p_2}{p_1-p_2}} r^{n-1} d\sigma(x')\right) dr\right)^{\frac{p_1-p_2}{p_1}}$$

yazılabilir. $\tilde{v}(r) := \int_{S^{n-1}} v(rx')^{\frac{p_1 p_2}{p_1-p_2}} r^{n-1} d\sigma(x')$ olmak üzere,

$$\left\|H^* g(|\cdot|)\right\|_{\frac{p_1}{p_1-p_2}, v^{p_2}, B(0,t)} = \left\|H^* g(|\cdot|)\right\|_{\frac{p_1}{p_1-p_2}, \tilde{v}^{\frac{p_1-p_2}{p_1}}, (0,t)}, \quad t > 0$$

bulunur. Böylece,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1) \to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}$$
$$\approx \left\{ \sup_{g \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)}^{-p_2} \left\|H^* g\right\|_{\frac{p_1}{p_1-p_2}, \tilde{v}^{\frac{p_1-p_2}{p_1}}, (0,t)}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2}, \omega_2^{-p_2}, (0,\infty)}} \right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\int_0^t \tilde{v} = \int_0^t \int_{S^{n-1}} v(rx')^{\frac{p_1 p_2}{p_1-p_2}} d\sigma(x') r^{n-1} dr = \int_{B(0,t)} v^{\frac{p_1 p_2}{p_1-p_2}} = V(t)^{\frac{p_1 p_2}{p_1-p_2}} \tag{4.5}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

(i) $\theta_1 \le p_2 < p_1 \le \theta_2$ ise, Teorem [3.14, (i)] den,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1) \to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_1(x) \sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{V}(t,x) \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

olur.

(ii) $\theta_1 \le p_2 < \theta_2 < p_1$ ise, Teorem [3.14, (ii)] den,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathrm{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1) \to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}$$
$$\approx \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_1(x) \left(\int_0^{\infty} \mathcal{V}(t,x)^{p_1 \to \theta_2} d\left(-\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}^{p_1\to\theta_2}\right)\right)^{\frac{1}{p_1\to\theta_2}}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 4.1. Not 3.5 ten,

$$\limsup_{t\to 0+} V(t)\|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)}^{-1}$$
$$= \limsup_{t\to+\infty} V(t)^{-1}\|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)} = \limsup_{t\to 0+} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)} = \limsup_{t\to+\infty} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)}^{-1} = 0$$

sağlanıyorsa, $\varphi_1 \in Q_{V^{\frac{1}{p_1\to p_2}}}$ dir.

Teorem 4.12. $0 < p_1, p_2, \theta_1, \theta_2 < \infty$, $p_2 < p_1$ ve $p_2 < \min\{\theta_1, \theta_2\}$ olsun. $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{c}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olsun. $V \in Ads$ ve

$$\varphi_2(x) := \int_0^\infty [\mathcal{V}(x,t)V(t)]^{\theta_1\to p_2}\, d\Big(-\|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)}^{-\theta_1\to p_2}\Big) \in Q_{V^{\frac{1}{p_1\to p_2}}}$$

olmak üzere,

(i) $\max\{p_1,\theta_1\} \le \theta_2$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_2(x) \sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{V}(t,x)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$
$$+ \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,\infty)}^{-1} \sup_{t\in(0,\infty)} V(t)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

dur;

(ii) $p_1 \le \theta_2 < \theta_1$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}$$
$$\approx \Bigg(\int_0^\infty \varphi_2(x)^{\frac{\theta_1\to\theta_2.\theta_1\to p_2}{\theta_2\to p_2}} V(x)^{\theta_1\to p_2}\Big(\sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{V}(t,x)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}\Big)^{\theta_1\to\theta_2} d\Big(-\|\omega_1\|_{\theta_1,(0,x)}^{-\theta_1\to p_2}\Big)\Bigg)^{\frac{1}{\theta_1\to\theta_2}}$$
$$+ \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,\infty)}^{-1} \sup_{t\in(0,\infty)} V(t)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

dur;

(iii) $\theta_1 \le \theta_2 < p_1$ ise,

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{I}\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}\\ &\qquad\approx \sup_{x\in(0,\infty)}\varphi_2(x)\Big(\int_0^\infty \mathcal{V}(t,x)^{p_1\to\theta_2}d\Big(-\|\omega_2\|^{p_1\to\theta_2}_{\theta_2,(t,\infty)}\Big)\Big)^{\frac{1}{p_1\to\theta_2}}\\ &\qquad\quad+\|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)}\Big(\int_0^\infty V(t)^{p_1\to\theta_2}d\Big(-\|\omega_2\|^{p_1\to\theta_2}_{\theta_2,(t,\infty)}\Big)\Big)^{\frac{1}{p_1\to\theta_2}}\end{aligned}$$

dir;

