T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# ÇOK DEĞİŞKENLİ BASKAKOV OPERATÖRÜ

SEDA ARPAGUŞ

KASIM 2015

**Matematik Anabilim Dalı** Seda ARPAGUŞ tarafından hazırlanan ÇOK DEĞİŞKENLİ BASKAKOV OPERATÖRÜ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylıyorum.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklikleri yerine getirdiğini onaylıyorum.

Doç. Dr. Ali OLGUN

Danışman

Jüri Üyeleri

| | | |
|---|---|---|
| Başkan (Danışman) | :Doç. Dr. Ali OLGUN | ______________ |
| Üye | :Doç. Dr. Rabia AKTAŞ | ______________ |
| Üye | :Yrd. Doç. Dr. Başar YILMAZ | ______________ |

..../…./….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

# ÖZET

ÇOK DEĞİŞKENLİ BASKAKOV OPERATÖRÜ

ARPAGUŞ, Seda
Kırıkkake Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Ali OLGUN
Kasım 2015,111 sayfa

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde konuyla ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Baskakov operatörüne giriş yapılmıştır. Çok boyutlu Baskakov operatörünün yakınsaklığı Korovkin teoremi yardımıyla gösterilmiştir ve yakınsama hızları hesaplanmıştır. Üçüncü bölümde ise çok değişkenli Baskakov operatörü çalışılmıştır. İlk olarak operatörünün bazı özelliklerine yer verilmiştir. İkinci olarak operatör dizisi için monotonluğu incelenmiştir. Son olarak da K-fonksiyoneli ve düzgünlük modülü kullanılarak inceleme yapılmıştır.



**Anahtar Kelimeler:** Çok değişkenli Baskakov operatörü, Yakınsaklık, Korovkin teoremi, Monotonluk, K-fonksiyoneli, Düzgünlük modülü

# ABSTRACT

ON MULTİVARİATE BASKAKOV OPERATOR

ARPAGUS, Seda
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali OLGUN
November 2015, 111 pages

This thesis consists of three chapters. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, some fundamental definitions and theorems are given on the subject and entry is made to Baskakov operator. Continuity of multivariate Baskakov operator is showed by Korovkin theorem and their speed of convergence are calculated. In the third chapter, multivariate Baskakov operator is worked. Firstly some properties of the operator is implied. Secondly the monotony of the operator's sequence is examined. Lastly an examination is conducted utilizing the K-functional and modulus of smoothness.

**Key Words:** Multivariate Baskakov operator, Convergenty, Korovkin theorem, Monotony, K-functional, Modulus of smoothness

# TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca tecrübeleriyle, bilgisiyle yüksek lisans öğrenimimde ve tezimin hazırlaması esnasında hiçbir desteğini ve ilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Ali OLGUN'a, emeği geçen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına ve eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $B_n(f,x)$ | Baskakov operatörü |
| $(X,d)$ | Metrik uzay |
| $\Delta^k f(x_j)$ | İleri fark operatörü |
| $L_p$ | Üzerinde tanımlı ölçüye göre mutlak değerlerinin $p-$yinci kuvveti integrallenebilen ve sonlu değer alan fonksiyonlar uzayı |
| $W_p^r$ | Sobolev uzayı |
| $Lip_M(\alpha)$ | $\alpha-$yıncı basamaktan Lipschitz sınıfı |
| $\omega(f;\delta)$ | Sürelilik modülü |
| $\omega_\varphi^2(f;t)$ | İkinci dereceden Ditzian-Totik süreklilik modülü |
| $\omega_{L_1}$ | $L_1$ süreklilik modülü |
| $L_n(f,x)$ | Lineer pozitif operatörler |
| $\overline{\omega}(f;t)$ | $\omega$ süreklilik modülünün konkav majorantı |
| $\|f\|_p$ | $L_p$ uzayı üzerinde tanımlı norm |
| $L^p(T)$ | $T$ üzerinde Lebesque fonksiyonlar uzayı |
| $K(f;t)$ | $K-$fonksiyoneli |
| $K_\varphi^r(f;t^r)$ | Petree-K fonksiyoneli |

# 1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi Matematik Analizin önemli çalışma alanlarından birisidir. Bu alanda şimdiye kadar birçok çalışma yapılmıştır. Halen de çalışmalar yoğun olarak devam etmektedir. Bu çalışmaların çoğu lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin tipi teoremlere dayanmaktadır. P.P. Korovkin 1953 yılında $C[0,1]$ uzayında $[0,1]$ aralığı üzerinde bütün sürekli fonksiyonların $1$, $x$ ve $x^2$ ile aynı özelliklere sahip olduğunu görmüştür. Daha sonra bu durum geliştirilerek yaklaşımlar teorisinin temelini oluşturmuştur.

