KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

MAKSİMAL FONKSİYONLARIN KOMUTATÖRÜ VE BAZI UYGULAMALARI

MÜJDAT AĞCAYAZI

KASIM 2015

Matematik Anabilim Dalı Müjdat AĞCAYAZI tarafından hazırlanan MAKSİMAL FONKSİYONLARIN KOMUTATÖRÜ VE BAZI UYGULAMALARI adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof.Dr. Kerim KOCA	____________________
Üye (Danışman)	:	Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV	____________________
Üye	:	Prof. Dr. Vagif GULİYEV	____________________
Üye	:	Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ	____________________
Üye	:	Prof. Dr. Ali ARAL	____________________

04 / 11 / 2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

MAKSİMAL FONKSİYONLARIN KOMUTATÖRÜ VE BAZI UYGULAMALARI

AĞCAYAZI, Müjdat
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV
KASIM 2015, 91 Sayfa

Bu tez, giriş, tartışma ve sonuç kısımlarını içeren yedi bölümden oluşmaktadır. Temel kavramlar, teoremler ve bazı fonksiyon uzaylarının tanımları 2. Bölümde verilmiştir. 3. Bölümde, $M_\alpha(M)$ için noktasal kestirimler incelenmiştir. C_b, $[M,b]$ ve $[M^{\#},b]$ için noktasal kestirimler, norm kestirimleri ve uç nokta kestirimleri 4. Bölümde elde edilmiştir. 5. Bölümde, Zygmund-Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlı olmadığı gösterilmiş, bu operatörün Zygmund-Morrey uzaylarında radyal azalan fonksiyonlar için sınırlı olduğu ispatlanmıştır. 6. Bölümde, M^2 operatörü için Morrey uzaylarında zayıf norm eşitsizlikleri ispatlanmıştır. 7. Bölüm C_b, $[M,b]$ ve $[M^{\#},b]$ operatörleri için Morrey uzaylarında zayıf norm eşitsizliklerini içermektedir.

Anahtar Kelimeler: Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü, Kesin Maksimal Operatör, Komutatör, Morrey Uzayı, Zygmund-Morrey Uzayı, Zayıf Zygmund-Morrey Uzayı.

ABSTRACT

COMMUTATORS OF MAXIMAL FUNCTIONS AND SOME APPLICATIONS

AĞCAYAZI, Müjdat
Kirikkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph.D. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Rza MUSTAFAYEV
NOVEMBER 2015, 91 pages

This thesis consists of seven chapters including the introduction, discussion and conclusion parts. Basic concepts, theorems and definitions of some function spaces are given in Chapter 2. In Chapter 3, pointwise estimates for $M_\alpha(M)$ are investigated. Pointwise estimates, norm estimates and endpoint estimates for the operators C_b, $[M,b]$ and $[M^\#,b]$ are obtained in Chapter 4. In Chapter 5, it is shown that Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded on Zygmund-Morrey spaces and proved that it is bounded on Zygmund-Morrey spaces for radially decreasing functions. Weak type norm estimates for the operator M^2 in Morrey spaces are proved in Chapter 6. Chapter 7 includes the weak type norm estimates in Morrey spaces for the operators C_b, $[M,b]$ and $[M^\#,b]$.

Key Words: Hardy-Littlewood Maximal Operator, Sharp Maximal Operator, Commutator, Morrey Spaces, Zygmund-Morrey Spaces, Weak Zygmund-Morrey Spaces.

TEŞEKKÜR

Bu doktora tezinin hazırlanması sürecinde bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmam boyunca, tezimin gelişmesine yardımcı olan Sayın Prof. Dr. Amiran GOGATISHVILI'ye, Tez İzleme Komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ ve Prof. Dr. Ali ARAL hocalarıma teşekkür ederim. Ayrıca her türlü yardımlarını esirgemeyen başta sevgili ailem olmak üzere arkadaşlarıma desteklerinden ötürü çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\|\cdot\|_X$	X uzayında tanımlı norm
Θ	sıfıra denk fonksiyonlar sınıfı
f^*	f nin artmayan yeniden düzenlenmesi
M_α	kesir maksimal fonksiyon
$M^\#$	kesin maksimal fonksiyon
$L_p(\mathbb{R}^n)$	p. mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$	p. mertebeden lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$	Lorentz uzayı
$L(1+\log^+ L)\,(\mathbb{R}^n)$	Zygmund uzayı
C_b	maksimal komutatör
$[M,b]$	maksimal fonksiyonun komutatörü
$[M^\#,b]$	kesin maksimal fonksiyonun komutatörü
$\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$L_\Phi(\mathbb{R}^n)$	Orlicz uzayı
$\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Zygmund-Morrey uzayı
$W\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n)$	zayıf Zygmund-Morrey uzayı

KISALTMALAR DİZİNİ

BMO	Bounded Mean Oscillation
h.h.y	hemen hemen her yerde

1. GİRİŞ

Bu doktora tezinde, lokal integrallenebilen bir b fonksiyonu ile Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun ve Fefferman-Stein kesin maksimal fonksiyonunun komutatörü için kesin noktasal eşitsizlikler elde edilmiş ve elde edilen noktasal kestirimler yardımıyla komutatör operatörleri için fonksiyon uzaylarında norm eşitsizlikleri araştırılmıştır.

$f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \alpha < n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için kesir maksimal fonksiyon

$$\begin{aligned} M_\alpha f(x) :&= \sup_{Q \ni x} |Q|^{\frac{\alpha-n}{n}} \int_Q |f(y)|\, dy, \\ &\approx \sup_{B \ni x} |B|^{\frac{\alpha-n}{n}} \int_B |f(y)|\, dy, \\ &\approx \sup_{r>0} |B(x,r)|^{\frac{\alpha-n}{n}} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B(x,r)$, $\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı yuvar olmak üzere $|B(x,r)|$, x merkezli r yarıçaplı yuvarın Lebesgue ölçüsü olup supremum, sırasıyla x i içeren yan ayrıtları eksenlere paralel tüm Q küpleri, x i içeren tüm B yuvarları ve x merkezli tüm yuvarlar üzerinden alınmaktadır. $M_\alpha : f \to M_\alpha f$ operatörüne kesir maksimal operatör denir. Özel olarak $\alpha = 0$ alındığında, M_0, Hardy-Littlewood maksimal operatörü olarak bilinir ve M ile gösterilir.

Bilindiği üzere M, güçlü (p,p) ve zayıf $(1,1)$ eşitsizliklerini sağlar, yani $1 < p < \infty$ olduğunda

$$\|Mf\|_p \le c\|f\|_p,$$

$p = 1$ olduğunda ise,

$$t|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \le c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$$

eşitsizlikleri f den bağımsız sabitlerle sağlanır.

Hardy-Littlewood maksimal operatörü integrallenebilir değildir. Bunun yerine $B, \mathbb{R}^n$ de herhangi bir yuvar olmak üzere $f \in L^1(B)$ ve $\operatorname{supp} f \subset B$ olduğunda $\int_B Mf(x)dx < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $f \in L(1 + \log^+ L)(B)$ olmasıdır, yani

$$\int_B |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)dx < \infty$$

dur.

Maksimal operatörler, harmonik ve reel analizin en önemli operatörlerindendir ve singüler integraller teorisinde, potansiyel teoride, diferensiyellenebilme teorisinde ve diferensiyel denklemler teorisinde geniş ölçüde kullanılmaktadırlar (bakınız, [32], [36], [37], [42], [72]-[74]).

Herhangi bir $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M^\#(f)(x) \equiv f^\#(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|dy \approx \sup_{Q \ni x} \inf_{a \in \mathbb{R}} \int_Q |f(y) - a|dy$$

fonksiyonuna, Fefferman-Stein kesin maksimal fonksiyonu denir. Burada f_Q, f fonksiyonunun Q üzerinden ortalama değeridir.

Bu operatör ilk defa [31] de C. Fefferman ve E. Stein tarafından tanımlanmıştır.

$$M^\# f(x) \le 2Mf(x)$$

olduğundan Fefferman-Stein kesin maksimal fonksiyonu, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun sağladığı birçok özelliği sağlar. Örneğin, $1 < p \le \infty$ için $M^\#$, güçlü (p, p) ve zayıf $(1, 1)$ eşitsizliklerini sağlar.

Sabit bir $\delta > 0$, uygun bir g fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M_\delta g(x) := [M(|g|^\delta)(x)]^{1/\delta},$$

$$M_\delta^\# g(x) := [M^\#(|g|^\delta)(x)]^{1/\delta}$$

olarak tanımlanır.

Ω, sıfırıncı dereceden homojen, $\mathbb{S}^{n-1}$ birim yuvar yüzeyi üzerinde sonsuz kez diferensiyellenebilir ve $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 0$ özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. $K(x) = \Omega(x)/|x|^n$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$Tf(x) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy$$

operatörüne Calderón-Zygmund singüler integral operatörü denir. Burada p.v. Cauchy esas değeri anlamındadır.

$f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} \equiv \|f\|_* := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy$$

yarınormu sonlu ise, f fonksiyonu $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir denir ve $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilir. Burada supremum, $\mathbb{R}^n$ de yan ayrıtları eksenlere paralel tüm küpler üzerinden alınmaktadır. R. Coifman, R. Rochberg ve G. Weiss, [24] te göstermişlerdir ki $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ise, bu durumda $f \in L_\infty^c(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$[T,b](f) := T(bf) - bT(f) \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan $[T,b]$ komutatör operatörü, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de $1 < p < \infty$ için sınırlıdır. $[T,b]$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı ise $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu S. Janson, [45] te göstermiştir.

$b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olduğunda $[T,b]$ operatörünün zayıf $(1,1)$ eşitsizliğini sağlamadığı bir örnekle C. Pérez tarafından [64] te gösterilmiştir. $[T,b]$ operatörü, zayıf $(1,1)$ eşitsizliği yerine zayıf $L(1+\log^+ L)$ eşitsizliğini, yani

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |[T,b](f)(x)| > \lambda\}| \le c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \tag{1.2}$$

eşitsizliğini gerçekler (bakınız [64]).

Bu tezde, ölçülebilir bir b fonksiyonu ile Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve Fefferman-Stein kesin maksimal operatörünün komutatörü ele alınmıştır.

Tanım 1.1. $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, ölçülebilir bir b fonksiyonu ile Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve Fefferman-Stein kesin maksimal operatörünün komutatörü her $x \in \mathbb{R}^n$ için sırasıyla

$$[M, b](f)(x) := M(bf)(x) - b(x)Mf(x),$$
$$[M^{\#}, b](f)(x) := M^{\#}(bf)(x) - b(x)M^{\#}f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

$[M, b]$ operatörü, örneğin, BMO ve H^1 Hardy uzayından olan iki fonksiyonun çarpımına anlam vermek istenildiğinde ortaya çıkmıştır (Belirtelim ki bu iki fonksiyonun çarpımı lokal integrallenebilir olmayabilir) (bakınız [12]). Reel interpolasyon tekniklerini kullanarak, M. Milman ve T. Schonbek, [57] de $b \geq 0$ olduğunda $[M, b]$ operatörünün L_p-sınırlılığını ispatlamıştır. J. Bastero, M. Milman ve J. Ruiz, [6] da aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır (Ayrıca bakınız [7]):

Teorem 1.1. ([6]) $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:
(i) $[M, b]$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.
(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$. [1]
(iii) $[M^{\#}, b]$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

Şu ana kadar sadece [6] ve [57] de Lebesgue uzaylarında maksimal fonksiyonların komutatörünün sınırlılığı incelenmiştir.

$[M, b]$ operatörünün özelliklerini araştırmak için önce incelenmesi daha kolay olan maksi-

[1] $b^+(x) = \text{maks}\{b(x), 0\}$ ve $b^-(x) = -\min\{b(x), 0\}$ ile tanımlanır. Sonuç olarak $b = b^+ - b^-$ ve $|b| = b^+ + b^-$.

mal komutatör ile işe başlayacağız.

Tanım 1.2. Ölçülebilir bir b fonksiyonu ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için, $C_b(f)$ maksimal komutatörü

$$C_b(f)(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x) - b(y)||f(y)|dy$$

şeklinde tanımlanır.

C_b operatörü, BMO sembollü singüler integral operatörlerin komutatörlerinin araştırılmasında önemli rol oynar (bakınız [33], [56], [68], [69]). J. García Cuerva, E. Harboure, C. Segovia ve J. Torrea tarafından [33] te aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 1.2. ([33]) $1 < p < \infty$ olsun. C_b operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı olması için gerek ve yeter şart $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olmasıdır.

C_b operatörü zayıf $L(1 + \log^+ L)$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 1.3. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) Her $f \in L(1 + \log^+ L)(\mathbb{R}^n)$ ve her bir $\lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : C_b(f)(x) > \lambda\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \tag{1.3}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Not 1.1. (ii) den (i) nin elde edilmesi [43] te gösterilmiştir. Burada farklı bir ispat verilecektir.

C_b operatörü için öncelikle aşağıdaki noktasal kestirim ispatlanacaktır:

Teorem 1.4. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \delta < 1$ olsun. Bu durumda, her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$M_\delta(C_b(f))(x) \leq c\|b\|_* M^2 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.4}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c = c_\delta > 0$ sabiti vardır.

Not 1.2. [44, Lemma 1] deki eşitsizlik, yani

$$M_\delta^\#(C_b(f))(x) \lesssim \|b\|_* M^2 f(x)$$

eşitsizliği, (1.4) eşitsizliğinden elde edilir. Gerçekten de, $M_\delta^\# \lesssim M_\delta$ olduğundan

$$M_\delta^\#(C_b(f))(x) \lesssim M_\delta(C_b(f))(x) \leq c\|b\|_* M^2 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

sağlanır.

Teorem 1.4 ten aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 1.5. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$C_b(f)(x) \leq c\|b\|_* M^2 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.5}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

Teorem 1.5 ten C_b operatörü için esas teoremimizi verebiliriz:

Teorem 1.6. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. X, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan ölçülebilir fonksiyonların bir Banach uzayı olsun ve latis özelliğini sağlasın, yani

$$0 \le f \le g, \text{ h.h.y} \Rightarrow \|f\|_X \lesssim \|g\|_X$$

olsun. Ayrıca farz edelim ki M, X üzerinde sınırlıdır. Bu durumda, C_b operatörü X üzerinde sınırlıdır ve

$$\|C_b f\|_X \le c\|b\|_* \|f\|_X$$

olacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

C_b ile $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörleri birbirlerinden farklı özelliklere sahiptirler. Örneğin, C_b operatörü pozitif ve altlineer olmasına rağmen, $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörleri pozitif ve altlineer değildir. Ancak, b üzerine ek koşullar konulursa C_b operatörü, $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörlerini kontrol eder.

Lemma 1.1. $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $b \ge 0$ olsun. Bu durumda her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[M, b](f)(x)| \le C_b(f)(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.6}$$

$$|[M^\#, b](f)(x)| \le 2C_b(f)(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.7}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

$b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[M, b](f)(x)| \le C_b(f)(x) + 2b^-(x)Mf(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

$$|[M^\#, b](f)(x)| \le 2C_b(f)(x) + 4b^-(x)Mf(x) + 4M(b^- f)(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

doğrudur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 1.7. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[M,b](f)(x)| \leq c\left(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty\right) M^2 f(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.8}$$

$$|[M^\#,b](f)(x)| \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\, M^2 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.9}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

Teorem 1.7, $[M,b]$ ve $[M^\#,b]$ operatörleri için aşağıdaki teoremi ifade etmeye imkân verir:

Teorem 1.8. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. X, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan ölçülebilir fonksiyonların latis özelliğini sağlayan bir Banach uzayı olsun. Ayrıca M nin, X üzerinde sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $[M,b]$ ve $[M^\#,b]$ operatörleri X üzerinde sınırlıdır ve

$$\|[M,b](f)\|_X \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_X,$$

$$\|[M^\#,b](f)\|_X \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_X$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

Teorem 1.7, aynı zamanda $[M,b]$ ve $[M^\#,b]$ operatörleri için zayıf $L(1+\log^+ L)$ eşitsizliğini ispatlamaya yardım eder.

Teorem 1.9. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in L(1 +$

$\log^+ L)(\mathbb{R}^n)$ ve her $\lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |[M,b](f)(x)| > \lambda\}| \le cc_0 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx,$$
$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |[M^\#,b](f)(x)| > \lambda\}| \le cc_0 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde f ve b den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır. Burada

$$c_0 := (\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\left(1 + \log^+(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\right)$$

dur.

Elde edilen noktasal kestirimler yardımıyla komutatör operatörlerinin bazı fonksiyon uzaylarında sınırlılığını inceleyebiliriz.

$1 \le p < \infty$ ve $0 \le \lambda \le n$ olsun. $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$\mathcal{M}_{p,\lambda} \equiv \mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada norm

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} r^{\frac{\lambda-n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\ &\approx \sup_B \left(|B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_B |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\approx \sup_Q \left(|Q|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_Q |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

ile verilir.