(iv) $\theta_2 < \min\{p_1,\theta_1\}$ ise,

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{I}\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}\\ &\approx\Big(\int_0^\infty \varphi_2(x)^{\frac{\theta_1\to\theta_2.\theta_1\to p_2}{\theta_2\to p_2}}V(x)^{\theta_1\to p_2}\Big(\int_0^\infty \mathcal{V}(t,x)^{p_1\to\theta_2}d\Big(-\|\omega_2\|^{p_1\to\theta_2}_{\theta_2,(t,\infty)}\Big)\Big)^{\frac{\theta_1\to\theta_2}{p_1\to\theta_2}}d\Big(-\|\omega_1\|^{-\theta_1\to p_2}_{\theta_1,(0,x)}\Big)\Big)^{\frac{1}{\theta_1\to\theta_2}}\\ &\quad+\|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)}\Big(\int_0^\infty V(t)^{p_1\to\theta_2}d\Big(-\|\omega_2\|^{p_1\to\theta_2}_{\theta_2,(t,\infty)}\Big)\Big)^{\frac{1}{p_1\to\theta_2}}\end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 4.2 ve Teorem [4.5, (ii)] uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{I}\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}\\ &\approx\|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)}\left\{\sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)}\frac{\big\|H^*g(|\cdot|)\big\|_{\frac{p_1}{p_1-p_2},v^{p_2},\mathbb{R}^n}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}}\right\}^{\frac{1}{p_2}}\\ &+\left\{\sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)}\frac{\Big(\int_0^\infty\big\|H^*g(|\cdot|)\big\|^{\frac{\theta_1}{\theta_1-p_2}}_{\frac{p_1}{p_1-p_2},v^{p_2},B(0,t)}d\Big(-\|\omega_1\|^{-\frac{\theta_1p_2}{\theta_1-p_2}}_{\theta_1,(0,t)}\Big)\Big)^{\frac{\theta_1-p_2}{\theta_1}}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}}\right\}^{\frac{1}{p_2}}\end{aligned}\tag{4.6}$$

yazılabilir. Kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{I}\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)}\\ &\approx\|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)}\left\{\sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)}\frac{\big\|H^*g\big\|_{\frac{p_1}{p_1-p_2},\tilde{v}^{\frac{p_1-p_2}{p_1}},(0,\infty)}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}}\right\}^{\frac{1}{p_2}}\end{aligned}$$

$$+\left\{\sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\left(\int_0^\infty \left\|H^*g\right\|^{\frac{\theta_1}{\theta_1-p_2}}_{\frac{p_1}{p_1-p_2},\tilde{v}^{\frac{p_1-p_2}{p_1}},(0,t)} d\left(-\|\omega_1\|^{-\frac{\theta_1 p_2}{\theta_1-p_2}}_{\theta_1,(0,t)}\right)\right)^{\frac{\theta_1-p_2}{\theta_1}}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p_2},\omega_2^{-p_2},(0,\infty)}}\right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$:= C_1 + C_2$$

bulunur.

Öncelikle $p_1 \le \theta_2$ olduğunu varsayalım. Teorem [3.2,(i)] uygulanırsa,

$$C_1 \approx \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)} \sup_{t\in(0,\infty)} V(t)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} \tag{4.7}$$

elde edilir.

(i) $\theta_1 \le \theta_2$ ise, Teorem [3.13, (i)] nin uygulanmaıyla,

$$C_2 \approx \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_2(x) \sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{V}(t,x)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

yazılabilir.

(ii) $p_2 < p_1 \le \theta_2 < \theta_1$ ise, Teorem [3.13, (ii)] den,

$$C_2 \approx \left(\int_0^\infty \varphi_2(x)^{\frac{\theta_1\to\theta_2.\theta_1\to p_2}{\theta_2\to p_2}} V(x)^{\theta_1\to p_2}\left(\sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{V}(t,x)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}\right)^{\theta_1\to\theta_2} d\left(-\|\omega_1\|^{-\theta_1\to p_2}_{\theta_1,(0,x)}\right)\right)^{\frac{1}{\theta_1\to\theta_2}}$$

sağlanır.

Şimdi $\theta_2 < p_1$ olsun. Teorem [3.2,(ii)] nin uygulanmasıyla

$$C_1 \approx \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)}\left(\int_0^\infty V(t)^{p_1\to\theta_2} d\left(-\|\omega_2\|^{p_1\to\theta_2}_{\theta_2,(t,\infty)}\right)\right)^{\frac{1}{p_1\to\theta_2}}$$

elde edilir.

(iii) $\theta_1 \leq \theta_2$ ise, Teorem [3.13, (iii)] den

$$C_2 \approx \sup_{x \in (0,\infty)} \varphi_2(x) \Big(\int_0^\infty \mathcal{V}(t,x)^{p_1 \to \theta_2} d\Big(-\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}^{p_1 \to \theta_2} \Big) \Big)^{\frac{1}{p_1 \to \theta_2}}$$

dir.

(iv) $\theta_2 < \theta_1$ ise, Teorem [3.13, (iv)] uygulanarak

$$C_2 \approx \Big(\int_0^\infty \varphi_2(x)^{\frac{\theta_1 \to \theta_2 . \theta_1 \to p_2)}{\theta_2 \to p_2}} V(x)^{\theta_1 \to p_2} \Big(\int_0^\infty \mathcal{V}(t,x)^{p_1 \to \theta_2} d\Big(-\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}^{p_1 \to \theta_2} \Big) \Big)^{\frac{\theta_1 \to \theta_2}{p_1 \to \theta_2}} d\Big(-\|\omega_1\|_{\theta_1,(0,x)}^{-\theta_1 \to p_2} \Big) \Big)^{\frac{1}{\theta_1 \to \theta_2}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 4.2. $x > 0$ için $\varphi_2(x) < \infty$ olsun. Not 3.4 ten,

$$\int_0^1 \Big(\int_0^t \omega_1^{\theta_1} \Big)^{-\frac{\theta_1}{\theta_1 - p_2}} \omega_1^{\theta_1}(t)dt = \int_1^\infty V(t)^{\frac{\theta_1 p_2}{\theta_1 - p_2}} \Big(\int_0^t \omega_1^{\theta_1} \Big)^{-\frac{\theta_1}{\theta_1 - p_2}} \omega_1^{\theta_1}(t)dt = \infty,$$

sağlanıyorsa, bu durumda $\varphi_2 \in Q_{V^{\frac{1}{p_1 \to p_2}}}$ *dir.*

Şimdi $p_1 = p_2 = p$ durumunu ele alalım.