Bu teori reel analiz, fonksiyonel analiz, harmonik analiz, ölçü teorisi, istatistik teorisi, toplanabilme ve uygulamalı matematik ile doğrudan bağlantılıdır.

Daha sonra Korovkin teoremi çok boyutlu uzaylara genişletilmiştir [2]. Yaklaşımlar teorisinde temel operatör olarak

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Bernstein operatörü baz alınmıştır. Daha sonra bu operatör kullanılarak birçok operatör tanımlanmıştır. Bu operatörlerden biriside Baskakov operatörüdür. V.A. Baskakov 1957 yılında

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \; : \; x\in[0,\infty) \; n\in N$$

Baskakov operatörünü tanımlamıştır ve bu operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir [2]. Daha sonra bu operatörün çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Baskakov operatörü baz alınarak Baskakov-Kantorovich operatörü, Baskakov-Durrmeyer operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlerin çeşitli özellikleri incelenmiş ve halen incelemeler devam etmektedir.

Yaklaşım teorisinde operatörün yakınsaması kadar bu yakınsamanın hızı da önemlidir. Üstelik bu hız ne kadar hızlı olursa yakınsama o kadar iyi olmaktadır. Yakınsak hızı içinde V.Totik tarafından tanımlanan süreklilik modülü ve $K-$fonksiyoneli kullanılmaktadır. Süreklilik modülü ve $K-$fonksiyoneli birbiri ile bağlantılıdır [12].

Bu tezde çok değişkenli Baskakov operatörünün temel özellikleri incelenecektir. Daha sonra operatörün yakınsaklık hızı $K-$fonksiyoneli yardımı ile verilecektir. $K-$fonksiyonelinin temel özellikleri yardımı ile operatörün yakınsama özellikleri incelenecektir. Bunlar yapılırken işlemlerin kolay anlaşılması için çoğunlukla iki değişkenli operatör baz alınacaktır. Elde edilen sonuçların çok değişkenli operatörler içinde geçerli olduğu, operatörün lineer olmasından dolayı kolayca söylenebilir.

### 1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezde Feilong Cao, Chunmei Ding ve Zongben Xu tarafından 2009 yılında yapılan bir çalışma temel alınacaktır. Bu çalışmada çok değişkenli Baskakov operatörünün yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Bu özellikler incelenirken çoğunlukla süreklilik modülü ve $K-$fonksiyoneli kullanılmış, ayrıca operatörün monotonluk özelliği incelenmiştir.

Bu incelemeler sırasında yaklaşımlar teorisinde Baskakov ve diğer operatörler için verilmiş süreklilik modülü özellikleri, $K-$fonksiyoneli özellikleri ve yardımcı çeşitli çalışmalardan faydalanılmıştır. Bu çalışmalar tezin kaynaklar kısmında mevcuttur [12, 23]. Ancak tezdeki işlemlerin anlaşılabilir olması bakımından incelemeler bazen iki boyutlu operatör için yapılacaktır.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanılacak bazı tanım, teorem ve eşitsizlikler verilecektir.

**Tanım 2.1. (Normlu Uzay):**

$X$ reel veya karmaşık bir doğrusal uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan

$$p = \|.\| : X \to R \quad , \quad p(x) = \|x\|$$

fonksiyonuna $X$ üzerinde bir norm denir. $x, y \in X$ ve $\lambda \in R\,(veya\ \lambda \in C)$ için

(N 1) $\|x\| \geq 0$

(N 2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N 3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(N 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Eğer $\|.\|$, $X$ kümesi üzerinde bir norm ise $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir.

**Not 2.1.**

Yukarıdaki tanımda (N 2) koşulu yerine $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ koşulu alınırsa, $\|.\|$ ye yarı norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de yarı normlu uzay denir.

**Tanım 2.2. (Tam Uzay):**

$(X,d)$ bir metrik uzay ve $(x_n)$ bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m,n > n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0$ sayısı varsa $(x_n)$ dizisine Cauchy dizisi denir. $X$ teki her bir Cauchy dizisi yine $X$ teki bir noktaya yakınsıyor ise yani $x_n \to x \in X$ ise $X$ uzayına tam uzay denir.