$\mathcal{M}_{p,\lambda}$ Morrey uzayında maksimal fonksiyonun sınırlılığı [23] te incelenmiş ve aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

Teorem 1.10. ([23]) $1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} \le c_p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} \tag{1.10}$$

eşitsizliği f den bağımsız bir $c_p > 0$ sabitiyle sağlanır. $p = 1$ durumunda ise

$$t|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} \cap B(x,r)| \le c_1 r^{n-\lambda} \|f\|_{\mathcal{M}_{1,\lambda}}$$

eşitsizliği f, t ve r den bağımsız bir $c_1 > 0$ sabitiyle sağlanır.

Teorem 1.10 dan yararlanarak C_b operatörü için aşağıdaki karakterizasyonu verebiliriz:

Teorem 1.11. $1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:
(i) C_b operatörü $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ uzayında sınırlıdır.
(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Not 1.3. (ii) den (i) nin elde edilmesi [38] de gösterilmiştir.

$[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri için de aşağıdaki teoremler geçerlidir:

Teorem 1.12. $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ uzayında sınırlıdır.

$\mathbb{R}^n$ de radyal azalan fonksiyonlar sınıfını

$$\mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \ f(x) = \varphi(|x|), \ \varphi \in \mathfrak{M}^{+,\downarrow}(0,\infty)\}$$

şeklinde gösterelim. $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ ise $Mf \approx H_n f$ dir. Burada H_n, n-boyutlu Hardy operatörü olup

$$H_n f(x) = \frac{1}{|B(0,|x|)|} \int_{B(0,|x|)} |f(y)|\, dy$$

dir. Açıktır ki $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ olduğunda $H_n f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ dir.

Teorem 1.13. ([34]) $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{1,\lambda}} \le c\|f\|_{\mathcal{M}_{1,\lambda}} \tag{1.11}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

Bu teorem ve elde ettiğimiz noktasal kestirimler yardımıyla aşağıdaki teoremleri verebiliriz:

Teorem 1.14. $0 < \lambda < n$ ve $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C_b operatörü $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

Teorem 1.15. $0 < \lambda < n$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörleri $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

Tanım 1.3. $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu azalmayan, soldan sürekli, $\phi(0) = 0$ ve $(0,\infty)$ aralığında sıfır değerini almayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s) ds$$

ile tanımlanan Φ fonksiyonuna Young fonksiyonu denir.

Tanım 1.4. (Orlicz Uzayı) Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$L_\Phi \equiv L_\Phi(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(k|f(x)|) < \infty \text{ olacak biçimde } k > 0 \text{ sayısı var} \right\}$$

şeklinde verilen $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ fonksiyon uzayına Orlicz uzayı denir.

Orlicz uzayında norm

$$\|f\|_{L_\Phi} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy \leq 1 \right\}$$

ile verilir. Bu norma Luxemburg normu da denir.

Tanım 1.5. Φ, Young fonksiyonu olsun. Bu durumda bir f fonksiyonunun Q küpü üzerinden Φ ortalamaları ve zayıf Φ ortalamaları sırasıyla

$$\|f\|_{\Phi,Q} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|Q|} \int_Q \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy \leq 1 \right\},$$

$$\|f\|_{WL_{\Phi,Q}} := \inf \left\{ t > 0 : \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{|Q|} \frac{|\{x \in Q : |f(x)| > \alpha t\}|}{\Phi(\frac{1}{\alpha})} \leq 1 \right\}$$

şeklinde verilir.

Tanım 1.6. $\Phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\Phi(At) \geq 2A\Phi(t)$$

olacak biçimde $A > 1$ varsa Φ, ∇_2 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \nabla_2$ şeklinde gösterilir.

Orlicz uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun sınırlılığı birçok matematikçi tarafından araştırılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir (bakınız [11], [22], [49]).

Teorem 1.16. ([22]) $\Phi \in \nabla_2$ ise bu durumda M, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu L_Φ uzayında sınırlıdır.

Bu sonuçtan yararlanarak aşağıdaki teoremlerimizi verebiliriz:

Teorem 1.17. $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) C_b, L_Φ uzayında sınırlıdır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

$[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörleri için de aşağıdaki teoremler geçerlidir:

Teorem 1.18. $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $[M, b]$, L_Φ uzayında sınırlıdır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $[M^\#, b]$, L_Φ uzayında sınırlıdır.

Şimdi Zygmund-Morrey ve zayıf Zygmund-Morrey uzaylarının tanımlarını verelim:

Tanım 1.7. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ Zygmund-Morrey uzayı

$$\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada norm

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} := \sup_Q |Q|^{\frac{\lambda}{n}} \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q} < \infty$$

dur.

Tanım 1.8. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ zayıf Zygmund-Morrey uzayı

$$\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada norm

$$\|f\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} := \sup_{Q} |Q|^{\frac{\lambda}{n}} \|f\|_{WL(1+\log^+ L),Q} < \infty$$

dur.

Zygmund-Morrey uzayı, Tanım 2.18 de verilecek Orlicz-Morrey uzayının özel bir halidir. Gerçekten de $\mathcal{L}_{\phi,\Phi}$ de, $\phi(t) = t^{\lambda}$ ve $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$ alınırsa, Zygmund-Morrey uzayı elde edilmiş olur. Zayıf Zygmund-Morrey uzayı bu haliyle ilk defa [35] te tanımlanmıştır.

$\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ Zygmund-Morrey uzayında Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu sınırlı değildir. Bunu bir örnekle gösterebiliriz.

Örnek 1.1. Kolaylık olması açısından $n = 1$ ve $\lambda = 1/2$ olsun. f çift fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k^2 \ln^2(k+e), k^2 \ln^2(k+e)+1]}(x), \qquad x \geq 0$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} < \infty$, $\|Mf\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} = \infty$ dur. Görüldüğü üzere M, Zygmund-Morrey uzayında sınırlı değildir. Ancak radyal azalan fonksiyonlar için aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 1.19. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \leq c\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \tag{1.12}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ vardır.

Elde edilen noktasal kestirimler ve Teorem 1.19 dan, aşağıdaki teoremleri verebiliriz:

Teorem 1.20. $0 < \lambda < n$ ve $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|C_b(f)\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c\|b\|_* \|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ vardır.

Benzer sonuçları $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörleri için de verebiliriz:

Teorem 1.21. $0 < \lambda < n$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için,

$$\|[M, b](f)\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}},$$
$$\|[M^\#, b](f)\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ vardır.

Komutatör operatörlerinin Zygmund-Morrey uzaylarında sınırlılılığını araştırmak için öncelikle, M^2 nin bu uzaylarda sınırlılığını araştıracağız.

Teorem 1.22. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|M^2 f\|_{W\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \tag{1.13}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

Teorem 1.22, aşağıdaki teoremleri ispatlamaya imkân vermektedir:

Teorem 1.23. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) C_b: $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda} \to W\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ sınırlıdır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

$[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri için de aşağıdaki teoremleri verebiliriz:

Teorem 1.24. $0 < \lambda < n$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ den $W\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ ye sınırlıdır ve sırasıyla

$$\|[M, b](f)\|_{W\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}},$$
$$\|[M^{\#}, b](f)\|_{W\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}$$

eşitsizlikleri f den bağımsız bir $c > 0$ ile sağlanır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu doktora tezinde c, ana parametrelerden bağımsız, her bir satırda değişebilen pozitif bir sabit olarak kabul edilecektir. Herhangi bir A, B için, $A \leq cB$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti varsa bu durumda $A \lesssim B$ yazılır. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ aynı anda sağlanırsa $A \approx B$ yazılacak, A ve B birbirine denktir denilecektir.

Ölçülebilir bir E kümesi için χ_E, E kümesinin karakteristik fonksiyonunu tanımlar. Tez boyunca kullanılacak küplerin yan ayrıtlarının, koordinat eksenlerine paralel olduğu kabul edilecektir. Bir $\lambda > 0$ ve Q küpü için λQ, merkezi Q nun merkezi ile aynı ve yan ayrıt uzunluğu, Q nun yan ayrıt uzunluğunun λ katı olan bir küp belirtir. $p \in [1, \infty)$ için, p nin eşleniği $p' = p/(p-1)$ dir. Herhangi bir ölçülebilir E kümesi ve E üzerinde integrallenebilir bir f fonksiyonu için f_E, f fonksiyonunun E üzerinden ortalama değerini belirtmektedir, yani $f_E = (1/|E|)\int_E f(x)dx$. Θ, sıfıra denk fonksiyonlar kümesi olsun.

Şimdi tezdeki konu bütünlüğünün sağlanması açısından kullanılacak uzayların tanımlarını ve bazı özelliklerini verelim:

A, $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir altkümesi olsun. $\mathfrak{M}(A)$ ile A üzerinde tüm ölçülebilir fonksiyonlar sınıfını , $\mathfrak{M}_0(A)$ ile A üzerinde hemen hemen her yerde sonlu değer alan ölçülebilir fonksiyonlar sınıfını, $\mathfrak{M}^+(A)$ ile A üzerinde negatif değer almayan ölçülebilir fonksiyonlar sınıfını gösterelim. $\mathfrak{M}^{+,\downarrow}(0,\infty)$ $(\mathfrak{M}^{+,\uparrow}(0,\infty))$ ile $(0,\infty)$ üzerinde azalan (artan) ve negatif değer almayan ölçülebilir fonksiyonlar sınıfını gösterelim. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tüm radyal azalan fonksiyonlar sınıfını

$$\mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \ f(x) = \varphi(|x|), \ \varphi \in \mathfrak{M}^{+,\downarrow}(0,\infty)\}$$

şeklinde gösterelim.

A üzerinde tüm ağırlık fonksiyonları ailesi

$$W(A) = \{w \in \mathfrak{M}^+(A) : 0 < w(x) < \infty, \text{ h.h.y } x \in A\}$$

ile gösterilecektir. $p \in (0, \infty]$ ve $w \in \mathfrak{M}^+(A)$ için, $\mathfrak{M}(A)$ üzerindeki $\|\cdot\|_{p,A,w}$ fonksiyoneli

$$\|f\|_{p,A,w} := \begin{cases} (\int_A |f(x)|^p w(x) dx)^{1/p}, & p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_A |f(x)| w(x), & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır. Buna ek olarak, $w \in W(A)$ ise, bu durumda $L_p(A, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$L_{p,w}(A) \equiv L_p(A, w) := \{f \in \mathfrak{M}(A) : \|f\|_{p,A,w} < \infty\}$$

ile verilir ve bu haliyle $\| \cdot \|_{p,A,w}$, bir kuasi-norm tanımlar. A üzerinde $w \equiv 1$ olduğunda kolaylık açısından $L_p(A, w)$ ve $\| \cdot \|_{p,A,w}$ yerine sırasıyla $L_p(A)$ ve $\| \cdot \|_{p,A}$ yazılacaktır. $\mathbb{R}^n$ nin herbir K kompakt altkümesi için $\int_K |f(x)|^p w(x) dx < \infty$ ise, bu durumda f lokal integrallenebilirdir denir ve $f \in L_{p,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1. Bir f fonksiyonun supportu (desteği, taşıyıcısı), sıfırdan farklı değer aldığı noktalar kümesinin kapanışıdır, yani

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

$L_\infty^c(\mathbb{R}^n)$ olarak, $\mathbb{R}^n$ de kompakt supportlu ve sınırlı fonksiyonlar sınıfı tanımlansın, yani

$$L_\infty^c(\mathbb{R}^n) := \{f \in L_\infty(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt kümedir}\}.$$

Tanım 2.2. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ olsun. Her $\alpha > 0$ sayısı için $(0, \infty)$ aralığında artmayan ve

$$|\{t \in (0, \infty) : \; f^*(t) > \alpha\}| = |\{x \in \mathbb{R}^n : \; |f(x)| > \alpha\}|$$

özelliğini sağlayan f^* fonksiyonuna, f nin artmayan yeniden düzenlenmesi denir. Bu fonksiyon sağdan sürekli ise,

$$f^*(t) = \inf \{\lambda > 0 : |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| \leq t\} \quad (0 < t < \infty)$$

eşitliği ile tek bir biçimde tanımlanır (bakınız [10, s. 39]).

Teorem 2.1. (Hardy-Littlewood) $f, g \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ ise, bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |fg| \leq \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) dt$$

dir (bakınız [10, s. 44]).

Tanım 2.3. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda f^* fonksiyonunun maksimal fonksiyonu

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds, \qquad (t > 0)$$

şeklinde tanımlanır. $(Mf)^* \approx f^{**}$ olduğu bilinmektedir (bakınız [10, s. 122]).

Tanım 2.4. $p \in [1, \infty)$ olsun. Bu durumda $L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ Lorentz uzayı

$$L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n) : \; \|f\|_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0<t<\infty} t^{1/p} f^*(t) < \infty \right\}$$

ile tanımlanır (bakınız [10, s. 216]).

2.1. BMO Uzayı

Tanım 2.5. $f \in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_* := \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy$$

yarınormu sonlu ise, f fonksiyonu $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ uzayına aittir denir ve $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilir.

$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ uzayı, 1961 yılında F. John ve L. Nirenberg tarafından [47] de tanımlanmıştır ve fonksiyon uzayları ve singüler integraller teorisi başta olmak üzere modern harmonik analizin gelişiminde önemli rol oynamaktadır (bakınız [19], [20]).

Tanım 2.6. Her $f \in L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M^{\#} f(x) \equiv f^{\#}(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \approx \sup_{Q \ni x} \inf_{a \in \mathbb{R}} \int_Q |f(y) - a| dy$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, Fefferman-Stein kesin maksimal fonksiyonu denir. Buradan açıktır ki

$$f \in \mathrm{BMO} \qquad \Leftrightarrow \qquad M^{\#} f \in L_\infty$$

tir. [31] deki önemli sonuçlardan biri de $1 < p < \infty$ için

$$\|f\|_p \leq c \|f^{\#}\|_p$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Q, $\mathbb{R}^n$ de bir küp olsun.

$$M_Q f(x) := \sup_{\substack{Q' \subseteq Q \\ Q' \ni x}} \left\{ \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(y)| \, dy \right\} \chi_Q(x), \tag{2.1}$$

ve

$$f_Q^{\#}(x) := \sup_{\substack{Q' \subseteq Q \\ Q' \ni x}} \left\{ \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f - f_{Q'}| \right\} \chi_Q(x)$$

fonksiyonları sırasıyla Q ya göre lokal maksimal fonksiyon ve Q ya göre lokal kesin maksimal fonksiyon olarak adlandırılır. Burada supremum Q nun x noktasını içeren tüm Q' altküpleri üzerinden alınmaktadır.

Teorem 2.2. ([10, s. 379]) $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$[(f - f_Q)\chi_Q]^{**}(t) \leq c \int_t^{|Q|} (f_Q^{\#})^*(s) \frac{ds}{s}, \qquad \left(0 < t < \frac{|Q|}{6}\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

BMO uzayı ile ilgili en önemli sonuç, F. John ve L. Nirenberg tarafından elde edilen aşağıdaki teoremdir (bakınız [47], [10] s. 381, [32] s. 164).

Teorem 2.3. ([10, John-Nirenberg lemması]) Her $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ küpleri ve her $t > 0$ için

$$[(f - f_Q)\chi_Q]^*(t) \leq c\|f\|_* \log^+ \left\{ \frac{6|Q|}{t} \right\} \tag{2.2}$$

olacak şekilde f ve Q dan bağımsız bir c sabiti vardır. Buna denk olarak her $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, tüm Q küpleri ve her $t > 0$ için

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > t\}| \leq 6|Q| \exp\left\{ -\frac{t}{c\|f\|_*} \right\} \tag{2.3}$$

sağlanacak şekilde f ve Q dan bağımsız bir c sabiti vardır.

Lemma 2.1. ([32, s. 166]) $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $0 < \lambda < c/\|f\|_*$ özelliğini sağlayan her λ sayısı için

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \exp\{\lambda|f(x)-f_Q|\}dx < \infty$$

doğrudur. Burada c, (2.3) eşitsizliğinde ortaya çıkan sabit ile aynıdır.

Konu bütünlüğü açısından aşağıdaki lemmanın ispatını verelim:

Lemma 2.2. ([47] ve [8]) $p \in (0,\infty)$ için $\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n) = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Burada

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f_Q|^p dy\right)^{1/p}$$

dir.

İspat. $0 < p < 1$ olsun.

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği Hölder eşitsizliğinden kolayca elde edilebilir.

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliğini ispat edelim. Teorem 2.2 den $0 < t < \frac{|Q|}{6}$ için

$$\begin{aligned}(f\chi_Q)^{**}(t) &= [(f-f_Q)\chi_Q + f_Q\chi_Q]^{**}(t)\\ &\le [(f-f_Q)\chi_Q]^{**}(t) + (f_Q\chi_Q)^{**}(t)\\ &\le c\int_t^{|Q|} (f_Q^{\#})^*(s)\frac{ds}{s} + |f|_Q\end{aligned}$$

yazılabilir.