Teorem 4.13. $0 < \theta_1 < p < \theta_2 < \infty$ olsun. Bu taktirde $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{\mathsf{c}}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olmak üzere,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1) \to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{t \in (0,\infty)} \Big\| \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,|\cdot|)}^{-1} \Big\|_{\infty,v,B(0,t)} \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

dur.

İspat. Lemma 4.2, ve Teorem [4.5, (i)] uygulanırsa,

$$\|I\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} = \left\{ \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\sup\limits_{t\in(0,\infty)} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)}^{-p} \sup\limits_{x\in B(0,t)} v(x)^p \int_{|x|}^{\infty} g}{\left(\int_0^\infty g(x)^{\frac{\theta_2}{\theta_2-p}} \omega_2(x)^{-\frac{p\theta_2}{\theta_2-p}} dx\right)^{\frac{\theta_2-p}{\theta_2}}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

sağlanır. Diğer taraftan

$$\sup_{x\in B(0,t)} v(x)^p \int_{|x|}^{\infty} g = \sup_{x\in(0,t)} \sup_{|y|=x} v(y)^p \int_{|y|}^{\infty} g = \sup_{s\in(0,t)} v_*(s) \int_s^\infty g$$

yazılabilir. Burada $v_*(s) := \sup_{|y|=s} v(y)^p$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|I\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} &= \left\{ \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\sup\limits_{t\in(0,\infty)} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)}^{-p} \sup\limits_{s\in(0,t)} v_*(s) \int_s^\infty g}{\left(\int_0^\infty g(x)^{\frac{\theta_2}{\theta_2-p}} \omega_2(x)^{-\frac{p\theta_2}{\theta_2-p}} dx\right)^{\frac{\theta_2-p}{\theta_2}}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\{ \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\sup\limits_{t\in(0,\infty)} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,t)}^{-p} v_*(t) \int_t^\infty g}{\left(\int_0^\infty g(x)^{\frac{\theta_2}{\theta_2-p}} \omega_2(x)^{-\frac{p\theta_2}{\theta_2-p}} dx\right)^{\frac{\theta_2-p}{\theta_2}}} \right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem [3.2,(i)] uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\|I\|_{{}^{c}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} &\approx \sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} \left(\sup_{s\in(0,t)} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,s)}^{-1} v_*(s)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&= \sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} \left(\sup_{s\in(0,t)} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,s)}^{-1} \sup_{|y|=s} v(y) \right) \\
&= \sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} \left(\sup_{s\in(0,t)} \sup_{|y|=s} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,|y|)}^{-1} v(y) \right) \\
&= \sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} \left(\sup_{x\in B(0,t)} \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,|x|)}^{-1} v(x) \right) \\
&= \sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} \left\| \|\omega_1\|_{\theta_1,(0,|\cdot|)}^{-1} \right\|_{\infty,v,B(0,t)}
\end{aligned}$$

bulunur.

$p = p_1 = p_2 < \theta_1$ durumunu ele almadan önce aşağıdaki ”birleştirme” lemmasını verelim.

Bu lemmada kullanılan metot [36, Teorem 3.1] dekine paraleldir.

Lemma 4.3. β pozitif bir sayı, $u \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ olsun. h, $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \mathcal{U}(x,t)g(t)\,dt\Big)^{\beta-1}\Big(\sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{U}(t,x)h(t)\Big)^{\beta} g(x)\,dx \\ \approx \int_0^\infty \Big(\int_0^x g(t)\,dt\Big)^{\beta-1}\Big(\sup_{t\in(x,\infty)} h(t)\Big)^{\beta} g(x)\,dx \\ + \int_0^\infty \Big(\int_x^\infty U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau\Big)^{\beta-1}\Big(\sup_{t\in(0,x)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} U(x)^{-1} g(x)\,dx\end{aligned}$$

tir.

İspat.

$$\begin{aligned}A_1 &:= \int_0^\infty \Big(\int_0^x g(t)\,dt\Big)^{\beta-1}\Big(\sup_{t\in(x,\infty)} h(t)\Big)^{\beta} g(x)\,dx, \\ A_2 &:= \int_0^\infty \Big(\int_x^\infty U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau\Big)^{\beta-1}\Big(\sup_{t\in(0,x)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} U(x)^{-1} g(x)\,dx\end{aligned}$$

olsun.

$$B_1 := \int_0^\infty \Big(\int_0^x g(t)\,dt\Big)^{\beta-1}\Big(U(x)^{-1}\sup_{t\in(0,x)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} g(x)\,dx,$$

ve

$$B_2 := \int_0^\infty \Big(\int_x^\infty U(t)^{-1} g(t)\,dt\Big)^{\beta-1}\Big(U(x)\sup_{t\in(x,\infty)} h(t)\Big)^{\beta} U(x)^{-1} g(x)\,dx$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \mathcal{U}(x,t)g(t)\,dt\Big)^{\beta-1}\Big(\sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{U}(t,x)h(t)\Big)^{\beta} g(x)\,dx \\ \approx \int_0^\infty \Big(\int_0^x g(t)\,dt + U(x)\int_x^\infty U(t)^{-1} g(t)\,dt\Big)^{\beta-1} \\ \times\Big(U(x)^{-1}\sup_{t\in(0,x)} U(t)h(t) + \sup_{t\in(x,\infty)} h(t)\Big)^{\beta} g(x)dx \\ \approx A_1 + A_2 + B_1 + B_2.\end{aligned}$$