**Tanım 2.3. (Banach Uzayı):**

$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer $X$ norm metriğine göre tam ise $X$ e bir Banach uzayı denir.

**Tanım 2.4. (İleri Fark Operatörü):**

$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j)$ olmak üzere $k \geq 1$ için

$$\Delta^k f(x_j) = \Delta^{k-1} f(x_{j+1}) - \Delta^{k-1} f(x_j)$$

şeklinde tanımlanan operatöre ileri fark operatörü denir.

**2.1. Yakınsaklık Teoremleri**

**Teorem 2.1.**

$f$, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere derecesi $n$ den büyük olmayan öyle bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır, öyleki bu aralığın her noktasında

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left|P_n(x) - f(x)\right| = 0$$

oluyorsa $P_n(x)$ , $f(x)$ e düzgün yakınsaktır.

**Teorem 2.2. (Lusin Teoremi):**

$f \in L_p(a,b)$, $p \ge 1$ için $[a,b]$ aralığında öyle bir sürekli $\varphi$ fonksiyonu bulabiliriz ki $\varepsilon$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$$

dır.

Lusin teoreminden denilebilir ki $L_p$ de olan bir fonksiyon $L_p$ normunda bir $P_n$ polinomunun limiti şeklinde gösterilebilir. Yani $f \in L_p$ için Lusin teoremi gereğince sürekli bir $\varphi$ fonksiyonu bulunabilir, öyleki $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$ dır.

Yine $\varphi$, $[a,b]$ aralığında sürekli olduğunda bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır, öyleki $[a,b]$ aralığında $\varphi(x)$ e düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} \left|P_n(x) - \varphi(x)\right| = 0$$

dır. Şimdi $P_n(x)$ polinomlarının $L_p$ normunda $f$ ye yakınsadığını gösterelim. Yukarıdaki iki teorem birleştirilirse;

$$\begin{aligned}\|f(x) - P_n(x)\|_p &= \|f(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - P_n(x)\|_p \\ &\le \|f(x) - \varphi(x)\|_p + \|\varphi(x) - P_n(x)\|_p\end{aligned}$$

$$< \varepsilon + \left( \int_a^b \left| \varphi(x) - P_n(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$< \varepsilon + \max_{a \le x \le b} \left| \varphi(x) - P_n(x) \right| (b-a)^{1/p}$$

$$\le \varepsilon$$

olur ki bu da $P_n(x)$ polinomlarının $f(x)$ e $L_p$ normunda yakınsadığını gösterir.

**Tanım 2.5. (Minkowsky Eşitsizliği):**

$f, g \in L_P$ için

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

**Tanım 2.6. (Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği):**

$D_1$ ve $D_2$ ölçülebilir uzaylar $f : D_1 \times D_2 \to R$ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$\left( \int_{D_1} \left| \int_{D_2} f(y) K(x,y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \le \int_{D_2} \left( \int_{D_1} \left| f(y) K(x,y) \right|^p dx \right)^{1/p} dy$$

$$= \int_{D_2} f(y) \left( \int_{D_1} \left| K(x,y) \right|^p dx \right)^{1/p} dy$$

eşitsizliğine genelleştirilmiş Minkowsky eşitsizliği denir.

**Tanım 2.7. (Hölder Eşitsizliği):**

$p>1$ , $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ , $f\in L_P$ , $g\in L_q$ için

$$\int_D f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_D |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$
$$=\|f\|_p\,\|g\|_q$$

dir.

**Tanım 2.8. (Sobolev Uzayı):**

$1\le p\le\infty$ , $k\in N_0$ olmak üzere

$$W_p^k(\Omega):=\left\{f:\Omega\to R\,\middle|\, f\in L_1^{loc}(\Omega),\ \forall|\alpha|\le k \text{ için } D_w^\alpha f\in L_p(\Omega)\right\}$$

ile tanımlanan küme $L_p(\Omega)$ uzayının alt uzayıdır. Bu uzaya $W_p^k(\Omega)$ Sobolev uzayı denir.

Bu uzayda $p=1$ için $L_1^{loc}(\Omega)$ lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını gösterir.