$f \in \mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\||f|^p\|_{\mathrm{BMO}} &= \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q ||f(y)|^p - (|f|^p)_Q|dy \\
&\approx \sup_Q \inf_{c\in\mathbb{R}} \frac{1}{|Q|}\int_Q ||f(y)|^p - c|dy \\
&\leq \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q ||f(y)|^p - |f_Q|^p|dy \\
&\leq \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|^p dy
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $|f|^p \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olduğu görülür. Böylece Teorem 2.2 den

$$(|f|^p\chi_Q)^{**}(t) \leq c\int_t^{|Q|}((|f|^p)_Q^{\#})^*(s)\frac{ds}{s} + (|f|^p)_Q$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$\begin{aligned}
(|f|^p)_Q^{\#}(x) &= \sup_{\substack{Q'\subseteq Q\\ x\in Q'}}\left\{\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} ||f(y)|^p - (|f|^p)_{Q'}|dy\right\}\chi_Q(x) \\
&\approx \sup_{\substack{Q'\subseteq Q\\ x\in Q'}}\inf_{c\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} ||f(y)|^p - c|dy\right\}\chi_Q(x) \\
&\leq \sup_{\substack{Q'\subseteq Q\\ x\in Q'}}\left\{\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} ||f(y)|^p - |f_{Q'}|^p|dy\right\}\chi_Q(x) \\
&\leq \sup_{\substack{Q'\subseteq Q\\ x\in Q'}}\left\{\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(y) - f_{Q'}|^p dy\right\}\chi_Q(x) := (f_Q^p(x))^p
\end{aligned}$$

olduğundan, $0 < t < \frac{|Q|}{6}$ için

$$(|f|^p\chi_Q)^{**}(t) \leq c\int_t^{|Q|}[(f_Q^p)^*]^p(s)\frac{ds}{s} + (|f|^p)_Q,$$

doğrudur. Buradan da

$$\Big(((f - f_Q)\chi_Q)^*(t)\Big)^p \leq c\int_t^{|Q|}[(f_Q^p)^*]^p(s)\frac{ds}{s} + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - f_Q|^p dy,$$

böylece

$$\left(((f-f_Q)\chi_Q)^*(t)\right)^p \le c\,\|f\|^p_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}\log\frac{|Q|}{t}+\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f_Q|^p dy$$

eşitsizliği doğrudur. O halde,

$$\left(((f-f_Q)\chi_Q)^*(t)\right)^p \le c\,\|f\|^p_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}\left(1+\log\frac{|Q|}{t}\right)$$

elde edilir. Yani

$$((f-f_Q)\chi_Q)^*(t) \lesssim c\,\|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}\left(1+\log\frac{|Q|}{t}\right)^{1/p}$$

dir.

Diğer taraftan $\frac{|Q|}{6}<t<|Q|$ için,

$$tg^*(t)\le tg^{**}(t)\le \|g\|_1$$

eşitsizliği, $g=(f-f_Q)^p\chi_Q$ fonksiyonuna uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left(((f-f_Q)\chi_Q)^*(t)\right)^p &= \left(((f-f_Q)^p\chi_Q)^*(t)\right)\\ &\le \left(((f-f_Q)^p\chi_Q)^*\left(\frac{|Q|}{6}\right)\right)\\ &\le \frac{6}{|Q|}\int_Q |f-f_Q|^p\\ &\le 6\|f\|^p_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$((f-f_Q)\chi_Q)^*(t)\lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}$$

olur. Elde edilenler birleştirilirse,

$$\int_Q |f-f_Q|\,dx=\int_0^{|Q|}((f-f_Q)\chi_Q)^*(t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{|Q|/6} + \int_{|Q|/6}^{|Q|} \right) ((f - f_Q)\chi_Q)^*(t)\, dt \\
&\leq c\, \|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_0^{|Q|/6} \left(1 + \log \frac{|Q|}{t} \right)^{1/p} dt + \int_{|Q|/6}^{|Q|} dt \right) \\
&\lesssim c\, \|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_0^{|Q|/6} \left(\log \frac{|Q|}{t} \right)^{1/p} dt + |Q| \right) \\
&= c\, |Q|\, \|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_6^{\infty} \frac{\log^{1/p} y}{y^2}\, dy + 1 \right) \approx c\, |Q|\, \|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Bu da

$$
\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}
$$

olması demektir.

Şimdi de $1 < p < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$
\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)}
$$

eşitsizliği direkt Hölder eşitsizliğinden bulunur.

Teorem 2.3 ten, $\mathbb{R}^n$ deki her Q küpü için

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|^p\, dy &= \frac{1}{|Q|} \int_0^{|Q|} \left\{ [(f - f_Q)\chi_Q]^* \right\}^p (t)\, dt \\
&\leq c\, \frac{\|f\|^p_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}}{|Q|} \int_0^{|Q|} \log \left(\frac{6|Q|}{t} \right)^p dt \\
&= 6c\, \|f\|^p_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} \left(\int_6^{\infty} \log^p u\, \frac{du}{u^2} \right) = c \|f\|^p_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

doğrudur. Önce her iki tarafın $1/p$. kuvvetleri alınıp sonra her iki taraftan tüm Q küpleri üzerinden supremuma geçilirse,

$$
\|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}
$$

olduğu elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

2.2. Orlicz Uzayı

Tanım 2.7. $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu azalmayan, soldan sürekli, $\phi(0) = 0$ ve $(0,\infty)$ aralığında sıfır değerini almayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds$$

ile tanımlanan Φ fonksiyonuna Young fonksiyonu denir.

Tanım 2.8. (Orlicz Uzayı) Φ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$L_\Phi \equiv L_\Phi(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(k|f(x)|) < \infty \text{ olacak biçimde } k > 0 \text{ sayısı var} \right\}$$

şeklinde verilen $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ fonksiyon uzayına Orlicz uzayı denir (bakınız [51], [52], [65]).

Orlicz uzayında norm

$$\|f\|_{L_\Phi} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy \le 1 \right\}$$

ile verilir. Bu norma Luxemburg normu da denir. Orlicz uzayı bu normla birlikte bir Banach uzayıdır. $1 \le p < \infty$ için $\Phi(t) = t^p$ alınırsa $\|f\|_{L_\Phi} = \|f\|_p$ elde edilir.

Orlicz uzayları teorisinde önemli yer tutan örnekler $1 \le p < \infty$ ve $\alpha > 0$ sayısı için $\Phi(t) = t^p \log^\alpha(1+t)$ ve $\Phi(t) = \exp t^2 - 1$ dir.

Φ bir Young fonksiyonu olmak üzere, bu fonksiyonun komplementar Young fonksiyonu, $t \in [0,\infty)$ için

$$\Psi(t) = \sup_{s>0}\{ts - \Phi(s)\}$$

ile tanımlanır. Örnek olarak eğer $1 < p < \infty$ ve $\Phi(t) = t^p/p$ ise, bu durumda $\Psi(t) = t^{p'}/p'$ dür.

Orlicz uzayında genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(y)|dy \leq 2\|f\|_{L_\Phi}\|g\|_{L_\Psi} \tag{2.4}$$

şeklindedir. Burada Φ ve Ψ birbirlerinin komplementar Young fonksiyonlarıdır.

Tanım 2.9. Ölçülebilir bir f fonksiyonunun Q küpü üzerinden Φ ortalamaları ve zayıf Φ ortalamaları sırasıyla

$$\|f\|_{\Phi,Q} := \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q \Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right) dy \leq 1\right\},$$
$$\|f\|_{WL_{\Phi,Q}} := \inf\left\{t > 0 : \sup_{\alpha>0} \frac{1}{|Q|}\frac{|\{x \in Q : |f(x)| > \alpha t\}|}{\Phi(\frac{1}{\alpha})} \leq 1\right\}$$

ile tanımlanır.

Orlicz ortalamaları için genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)g(y)|dy \leq 2\|f\|_{\Phi,Q}\|g\|_{\Psi,Q} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Burada Φ ve Ψ birbirlerinin komplementar Young fonksiyonlarıdır.

Tanım 2.10. Ψ bir Young fonksiyonu olmak üzere, ölçülebilir bir f fonksiyonunun Ψ ye göre maksimal fonksiyonu

$$M_\Psi f(x) := \sup_{Q \ni x} \|f\|_{\Psi,Q}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyona Orlicz maksimal fonksiyonu da denir.

Kullanacağımız temel örnek $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$ dir. Φ ye göre maksimal fonksiyon $M_{L(1+\log^+ L)}$ şeklinde yazılır. Bu fonksiyonun komplementar Young fonksiyonu $\Psi(t) \approx e^t$ dir. Bu durumda Ψ ye göre maksimal fonksiyon $M_{\exp L}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.11. $\Phi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

(i)

$$\Phi(2t) \le c\,\Phi(t)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $c > 1$ varsa, Φ, Δ_2 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \Delta_2$ şeklinde yazılır.

(ii)

$$\Phi(At) \ge 2A\Phi(t)$$

olacak biçimde $A > 1$ varsa, Φ, ∇_2 koşulunu sağlar denir ve $\Phi \in \nabla_2$ şeklinde yazılır.

Önerme 2.1. Φ, $\Phi \in \nabla_2$ olacak şekilde bir Young fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\int_0^t \frac{\phi(s)}{s} ds \lesssim \frac{\Phi(t)}{t} \tag{2.6}$$

dir (bakınız [66]).

Önerme 2.2. ([71]) $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ve $t > 0$ olsun. Bu durumda

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \le \frac{c}{t} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{t}{2}\}} |f(x)| dx \tag{2.7}$$

eşitsizliği f ve t den bağımsız bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

Tezin bütünlüğünün korunması açısından aşağıdaki teoremin [66] daki ispatını verelim.

Teorem 2.4. ([66, s. 464]) $\Phi \in \nabla_2$ ise, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu L_Φ Orlicz uzayında sınırlıdır.

İspat. $\lambda > 0$ ve $f \in L_\Phi \backslash \Theta$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\lambda}\right) dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \phi\left(\frac{2t}{\lambda}\right) |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > 2t\}| dt$$

dir. (2.7) eşitsizliği ve Fubini teoremi uygulanarak

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\lambda}\right) dx &\lesssim \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \phi\left(\frac{2t}{\lambda}\right)\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>t\}} |f(x)|dx\right)\frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{|f(x)|} \phi\left(\frac{2t}{\lambda}\right)\frac{dt}{t}\right) dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \left(\int_0^{2\lambda^{-1}|f(x)|} \phi(t)\frac{dt}{t}\right) dx\end{aligned}$$

elde edilir. (2.6) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_0^{2\lambda^{-1}|f(x)|} \phi(t)\frac{dt}{t} \lesssim \lambda|f(x)|^{-1}\Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\lambda}\right)$$

yazılabilir. Demek ki

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\lambda}\right) dx \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{2|f(x)|}{\lambda}\right) dx$$

olacak şekilde f den bağımsız bir $c_0 > 1$ sabiti vardır. $\Phi \in \nabla_2$ olduğundan

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{\lambda}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{c_0|f(x)|}{\lambda}\right) dx$$

doğrudur. $\lambda = c_0\|f\|_{L_\Phi}$ seçilirse,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{Mf(x)}{c_0\|f\|_{L_\Phi}}\right) dx \leq 1$$

elde edilir. Luxemburg normu tanımından

$$\|Mf\|_{L_\Phi} \leq c_0\|f\|_{L_\Phi}$$

bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır.

2.3. Morrey Uzayı

Tanım 2.12. $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda \leq n$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{p,\lambda} = \{f \in L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayına $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı denir. Burada norm

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} r^{\frac{\lambda-n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\ &\approx \sup_B \left(|B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_B |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\approx \sup_Q \left(|Q|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_Q |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

ile verilir.

1938 yılında C. B. Morrey tarafından [58] de tanımlanan bu uzaylar, kısmi türevli diferensiyel denklemler teorisindeki birçok problemin çalışılmasında, özellikle parabolik ve eliptik diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarının incelenmesinde oldukça kullanışlıdır. Ayrıca bu uzaylarda reel ve harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılık problemleri de incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir (bakınız [1]-[4], [13]-[18], [23], [29], [38], [39], [48], [60]-[63], [70]). Bilindiği üzere $p \geq 1$ için Morrey uzayı yukarıda verilen normla bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.5. $p \in [1, \infty)$ olsun. Bu durumda

(i) $\mathcal{M}_{p,n} = L_p$,

(ii) $\mathcal{M}_{p,0} = L_\infty$,

(iii) $\lambda < 0$ ve $\lambda > n$ ise, $\mathcal{M}_{p,\lambda} = \Theta$ dir.

Teorem 2.6. ([23]) $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} \leq c_p \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} \tag{2.8}$$

eşitsizliği f den bağımsız $c_p > 0$ sabiti ile sağlanır. $p = 1$ durumunda ise

$$t|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\} \cap B(x,r)| \leq c_1 \, r^{n-\lambda} \|f\|_{\mathcal{M}_{1,\lambda}}$$

eşitsizliği f, t ve r den bağımsız bir $c_1 > 0$ sabiti ile sağlanır.

$p = 1$ durumunda radyal azalan fonksiyonlar için aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 2.7. ([34]) $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{1,\lambda}} \leq c \|f\|_{\mathcal{M}_{1,\lambda}}$$

eşitsizliği f den bağımsız sabitle sağlanır.

Tanım 2.13. $1 \leq p \leq \infty$ ve $w \in W(\mathbb{R}^n)$ olsun. w fonksiyonu

$$[w]_{A_p} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} < \infty$$

özelliğini sağlarsa, w, Muckenhoupt sınıfındandır denir ve $w \in A_p$ şeklinde gösterilir. Burada supremum, $\mathbb{R}^n$ deki tüm küpler üzerinden alınmaktadır.

Hemen hemen her x için

$$Mw(x) \leq c \, w(x)$$

sağlanacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa $w \in A_1$ dir denir.

Herhangi bir Q küpü ve ölçülebilir her $E \subset Q$ kümesi için

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq c \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\delta}$$

özelliği sağlanacak şekilde bir $\delta > 0$ ve $c > 0$ varsa, bu durumda $w \in A_\infty$ dur denir.

B. Muckenhoupt, [59] da ağırlıklı Lebesgue uzaylarında M, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun sınırlılığının karakterizasyonunu vermiştir.

Teorem 2.8. ([59]) $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda M nin $L_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Lebesgue uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter şart $w \in A_p$ olmasıdır.

Tanım 2.14. (Ağırlıklı genelleştirilmiş Morrey uzayı) $1 \leq p < \infty$ ve $\omega(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ da tanımlı, pozitif ve sürekli bir fonksiyon, $v \in W(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda ağırlıklı genelleştirilmiş Morrey uzayı

$$\mathcal{M}_{p,\omega}(v) \equiv \mathcal{M}_{p,\omega}(\mathbb{R}^n, v) := \left\{ f \in L_{p,v}^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\omega}(v)} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada norm

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\omega}(v)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \omega(x,r)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,r))}$$

ile verilir. $v \equiv 1$ durumunda $\mathcal{M}_{p,\omega}(v) := \mathcal{M}_{p,\omega}(1)$ uzayına, genelleştirilmiş Morrey uzayı denir. $v \equiv 1$ ve $\omega(x,r) = r^{n-\lambda}$ alınırsa, ağırlıklı genelleştirilmiş Morrey uzayı, klasik Morrey uzayı ile çakışır. $\mathcal{M}_{p,\omega}$ uzayında M nin sınırlılığı için ω üzerindeki yeterli koşullar, ([15]-[18]) ve [61] de elde edilmiştir.

Tanım 2.15. $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ ve $v \in W(\mathbb{R}^n)$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ için

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t<r<\infty} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{r<s<\infty} \omega_1(x,s)}{\|v\|_{L_1(B(x,r))}} \le c \frac{\omega_2(x,t)}{\|v\|_{L_1(B(x,t))}} \tag{2.9}$$

sağlanacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa, $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{Z}_{0,n}(v)$ dir denir. Eğer $\omega_1 = \omega_2$ ise, kısaca $\omega \in \mathcal{Z}_{0,n}(v)$ yazılır.

$$\mathbb{A} := \left\{ \varphi \in \mathfrak{M}^{+,\uparrow}(0,\infty) : \lim_{t\to 0+} \varphi(t) = 0 \right\}$$

olsun.

Tanım 2.16. u, $(0,\infty)$ da negatif olmayan ve sürekli bir fonksiyon olsun. $g \in \mathfrak{M}(0,\infty)$ fonksiyonları ve $t \in (0,\infty)$ için

$$(\bar{S}_u g)(t) := \|u\, g\|_{L_\infty(t,\infty)}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{S}_u$ operatörüne supremal operatör denir.