doğrudur. Bu durumda $B_i \lesssim A_1 + A_2$, $i = 1,2$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$B_1 \lesssim A_1 + A_2$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\int_0^\infty g(t)dt < \infty$ durumunu göz önüne alalım. $\int_0^\infty g(t)dt = \infty$ olması halinde ispat çok daha kolaydır. $-\infty < k \le M$ için $\int_0^{x_k} g(t)\,dt = 2^k$ ve $2^M \le \int_0^\infty g(t)\,dt < 2^{M+1}$ sağlanacak biçimde $\{x_k\}_{k=-\infty}^{M}$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_1 &\le \int_0^\infty \Big(\int_0^x g(t)\,dt\Big)^{\beta-1}\Big(\sup_{y\in(x,\infty)} U(y)^{-1} \sup_{t\in(0,y)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} g(x)\,dx \\ &\approx \sum_{k=-\infty}^{M} 2^{k\beta}\Big(\sup_{y\in(x_k,\infty)} U(y)^{-1} \sup_{t\in(0,y)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} \\ &\approx \sum_{k=-\infty}^{M} 2^{k\beta}\Big(\sup_{y\in(x_k,x_{k+1})} U(y)^{-1} \sup_{t\in(0,y)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} \end{aligned}$$

denkliği doğrudur. Her $-\infty < k \le M$ sabiti için

$$\sup_{y\in(x_k,x_{k+1})} U(y)^{-1} \sup_{t\in(0,y)} U(t)h(t) \le 2U(y_k)^{-1} \sup_{t\in(0,y_k)} U(t)h(t)$$

sağlanacak şekilde bir $y_k \in (x_k, x_{k+1})$ mevcuttur. Bu durumda

$$\begin{aligned} B_1 &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{M} 2^{k\beta}\Big(U(y_k)^{-1} \sup_{t\in(0,y_k)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} \\ &\approx \sum_{k=-\infty}^{M} 2^{k\beta}\Big(U(y_k)^{-1} \sup_{t\in(0,y_{k-2})} U(t)h(t)\Big)^{\beta} + \sum_{k=-\infty}^{M} 2^{k\beta}\Big(U(y_k)^{-1} \sup_{t\in(y_{k-2},y_k)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} \\ &:= I + II \end{aligned}$$

sağlanır. $-\infty < k \le M$ için $2^k \le \int_0^{y_k} g(x)dx \le 2^{k+1}$ ve $2^{k-1} \le \int_{y_{k-1}}^{y_k} g(x)dx \le 2^{k+1}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} I &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{M} \int_{y_{k-2}}^{y_k} \Big(\int_x^{y_k} g(t)dt\Big)^{\beta-1} g(x)dx.\Big(U(y_k)^{-1} \sup_{t\in(0,y_{k-2})} U(t)h(t)\Big)^{\beta} \\ &\le \sum_{k=-\infty}^{M} \int_{y_{k-2}}^{y_k} \Big(\int_x^{y_k} U(t)^{-1}g(t)dt\Big)^{\beta-1} U(x)^{-1}g(x)dx.\Big(\sup_{t\in(0,y_{k-2})} U(t)h(t)\Big)^{\beta} \\ &\le \sum_{k=-\infty}^{M} \int_{y_{k-2}}^{y_k} \Big(\int_x^{\infty} U(t)^{-1}g(t)dt\Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{t\in(0,x)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} U(x)^{-1}g(x)dx \\ &\lesssim \int_0^\infty \Big(\int_x^{\infty} U(t)^{-1}g(t)dt\Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{t\in(0,x)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} U(x)^{-1}g(x)dx \end{aligned}$$

$$= A_2$$

ve

$$\begin{aligned}
II &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{M} \int_{y_{k-4}}^{y_{k-2}} \Big(\int_{y_{k-4}}^{x} g(t)\,dt \Big)^{\beta-1} g(x)\,dx. \Big(U(y_k)^{-1} \sup_{t\in(y_{k-2},y_k)} U(t)h(t) \Big)^{\beta} \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{M} \int_{y_{k-4}}^{y_{k-2}} \Big(\int_{0}^{x} g(t)\,dt \Big)^{\beta-1} g(x)\,dx. \Big(\sup_{t\in(y_{k-2},\infty)} h(t) \Big)^{\beta} \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{M} \int_{y_{k-4}}^{y_{k-2}} \Big(\int_{0}^{x} g(t)\,dt \Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{t\in(x,\infty)} h(t) \Big)^{\beta} g(x)\,dx \\
&\lesssim \int_0^{\infty} \Big(\int_{0}^{x} g(t)\,dt \Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{t\in(x,\infty)} h(t) \Big)^{\beta} g(x)\,dx \\
&= A_1
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $B_1 \lesssim A_1 + A_2$ sağlanır.

Şimdi de $B_2 \lesssim A_1 + A_2$ olduğunu gösterelim. İspat için $\int_0^\infty U(t)^{-1} g(t)dt < \infty$ durumunu göz önüne alalım. $\int_0^\infty U(t)^{-1} g(t)dt = \infty$ olması halinde ispat çok daha kolaydır. $N \le k < \infty$ için $\int_{x_k}^\infty U(t)^{-1} g(t)\,dt = 2^{-k}$ ve $2^{-N} < \int_0^\infty U(t)^{-1} g(t)\,dt \le 2^{-N+1}$ sağlanacak biçimde $\{x_k\}_{k=N}^{\infty}$ dizisini tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
B_2 &\le \int_0^{\infty} \Big(\int_x^{\infty} U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau \Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{y\in(0,x)} U(y) \sup_{t\in(y,\infty)} h(t) \Big)^{\beta} U(x)^{-1} g(x)\,dx \\
&\approx \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k\beta} \Big(\sup_{y\in(0,x_k)} U(y) \sup_{t\in(y,\infty)} h(t) \Big)^{\beta} \\
&\approx \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k\beta} \Big(\sup_{y\in(x_{k-1},x_k)} U(y) \sup_{t\in(y,\infty)} h(t) \Big)^{\beta}
\end{aligned}$$

sağlanır.