**Tanım 2.9. (Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar Uzayı):**

$f(x)$ bir $I$ aralığında tanımlanmış fonksiyon olsun. $0\le\alpha<1$ olmak üzere her $x_1,x_2\in I$ için

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|^\alpha$$

olacak şekilde bir $M>0$ varsa $f$ ye $\alpha-$yıncı basamaktan Lipschitz sınıfındandır denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

Bir $I$ aralığında

1) $f \in Lip_M(\alpha)$ ise $f$ fonksiyonu bu aralıkta süreklidir.

2) $\alpha>1$ için $f \in Lip_M(\alpha)$ ise $f$ sabit fonksiyondur.

**Tanım 2.10. (Konveks ve Konkav Fonksiyon):**

$\forall x_0, x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ ve $\lambda_n \in R$ için

$$\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=1$$

olmak üzere

$$f\left(\sum_{r=0}^{n}\lambda_r x_r\right) \leq \sum_{r=0}^{n}\lambda_r f(x_r)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Eğer

$$f\left(\sum_{r=0}^{n}\lambda_r x_r\right) \geq \sum_{r=0}^{n}\lambda_r f(x_r)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

**Tanım 2.11. (Süreklilik Modülü):**

$x, y \in [a,b]$ olmak üzere $|x-y| \leq \delta$ şartını sağlayan $\delta > 0$ için $|f(x) - f(y)|$ nin en küçük üst sınırına $f(x)$ in süreklilik modülü denir.

$$\omega(f:\delta) = \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|$$

veya

$$\omega(f:\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} |f(x+h) - f(x)|$$

sembolleri ile gösterilir.

**Tanım 2.12. (Jensen Eşitsizliği):**

$f$ fonksiyonu konkav olsun ve $P_i \geq 0 \,;\, (i = 1, 2, \ldots, n)$ sayıları $P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda konkavlık aralığından alınmış $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ler için

$$f(P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n) \geq P_1 f(x_1) + P_2 f(x_2) + \ldots + P_n f(x_n)$$

eşitsizliği sağlanır.

**Not 2.2.**

Bu eşitsizlik $-1$ ile çarpıldığında tersine döneceğinden konveks fonksiyonlar için bu eşitsizlik tersine döner.

**Not 2.3.**

Negatif olmayan $P_i$ ler için $P_1+P_2+\ldots+P_n=1$ koşulu verilmeden yukarıdaki eşitsizlik

$$f\left(\frac{P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_nx_n}{P_1+P_2+\ldots+P_n}\right)\geq\frac{P_1f(x_1)+P_2f(x_2)+\ldots+P_nf(x_n)}{P_1+P_2+\ldots+P_n}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\frac{P_1}{P_1+P_2+\ldots+P_n}+\frac{P_2}{P_1+P_2+\ldots+P_n}+\ldots+\frac{P_n}{P_1+P_2+\ldots+P_n}=1$$

dir.

**Tanım 2.13.**

İkinci dereceden Ditzian-Totik süreklilik modülü

$$\omega_\varphi^2(f,t)_\infty=\sup_{0\leq h\leq t}\left\|f\left(x+2h\varphi(x)\right)-2f\left(x+h\varphi(x)\right)+f(x)\right\|_\infty$$

olarak tanımlanır. Burada $\varphi(x)=\sqrt{x(1+x)}$ dir.

$T\subset R^d\ (d\in N)$ olsun. Buradaki $T$

$$T=T_d=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_d)\in R^d:0\leq x_i\leq\infty,1\leq i\leq d\right\}$$

şeklindedir.

$T$ üzerinde sürekli fonksiyonlar için $f \in C(T)$ süreklilik modülü

$$\Omega(f,u) = \sup\left\{\left|f(x) - f(y)\right| : \left|x_i - y_i\right| \le u_i, x, y \in T, u \in T_d\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\omega(t)$, $[0,b-a]$ aralığında sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve $\omega(0) = 0$ olan bir fonksiyon ise, o taktirde

$$\omega^*(t) = t \inf_{0 \le x \le t} \frac{\omega(x)}{x}$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir süreklilik modülüdür ve süreklilik modülünün sağladığı özellikleri sağlar.

$\dfrac{\omega^*(t)}{t}$ artmayan bir fonksiyon olduğundan $\omega^*(t)$ azalmayan bir fonksiyondur.