Teorem 2.9. ([17]) u, $(0,\infty)$ da negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ve her $t > 0$ için v_1 ve v_2, $0 < \|v_i\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty, i = 1, 2.$ özelliğini sağlayan negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\mathbb{A}$ konisinde $\bar{S}_u$ operatörünün $L_{\infty,v_1}(0,\infty)$ dan $L_{\infty,v_2}(0,\infty)$ a sınırlı olması için gerek ve yeter şart

$$\left\| v_2 \bar{S}_u \left(\|v_1\|^{-1}_{L_\infty(\cdot,\infty)} \right) \right\|_{L_\infty(0,\infty)} < \infty \tag{2.10}$$

olmasıdır.

Lemma 2.3. ([60]) $1 < p < \infty$, $v \in A_p$ ve $f \in L^{\text{loc}}_{p,v}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ deki herbir $B = B(x,r)$ yuvarı için

$$\|Mf\|_{L_{p,v}(B(x,r))} \le c\|v\|_{L_1(B)}^{\frac{1}{p}} \sup_{t>2r} \|v\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,t))} \tag{2.11}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde f ve B den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat. $f_1 = f\chi_{2B}$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ olsun. Her $B = B(x,r)$ yuvarı için M nin alttoplamsallık özelliğinden

$$\|Mf\|_{L_{p,v}(B)} \le \|M(f\chi_{2B})\|_{L_{p,v}(B)} + \|M(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)})\|_{L_{p,v}(B)} \tag{2.12}$$

olduğu görülür. $M : L_{p,v}(\mathbb{R}^n) \to L_{p,v}(\mathbb{R}^n)$ sağladığından

$$\|M(f\chi_{2B})\|_{L_{p,v}(B)} \lesssim \|f\|_{L_{p,v}(2B)}$$

elde edilir. $v \in A_p$ fonksiyonu, doubling koşulunu sağladığı için (bakınız [32] s. 396)

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_{p,v}(2B)} &\approx \|f\|_{L_{p,v}(2B)} \|v\|_{L_1(2B)}^{\frac{1}{p}} \sup_{t>2r} \|v\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \|v\|_{L_1(B)}^{\frac{1}{p}} \sup_{t>2r} \|v\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,t))}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\|M(f\chi_{2B})\|_{L_{p,v}(B)} \lesssim \|v\|_{L_1(B)}^{\frac{1}{p}} \sup_{t>2r} \|v\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,t))} \tag{2.13}$$

sağlanır.

y, B de keyfi nokta olsun. Eğer $B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n\setminus(2B)\} \neq \emptyset$ ise, bu durumda $t > r$ dir. Gerçekten de $z \in B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n\setminus(2B)\}$ ise, bu durumda $t > |y-z| \ge |x-z| - |x-y| > 2r - r = r$ elde edilir. Diğer taraftan $B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n\setminus(2B)\} \subset B(x,2t)$ sağlanır. Gerçekten $z \in B(y,t) \cap \{\mathbb{R}^n\setminus(2B)\}$ alınırsa, $|x-z| \le |y-z| + |x-y| < t + r < 2t$ elde edilir.

Böylece, her $y \in B$ için

$$\begin{aligned} M(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)})(y) &= \sup_{t>0} \frac{1}{|B(y,t)|} \int_{B(y,t)\cap\{\mathbb{R}^n\setminus(2B)\}} |f(z)|dz \\ &\leq 2^n \sup_{t>r} \frac{1}{|B(x,2t)|} \int_{B(x,2t)} |f(z)|dz \\ &= 2^n \sup_{t>2r} \frac{1}{|B(x,t)|} \int_{B(x,t)} |f(z)|dz \end{aligned}$$

dir. Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$M(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)})(y) \leq 2^n \sup_{t>2r} \frac{\|v^{-\frac{1}{p}}\|_{L_{p'}(B(x,t))}}{|B(x,t)|} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,t))}$$

elde edilir. Burada $v \in A_p$, yani

$$|B| \approx \|v\|_{L_1(B)}^{\frac{1}{p}} \|v^{-\frac{1}{p}}\|_{L_{p'}(B)} \tag{2.14}$$

olduğu kullanılırsa,

$$M(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)})(y) \leq 2^n \sup_{t>2r} \|v\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,t))}$$

bulunur. Böylece

$$\|M(f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus(2B)})\|_{L_{p,v}(B)} \lesssim \|v\|_{L_1(B)}^{\frac{1}{p}} \sup_{t>2r} \|v\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,t))} \tag{2.15}$$

dir. (2.12), (2.13) ve (2.15) birleştirilirse, (2.11) elde edilir.

Not 2.1. Lemma 2.3, $v = 1$ durumunda [17] de ispatlanmıştır.

Teorem 2.10. ([60]) $1 < p < \infty$, $v \in A_p$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{Z}_{0,n}(v)$ olsun. Bu durumda M, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $\mathcal{M}_{p,\omega_1}(v)$ den $\mathcal{M}_{p,\omega_2}(v)$ ye sınırlıdır.

İspat. Lemma 2.3 ve Teorem 2.9 dan

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{\mathcal{M}_{p,\omega_2}(v)} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \omega_2(x,r)^{-\frac{1}{p}} \|v\|_{L_1(B(x,r))}^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{t>r} \|v\|_{L_1(B(x,t))}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,t))} \right) \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \omega_1(x,r)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,v}(B(x,t))} = \|f\|_{\mathcal{M}_{p,\omega_1}(v)}\end{aligned}$$

elde edilir.

2.4. Zygmund-Morrey ve zayıf Zygmund-Morrey Uzayı

Bu bölümde Zygmund-Morrey ve zayıf Zygmund-Morrey uzaylarının tanımları yapılacaktır.

Tanım 2.17. ([67]) Φ bir Young fonksiyonu, $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ azalmayan ve $\phi(t)t^{-n}$ artmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n)$ Orlicz-Morrey fonksiyon uzayı

$$\mathcal{L}_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n) \equiv \{f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{L}_{\phi,\Phi}} = \sup_Q \phi(l(Q))\|f\|_{\Phi,Q} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $l(Q)$, Q nun yan ayrıt uzunluğu olup supremum tüm küpler üzerinden alınmaktadır. Orlicz-Morrey uzayında harmonik ve reel analizin klasik operatörlerinin sınırlılılık özellikleri araştırılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir (bakınız [40], [41], [67]).

Tanım 2.18. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda} \equiv \mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Zygmund-Morrey uzayı

$$\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada norm

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} := \sup_Q |Q|^{\frac{\lambda}{n}} \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q} < \infty$$

dur.

Tanım 2.19. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda} \equiv \mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n)$ zayıf Zygmund-Morrey uzayı

$$\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada norm

$$\|f\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} := \sup_Q |Q|^{\frac{\lambda}{n}} \|f\|_{WL(1+\log^+ L),Q} < \infty$$

dur.

Zygmund-Morrey uzayı, Tanım 2.18 de verilen Orlicz-Morrey uzayının özel bir halidir. Gerçekten de $\mathcal{L}_{\phi,\Phi}$ de, $\phi(t) = t^\lambda$ ve $\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)$ alınırsa, Zygmund-Morrey uzayı elde edilmiş olur. Zayıf Zygmund-Morrey uzayı bu haliyle ilk defa [35] te tanımlanmıştır.

2.5. $L_p(\cdot)$ Uzayı

Ölçülebilir bir $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$ fonksiyonu için

$$m(f, p) := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} \, dx$$

konveks modülerini tanımlayalım. Buna göre $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyon sınıfı

$$L_{p(\cdot)} \equiv L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) := \{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \; m(f/\lambda, p) < \infty \text{ olacak biçimde } \lambda > 0 \text{ var} \}$$

ile tanımlanır. Bu sınıf

$$\|f\|_{L_{p(\cdot)}} \equiv \|f\|_{L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} := \inf\left\{\lambda > 0 :\ m(f/\lambda, p) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \le 1\right\}$$

şeklinde tanımlanan Luxemburg-Nakano normuna göre Banach uzayıdır.

Değişken üslü fonksiyon uzayları teorisi, son yirmi yıldır yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Hardy-Littlewood maksimal operatörünün ve singüler integral operatörünün sınırlılığının karakterize edilmesi, bu teorinin en önemli problemlerinden biridir (bakınız, [27], [28], [30], [50], [76], [77]).

$$1 < p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x), \qquad p_+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) < \infty \tag{2.16}$$

özellikleri sağlanırsa, bu durumda $p'(x) := p(x)/(p(x)-1)$ iyi tanımlıdır ve $p'(x)$ de (2.16) özelliğini sağlar.

$$\mathscr{P}(\mathbb{R}^n) := \{p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to [1,\infty) \text{ ölçülebilir} :\ 1 < p_-\ ,\ p_+ < \infty\},$$
$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) := \{p(\cdot) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) :\ M \text{ operatörü } L_{p(\cdot)} \text{ üzerinde sınırlıdır}\}$$

olsun. $p(\cdot) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ ve her $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için

$$|p(x)-p(y)| \le \frac{-c}{\log(|x-y|)},\ 2|x-y| \le 1$$
$$|p(x)-p(y)| \le \frac{c}{\log(e+|x|)},\ |x| \le |y|$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $c > 0$ sayısı varsa, $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ dir denir.

D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza ve C. J. Neugebauer, [27] de aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır:

Teorem 2.11. ([27]) $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ise, $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ dir.

3. $M_\alpha(M)$ İÇİN NOKTASAL KESTİRİMLER

Harmonik analizde klasik operatörler için noktasal kestirimlerin elde edilmesi, operatörlerin sınırlılığı probleminde önemli rol oynamaktadır. Örneğin, A. Cordoba ve C. Fefferman [26] da $1 < p < \infty$ olmak üzere T, Calderón-Zygmund integral operatörü için

$$(Tf)^{\#}(x) \leq c_p M_p f(x) \tag{3.1}$$

eşitsizliğini elde etmiş ve bu eşitsizlik yardımıyla T nin, ağırlıklı Lebesgue uzaylarında sınırlılığını ispatlamışlardır. A. Lerner, [55] te

$$(Tf)^{\#}(x) \leq cM^2 f(x)$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Bu eşitsizlik (3.1) eşitsizliğinden daha kesindir. Çünkü R. Coifman ve R. Rochberg tarafından [25] te $1 < p < \infty$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için ispatlanmış

$$M(M_p f)(x) \leq cM_p f(x)$$

eşitsizliğine göre

$$M^2 f(x) \leq M(M_p f)(x) \leq cM_p f(x)$$

doğrudur.

Noktasal kestirimler komutatör operatörlerinin araştırılmasında da kullanılmıştır. Örneğin, $[T, b]$ komutatör operatörü için C. Pérez, [64] te zayıf $L(1 + \log^+ L)$ eşitsizliğini elde edebilmek için öncelikle M^2 için noktasal kestirim elde etmiş, daha sonra noktasal kestirim yardımıyla zayıf $L(1 + \log^+ L)$ eşitsizliğini ispat etmiştir.

Esas teoremlerimizi ispatlayabilmek için aşağıdaki sonuçlara ihtiyaç vardır:

Teorem 3.1. $0 \le \alpha < n$ olsun. Bu durumda her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\begin{aligned}
M_\alpha(Mf)(x) &= \sup_{Q\ni x} |Q|^{\frac{\alpha-n}{n}} \int_Q Mf(y)dy \\
&\approx \sup_{Q\ni x} |Q|^{\frac{\alpha}{n}} \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q} \\
&\approx \sup_{Q\ni x} |Q|^{\frac{\alpha-n}{n}} \int_Q |f(y)| \left(1+\log^+ \frac{|f(y)|}{|f|_Q}\right) dy
\end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 3.1 in ispatında aşağıdaki lemmalardan yararlanılacaktır:

Lemma 3.1.
$$\int_Q M(f\chi_Q)(x)dx \approx \int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx$$

denkliği her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için, f ve Q dan bağımsız sabitlerle sağlanır.

İspat. $\mathbb{R}^n$ de sabit bir Q küpü alalım. Öyle pozitif $c_1 < 1$ ve $c_2 > 1$ sabitleri vardır ki her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve her $t > |f|_Q$ için

$$c_1 \int_{\{x\in Q:|f(x)|>t\}} \frac{|f(x)|}{t}\, dx \le |\{x \in Q : M(f\chi_Q)(x) > t\}| \le c_2 \int_{\{x\in Q:|f(x)|>t/2\}} \frac{|f(x)|}{t}\, dx$$

sağlanır (bakınız [71]). Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_Q M(f\chi_Q)(x)dx &= \int_0^\infty |\{x \in Q : M(f\chi_Q)(x) > \lambda\}| d\lambda \\
&= \int_0^{|f|_Q} |\{x \in Q : M(f\chi_Q)(x) > \lambda\}| d\lambda \\
&\quad + \int_{|f|_Q}^\infty |\{x \in Q : M(f\chi_Q)(x) > \lambda\}| d\lambda \\
&= |Q||f|_Q + \int_{|f|_Q}^\infty |\{x \in Q : M(f\chi_Q)(x) > \lambda\}| d\lambda \\
&\ge |Q||f|_Q + c_1 \int_{|f|_Q}^\infty \left(\int_{\{x\in Q:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\, dx \right) \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= |Q||f|_Q + c_1 \int_{\{x\in Q:|f(x)|>|f|_Q\}} \left(\int_{|f|_Q}^{|f(x)|} \frac{d\lambda}{\lambda} \right) |f(x)|\, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |Q||f|_Q + c_1 \int_{\{x\in Q:|f(x)|>|f|_Q\}} |f(x)| \log\left(\frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx \\
&\geq c_1 \int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$
\begin{aligned}
\int_Q M(f\chi_Q)(x)dx &= \int_0^\infty |\{x\in Q : M(f\chi_Q)(x) > \lambda\}| d\lambda \\
&\approx \int_0^\infty |\{x\in Q : M(f\chi_Q)(x) > 2\lambda\}| d\lambda \\
&= \int_0^{|f|_Q} |\{x\in Q : M(f\chi_Q)(x) > 2\lambda\}| d\lambda \\
&\quad + \int_{|f|_Q}^\infty |\{x\in Q : M(f\chi_Q)(x) > 2\lambda\}| d\lambda \\
&\leq |Q||f|_Q + c_2 \int_{|f|_Q}^\infty \left(\int_{\{x\in Q:|f(x)|>\lambda\}} |f(x)|\, dx\right) \frac{d\lambda}{\lambda} \\
&= |Q||f|_Q + c_2 \int_{\{x\in Q:|f(x)|>|f|_Q\}} \left(\int_{|f|_Q}^{|f(x)|} \frac{d\lambda}{\lambda}\right) |f(x)|\, dx \\
&= |Q||f|_Q + c_2 \int_{\{x\in Q:|f(x)|>|f|_Q\}} |f(x)| \log\left(\frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx \\
&\leq c_2 \int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.

$$
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx \approx \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}
$$

denkliği her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için, f ve Q dan bağımsız sabitlerle sağlanır.

İspat.

$$
1 = \frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{|f(x)|}{|f|_Q} dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx
$$

sağlandığından Luxemburg normu tanımından

$$|f|_Q \leq \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}$$

yazılabilir. $a, b > 0$ için $\log^+(ab) \leq \log^+ a + \log^+ b$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx \\
&\qquad= \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}} \frac{\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}}{|f|_Q}\right) dx \\
&\qquad\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}}\right) dx \\
&\qquad\quad + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \log^+ \left(\frac{\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}}{|f|_Q}\right) dx \\
&\qquad\leq \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q} + |f|_Q \log^+ \left(\frac{\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}}{|f|_Q}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $t \geq 1$ için $\log t \leq t$ olduğundan

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx \leq 2\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}$$

dur.

Diğer taraftan Luxemburg normu tanımından

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}} \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}}\right) dx = 1$$

elde edilir.

$$|f|_Q \leq \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q}$$

eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q} \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)| \left(1+\log^+ \frac{|f(x)|}{|f|_Q}\right) dx$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mf(y)dy \lesssim \sup_{Q\subset Q'} \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'} \tag{3.2}$$

eşitsizliği her $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için, f ve Q dan bağımsız sabitler için sağlanır.

İspat. Q, $\mathbb{R}^n$ de bir küp ve $f_1 = f\chi_{3Q}$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ olsun. Maksimal fonksiyonun alttoplamsallık özelliğinden,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mf(y)dy \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q Mf_1(y)dy + \frac{1}{|Q|}\int_Q Mf_2(y)dy \tag{3.3}$$

elde edilir.

Sabit bir $x \in Q$ için bir Q' küpü, $Q' \ni x$ ve $Q' \cap (3Q)^c \neq \emptyset$ özelliklerini sağlarsa, $Q \subset 3Q'$ olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda

$$Mf_2(x) = \sup_{Q'\ni x} \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f_2(y)|dy \leq \sup_{Q\subset 3Q'} \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(y)|dy$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mf_2(y)dy \lesssim \sup_{Q\subset Q'} \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(y)|dy \tag{3.4}$$

bulunur. Her Q' küpü için Lemma 3.2 den

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f(y)|dy \leq \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'}$$

olduğundan

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mf_2(y)dy \lesssim \sup_{Q\subset Q'} \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'} \tag{3.5}$$

dür.