Her $k = N, N+1, \dots$ için

$$\sup_{y\in(x_{k-1},x_k)} U(y) \sup_{t\in(y,\infty)} h(t) \le 2U(y_k) \sup_{t\in(y_k,\infty)} h(t)$$

eşitsizliği doğru olacak şekilde bir $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mevcuttur. O halde

$$\begin{aligned}
B_2 &\lesssim \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k\beta}\Big(U(y_k) \sup_{t\in(y_k,\infty)} h(t)\Big)^{\beta} \\
&\approx \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k\beta}\Big(U(y_k) \sup_{t\in(y_k,y_{k+2})} h(t)\Big)^{\beta} + \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k\beta}\Big(U(y_k) \sup_{t\in(y_{k+2},\infty)} h(t)\Big)^{\beta} \\
&= III + IV
\end{aligned}$$

yazılabilir. $k = N, N+1, \dots$ için

$$2^{-k-1} \le \int_{y_k}^{\infty} U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau \le 2^{-k}$$

ve

$$2^{-k-1} \le \int_{y_k}^{y_{k+2}} U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau \le 2^{-k}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
III &\lesssim \sum_{k=N}^{\infty} \int_{y_{k+2}}^{y_{k+4}} \Big(\int_x^{y_{k+4}} U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau\Big)^{\beta-1} U(x)^{-1} g(x)\,dx. \Big(U(y_k) \sup_{t\in(y_k,y_{k+2})} h(t)\Big)^{\beta} \\
&\le \sum_{k=N}^{\infty} \int_{y_{k+2}}^{y_{k+4}} \Big(\int_x^{\infty} U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau\Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{t\in(0,x)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} U(x)^{-1} g(x)\,dx \\
&\lesssim \int_0^{\infty} \Big(\int_x^{\infty} U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau\Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{t\in(0,x)} U(t)h(t)\Big)^{\beta} U(x)^{-1} g(x)\,dx \\
&\approx A_2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
IV &\lesssim \sum_{k=N}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+2}} \Big(\int_{y_k}^{x} U(\tau)^{-1} g(\tau)\,d\tau\Big)^{\beta-1} U(x)^{-1} g(x)\,dx. \Big(U(y_k) \sup_{t\in(y_{k+2},\infty)} h(t)\Big)^{\beta} \\
&\le \sum_{k=N}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+2}} \Big(\int_{y_k}^{x} g(\tau)\,d\tau\Big)^{\beta-1} g(x)\,dx. \Big(\sup_{t\in(y_{k+2},\infty)} h(t)\Big)^{\beta} \\
&\le \sum_{k=N}^{\infty} \int_{y_k}^{y_{k+2}} \Big(\int_0^{x} g(\tau)\,d\tau\Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{t\in(x,\infty)} h(t)\Big)^{\beta} g(x)\,dx \\
&\lesssim \int_0^{\infty} \Big(\int_0^{x} g(t)\,dt\Big)^{\beta-1} \Big(\sup_{t\in(x,\infty)} h(t)\Big)^{\beta} g(x)\,dx \\
&\approx A_1
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $B_2 \lesssim A_1 + A_2$ sağlanır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.14. $0 < \theta_1, \theta_2 < \infty$, $0 < p < \theta_2$, $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in {}^{\mathsf{c}}\Omega_{\theta_1}$ ve $\omega_2 \in \Omega_{\theta_2}$ olsun. $v \in W(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \|\omega_2^{-1}\|_{\theta_2 \to p,(x,\infty)} < \infty$, $x > 0$ olmak üzere,

(i) $\theta_1 \le \theta_2$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1) \to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \sup_{x \in (0,\infty)} \varphi_2(x) \sup_{t \in (0,\infty)} \mathcal{V}(t,x) \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} + \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)} \sup_{t \in (0,\infty)} V(t) \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

dur;

(ii) $\theta_2 < \theta_1$ ise,

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1) \to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \left(\int_0^\infty \varphi_2(x)^{\frac{\theta_1 \to \theta_2 . \theta_1 \to p}{\theta_2 \to p}} V(x)^{\theta_1 \to p} \left(\sup_{t \in (0,\infty)} \mathcal{V}(t,x) \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} \right)^{\theta_1 \to \theta_2} d\left(-\|\omega_1\|^{-\theta_1 \to p}_{\theta_1,(0,x)} \right) \right)^{\frac{1}{\theta_1 \to \theta_2}} + \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)} \sup_{t \in (0,\infty)} V(t) \|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}$$

dur.