Eğer $\omega(t)$, $[0,b-a]$ aralığında azalmayan sürekli ise o taktirde $\omega(0) = 0$ ve $\dfrac{\omega(t)}{t}$ artmayandır. Bu ifade de bir süreklilik modülüdür. $\omega^*$ fonksiyonu alt toplamsaldır. Yani

$$\omega^*(t_1 + t_2) = t_1 \frac{\omega(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} + t_2 \frac{\omega(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} \le t_1 \frac{\omega(t_1)}{t_1} + t_2 \frac{\omega(t_2)}{t_2} = \omega^*(t_1) + \omega^*(t_2)$$

eşitliği sağlanır.

Ayrıca $\left|\omega_k(t)\right|$ fonksiyonu için

$$\left|\omega_k(t_2)-\omega_k(t_1)\right| \le 2k\omega_1\left(k\left|t_2-t_1\right|\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer $t_1 < t_2$ ve $\inf\limits_{0<x\le t_1}\dfrac{\omega(x)}{x} < \inf\limits_{0<x\le t_2}\dfrac{\omega(x)}{x}$ eşitsizliği sağlanıyorsa $\inf\limits_{0<x\le t_1}\dfrac{\omega(x)}{x} = \inf\limits_{t_1\le x\le t_2}\dfrac{\omega(x)}{x}$ eşitsizliği de sağlanır.

Böylece

$$\omega^*(t_1)=t_1\inf_{0<x\le t_1}\frac{\omega(x)}{x} < \omega(t_1) < \inf_{t_1\le x\le t_2}\frac{t_2}{x}\omega(x)=\omega^*(t_2)$$

yazılabilir.Buna göre

eğer $\omega(t)$ bir süreklilik modülü ise, o taktirde

$$\frac{1}{2}\omega(t)\le\omega^*(t)\le\omega(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

$\omega(t)$ ve $\omega^*(t)$ süreklilik modülü $t\to 0$ için aynı dereceden yakınsaktır.

Benzer eşitsizlik $f(x)\in L_p$ için de vardır. Yani

$$\frac{\omega(f;t_2)}{t_2}\le 2\frac{\omega(f;t_1)}{t_1}\omega^*(t_2)\ ,\ (t_1<t_2)$$

$$\frac{1}{2}\omega(f;t)_{L_p}\le\omega^*(t)_{L_p}\le\omega(f;t)_{L_p}$$

eşitsizliği sağlanır.

$[a,b]$ aralığında sınırlı herhangi bir fonksiyon için

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\varphi(x)$ fonksiyonu vardır. Eğer $a \le x \le \frac{1}{2}[a+b]$ , $x-h<a$ ve $x+h \le b$ ise

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)\right| &= \left|\varphi(x-h)-2\varphi(x)-2\varphi(2a+h-x)\right| \\ &\le \left|\varphi(x+h)-2\varphi(a+h)+\varphi(2a+h-x)\right| \\ &\quad +2\left|\varphi(a+h)-2\varphi\left(a+\frac{h}{2}\right)+\varphi(a)\right| \\ &\quad +\left|\varphi(x)-2\varphi\left(a+\frac{h}{2}\right)+\varphi(2a+h-x)\right| \\ &\le 5\omega_2(\varphi;h)\end{aligned}$$

eşitsizliği de sağlanır.

**Tanım 2.14.**

$f: I \to R$ sınırlı ve reel değerli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ için $\delta$ argümanlı $f$ nin süreklilik modülü

$$\omega(f,\delta) := \sup_{\substack{x,y\in I \\ |x-y|\le\delta}} \left|f(x)-f(y)\right| = \sup_{\substack{x,y\in I \\ |x-y|\le\delta}} \left|\Delta_h f(x)\right|$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan süreklilik modülüne $f$ nin süreklilik modülü adı verilir.

Genellikle eğer $f: I \to R$ sınırlı reel değerli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ ve $k \in N$ olmak üzere

$$\omega_k(f,\delta) := \sup_{\substack{|h| \le \delta \\ x, x+kh \in I}} \left|\Delta_h^k f(x)\right| = \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} f(x+mh)$$

$f$ nin $k-$yıncı süreklilik modülü olarak tanımlanır.

**Lemma 2.1.**

$I$ reel bir aralık $f \in C(I)$ olsun. O taktirde her bir $k \in N$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) Eğer $0 < \delta_1 \le \delta_2 \Rightarrow \omega_k(f,\delta_1) \le \omega_k(f,\delta_2)$ dir.

2) $\lim_{\delta \to 0^+} \omega_k(f,\delta) = 0$ her $f \in C(I)$ için sağlanır.

3) Her bir $\delta > 0$ için $\omega_{k+1}(f,\delta) \le 2\omega_k(f,\delta)$ dir.