Diğer taraftan $\operatorname{supp} f \subset Q$ olacak şekilde her f için

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mf(y)dy \lesssim \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q} \tag{3.6}$$

sağlandığından (bakınız [64], s. 174)

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q Mf_1(y)dy \lesssim \frac{1}{|3Q|}\int_{3Q} Mf_1(y)dy \lesssim \|f\|_{L(1+\log^+ L),3Q} \tag{3.7}$$

bulunur.

Böylelikle (3.3), (3.5) ve (3.7) den

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q Mf(y)dy &\lesssim \sup_{Q\subset Q'} \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'} + \|f\|_{L(1+\log^+ L),3Q} \\ &\lesssim \sup_{Q\subset Q'} \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'}\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da lemmayı ispatlar.

Sonuç 3.1.

$$M^2 f(x) \approx M_{L(1+\log^+ L)} f(x) \approx \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)| \left(1+\log^+ \frac{|f(y)|}{|f|_Q}\right) dy \tag{3.8}$$

denkliği her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için, f ve Q dan bağımsız sabitlerle sağlanır.

Sonuç 3.2. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{1,\lambda}} \approx \|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \approx \sup_Q |Q|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_Q |f(y)| \left(1+\log^+ \frac{|f(y)|}{|f|_Q}\right) dy \tag{3.9}$$

denkliği her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için, f ve Q dan bağımsız sabitlerle sağlanır.

Belirtelim ki (3.8) denkliğinin birinci kısmı, [64] te ispatlanmıştır (ayrıca bakınız [37], s.159). (3.8) denkliğinin ikinci kısmı için [21], [53] ve [54] e bakılabilir. (3.9) denkliğinin birinci kısmı, [67] deki Lemma 3.5 in özel bir durumudur.

Konu bütünlüğü için aşağıdaki lemmayı ispatı ile birlikte verelim:

Lemma 3.4. ([64, Lemma 1.6]) Her $f \in L(1+\log^+ L)(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve her $\lambda > 0$ sayısı için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M^2 f(x) > \lambda\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f ve λ dan bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat. K kompakt bir küme olmak üzere

$$K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \ M_{L(1+\log^+ L)} f(x) > \lambda\}$$

olsun. Standart örtü lemması gereği

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} 3Q_i, \qquad \|f\|_{L(1+\log^+ L),Q_i} > \lambda, \qquad i = 1, \dots, m$$

sağlanacak şekilde içleri ayrık $Q_1, \dots, Q_m$ küpleri seçebiliriz. O halde Luxemburg norm tanımından

$$|Q_i| \leq \int_{Q_i} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|K| &\leq \sum_{k=1}^{m} |3Q_i| \lesssim \sum_{k=1}^{m} |Q_i| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \int_{Q_i} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Lebesgue ölçüsü iç regüler olduğundan

$$K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \ M_{L(1+\log^+ L)}f(x) > \lambda\}$$

özelliğini sağlayan tüm kompakt K kümeleri üzerinden supremuma geçilirse, ispat tamamlanır.

4. C_b, $[M, b]$ VE $[M^{\#}, b]$ İÇİN KESTİRİMLER

Bu bölümde C_b, $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri için sırasıyla noktasal kestirimler, fonksiyon uzaylarında norm kestirimleri ve uç nokta kestirimleri elde edilecektir.

4.1. C_b , $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ İçin Noktasal Kestirimler

C_b ile $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri, birbirlerinden farklı özelliklere sahiptirler. Örnek olarak C_b operatörü pozitif ve altlineer olmasına rağmen, $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri ne pozitif ne de altlineerdir. Ancak, b üzerine ek koşullar konulursa, C_b operatörü $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörlerini kontrol eder.

Lemma 4.1. $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $b \geq 0$ olsun. Bu durumda her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[M, b](f)(x)| \leq C_b(f)(x) \tag{4.1}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Her $f, g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|Mf(x) - Mg(x)| \leq M(f - g)(x) \tag{4.2}$$

noktasal kestiriminin sağlandığı görülebilir. $b \geq 0$ ve (4.2) den

$$\begin{aligned} |[M, b](f)(x)| &= |M(bf)(x) - b(x)Mf(x)| = |M(bf)(x) - M(b(x)f)(x)| \\ &\leq M(bf - b(x)f)(x) = M((b - b(x))f)(x) = C_b(f)(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.2. $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[M,b](f)(x)| \le C_b(f)(x) + 2b^-(x)Mf(x) \tag{4.3}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat.

$$|[M,b](f)(x) - [M,|b|](f)(x)| \le 2b^-(x)Mf(x)$$

olduğundan (bakınız [6], s. 3330)

$$|[M,b](f)(x)| \le |[M,|b|](f)(x)| + 2b^-(x)Mf(x) \tag{4.4}$$

sağlanır. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $C_{|b|}(f)(x) \le C_b(f)(x)$ olduğundan Lemma 4.1 den

$$|[M,b](f)(x)| \le C_{|b|}(f)(x) + 2b^-(x)Mf(x) \le C_b(f)(x) + 2b^-(x)Mf(x)$$

elde edilir.

Teorem 4.1. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \delta < 1$ olsun. Bu durumda, her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$M_\delta(C_b(f))(x) \le c_\delta \|b\|_* M^2 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{4.5}$$

sağlanacak şekilde f ve x ten bağımsız bir $c_\delta > 0$ sabiti vardır.

İspat. $x \in \mathbb{R}^n$ ve sabit bir Q: $Q \ni x$ alalım. $f_1 = f\chi_{3Q}$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ olsun. Her $y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} C_b(f)(y) &= M((b - b(y))f)(y) = M((b - b_{3Q} + b_{3Q} - b(y))f)(y) \\ &\le M((b - b_{3Q})f_1)(y) + M((b - b_{3Q})f_2)(y) + |b(y) - b_{3Q}|Mf(y) \end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (C_b(f)(y))^{\delta}\,dy\right)^{\frac{1}{\delta}} &\lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q M((b-b_{3Q})f_1)(y)^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q M((b-b_{3Q})f_2)(y)^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\quad + \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y)-b_{3Q}|^{\delta} Mf(y)^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&:= \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III} \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\int_Q M((b-b_{3Q})f_1)(y)^{\delta}dy &\leq \int_0^{|Q|}\left[(M((b-b_{3Q})f_1))^*(t)\right]^{\delta}dt \\
&\leq \left[\sup_{0<t<|Q|} t\,(M((b-b_{3Q})f_1))^*(t)\right]^{\delta}\int_0^{|Q|} t^{-\delta}dt
\end{aligned}
$$

olduğundan, M nin $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $L_{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlılığı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\int_Q M((b-b_{3Q})f_1)(y)^{\delta}dy &\lesssim \|(b-b_{3Q})f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}^{\delta}|Q|^{-\delta+1} \\
&= \|(b-b_{3Q})f\|_{L_1(3Q)}^{\delta}|Q|^{-\delta+1}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Böylelikle

$$
\mathrm{I} \lesssim \frac{1}{|3Q|}\int_{3Q}|b(y)-b_{3Q}||f(y)|dy
$$

bulunur. (2.5) ten

$$
\mathrm{I} \lesssim \|b-b_{3Q}\|_{\exp L,3Q}\|f\|_{L\log L,3Q}
$$

sağlanır. Lemma 2.1 den

$$
\|b-b_Q\|_{\exp L,Q} \leq c\|b\|_*
$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde Q dan bağımsız bir $c>0$ vardır. Dolayısıyla

$$
\mathrm{I} \lesssim \|b\|_* M_{L(1+\log^+ L)}f(x) \qquad (4.7)
$$

elde edilir.

II ifadesi, $\inf_{y\in Q} M((b-b_{3Q})f)(y)$ ile karşılaştırılabilir olduğundan (bakınız [32], s. 160)

$$\mathrm{II} \lesssim M((b-b_{3Q})f)(x)$$

tir. (2.5) ve Lemma 2.1 den

$$\mathrm{II} \lesssim \sup_{x\in Q} \|b-b_{3Q}\|_{\exp L,3Q} \|f\|_{L\log L,3Q} \lesssim \|b\|_* M_{L(1+\log^+ L)} f(x) \tag{4.8}$$

bulunur.

$\delta < \varepsilon < 1$ olsun. III yi değerlendirmek için $r = \varepsilon/\delta > 1$ alınıp Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\mathrm{III} \le \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y)-b_{3Q}|^{\delta r'} dy\right)^{\frac{1}{\delta r'}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf(y))^{\delta r} dy\right)^{\frac{1}{\delta r}}$$

sağlanır. Lemma 2.2 den

$$\mathrm{III} \lesssim \|b\|_* \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mf(y))^{\varepsilon} dy\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \le \|b\|_* M_\varepsilon(Mf)(x) \tag{4.9}$$

elde edilir.

Son olarak Sonuç 3.1, (4.6)-(4.9) kullanılırsa,

$$M_\delta(C_b(f))(x) \le c\|b\|_* \left(M_\varepsilon(Mf)(x) + M^2 f(x)\right) \tag{4.10}$$

bulunur.

$0 < \varepsilon < 1$ için

$$M_\varepsilon(Mf)(x) \le M^2 f(x)$$

olduğundan (4.5) elde edilir.

Teorem 4.2. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$C_b(f)(x) \leq c\|b\|_* M^2 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{4.11}$$

sağlanacak şekilde f ve x ten bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat. Lebesgue Diferensiyellenebilme Teoremi'nden

$$C_b(f)(x) \leq M_\delta(C_b(f))(x)$$

olup sonuç, Teorem 4.1 den elde edilir.

Teorem 4.3. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[M, b](f)(x)| \leq c\left(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty\right) M^2 f(x) \tag{4.12}$$

sağlanacak şekilde f ve x ten bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat. Lemma 4.2 ve Teorem 4.2 den

$$|[M, b](f)(x)| \leq c\left(\|b\|_* M^2 f(x) + b^-(x) M f(x)\right) \tag{4.13}$$

yazılabilir. $f \leq Mf$ ve $\|b\|_* \leq \|b^+\|_* + \|b^-\|_* \lesssim \|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty$ olduğundan ispat tamamlanır.

Aşağıdaki lemma doğrudur:

Lemma 4.3. $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $b \geq 0$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|[M^\#, b](f)(x)| \leq 2C_b(f)(x)$$

sağlanır.

İspat. Gerçekten de

$$
\begin{aligned}
&|[M^{\#}, b](f)(x)| \\
&\qquad = |M^{\#}(bf)(x) - b(x)M^{\#}(f)(x)| \\
&\qquad = \left| \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y)f(y) - (bf)_Q| dy - b(x) \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \right| \\
&\qquad = \left| \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y)f(y) - (bf)_Q| dy - \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x)f(y) - b(x)f_Q| dy \right| \\
&\qquad \leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q \Big| |b(y)f(y) - (bf)_Q| - |b(x)f(y) - b(x)f_Q| \Big| dy \\
&\qquad \leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y)f(y) - (bf)_Q - b(x)f(y) + b(x)f_Q| dy \\
&\qquad \leq \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y)f(y) - b(x)f(y)| dy + \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(x)f_Q - (bf)_Q| dy \\
&\qquad \leq 2C_b(f)(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lemma 4.4. $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}^n$

$$
|[M^{\#}, b](f)(x)| \leq 4\left(C_b(f)(x) + M(b^- f)(x) + b^-(x)Mf(x)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)
$$

sağlanır.

İspat.

$$
|[M^{\#}, b](f)(x) - [M^{\#}, |b|](f)(x)| \leq 2M^{\#}(b^- f)(x) + 2b^-(x)M^{\#}f(x)
$$

olduğundan, Lemma 4.3 gereğince

$$
|[M^{\#}, b](f)(x)| \leq |[M^{\#}, |b|](f)(x)| + 2M^{\#}(b^- f)(x) + 2b^-(x)M^{\#}f(x)
$$

$$\leq 4\left(C_b(f)(x) + M(b^- f)(x) + b^-(x)Mf(x)\right)$$

bulunur.

Sonuç 4.1. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda, her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$|[M^{\#}, b](f)(x)| \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\, M^2 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{4.14}$$

olacak şekilde f ve x ten bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat. $f \leq Mf$ olduğundan, Lemma 4.4 ve Sonuç 4.2 den

$$\begin{aligned} |[M^{\#}, b](f)(x)| &\lesssim \|b\|_* M^2 f(x) + \|b^-\|_\infty Mf(x) \\ &\lesssim (\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\, M^2 f(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. C_b, $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ İçin Norm Kestirimleri

Bu kısımda C_b, $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri için norm kestirimleri önceki bölümlerde elde edilen noktasal kestirimler yardımıyla ispatlanacaktır.

Teorem 4.4. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. X, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan ölçülebilir fonksiyonların bir Banach uzayı olsun ve latis özelliğini sağlasın, yani

$$0 \leq f \leq g, \text{ h.h.y} \Rightarrow \|f\|_X \lesssim \|g\|_X$$

olsun. Ayrıca farz edelim ki M, X üzerinde sınırlıdır. Bu durumda, C_b operatörü X

üzerinde sınırlıdır ve

$$\|C_b f\|_X \leq c\|b\|_*\|f\|_X$$

olacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat. Teorem 4.2, X uzayının latis özelliği ve M nin X üzerinde sınırlı olduğu kullanılırsa,

$$\|C_b f\|_X \leq \|c\|b\|_* M^2 f\|_X = c\|b\|_*\|M^2 f\|_X \leq c\|b\|_*\|f\|_X$$

sağlanır.

Teorem 4.5. $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. $X, \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan ölçülebilir fonksiyonların latis özelliğini sağlayan bir Banach uzayı olsun. Ayrıca M nin, X üzerinde sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörleri X üzerinde sınırlıdır ve

$$\|[M, b](f)\|_X \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_X,$$
$$\|[M^\#, b](f)\|_X \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_X$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat. Sadece $[M, b]$ için ispat yapılacak, $[M^\#, b]$ için ispat benzer düşünceyle yapılabilir. Teorem 4.3, X uzayının latis özelliği ve M nin X üzerinde sınırlı olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|[M, b]f\|_X &\leq \|c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)M^2 f\|_X \\ &= c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|M^2 f\|_X \\ &\leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_X\end{aligned}$$

sağlanır.

4.2.1 $L_p(\mathbb{R}^n)$ Üzerinde Norm Kestirimleri

Aşağıdaki teorem [33] te ispatlanmış olup, burada farklı bir ispat verilecektir.

Teorem 4.6. $1 < p < \infty$ ve $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C_b operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

İspat. $1 < p < \infty$ olduğundan M, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır. Dolayısıyla Teorem 4.4 ten ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem [6] da ispatlanmış olup burada farklı bir ispat verilecektir.

Teorem 4.7. $1 < p < \infty$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır ve sırasıyla

$$\|[M, b](f)\|_p \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_p$$
$$\|[M^\#, b](f)\|_p \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_p$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat. $1 < p < \infty$ olduğundan M, $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır. Dolayısıyla Teorem 4.5 ten ispat tamamlanır.

4.2.2 $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ Üzerinde Norm Kestirimleri

Bu bölümde $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ uzayında C_b, $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörlerinin sınırlılığı, elde edilen noktasal kestirimler yardımıyla verilecektir.

Aşağıdaki teoremler sırasıyla J. S. Xu tarafından [76] da ve P. Zhang ve J. Wu tarafından

[77] de ispatlanmıştır.

Teorem 4.8. ([76]) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C_b, $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

Teorem 4.9. ([77]) $b \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $p(\cdot) \in \mathscr{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:
(i) $[M, b]$, $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.
(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.
(iii) $[M^\#, b]$, $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

Teorem 4.4, aşağıdaki sonucu ifade etmeye imkân verir:

Teorem 4.10. $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:
(i) C_b operatörü $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.
(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

İspat. (ii) $\Rightarrow$ (i). $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan M, $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır. İspat Teorem 4.4 ten elde edilir.
(i) $\Rightarrow$ (ii). Q, $\mathbb{R}^n$ de keyfi bir küp ve $f = \chi_Q$ olsun. Her $x \in Q$ için

$$C_b(\chi_Q)(x) \gtrsim \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - b_Q| dy \right\} \chi_Q(x) \tag{4.15}$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\|C_b(\chi_Q)\|_{L_{p(\cdot)}} \gtrsim \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - b_Q| dy \right) \|\chi_Q\|_{L_{p(\cdot)}}$$

doğrudur.

$$\|C_b(\chi_Q)\|_{L_{p(\cdot)}} \leq c\|\chi_Q\|_{L_{p(\cdot)}}$$

olduğundan

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - b_Q|dy \lesssim c$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.11. $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) $[M, b]$, $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $[M^\#, b]$, $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır.