İspat. Lemma 4.2 ve Teorem [4.5, (ii)] uygulanarak

$$\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1) \to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \approx \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)} \left\{ \sup_{g \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\left\| H^* g(|\cdot|) \right\|_{\infty, v^p, \mathbb{R}^n}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2 - p}, \omega_2^{-p}, (0,\infty)}} \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sup_{g \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\left(\int_0^\infty \left\| H^* g(|\cdot|) \right\|^{\frac{\theta_1}{\theta_1 - p}}_{\infty, v^p, B(0,t)} d\left(-\|\omega_1\|^{-\frac{\theta_1 p}{\theta_1 - p}}_{\theta_1,(0,t)} \right) \right)^{\frac{\theta_1 - p}{\theta_1}}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2 - p}, \omega_2^{-p}, (0,\infty)}} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

yazılabilir. $v_*(s) := \sup_{|y|=s} v(y)^p$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\|\mathrm{I}\|_{{}^{\mathsf{c}}LM_{p_1\theta_1,\omega_1}(\mathbb{R}^n,v_1)\to LM_{p_2\theta_2,\omega_2}(\mathbb{R}^n,v_2)} \\
&\approx \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)} \left\{ \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\left\|H^*g\right\|_{\infty,v_*,(0,\infty)}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p},\omega_2^{-p},(0,\infty)}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left\{ \sup_{g\in\mathfrak{M}^+(0,\infty)} \frac{\left(\int_0^\infty \left\|H^*g\right\|^{\frac{\theta_1}{\theta_1-p}}_{\infty,v_*,(0,t)} d\Big(-\|\omega_1\|^{-\frac{\theta_1 p}{\theta_1-p}}_{\theta_1,(0,t)}\Big)\right)^{\frac{\theta_1-p}{\theta_1}}}{\|g\|_{\frac{\theta_2}{\theta_2-p},\omega_2^{-p},(0,\infty)}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&:= C_3 + C_4
\end{aligned}
$$

yazılabilir. [Teorem 3.2, (i)] uygulanırsa,

$$
C_3 \approx \|\omega_1\|^{-1}_{\theta_1,(0,\infty)} \sup_{t\in(0,\infty)} V(t)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}
$$

elde edilir.

(i) $\theta_1 \le \theta_2$ ise, Teorem [3.15, (i)] den

$$
C_4 \approx \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_2(x)\|\omega_2\|_{\theta_2,(x,\infty)}
$$

doğrudur.

φ_2/V azalan bir fonksiyona denk olduğundan

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_2(x)\|\omega_2\|_{\theta_2,(x,\infty)} &= \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_2(x)V(x)^{-1} \sup_{t\in(0,x)} V(t)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)} \\
&= \sup_{x\in(0,\infty)} \varphi_2(x) \sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{V}(t,x)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}, \quad x>0
\end{aligned}
$$

olur.

(ii) $\theta_2 < \theta_1$ ise, Teorem [3.15, (ii)] den

$$
C_4 \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty d\Big(-\|\omega_1\|^{-\theta_1\to p}_{\theta_1,(0,t)}\Big)\right)^{\frac{\theta_1\to\theta_2}{\theta_2\to p}} \left(\sup_{0<\tau\le x} V(\tau)\|\omega_2\|_{\theta_2,(\tau,\infty)}\right)^{\theta_1\to\theta_2} d\Big(-\|\omega_1\|^{-\theta_1\to p}_{\theta_1,(0,x)}\Big)\right)^{\frac{1}{\theta_1\to\theta_2}}
$$

$$+\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \varphi_2(x)^{\frac{\theta_1\to\theta_2.\theta_1\to p}{\theta_2\to p}} V(x)^{\theta_1\to p}\left(\sup_{t\in(0,\infty)} \mathcal{V}(t,x)\|\omega_2\|_{\theta_2,(t,\infty)}\right)^{\theta_1\to\theta_2} d\left(-\|\omega_1\|_{\theta_1,(0,x)}^{-\theta_1\to p}\right)\right)^{\frac{1}{\theta_1\to\theta_2}}$$

doğrudur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 4.3. Teorem 3.12 nin ispatında olduğu gibi $x = \frac{y}{|y|^2}$ ve $t = \frac{1}{\tau}$ dönüşümleri kullanılırsa, $\tilde{v}_i(y) = v_i\left(\frac{y}{|y|^2}\right)|y|^{-\frac{2n}{p_i}}$ ve $\tilde{\omega}_i(\tau) = \omega_i\left(\frac{1}{\tau}\right)\tau^{-\frac{2}{\theta_i}}$, $i = 1,2$ olmak üzere, (1.5) gömmesinin karakterizasyonu

$${}^{c}LM_{p_1\theta_1,\tilde{\omega}_1}(\mathbb{R}^n,\tilde{v}_1) \hookrightarrow LM_{p_2\theta_2,\tilde{\omega}_2}(\mathbb{R}^n,\tilde{v}_2)$$

gömmesinin karakterizasyonuna denk olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu doktora tezi kapsamında öncelikle supremal operatör için n-boyutlu ters Hardy-tipli eşitsizlikler karakterize edilmiştir. Elde edilen sonuçlar ve literatürdeki diğer eşitsizlikler yardımıyla birim operatörün ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylar arasında sınırlılığı incelenmiştir.

Ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylar ve ağırlıklı Lebesgue uzayları arasındaki gömmeler, ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylar arasındaki gömmelerin özel bir durumudur. Bu gömmeler yardımıyla maksimal fonksiyonun ağırlıklı Lebesgue uzaylarından ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylara sınırlılığı karakterize edilmiş, ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzayların associate uzayları hesaplanmıştır.

Ağırlıklı lokal Morrey-tipli uzaylar arasındaki gömmelerin karakterizasyonunda duallik prensibinden yararlanılmıştır. Bu yaklaşım problemin $p_2 \leq \theta_2$ ek koşulu altında çözülmesine sebep olmuştur ve dolayısıyla bu problem $p_2 > \theta_2$ durumunda hâlâ açıktır.

KAYNAKLAR

[1] Adams, D.R., A note on Riesz potentials. Duke Math. J. 42 (4): 765-778, 1975.

[2] Adams, D.R., Xiao, J., Morrey spaces in harmonic analysis. Ark. Mat. 50 (2): 201-230, 2012.