4) Eğer $f$ türevlenebilen bir fonksiyon ve $f' \in C(I)$ ise, o taktirde

$$\omega_{k+1}(f,\delta) \le \delta\omega_k(f',\delta)$$

her $\delta > 0$ için sağlanır.

5) Her bir $\delta > 0$ ve $n \in N$ için $\omega_k(f,n\delta) \le n^k \omega_k(f,\delta)$ dir.

6) Her bir $\delta > 0$ ve $\lambda > 0$ için $\omega_k(f,\lambda\delta) \le \left(1+\left[|\lambda|\right]\right)^k \omega_k(f,\delta)$ sağlanır.

Burada $\left[|\lambda|\right]$ , $\lambda$ nın tam kısmını göstermektedir.

**İspat 2.1.**

1). ve 2). tanım gereğince kolayca görülebilir. 3). özellik doğrudan

$$\Delta_h^{k+1} f(x) = \Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x) \text{ ve } \omega(f,\delta) := \sup_{\substack{x,y\in I \\ |x-y|\le\delta}} |f(x) - f(y)|$$

bir sonucudur.

4) ü gösterelim. Her bir $h \in R, |h| \le \delta$ ve $x \in I$ , öyleki $x + kh \in I$ olduğunda,

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_h^{k+1} f(x)\right| &= \left|\Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x)\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} \left[ f(x+(m+1)h) - f(x+mh) \right]\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \left(\frac{k}{m}\right) \int_{mh}^{(m+1)h} f'(x+t)\,dt\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} \int_{0}^{k} f'(x+mh+t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_{0}^{h} \sum_{m=0}^{h} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} f'(x+mh+t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_{0}^{h} \Delta_h^k f'(x+t)\,dt\right| \le \int_{0}^{h} \left|\Delta_h^k f'(x+t)\,dt\right| \\
&\le \left|\int_{0}^{h} \omega_k(f',\delta)\,dt\right| \le \delta\omega_k(f',\delta)
\end{aligned}$$

olur. Görülmektedir ki

$$\omega_{k+1}(f,\delta) \le \delta\omega_k(f',\delta)$$

olur.

Eğer $k=0$ ya da $k=1$ alınırsa 5). özellik doğrudan sağlanır.

Şimdi kabul edelim ki $k \geq 2$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\omega_k\left(f,\delta\right) := \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x,x+kh\in I}} \left|\Delta_h^k f\left(x\right)\right|$$

sağlanacak şekilde $h \in R$ ve $|h| \leq \delta$ vardır, öyleki $x \in I$ ve $x+n\left(k+1\right) \in I$ için $\omega_k\left(f,n\delta\right) \leq \left|\Delta_{nh}^k f\left(x\right)\right| + \varepsilon$ olur. $\Delta_h^{k+1} f\left(x\right) = \Delta_h^k f\left(x+h\right) - \Delta_h^k f\left(x\right)$ ifadesi gereğince

$$\begin{aligned}
\Delta_{nh}^k f\left(x\right) &= \Delta_{nh}^{k-1} f\left(x+nh\right) - \Delta_{nh}^{k-1} f\left(x\right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-2}\dots\sum_{i_{k-1}=0}^{n-1} \Delta_h^{k-1}\left(\sum_{i_k=0}^{n-1}\Delta_h f\left(x+i_1h+i_2h+\dots+i_kh\right)\right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\dots\sum_{i_k=0}^{n-1}\Delta_h^k f\left(x+i_1h+i_2h+\dots+i_kh\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\omega_k\left(f,n\delta\right) \leq \left|\Delta_{nh}^k f\left(x\right)\right| + \varepsilon &\leq \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\dots\sum_{i_k=0}^{n-1}\Delta_h^k f\left|\left(x+i_1h+\dots+i_kh\right)\right| + \varepsilon \\
&\leq n^k\omega_k\left(f,\delta\right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. 6). özellik ise 1). ve 5). özelliğin bir sonucudur.