İspat. $(\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{i}) \wedge (\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iii})$. $p(\cdot) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan M, $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ de sınırlıdır. İspat Teorem 4.5 ten elde edilir.

$(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii}) \wedge (\mathrm{iii}) \Rightarrow (\mathrm{ii})$. İspat [77] Teorem 1.2 ye benzer şekilde yapılabilir.

4.2.3 $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ Üzerinde Norm Kestirimleri

Bu kısımda C_b, $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörlerinin L_Φ Orlicz uzayında sınırlılığı incelenecektir.

Teorem 4.12. $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda

(i) C_b, L_Φ uzayında sınırlıdır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

İspat. (ii) $\Rightarrow$ (i). Teorem 2.4 ten M, L_Φ uzayında sınırlıdır. Dolayısıyla Teorem 4.4 ten

$$\|C_b(f)\|_{L_\Phi} \leq c\|b\|_*\|f\|_{L_\Phi}$$

elde edilir.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Q, $\mathbb{R}^n$ de keyfi bir küp ve $f = \chi_Q$ olsun. Bu durumda

$$\|C_b(\chi_Q)\|_{L_\Phi} \gtrsim \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - b_Q|dy\right) \|\chi_Q\|_{L_\Phi}$$

doğrudur.

$$\|C_b(\chi_Q)\|_{L_\Phi} \leq c\|\chi_Q\|_{L_\Phi}$$

olduğundan

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - b_Q|dy \lesssim c$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.13. $\Phi \in \nabla_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $[M, b]$, L_Φ de sınırlıdır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $[M^\#, b]$, L_Φ de sınırlıdır.

İspat. Sadece $[M, b]$ için ispat yapılacak, $[M^\#, b]$ için ispat benzer düşünceyle yapılabilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Teorem 2.4 ten M, L_Φ uzayında sınırlıdır. Dolayısıyla Teorem 4.5 ten

$$\|[M, b](f)\|_{L_\Phi} \leq c\left(\|b\|_* + \|b^-\|_\infty\right)\|f\|_{L_\Phi}$$

elde edilir.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Q sabit küpü için $f = \chi_Q$ olsun. (i) den

$$\|[M,b](\chi_Q)\|_{L_\Phi} \leq c\|\chi_Q\|_{L_\Phi}$$

olduğu görülebilir.

Ayrıca

$$M(b\chi_Q)\chi_Q = M_Q(b) \quad \text{ve} \quad M(\chi_Q)\chi_Q = \chi_Q$$

eşitlikleri doğru olduğundan

$$\begin{aligned} |M_Q(b) - b\chi_Q| &= |M(b\chi_Q)\chi_Q - bM(\chi_Q)\chi_Q| \\ &\leq |M(b\chi_Q) - bM(\chi_Q)| = |[M,b](\chi_Q)| \end{aligned}$$

elde edilir (Burada M_Q, (2.1) de tanımlanan lokal maksimal fonksiyondur). Dolayısıyla

$$\|M_Q(b) - b\chi_Q\|_{L_\Phi} \leq \|[M,b](\chi_Q)\|_{L_\Phi}$$

bulunur. O halde (i) den

$$\|M_Q(b) - b\chi_Q\|_{L_\Phi} \lesssim \|\chi_Q\|_{L_\Phi}$$

yazılabilir. (2.4) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_Q |b(y) - M_Q(b)(y)|dy \lesssim \|b - M_Q(b)\|_{L_\Phi}\|\chi_Q\|_{L_\Psi}$$

sağlanır. Burada Ψ, Φ ye komplementar Young fonksiyonudur. $\|\chi_Q\|_{L_\Psi}\|\chi_Q\|_{L_\Phi} \approx |Q|$ denkliği yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |b(y) - M_Q(b)(y)|dy \lesssim c$$

elde edilir.

$E = \{x \in Q : b(x) \le b_Q\},\ F = \{x \in Q : b(x) > b_Q\}$ olsun. Bu durumda

$$\int_E |b(t) - b_Q| dt = \int_F |b(t) - b_Q| dt$$

olduğu açıktır. $b(x) \le b_Q \le M_Q(b)$ eşitsizliği, her $x \in E$ için sağlandığından

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(t) - b_Q| dt &= \frac{2}{|Q|} \int_E |b(t) - b_Q| dt \\ &\le \frac{2}{|Q|} \int_E |b(t) - M_Q(b)(t)| dt \\ &\le \frac{2}{|Q|} \int_Q |b(t) - M_Q(b)(t)| dt \lesssim c \end{aligned}$$

bulunur. Bu da $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olması demektir.

$b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermek için, $M_Q(b)(x) \ge |b(x)|, x \in Q$ eşitsizliğinden yararlanacağız. Bu durumda

$$0 \le b^-(x) = |b(x)| - b^+(x) \le M_Q(b)(x) - b^+(x) + b^-(x) = M_Q(b)(x) - b(x)$$

dir. Elde edilenleri birleştirirsek, her Q küpü için

$$(b^-)_Q \le c$$

bulunur. Lebesgue Differensiyellenebilme Teoremi'nden b^- nin sınırlılığı elde edilir.

4.2.4 $\mathcal{M}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Üzerinde Norm Kestirimleri

Bu kısımda komutatör operatörlerinin Morrey uzayında sınırlılığı araştırılacaktır.

Teorem 4.14. $1 < p < \infty$, $v \in A_p$, $\omega \in \mathcal{Z}_{0,n}(v)$ ve $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C_b operatörü $\mathcal{M}_{p,\omega}(v)$ Morrey uzayında sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.10 ve Teorem 4.4 ten

$$\|C_b(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\omega(v)}} \leq c\|b\|_*\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\omega(v)}}$$

elde edilir.

Teorem 4.15. $1 < p < \infty$, $v \in A_p$, $\omega \in \mathcal{Z}_{0,n}(v)$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörleri $\mathcal{M}_{p,\omega}(v)$ uzayında sınırlıdır.

İspat. Teorem 2.10 ve Teorem 4.5 ten

$$\|[M, b](f)\|_{\mathcal{M}_{p,\omega(v)}} \leq c\left(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty\right)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\omega(v)}},$$
$$\|[M^\#, b](f)\|_{\mathcal{M}_{p,\omega(v)}} \leq c\left(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty\right)\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\omega(v)}}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.16. $1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) C_b operatörü $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ uzayında sınırlıdır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

İspat. (ii) $\Rightarrow$ (i). $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 4.14 den C_b operatörü $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ Morrey uzayında sınırlıdır. Bunun için $v \equiv 1$ ve $\omega(x, r) = r^{n-\lambda}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ almak yeterlidir.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Her $f \in \mathcal{M}_{p,\lambda}$ için

$$\|C_b(f)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} \leq c\|f\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir $c > 0$ olsun.

Q, $\mathbb{R}^n$ de sabit bir küp ve $f = \chi_Q$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|\chi_Q\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} &\approx \sup_{Q'} \left(|Q'|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_{Q'} |\chi_Q(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{Q'} \left(|Q' \cap Q||Q'|^{\frac{\lambda-n}{n}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{Q' \subset Q} \left(|Q'||Q'|^{\frac{\lambda-n}{n}} \right)^{\frac{1}{p}} = |Q|^{\frac{\lambda}{np}} \end{aligned} \tag{4.16}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Diğer yandan (4.15) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\|C_b(\chi_Q)\|_{\mathcal{M}_{p,\lambda}} &= \sup_{Q'} \left(|Q'|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_{Q'} C_b(\chi_Q)(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\gtrsim |Q|^{\frac{\lambda}{np}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - b_Q| dy \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. (i), (4.16) ve (4.17) den

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - b_Q| dy \leq c$$

bulunur ki bu da $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olması demektir.

Teorem 4.17. $0 < \lambda < n$ ve $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C_b operatörü $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

İspat. Teorem 4.2 ve Teorem 2.7 den ispat elde edilir.

Aşağıdaki teorem Q. Xie tarafından [75] te ispatlanmıştır.

Teorem 4.18. ([75]) $0 < \lambda < n$ ve b, $\mathbb{R}^n$ de reel değerli lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) $[M, b]$, $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ uzayında sınırlı olacak şekilde $p \in (1, \infty)$ vardır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $[M^{\#}, b]$, $\mathcal{M}_{p,\lambda}$ uzayında sınırlı olacak şekilde $p \in (1, \infty)$ vardır.

Not 4.1. (ii) $\Rightarrow$ (i) ve (ii) $\Rightarrow$ (iii) nin ispatı sırasıyla Teorem 4.5 ve Teorem 1.10 kullanılarak yapılabilir.

Teorem 4.19. $0 < \lambda < n$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ operatörleri $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{1,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

İspat. Teorem 4.3 ve Teorem 2.7 den ispat kolayca elde edilir.

4.3. C_b, $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ İçin Uç Nokta Kestirimleri

Bu kısımda, elde edilen noktasal kestirimler yardımıyla C_b, $[M, b]$ ve $[M^{\#}, b]$ için uç nokta kestirimleri ispatlanacaktır. Ayrıca $[M, b]$ operatörünün zayıf $(1, 1)$ eşitsizliğini sağlamadığı bir örnekle gösterilecektir.

Teorem 4.20. Aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) Her $f \in L(1 + \log^+ L)(\mathbb{R}^n)$ ve herbir $\lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : C_b(f)(x) > \lambda\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \tag{4.18}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f ve λ dan bağımsız bir $c > 0$ sabiti vardır.

(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ dir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii). Q_0, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir küp ve $f = \chi_{Q_0}$ olsun.

$$|b(x) - b_{Q_0}| \leq \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |b(x) - b(y)| dy$$

olduğundan herbir $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : \ & C_b(\chi_Q)(x) > \lambda\}| \\
& = |\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_{Q \cap Q_0} |b(x) - b(y)| dy > \lambda\}| \\
& \geq |\{x \in Q_0 : \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_{Q \cap Q_0} |b(x) - b(y)| dy > \lambda\}| \\
& \geq |\{x \in Q_0 : \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |b(x) - b(y)| dy > \lambda\}| \\
& \geq |\{x \in Q_0 : |b(x) - b_{Q_0}| > \lambda\}|
\end{aligned}$$

doğrudur. Hipotezden

$$|\{x \in Q_0 : |b(x) - b_{Q_0}| > \lambda\}| \leq c|Q_0| \frac{1}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda}\right)$$

dir.

$0 < \delta < 1$ için

$$\begin{aligned}
\int_{Q_0} |b(x) - b_{Q_0}|^\delta dx &= \delta \int_0^\infty \lambda^{\delta-1} |\{x \in Q_0 : |b(x) - b_{Q_0}| > \lambda\}| d\lambda \\
&= \delta \left\{ \int_0^1 + \int_1^\infty \right\} \lambda^{\delta-1} |\{x \in Q_0 : |b(x) - b_{Q_0}| > \lambda\}| d\lambda \\
&\leq \delta |Q_0| \int_0^1 \lambda^{\delta-1} d\lambda + c\delta |Q_0| \int_1^\infty \lambda^{\delta-1} \frac{1}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{1}{\lambda}\right) d\lambda \\
&= |Q_0| + c\delta |Q_0| \int_1^\infty \lambda^{\delta-2} d\lambda = \left(1 + c\frac{\delta}{1-\delta}\right) |Q_0|
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $b \in \mathrm{BMO}_\delta(\mathbb{R}^n)$ dir. Lemma 2.2 den $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ elde edilir.

$(\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{i})$. Teorem 4.2 ve Lemma 3.4 ten

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^n : C_b(f)(x) > \lambda\}| &\leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : M^2 f(x) > \frac{\lambda}{c\|b\|_*} \right\} \right| \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c\|b\|_* |f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{c\|b\|_* |f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx
\end{aligned}$$

doğrudur.

$$(1+\log^+ ab) \le (1+\log^+ a)(1+\log^+ b) \tag{4.19}$$

eşitsizliği her $a,\ b>0$ için sağlandığından

$$\begin{aligned}&|\{x\in\mathbb{R}^n:\ C_b(f)(x)>\lambda\}|\\ &\qquad\le c\|b\|_*(1+\log^+\|b\|_*)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|}{\lambda}\left(1+\log^+\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right)dx\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.21. $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^-\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f\in L(1+\log^+ L)(\mathbb{R}^n)$ ve her $\lambda>0$ için

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|[M,b](f)(x)|>\lambda\}|\le cc_0\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|}{\lambda}\left(1+\log^+\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right)dx, \tag{4.20}$$

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|[M^\#,b](f)(x)|>\lambda\}|\le cc_0\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)|}{\lambda}\left(1+\log^+\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right)dx \tag{4.21}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde f ve λ dan bağımsız $c>0$ sabitleri vardır. Burada

$$c_0:=(\|b^+\|_*+\|b^-\|_\infty)\left(1+\log^+(\|b^+\|_*+\|b^-\|_\infty)\right)$$

dir.

İspat. İspatı sadece $[M,b]$ için yapacağız. $[M^\#,b]$ için ispat benzer şekilde yapılabilir. Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned}&|\{x\in\mathbb{R}^n:|[M,b](f)(x)|>\lambda\}|\\ &\qquad\le\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:C_b(f)(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|+\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|2b^-|Mf(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\\ &\qquad\le\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:C_b(f)(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|+\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:2\|b^-\|_\infty Mf(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.18) den

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : C_b(f)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$
$$\leq c\|b\|_* \left(1 + \log^+ \|b\|_*\right) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \qquad (4.23)$$

bulunur.

Diğer taraftan, M maksimal operatörü zayıf $(1,1)$ eşitsizliğini sağladığından

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : 2\|b^-\|_\infty Mf(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$
$$\leq c\|b^-\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} dx$$
$$\leq c\|b^-\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\right) dx \qquad (4.24)$$

dir. (4.22), (4.23) ve (4.24) ten (4.20) elde edilir.

Not 4.2. $[M,b]$ operatörünün genelde zayıf $(1,1)$ eşitsizliğini sağlamadığını göstermek için C. Pérez'in [64, s. 175] te verdiği örnekten yararlanacağız. $b(x) = \log|1+x|$ ve $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $x < 0$ için

$$Mf(x) \approx \sup_{0<t<1} \frac{t}{t-x} = \frac{1}{1-x}$$

olduğu görülebilir.

Diğer yandan, her $x < 0$ için

$$M(bf)(x) \approx \sup_{0<t<1} \frac{\int_0^t \log|1+y|dy}{t-x} = \sup_{0<t<1} \frac{(1+t)\log(1+t) - t}{t-x} = \frac{2\log 2 - 1}{1-x}$$

elde edilir. Böylece

$$[M,b](f)(x) \approx \frac{2\log 2 - 1}{1-x} - \frac{\log|1+x|}{1-x}$$

sağlanır.

Eğer $x < -100$ ise

$$\log|1+x| - (2\log 2 - 1) > \frac{1}{2}\log|x|$$

bulunur. O halde, her $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}
\lambda|\{x \in \mathbb{R} : |[M,b](f)(x)| > \lambda\}| &\geq \lambda \left|\left\{x < 0 : \left|\frac{2\log 2 - 1}{1-x} - \frac{\log|1+x|}{1-x}\right| > \lambda\right\}\right| \\
&\geq \lambda \left|\left\{x < -100 : \frac{1}{2}\frac{\log|x|}{1-x} > \lambda\right\}\right| \\
&\geq \lambda \left|\left\{x < -100 : \frac{1}{4}\frac{\log|x|}{|x|} > \lambda\right\}\right| \\
&= \lambda[-100 - \varphi^{-1}(4\lambda)]
\end{aligned}$$

dir. Burada $\varphi : (-\infty, -e) \to (0, e^{-1})$ ve $\varphi(x) = \log|x|/|x|$. Buradan görülebilir ki kestirimin sağ tarafı $\lambda \to 0$ iken sınırsızdır. Gerçekten de

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda\varphi^{-1}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\varphi(\lambda) = \infty$$

dur.

$0 < \lambda < n$ için $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ Zygmund-Morrey uzayında M, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu sınırlı değildir. Bunu bir örnekle gösterebiliriz:

Örnek 5.1. $n = 1$ ve $\lambda = 1/2$ olsun. f çift fonksiyonunu $x \geq 0$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k^2 \ln^2(k+e), k^2 \ln^2(k+e)+1]}(x)$$

şekinde tanımlayalım.