[3] Adams, D.R., Xiao, J., Regularity of Morrey commutators. Trans. Amer. Math. Soc. 364 (9): 4801-4818, 2012.

[4] Batbold, Ts., Sawano, Y., Decompositions for local Morrey spaces. Eurasian Math. J. 5 (3): 9-45, 2014.

[5] Beesack, P.R., Heinig, H.P., Hardy's inequalities with indices less than 1. Proc. Amer. Math. Soc. 83 (3): 532-536, 1981.

[6] Bennett, G., Factorizing the classical inequalities. Mem. Amer. Math. Soc. 120 (576): viii+130, 1996.

[7] Bradley, J.S., Hardy inequalities with mixed norms. Canad. Math. Bull. 21 (4): 405-408, 1978.

[8] Burenkov, V.I., Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I. Eurasian Math. J. 3 (3): 11-32, 2012.

[9] Burenkov, V.I., Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II. Eurasian Math. J. 4 (1): 21-45, 2013.

[10] Burenkov, V.I., Goldman, M.L., Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator from Lebesgue spaces to Morrey-type spaces. Math. Inequal. Appl. 17 (2): 401-418, 2014.

[11] Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the maximal operator in local spaces of Morrey type. Dokl. Akad. Nauk 391 (5): 591-594, 2003.

[12] Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces. Studia Math. 163 (2): 157-176, 2004.

[13] Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Guliyev, V.S., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of fractional maximal operators in local Morrey-type spaces, J. Comput. Appl. Math. 208 (1): 280-301, 2007.

[14] Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Guliyev, V.S., On boundedness of the fractional maximal operator from complementary Morrey-type spaces to Morrey-type spaces. Contemp. Math., 424, 17-32, 2007.

[15] Burenkov, V.I., Guliev, V.S., Tararykova, T.V., Sherbetchi, A., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in Morrey-type local spaces. Dokl. Akad. Nauk 422 (1): 11-14, 2008 (Russian); English transl., Dokl. Math. 78 (2): 651-654, 2008.

[16] Burenkov, V.I., Guliyev, V.S., Serbetci, A., Tararykova, T.V., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces. Eurasian Math. J. 1 (1): 32-53, 2010.

[17] Burenkov, V.I., Gogatishvili, A., Guliyev, V.S., Mustafayev, R.Ch., Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces. Complex Var. Elliptic Equ. 55 (8): 8-10, 2010.

[18] Burenkov, V.I., Gogatishvili, A., Guliyev, V.S., Mustafayev, R.Ch., Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces. Potential Anal. 35 (1): 67-87, 2011.

[19] Burenkov, V.I., Jain, P., Tararykova, T.V., On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces. Eurasian Math. J. 2 (1): 52-80, 2011.

[20] Burenkov, V.I., Nursultanov, E.D., Description of interpolation spaces for local Morrey-type spaces. Tr. Mat. Inst. Steklova 269 no: Teoriya Funktsii i Differentsialnye Uravneniya, 52-62 (Russian, with Russian summary); English transl., Proc. Steklov Inst. Math. 269 (1): 46-56, 2010.

[21] Chiarenza, F., Frasca, M., Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. Rend. Mat. Appl. (7) 7 (3-4): 273-279, 1987.

[22] Christ, M., Grafakos, L., Best constants for two nonconvolution inequalities. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (6): 1687-1693, 1995.

[23] Copson, E.T., Note on Series of Positive Terms. J. London Math. Soc. S1-2 (1), 1927.

[24] Copson, E.T., Note on Series of Positive Terms. J. London Math. Soc. S1-3 (1), 1928.

[25] Di Fazio, G., Ragusa, M.A., Commutators and Morrey spaces, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 5 (3): 323-332, 1991.

[26] Drábek, P., Heinig, H.P., Kufner, A., Higher-dimensional Hardy inequality, General inequalities, 7 (Oberwolfach, 1995), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 123, pp. 3-16 , Birkhäuser, Basel, 1997.

[27] Evans, W.D., Gogatishvili, A., Opic, B., The reverse Hardy inequality with measures. Math. Ineq. and Appl. 1, 43-74, 2008.

[28] Evans, W.D., Gogatishvili, A., Opic, The ρ-quasiconcave functions and weighted inequalities. Inequalities and applications, Internat. Ser. Numer. Math., vol. 157, Birkhäuser, Basel, pp: 121-132, 2009.

[29] Folland, G.B., Real analysis, Modern techniques and their applications. Pure and Applied Mathematics, JohnWiley & Sons Inc., 2nd ed., New York, 1999.

[30] Garcia-Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L., Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104. 1985.

[31] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., Elliptic partial differential equations of second order, 2nd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[32] Gogatishvili, A., Mustafayev, R.Ch., Dual spaces of local Morrey-type spaces. Czechoslovak Math. J. 61 (136) (3): 609-622, 2011.

[33] Gogatishvili, A., Mustafayev, R.Ch., The multidimensional reverse Hardy inequalities. Math. Inequal. Appl. 15 (1): 1-14, 2012.

[34] Gogatishvili, A., Mustafayev, R.Ch., New pre-dual space of Morrey space, J. Math. Anal. Appl. 397 (2): 678-692, 2013.

[35] Gogatishvili, A., Discretization and anti-discretization of function spaces, Proceedings of the Autumn Conference Mathematical Society of Japan, 63-72, 2013.

[36] Gogatishvili, A., Persson, L.-E., Stepanov, V.D., Wall, P., Some scales of equivalent conditions to characterize the Stieltjes inequality: the case q<p, Math. Nachr. 287 (2-3): 242-253, 2014.