Bir $A$ metrik uzayında verilen $f$ fonksiyonunun $\omega\left(f,t\right) := \omega\left(t\right)$ süreklilik modülü fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Burada $A = R\ , R_+\ , [a,b]$ olabilir.

$$\omega(t) = \omega(f,t) = \sup_{\substack{|x-y|\le t \\ x,y\in A}} \left| f(x) - f(y) \right| \ ,\ t \ge 0$$

açık olarak $\omega(t)$ bir sabittir. Eğer $A$ sınırlı ve $t \ge diamA$ ise; eğer $f$, $A$ üzerinde düzgün sürekli ise $\omega$ fonksiyonu süreklidir. $(t = 0)$

Kabul edelim ki $f \in \tilde{C}(A)$ , $A$ üzerinde düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) $\omega(t) \to \omega(0) = 0$ dir. $(t \to 0$ için)

2) $\omega(t)$, $R_+$ üzerinde pozitif ve azalmayandır.

3) $\omega(t_1 + t_2) \le \omega(t_1) + \omega(t_2)$ dir.

4) $\omega$, $R_+$ da süreklidir.

1) ve 2) açıktır. 3) için eğer $|x-y| \le t_1 + t_2$ ise $A$ da bir $z$ noktası vardır, öyleki $z \in A$ için $|x-z| \le t_1$ , $|y-z| \le t_2$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f(y) \right| &\le \left| f(x) - f(z) + f(z) - f(y) \right| \\ &\le \left| f(x) - f(z) \right| + \left| f(z) - f(y) \right| \end{aligned}$$

supremumu alınırsa

$$\omega(t_1 + t_2) \le \omega(t_1) + \omega(t_2)$$

olur.

Ayrıca $\left(\omega\left(t_1+t_2\right)-\omega\left(t_1\right)\right)\leq\omega\left(t_2\right)$ yazılabilir. Yine

$$\omega\left(t_1+t_2+...+t_n\right)\leq\omega\left(t_1\right)+\omega\left(t_2\right)+...+\omega\left(t_n\right)$$

yazılabilir.

Eğer $t=t_1=t_2=...=t_n$ alınırsa

$$\omega\left(nt\right)\leq n\omega\left(t\right)$$

yazılabilir. Benzer eşitsizlik tam olmayan bir $\lambda$ çarpanı için

$$\omega\left(\lambda t\right)\leq\left(1+\lambda\right)\omega\left(t\right)\quad ;\lambda>0$$

olur. Üstelik bir $n$ tamsayısı alınırsa

$$\omega\left(\lambda t\right)\leq\omega\left(\left(n+1\right)t\right)\leq\left(n+1\right)\omega\left(t\right)\leq\left(\lambda+1\right)\omega\left(t\right)\ ,\qquad n\leq\lambda\leq n+1$$

olarak yazılabilir.

Eğer $\frac{\omega\left(t;f\right)}{t}\to 0$ , $t\to 0$ için $f'\left(x\right)\equiv 0$ ve $f$ sabittir.

Bu ifedeler göz önüne alındığında $f$ , $\left[a,b\right]$ üzerinde konkav bir fonksiyon ise

$$\alpha f\left(x\right)+\beta f\left(y\right)\leq f\left(\alpha x+\beta y\right)\ ;\quad x,y\in\left[a,b\right]\ ,\ \alpha,\beta>0\ ,\ \alpha+\beta=1$$

dir.

$[0,1]$ üzerinde bir konkav fonksiyon $f(0)=0$ özelliğini sağlıyorsa $\dfrac{f(x)}{x}$ azalır. Eğer $x<y$ ise

$$\frac{x}{y}f(y)=\frac{y-x}{y}f(0)+\frac{x}{y}f(y)\le f(x)$$

olur.

**Örnek 2.1.**

$\omega$ , $R_+$ üzerinde artan bir fonksiyon ve $\omega(0)=0$ olsun. Bu durumda $\omega$ bir süreklilik modülü fonksiyonudur. Eğer $f$ konkav ise ( ya da genel olarak $\dfrac{\omega(t)}{t}$ azalan ise ) bu durumda

$$\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\le\frac{\omega(t_1)}{t_1} \text{ ve } \frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\le\frac{\omega(t_2)}{t_2}$$

sağlanır. Ayrıca

$$\omega_r(f;t)_p := \sup_{0<h\le t}\left\|\Delta_h^r f(.;.)\right\|_p(\Delta_{rh}) \ ,t\ge 0$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa

$$\omega_r(f;t)_p\le 2^{r-k}\omega_k(f;t)_p : 1\le k<r \ , 1\le p\le\infty$$

elemanter $L_p$ normu için ;

eğer $o < p \leq \infty$ ve $\mu = \min(p,2)$ olmak üzere $a,b \in R$ ve $M = M(p)$ yeteri kadar büyük sayıları için

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2\left(|a|^\mu + M|b|^\mu\right)^{p/\mu} \quad : 0 < p < \infty \tag{2.1}$$

eşitsizliğinin sağlandığı bilinmektedir. $a = 1$ ve $b = x > 0$ alınırsa

$$f(x) := |1+x|^p + |1-x|^p \leq 2\left(1 + Mx^\mu\right)^{p/\mu} =: g(x)$$

olur.