Kolayca görülür ki Mf ve $M^2 f$ de çift fonksiyondur. Açıktır ki $x \geq 0$ için

$$\begin{aligned} Mf(x) \approx &\sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k^2 \ln^2(k+e), k^2 \ln^2(k+e)+1]}(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x - k^2 \ln^2(k+e)} \chi_{[k^2 \ln^2(k+e)+1, k^2 \ln^2(k+e)+m_k]}(x) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2 \ln^2(k+e+1) + 1 - x} \chi_{[k^2 \ln^2(k+e)+1+m_k, (k+1)^2 \ln^2(k+e+1)]}(x) \end{aligned}$$

dir. Burada

$$m_k = \frac{(k+1)^2 \ln^2(k+e+1) - k^2 \ln^2(k+e) - 1}{2} \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \approx &\|Mf\|_{\mathcal{M}_{1,\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} = \sup_I |I|^{-\frac{1}{2}} \int_I Mf \\ &\leq \sup_{I:|I| \leq 1} |I|^{-\frac{1}{2}} \int_I Mf + \sup_{I:|I|>1} |I|^{-\frac{1}{2}} \int_I Mf := A + B \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$A=\sup_{I:|I|\leq 1}|I|^{-\frac{1}{2}}\int_I Mf \leq \sup_{I:|I|\leq 1}|I|^{\frac{1}{2}}\leq 1$$

olduğu kolayca görülebilir.

Diğer taraftan

$$\int_{k^2\ln^2(k+e)}^{k^2\ln^2(k+e)+1} Mf(x)dx \approx (1+2\ln(1+m_k)), \qquad k=0,1,2...$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
B &= \sup_{I:|I|>1}|I|^{-\frac{1}{2}}\int_I Mf(x)dx \\
&= \sup_{m\geq 2}\sup_{I:m-1<|I|\leq m}|I|^{-\frac{1}{2}}\int_I Mf(x)dx \\
&\lesssim \sup_{m\geq 2} m^{-\frac{1}{2}}\int_0^m Mf(x)dx \\
&\leq \sup_{m\geq 2} m^{-\frac{1}{2}}\sum_{j^2\ln^2(j+e)<m}\int_{j^2\ln^2(j+e)}^{(j+1)^2\ln^2(j+e+1)} Mf(x)dx \\
&\approx \sup_{m\geq 2} m^{-\frac{1}{2}}\sum_{j^2\ln^2(j+e)<m}(1+2\ln(1+m_j)) \\
&\lesssim \sup_{m\geq 2} m^{-\frac{1}{2}}\sum_{j^2\ln^2(j+e)<m}\ln(j+e) \\
&\lesssim \sup_{m\geq 2} m^{-\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}=1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\frac{1}{2}}}\lesssim 1+1=2<\infty$$

olması demektir.

Diğer taraftan her $x\in[k^2\ln^2(k+e)+e, k^2\ln^2(k+e)+m_k]$ için

$$M^2f(x)\geq \frac{1}{x-(k^2\ln^2(k+e)+1)}\int_{k^2\ln^2(k+e)+1}^{x}\frac{dt}{t-k^2\ln^2(k+e)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\ln(x - k^2 \ln^2(k+e))}{(x - k^2 \ln^2(k+e) + 1)} \\
&\geq \frac{\ln(x - k^2 \ln^2(k+e))}{x - k^2 \ln^2(k+e)}
\end{aligned}
$$

sağlanır. Böylece

$$
M^2 f(x) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln(x - k^2 \ln^2(k+e))}{x - k^2 \ln^2(k+e)} \chi_{[k^2 \ln^2(k+e)+e, k^2 \ln^2(k+e)+m_k]}(x)
$$

bulunur. Sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
&\|Mf\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \\
&\quad = \|M^2 f\|_{\mathcal{M}_{1,\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \\
&\quad \geq \sup_k (k \ln(k+e))^{-1} \int_0^{k^2 \ln^2(k+e)} M^2 f(x) dx \\
&\quad \geq \sup_k (k \ln(k+e))^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j^2 \ln^2(j+e)+e}^{j^2 \ln^2(j+e)+m_j} \frac{\ln(x - k^2 \ln^2(k+e))}{x - k^2 \ln^2(k+e)} dx \\
&\quad = \sup_k (k \ln(k+e))^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \int_e^{m_j} \frac{\ln x}{x} dx \\
&\quad \geq \sup_k (k \ln(k+e))^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \ln^2 m_j \\
&\quad \geq \sup_k (k \ln(k+e))^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \ln^2(j+e) \\
&\quad \geq \sup_k (k \ln(k+e))^{-1} k \ln^2(k+e) \\
&\quad = \sup_k (k \ln(k+e))^{-1} k \ln^2(k+e) \\
&\quad = \sup_k \ln(k+e) = \infty
\end{aligned}
$$

elde edilir.

M, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ Zygmund-Morrey uzayında sınırlı olmamasına rağmen M, bu uzayda radyal azalan fonksiyonlar için sınırlıdır. Bunu ispat etmek için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç duyacağız:

Lemma 5.1. $0 < \lambda < n$ ve $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \approx \sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1} d\rho dt$$

denkliği $f(\cdot) = \varphi(|\cdot|)$ olmak üzere f den bağımsız sabitlerle sağlanır.

İspat. Sonuç 3.2 den, her $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \approx \sup_B |B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_B Mf = \|M_\lambda(Mf)\|_\infty$$

elde edilir. $M_\lambda(f)(y) \gtrsim |B(0,|y|)|^{\frac{\lambda}{n}-1} \int_{B(0,|y|)} |f(z)|dz$ ve $Mf \approx H_n f$ olduklarını kullanıp, kutupsal koordinatlara geçersek,

$$\begin{aligned}
M_\lambda(Mf)(y) &\gtrsim \frac{1}{|B(0,|y|)|^{1-\frac{\lambda}{n}}} \int_{B(0,|y|)} |Mf(z)|dz \\
&\approx \frac{1}{|B(0,|y|)|^{1-\frac{\lambda}{n}}} \int_{B(0,|y|)} |H_n f(z)|dz \\
&= \frac{1}{|B(0,|y|)|^{1-\frac{\lambda}{n}}} \int_{B(0,|y|)} \frac{1}{|B(0,|z|)|} \int_{B(0,|z|)} |f(w)|dwdz \\
&\approx \frac{1}{|B(0,|y|)|^{1-\frac{\lambda}{n}}} \int_{B(0,|y|)} |z|^{-n} \int_0^{|z|} |\varphi(\rho)|\rho^{n-1} d\rho dz \\
&\approx |y|^{\lambda-n} \int_0^{|y|} \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1} d\rho dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} &\gtrsim \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |y|^{\lambda-n} \int_0^{|y|} \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1} d\rho dt \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1} d\rho dt
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $f(\cdot) = \varphi(|\cdot|)$ dir.

Diğer taraftan Teorem 2.1 den

$$\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \lesssim \sup_B |B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_0^{|B|} (Mf)^*(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&\approx \sup_B |B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_0^{|B|} f^{**}(t)dt \\
&= \sup_B |B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_0^{|B|} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)dsdt \\
&= \sup_B |B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_0^{|B|} \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(s^{\frac{1}{n}})|dsdt \\
&\approx \sup_B |B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_0^{|B|} \frac{1}{t} \int_0^{t^{\frac{1}{n}}} |\varphi(\rho)|\rho^{n-1}d\rho dt \\
&\approx \sup_B |B|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_0^{|B|^{\frac{1}{n}}} \frac{1}{x} \int_0^x |\varphi(\rho)|\rho^{n-1}d\rho dx \\
&= \sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1}d\rho dt
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1. $0 < \lambda < n$ ve $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$
\|Mf\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \approx \sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{y} \int_0^y \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1}d\rho dtdy
$$

denkliği $f(\cdot) = \varphi(|\cdot|)$ olmak üzere f den bağımsız sabitlerle sağlanır.

İspat. $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $Mf \approx H_n f$ ve $H_n f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan Lemma 5.1 kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\|Mf\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} &\approx \sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{y} \int_0^y \left(\frac{1}{|B(0,|t|)|} \int_{B(0,|t|)} |f(y)|dy \right) t^{n-1}dtdy \\
&\approx \sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{y} \int_0^y \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1}d\rho dtdy
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Lemma 5.2. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$
\sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{y} \int_0^y \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1}d\rho dtdy \lesssim \sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)|\rho^{n-1}d\rho dt
$$

eşitsizliği tüm $\varphi \in \mathfrak{M}^{+,\downarrow}(0,\infty)$ için φ den bağımsız sabitle sağlanır.

İspat. Gerçekten de:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x \frac{1}{y} \int_0^y \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)| \rho^{n-1} d\rho dt dy \\
&\qquad = \sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x y^{n-\lambda-1} y^{\lambda-n} \int_0^y \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)| \rho^{n-1} d\rho dt dy \\
&\qquad \leq \sup_{y>0} y^{\lambda-n} \int_0^y \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)| \rho^{n-1} d\rho dt \cdot \left(\sup_{x>0} x^{\lambda-n} \int_0^x y^{n-\lambda-1} dy \right) \\
&\qquad \approx \sup_{y>0} y^{\lambda-n} \int_0^y \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(\rho)| \rho^{n-1} d\rho dt.
\end{aligned}$$

Bu sonuçları birleştirirsek aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 5.1. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}$$

eşitsizliği f den bağımsız sabitle sağlanır.

İspat. Lemma 5.2, Lemma 5.1 ve Sonuç 5.1 den elde edilir.

6. M^2 İÇİN MORREY UZAYLARINDA ZAYIF NORM EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde, M^2 operatörünün Zygmund-Morrey uzayından zayıf Zygmund-Morrey uzayına sınırlılığı ispatlanacaktır.

Teorem 6.1. $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda M^2 operatörü $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ uzayından $\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ uzayına sınırlıdır ve

$$\|M^2 f\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \tag{6.1}$$

eşitsizliği f den bağımsız sabitle sağlanır.

İspat. Q, $\mathbb{R}^n$ de bir küp ve $f_1 = f\chi_{4Q}$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ olsun. M^2 nin alttoplamsallığından

$$M^2 f \le M^2 f_1 + M^2 f_2$$

bulunur.

$z \in 2Q \cap Q'$ ve $Q' \cap (4Q)^c \neq \emptyset$ özelliğini sağlayan her Q' küpü için $Q \subset 4Q'$ sağlandığından

$$Mf_2(z) = M(f\chi_{(4Q)^c})(z) \le \sup_{Q \subset 4Q'} \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(y)|dy \tag{6.2}$$

eşitsizliği her $z \in 2Q$ için doğrudur. Böylece her $z \in \mathbb{R}^n$ için

$$Mf_2(z) \le \chi_{2Q}(z) \sup_{Q \subset 4Q'} \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(y)|dy + \chi_{(2Q)^c}(z) Mf(z) \tag{6.3}$$

yazılabilir. Her $y \in Q$ için (6.3) eşitsizliğinin her iki tarafına maksimal fonksiyon uygulanırsa,

$$M^2 f_2(y) \le M(\chi_{2Q})(y) \sup_{Q \subset 4Q'} \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(z)|dz + M(\chi_{(2Q)^c} Mf)(y) \tag{6.4}$$

elde edilir. $y \in Q$ için $M(\chi_{2Q})(y) = 1$ olduğundan (6.2) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} M^2 f_2(y) &\leq \sup_{Q \subset 4Q'} \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(y)| dy + \sup_{Q \subset 2Q'} \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} M f(y) dy \\ &\lesssim \sup_{Q \subset Q'} \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} M f(y) dy \end{aligned} \tag{6.5}$$

bulunur. Sonuç olarak $y \in Q$ için

$$M^2 f(y) \lesssim M^2(f\chi_{4Q})(y) + \sup_{Q \subset Q'} \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} M f(y) dy \tag{6.6}$$

sağlanır.

Her $\alpha > 0$ ve $t > 0$ için (3.10) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &|\{x \in Q : M^2(f\chi_{4Q})(x) > \alpha t\}| \\ &\qquad \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : M^2(f\chi_{4Q})(x) > \alpha t\}| \\ &\qquad \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f\chi_{4Q}(x)|}{\alpha t} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f\chi_{4Q}(x)|}{\alpha t}\right)\right) dx \\ &\qquad \leq c \frac{1}{\alpha} \left(1 + \log^+ \frac{1}{\alpha}\right) \int_{4Q} \frac{|f(x)|}{t} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\right) dx \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{|\{x \in Q : M^2(f\chi_{4Q})(x) > \alpha t\}|}{\frac{1}{\alpha}\left(1 + \log^+ \frac{1}{\alpha}\right)} \leq c \int_{4Q} \frac{|f(x)|}{t} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\right) dx$$

dir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} &\sup_{\alpha > 0} \frac{1}{|Q|} \frac{|\{x \in Q : M^2(f\chi_{4Q})(x) > \alpha t\}|}{\frac{1}{\alpha}\left(1 + \log^+ \frac{1}{\alpha}\right)} \\ &\qquad \leq c \frac{1}{|4Q|} \int_{4Q} \frac{|f(x)|}{t} \left(1 + \log^+ \left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\right) dx \end{aligned}$$

ve

$$\inf \left\{ t > 0 : \sup_{\alpha > 0} \frac{1}{|Q|} \frac{|\{x \in Q : M^2(f\chi_{4Q})(x) > \alpha t\}|}{\frac{1}{\alpha}\left(1 + \log^+ \frac{1}{\alpha}\right)} \leq 1 \right\}$$

$$\leq \inf\left\{t>0:\frac{1}{|4Q|}\int_{4Q}\frac{c|f(x)|}{t}\left(1+\log^{+}\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\right)dx\leq 1\right\}$$
$$\leq \inf\left\{t>0:\frac{1}{|4Q|}\int_{4Q}\frac{c|f(x)|}{t}\left(1+\log^{+}\left(\frac{c|f(x)|}{t}\right)\right)dx\leq 1\right\}$$

elde edilir. Böylece

$$\|M^2(f\chi_{4Q})\|_{WL(1+\log^+ L),Q}\leq \|cf\|_{L(1+\log^+ L),4Q}=c\|f\|_{L(1+\log^+ L),4Q} \tag{6.7}$$

bulunur.

(6.6) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci toplam için (3.2) eşitsizliğini uygularsak,

$$\left\|\sup_{Q\subset Q'}\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}Mf\right\|_{WL(1+\log^+ L),Q}\lesssim \sup_{Q\subset Q'}\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'}Mf\lesssim \sup_{Q\subset Q'}\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'}$$

olur. Buradan da

$$\|M^2f\|_{WL(1+\log^+ L),Q}\leq c\sup_{Q\subset Q'}\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'} \tag{6.8}$$

yazılabilir. Böylece (6.8) den

$$\begin{aligned}\sup_Q |Q|^{\frac{\lambda}{n}}\|M^2f\|_{WL(1+\log^+ L),Q} \leq& c\sup_Q |Q|^{\frac{\lambda}{n}}\sup_{Q\subset Q'}\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'}\\ \leq& c\left(\sup_Q |Q|^{\frac{\lambda}{n}}\sup_{Q\subset Q'}|Q'|^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\sup_{Q'}|Q'|^{\frac{\lambda}{n}}\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q'}\\ \approx& \sup_Q |Q|^{\frac{\lambda}{n}}\|f\|_{L(1+\log^+ L),Q},\end{aligned}$$

yani

$$\|M^2f\|_{W\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}\leq c\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}$$

doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

7. ZYGMUND-MORREY UZAYLARINDA NORM EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, C_b maksimal komutatörünü $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ den $\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ ye sınırlı yapan fonksiyonlar kümesi karakterize edilecektir. Ayrıca, $[M,b]$ ve $[M^{\#},b]$ operatörleri için de zayıf norm eşitsizlikleri ispatlanacaktır.

Teorem 7.1. $0<\lambda<n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:
(i) C_b: $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sınırlıdır.
(ii) $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ dir.