[37] Gogatishvili, A., Pick, L., Discretization and anti-discretization of rearrangement-invariant norms. Publ. Mat. 47 (2): 311-358, 2003.

[38] Gogatishvili, A., Opic, B., Pick, L., Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema. Collect. Math. 57 (3): 227 – 255, 2006.

[39] Gogatishvili, A., Johansson, M., Okpoti, C.A., Persson, L.-E., Characterisation of embeddings in Lorentz spaces. Bull. Austral. Math. Soc. 76 (1): 69-92, 2007.

[40] Gogatishvili, A., Mustafayev, R.Ch., Persson, L.-E., Some new iterated Hardy-type inequalities. J. Funct. Spaces Appl., Art. ID 734194,30 pp., 2012.

[41] Gogatishvili, A., Mustafayev, R.Ch., Persson, L.-E., Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta=1$. J. Inequal. Appl. 29 pp., 2013.

[42] Grafakos, L., Classical Fourier analysis, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2008.

[43] Grafakos, L., Modern Fourier analysis, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 250, Springer, New York, 2009.

[44] Grosse-Erdmann, K.-G., The blocking technique, weighted mean operators and Hardy's inequality, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1679, Springer - Verlag, Berlin, 1998.

[45] V.S. Guliyev, Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$, Doctoral Dissertation (Russian)., Math. Inst. Steklov, Moscow, 1994.

[46] Guliyev, V.S. Function spaces, integral operators and two weighted inequalities on homogeneous groups. Some applications, Elm, Baku, 1999.

[47] Guliev, V.S., Mustafaev, R.Ch., Integral operators of potential type in spaces of homogeneous type, Dokl. Akad. Nauk 354 (6): 730-732, 1997.

[48] Guliev, V.S., Mustafaev, R.Ch., Fractional integrals in spaces of functions defined on spaces of homogeneous type, Anal. Math. 24 (3): 181-200, 1998.

[49] de Guzmán, M., Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics, vol. 481, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[50] Hardy, G.H., Notes on some points in the integral calculus, LX, An inequality between integrals, Messenger Math 54. 150-156, 1925.

[51] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G., Inequalities, Cambridge University Press, 2d ed, 1952.

[52] Kokilašvili, V.M., On Hardy's inequalities in weighted spaces, Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 96 (1): 37-40, 1979.

[53] Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L.-E., The Hardy inequality: About its history and some related results. Vydavatelský Servis, Plzeň, 2007.

[54] Kufner, A., Persson, L.-E., Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2003.

[55] Leindler, L., Inequalities of Hardy-Littlewood type, Anal. Math. 2 (2): 117-123, 1976.

[56] Leindler, L., On the converses of inequalities of Hardy and Littlewood, Acta Sci. Math. (Szeged) 58 (1-4): 191-196, 1993.

[57] Maz'ja, V.G., Sobolev spaces, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[58] Morrey, C.B., On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1): 126-166, 1938.

[59] Muckenhoupt, B., Hardy's inequality with weights, Studia Math. 44: 31-38, 1972.

[60] Muckenhoupt, B., Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. 165: 207-226, 1972.

[61] Mustafayev, R., Ünver, T., Embeddings between weighted local Morrey-type spaces and weighted Lebesgue spaces, J. Math. Inequal. 9 (1): 277-296, 2015.

[62] Mustafayev, R., Ünver, T., Reverse Hardy-type Inequalities for supremal operators with measures, Math. Inequal. Appl. 18 (4): 1295-1311, 2015.

[63] Nakai, E., Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, Math. Nachr. 166: 95-103, 1994.

[64] Opic, B., Kufner, A., Hardy-type inequalities, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 219, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

[65] Peetre, J., On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant, Ann. Mat. Pura Appl. 72 (4): 295-304, 1966.

[66] Prokhorov, D.V., Weighted Hardy's inequalities for negative indices, Publ. Mat. 48: 423-443, 2004

[67] Rudin, W., Principles of mathematical analysis, Second edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.

[68] Sawyer, E., Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator, Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1): 329-337, 1984.

[69] Sinnamon, G.J., Operators on Lebesgue Spaces with General Measures, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, Thesis (Ph.D.)-McMaster University (Canada), 1987.

[70] Spanne, S., Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 19 (3): 593-608, 1965.

[71] Stein, E.M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Mathematical Series, no. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[72] Stein, E.M., Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[73] Sinnamon, G., Stepanov, V.D., The weighted Hardy inequality: new proofs and the case p = 1, J. London Math. Soc. (2) 54 (1): 89-101, 1996.

[74] Talenti, G., Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 39: 171-185, 1969.

[75] Tomaselli, G., A class of inequalities, Boll. Un. Mat. Ital. 2 (4): 622-631, 1969.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğçe ÜNVER
Doğum Tarihi : 01.01.1987
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü, 2004 - 2008
Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik A.B.D., 2010-2012

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl/Yıllar:

Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2010 -

Yayınları (SCI) :

1. Mustafayev, R.Ch., Ünver, T., Embeddings Between Weighted Local Morrey-type Spaces and Weighted Lebesgue Spaces, Journal of Mathematical Inequalities, 9 (1): 277-296, 2015.

2. Mustafayev, R.Ch., Ünver, T., Reverse Hardy-Type Inequalities for Supremal Operators with Measures, Mathematical Inequalities & Applications, 18 (4): 1295-1311, 2015.

3. Gogatishvili, A., Mustafayev, R.Ch., Ünver, T., Embeddings between weighted Copson and Cesàro function spaces, http://arxiv.org/pdf/1507.07866.pdf, 2015.