İspat. (ii) $\Rightarrow$ (i). $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Teorem 4.2 ve Teorem 6.1 den C_b operatörü $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ den $\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ ye sınırlıdır ve

$$\|C_b(f)\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \tag{7.1}$$

eşitsizliği f den bağımsız sabitle sağlanır.
(i) $\Rightarrow$ (ii).

$$\|C_b(f)\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \tag{7.2}$$

eşitsizliği f den bağımsız bir sabitle sağlansın. Q_0, $\mathbb{R}^n$ de keyfi bir küp ve $f=\chi_{Q_0}$ olsun. Sonuç 3.2 den

$$\begin{aligned}\|\chi_{Q_0}\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} &\approx \sup_Q |Q|^{\frac{\lambda-n}{n}} \int_Q \chi_{Q_0}(y)\left(1+\log^+ \frac{\chi_{Q_0}(y)}{\left(\chi_{Q_0}\right)_Q}\right)dy \\ &= \sup_{Q:Q\cap Q_0\neq\emptyset} |Q|^{\frac{\lambda}{n}} \frac{|Q\cap Q_0|}{|Q|}\left(1+\log\frac{|Q|}{|Q\cap Q_0|}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Açıktır ki

$$\|\chi_{Q_0}\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \gtrsim |Q_0|^{\frac{\lambda}{n}}$$

dir. $\epsilon \in \left(0, 1-\frac{\lambda}{n}\right)$ olsun. $(1+\log t)/t^{\epsilon}$ fonksiyonu $[1,\infty)$ aralığında sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned}
\|\chi_{Q_0}\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} &\lesssim \sup_{Q:Q\cap Q_0\neq\emptyset} |Q|^{\frac{\lambda}{n}} \frac{|Q\cap Q_0|}{|Q|}\left(\frac{|Q|}{|Q\cap Q_0|}\right)^{\varepsilon} \\
&= \sup_{Q:Q\cap Q_0\neq\emptyset} |Q|^{\frac{\lambda}{n}+\varepsilon-1}|Q\cap Q_0|^{1-\varepsilon} \\
&= \sup_{Q\subset Q_0} |Q|^{\frac{\lambda}{n}+\varepsilon-1}|Q\cap Q_0|^{1-\varepsilon} = |Q_0|^{\frac{\lambda}{n}}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\|\chi_{Q_0}\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \approx |Q_0|^{\frac{\lambda}{n}} \tag{7.3}$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\|C_b(\chi_{Q_0})\|_{W\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} &= \sup_{Q} |Q|^{\frac{\lambda}{n}} \|C_b(\chi_{Q_0})\|_{WL(1+\log^+ L),Q} \\
&\geq |Q_0|^{\frac{\lambda}{n}} \|C_b(\chi_{Q_0})\|_{WL(1+\log^+ L),Q_0}
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\|C_b(\chi_{Q_0})\|_{WL(1+\log^+ L),Q_0} \\
&\qquad = \inf\left\{\lambda>0 : \sup_{t>0} \frac{1}{|Q_0|}\frac{|\{x\in Q_0 : C_b(\chi_{Q_0})(x)>\lambda t\}|}{\frac{1}{t}\left(1+\log^+\frac{1}{t}\right)} \leq 1\right\} \\
&\qquad \geq \inf\left\{\lambda>0 : \frac{2}{|Q_0|}|\{x\in Q_0 : C_b(\chi_{Q_0})(x)>2\lambda\}| \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Her $x\in Q_0$ için

$$C_b(\chi_{Q_0})(x) \geq \frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|b(x)-b(y)|dy \geq \frac{1}{2|Q_0|}\int_{Q_0}|b(y)-b_{Q_0}|dy$$

olduğundan

$$\frac{2}{|Q_0|}\left|\left\{x\in Q_0 : C_b(\chi_{Q_0})(x) > \frac{2}{4|Q_0|}\int_{Q_0}|b(y)-b_{Q_0}|dy\right\}\right| = 2$$

sağlanır. Böylece

$$\|C_b(\chi_{Q_0})\|_{WL(1+\log^+ L),Q_0} \geq \frac{1}{4|Q_0|}\int_{Q_0}|b(y)-b_{Q_0}|dy$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\|C_b(\chi_{Q_0})\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \gtrsim |Q_0|^{\frac{\lambda}{n}}\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|b(y)-b_{Q_0}|dy \tag{7.4}$$

elde edilir. (7.2)-(7.4) den

$$\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|b(y)-b_{Q_0}|dy \lesssim c$$

yazılabilir. Bu da $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olmasını gerektirir.

Teorem 7.2. $0 < \lambda < n$ ve $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|C_b(f)\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \leq c\|b\|_*\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}$$

eşitsizliği f den bağımsız bir $c > 0$ ile sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 4.2 ve $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için $Mf \approx H_n f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ olmasından yararlanarak Teorem 5.1 yardımı ile yapılır.

Teorem 7.3. $0 < \lambda < n$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $[M, b]$ ve $[M^\#, b]$ operatörleri $\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ den $\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}$ ye sınırlıdır ve sırasıyla

$$\|[M,b](f)\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}},$$
$$\|[M^\#,b](f)\|_{\mathcal{WM}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \leq c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}$$

eşitsizlikleri f den bağımsız $c > 0$ sabitleri ile sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 4.3 ve Sonuç 4.1 den Teorem 6.1 kullanılarak yapılır.

Teorem 7.4. $0 < \lambda < n$, $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve $b^- \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|[M,b](f)\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}},$$
$$\|[M^\#,b](f)\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}} \le c(\|b^+\|_* + \|b^-\|_\infty)\|f\|_{\mathcal{M}_{L(1+\log^+ L),\lambda}}$$

eşitsizlikleri f den bağımsız $c > 0$ sabitleri ile sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 4.3 ve Sonuç 4.1 den $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ için $Mf \approx H_n f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ olmasından yararlanarak Teorem 5.1 yardımı ile yapılır.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, maksimal komutatör, Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve kesin maksimal operatörün komutatörleri ele alınmıştır. $M_\alpha(M)$ operatörü için noktasal kestirimler elde edilmiştir. Daha sonra, komutatör operatörleri için sırasıyla noktasal kestirimler, fonksiyon uzaylarında norm kestirimleri ve uç nokta kestirimleri elde edilmiştir. Ayrıca, Zygmund-Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun sınırlı olmadığı, fakat bu uzayda radyal azalan fonksiyonlar için sınırlı olduğu gösterilmiştir. M^2 operatörü için Zygmund-Morrey uzaylarında zayıf norm kestirimi elde edilmiş, bu norm kestirimi yardımıyla komutatör operatörleri için de Zygmund-Morrey uzaylarında zayıf norm kestirimleri ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Adams, D.R., A note on Riesz potentials, Duke Math. J. 42 (4): 765–778, 1975.

[2] Adams, D.R., Hedberg, L.I., Function spaces and potential theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. vol. 314, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[3] Adams, D.R., Xiao, J., Morrey spaces in harmonic analysis. Ark. Mat. 50 (2): 201– 230, 2012.

[4] Adams, D.R., Xiao, J., Regularity of Morrey commutators, Trans. Amer. Math Soc. 364 (9): 4801– 4818, 2012.

[5] Agcayazi, M., Gogatishvili, A., Koca, K., Mustafayev, R., A note on maximal commutators and commutators of maximal functions, J. Math. Soc. Japan. vol. 67 (2): 581-593, 2015.

[6] Bastero, J., Milman, M., Ruiz, F.J., Commutators for the maximal and sharp functions, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (11): 3329–3334, 2000.

[7] Bastero, J., Milman, M., Ruiz, F.J., On the connection between weighted norm inequalities, commutators and real interpolation, Mem. Amer. Math. Soc. 154, (731): viii+80, 2001.

[8] Bennett, C., Sharpley, R., Weak-type inequalities for H^p and BMO, Harmonic analysis in Euclidean spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978) Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXV, Part, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. pp. 201–229, 1979.

[9] Bennett, C., De Vore, R.A., Sharpley, R., Weak-L^∞ and BMO, Ann. of Math. (2) 113 (3): 601–611, 1981.

[10] Bennett, C., Sharpley, R., Interpolation of operators, Pure and Applied Mathematics. vol. 129, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[11] Bloom, S., Kerman, R., Weighted Orlicz space integral inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator, Studia Math. 110 (2): 149–167, 1994.

[12] Bonami, A., Iwaniec, T., Jones, P., Zinsmeister, M., On the product of functions in BMO and H^1, Ann. Inst. Fourier. (Grenoble) 57 (5): 1405–1439, 2007.

[13] Burenkov, V.I., Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I, Eurasian Math. J. 3 (3): 11–32, 2012.

[14] Burenkov, V.I., Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II, Eurasian Math. J. 4 (1): 21–45, 2013.

[15] Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces, Studia Math. 163 (2): 157–176, 2004.

[16] Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Guliyev, V.S., Necessary and sufficient conditions for the boundedness of fractional maximal operators in local Morrey-type spaces, J. Comput. Appl. Math. 208 (1): 280–301, 2007.

[17] Burenkov, V.I., Gogatishvili, A., Guliyev, V.S., Mustafayev, R.Ch., Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, Complex Var. Elliptic Equ. 55 (8- 10): 739–758, 2010.

[18] Burenkov, V.I., Gogatishvili, A., Guliyev, V.S., Mustafayev, R.Ch., Boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces, Potential Anal. 35 (1): 67–87, 2011.

[19] Carleson, L., Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math. 22 (3): 269–277, 1976.

[20] Carleson, L., BMO–10 years' development, 18th Scandinavian Congress of Mathematicians, Progr. Math. vol. 11, Birkh$\ddot{a}$user, Boston, Mass. pp. 3–21, 1981.

[21] Carozza, M., Di Napoli, A. Passarelli, Composition of maximal operators, Publ. Mat. 40 (2): 397–409, 1996.

[22] Cianchi, A., Strong and weak type inequalities for some classical operators in Orlicz spaces, J. London Math. Soc. 60 (1): 187–202, 1999.

[23] Chiarenza F., Frasca, M., Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, Rend. Mat. Appl. (7) (1987), (3-4): 273–279,1988.

[24] Coifman, R.R., Rochberg, R., Weiss, G., Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, Ann. of Math. (2) 103 (3): 611–635, 1976.

[25] Coifman, R.R., Rochberg, R., Another characterization of BMO, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (2): 249–254, 1980.

[26] Cordoba, A., Fefferman, C., A weighted norm inequality for singular integrals, Studia Math. 57 (1): 97–101, 1976.

[27] Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Neugebauer, C.J., The maximal function on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 28 (1): 223–238. 2003.

[28] Cruz-Uribe, D., Fiorenza, A., Martell, J.M., P$\acute{e}$rez, C., The boundedness of classical operators on variable L^p spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (1): 239–264, 2006.

[29] Di Fazio, G., Ragusa, M.A., Commutators and Morrey spaces, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 5 (3): 76 323–332, 1991.

[30] Diening, L., Harjulehto, P., H$\ddot{a}$stö, P., Ruziçka, M., Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents, Lecture Notes in Mathematics. vol. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.

[31] Fefferman, C., Stein, E.M., H^p spaces of several variables, Acta Math. 129: (3-4) 137–193, 1972.

[32] Garcia Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L., Weighted norm inequalities and related topics, North-Holland Mathematics Studies. vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[33] Garcia Cuerva, J., Harboure, E., Segovia, C., Torrea, J.L., Weighted norm inequalities for commutators of strongly singular integrals, Indiana Univ. Math. J. 40 (4): 1397–1420, 1991.

[34] Gogatishvili, A., Mustafayev, R., A note on boundedness of the Hardy-Little-wood maximal operator on Morrey spaces, Mediterranean Journal of Mathe-matics, DOI 10.1007/s00009-015-0614.

[35] Gogatishvili, A., Mustafayev, R., Agcayazi, M., Weak type estimates in Morrey spaces for maximal commutator and commutator of maximal functions, http://arxiv.org/abs/1504.04509

[36] Grafakos, L., Classical Fourier analysis, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics. vol. 249, Springer, New York, 2008.

[37] Grafakos, L., Modern Fourier analysis, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics. vol. 250, Springer, New York, 2009.

[38] Guliyev, V.S., Aliyev, S.S., Karaman, T., Shukurov, P.S., Boundedness of Sublinear Operators and Commutators on Generalized Morrey Spaces, Integr. Equ. Oper. Theory. 71: 327-355, 2011.

[39] Guliyev, V.S., Karaman, T., Mustafayev, R.Ch., Şerbetçi, A., Commutators of sublinear operators generated by Calder$\acute{o}$n-Zygmund operator on generalized weighted Morrey spaces, Czechoslovak Math. J. 64 (139) (2): 365–386, 2014.

[40] Guliyev, V.S., Deringoz, F., On the Riesz potential and its commutators on generalized Orlicz- Morrey spaces, J. Funct. Spaces. Art. ID 617414 (11), 2014.

[41] Guliyev, V., Omarova, M., Sawano, Y., Boundedness of intrinsic square functions and their commutators on generalized weighted Orlicz-Morrey spaces, Banach J. Math. Anal. 9 (2): 44–62, 2015.

[42] de Guzm´an, M., Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics. Vol. 481, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[43] Hu, G., Lin, H., Yang, D., Commutators of the Hardy-Littlewood maximal operator with BMO symbols on spaces of homogeneous type, Abstr. Appl. Anal. Art. ID 237937 21. 77, 2008.

[44] Hu, G., Yang, D., Maximal commutators of BMO functions and singular integral operators with non-smooth kernels on spaces of homogeneous type, J. Math. Anal. Appl. 354 (1): 249–262, 2009.

[45] Janson, S., Mean oscillation and commutators of singular integral operators, Ark. Mat. 16 (2): 263–270, 1978.

[46] Jawerth, B., Torchinsky, A., Local sharp maximal functions, J. Approx. Theory. 43 (3): 231–270, 1985.

[47] John, F., Nirenberg, L., On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Appl. Math. (14): 415–426, 1961.

[48] Karaman, T., Guliyev, V.S., Serbetci, A., Boundedness of Sublinear Operators generated by Calder$\acute{o}$n-Zygmund operators on Generalized Morrey Spaces, Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Al. I. Cuza" din Iaşi. Serie Nouă. Matematică. (9): 227-244, 2014.

[49] Kita, H., On maximal functions in Orlicz spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (10): 3019– 3025, 1996.

[50] Kovacik, O., Rakosnik, J., On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, Czechoslovak Math. J. 41 116 (4): 592–618, 1991.

[51] Krasnosel′skiĭ, M.A., Rutickiĭ, Ja.B., Convex functions and Orlicz spaces, P. Noordhoff. Ltd. Groningen, 1961.

[52] Kufner, A., John, O., Fuçik, S., Function spaces, Noordhoff International Publishing. Leyden Academia, Prague, 1977.

[53] Leckband, M.A., A note on maximal operators and reversible weak type inequalities, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1): 19–26, 1984.

[54] Leckband, M.A., Neugebauer, C.J., A general maximal operator and the A_p-condition, Trans. Amer. Math. Soc. 275 (2): 821–831, 1983.

[55] Lerner, A.K., On weighted estimates of non-increasing rearrangements, East J. Approx. 4 (2): 277–290, 1998.

[56] Li, D., Hu, G., Shi, X., Weighted norm inequalities for the maximal commutators of singular integral operators, J. Math. Anal. Appl. 319 (2): 509–521, 2006.

[57] Milman, M., Schonbek, T., Second order estimates in interpolation theory and applications, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (4): 961–969, 1990.

[58] Morrey, C.B., On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1): 126–166, 1938.

[59] Muckenhoupt, B., Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc. 165 207-226, 1972.

[60] Mustafayev, R.Ch., On boundedness of sublinear operators in weighted Morrey spaces, Azerb. J. Math. 2 (1): 66–79, 2012.

[61] Nakai, E., Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces, Math. Nachr. 166: 95–103, 1994.

[62] Peetre, J., On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant, Ann. Mat. Pure Appl. (4): 72 295–304, 1966.

[63] Peetre, J., On the theory of $L^{p,\lambda}$ spaces, J. Functional Analysis. (4): 71–87, 1969.

[64] Pérez, C., Endpoint estimates for commutators of singular integral operators, J. Funct. Anal. 128 (1): 163–185, 1995.

[65] Rao, M.M., Ren, Z.D., Theory of Orlicz spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. vol. 146, Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[66] Sawano, Y., A Handbook of Harmonic Analysis, 2015.

[67] Sawano, Y., Sugano, S., Tanaka, H., Orlicz-Morrey spaces and fractional operators, Potential Anal. 36 (4): 517–556, 2012.

[68] Segovia, C., Torrea, J.L., Weighted inequalities for commutators of fractional and singular integrals, Publ. Mat. 35 (1): 209–235, 1991.

[69] Segovia, C., Torrea, J.L., Higher order commutators for vector-valued Calderón-Zygmund operators, Trans. Amer. Math. Soc. 336 (2): 537–556, 1993.

[70] Spanne, S., Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. (3) 19: 593–608, 1965.

[71] Stein, E.M., Note on the class $L \log L$, Studia Math. (32): 305–310, 1969.

[72] Stein, E.M., Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Mathematical Series. no. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[73] Stein, E.M., Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Mathematical Series. vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[74] Torchinsky, A., Real-variable methods in harmonic analysis, Pure and Applied Mathematics. vol. 123, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.

[75] Xie, C., Some estimates of commutators, Real Anal. Exchange. 36 (2): 405–415, 2010/11.

[76] Xu, J.S., The boundedness of multilinear commutators of singular integrals on Lebesgue spaces with variable exponent, Czechoslovak Math. J. 57 (132) (1): 13–27, 2007.

[77] Zhang, P., Wu, J., Commutators of the fractional maximal function on variable exponent Lebesgue spaces, Czechoslovak Math. J. 64 (139) (1): 183–197, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Müjdat AĞCAYAZI

Doğum Tarihi ve Yeri : 23.01.1987 / Vezirköprü

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2005-2009.

Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D, 2009-2011.

Yayınları

1- M. Agcayazi, A. Gogatishvili, K. Koca and R. Mustafayev, A note on maximal commutators and commutators of maximal functions, J. Math. Soc. Japan. 67, (2): 581-593, 2015.

2- Gogatishvili, A., Mustafayev, R., Agcayazi, M., Weak type estimates in Morrey spaces for maximal commutator and commutator of maximal functions, http://arxiv.org/abs/1504.04509.