**Lemma 2.2.**

$1 \leq p < \infty$ ve $\mu = \min(p,2)$ olsun. $M := M(p)$ sabiti için $f, g \in L_p$ olmak üzere

$$\|f+g\|_p + \|f-g\|_p \leq 2\left(\|f\|_p^\mu + M\|g\|_p^\mu\right)^{1/\mu}$$

olur.

**İspat 2.2.**

2.1'de $a := f(x)$, $b := g(x)$ alınırsa ve integrali alınırsa

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2\int_A \left(|f|^\mu + M|g|^\mu\right)^{p/\mu} dx$$

olur.

## 2.2. $L_1$ Uzayında Olan Fonksiyonların Süreklilik Modülü ve Özellikleri

**Tanım 2.15.**

$f \in L_1$ olmak üzere $\omega$ ile gösterilen

$$\omega_{L_1}(f;\sigma) = \sup_{|t|\le\sigma} \int_R |f(x+t) - f(x)| dx$$

integraline $f$ nin $L_1$-süreklilik modülü denir.

Ayrıca $\sigma < \sigma_1$ olduğunda

$$\omega_{L_1}(f;\sigma) < \omega_{L_1}(f;\sigma_1)$$

dır. $L_1$ süreklilik modülü negatif olmayan ve monoton artan bir fonksiyondur. Şimdi süreklilik modülünün bazı özelliklerini inceleyelim.

**Lemma 2.3.**

$m$ bir doğal sayı olmak üzere

$$\omega_{L_1}(f;m\sigma) \le m\omega_{L_1}(f;\sigma)$$

dir.

**İspat 2.3.**

$$\omega_{L_1}(f;m\sigma) = \sup_{|t|\le m\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| dx$$

ifadesinde $t = my$ alınıp aşağıdaki işlemler yapılırsa,

$$\omega_{L_1}(f;m\sigma)=\sup_{|y|\le\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+my)-f(x)\right|dx$$

$$=\sup_{|y|\le\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+my)-f(x+(m-1)y)+f(x+(m-1)y)-f(x+(m-2)y)\right.$$

$$\left.+f(x+(m-2)y)-...-f(x+y)+f(x+y)-f(x)\right|dx$$

$$=\sup_{|y|\le\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{m}f(x+ky)-f(x+(k-1)y)\right|dx$$

$$\le\sup_{|y|\le\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\left|f(x+ky)-f(x+(k-1)y)\right|dx$$

yazılabilir.

Burada $x+(k-1)y=z$ denilirse ve sonra yeniden $z$, $x$ ile $y$, $t$ ile değiştirilirse,

$$\le\sup_{|z|\le\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\left|f(z+y)-f(z)\right|dz$$

$$\le m\sup_{|z|\le\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(z+y)-f(z)\right|dz$$

$$=m\omega_{L_1}(f;\sigma)$$

elde edilir ki bu da istenendir.

**Sonuç 2.1.**

$0<\lambda<1$ bir reel sayı olmak üzere,

$$\omega_{L_1}(f;\lambda\sigma)\le(1+\lambda)\,\omega_{L_1}(f;\sigma)$$

dir.

**İspat 2.1.**

$[|\lambda|]$ ile $\lambda$ sayısının tam kısmı gösterilsin. Bu durumda $\lambda < [|\lambda|]+1$ dir ve $\omega_{L_1}(f;\sigma)$ fonksiyonu monoton artan olduğundan,

$$\omega_{L_1}(f;\lambda\sigma) \le \omega_{L_1}\left(f;\left([|\lambda|]+1\right)\sigma\right)$$

dir. $[|\lambda|]+1$ bir tamsayı olduğundan Lemma 2.3 de son olarak $[|\lambda|] < \lambda$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\omega_{L_1}(f;\lambda\sigma) &\le \omega_{L_1}\left(f;\left([|\lambda|]+1\right)\sigma\right)\\ &\le \left([|\lambda|]+1\right)\omega_{L_1}(f;\sigma)\\ &\le (\lambda+1)\,\omega_{L_1}(f;\sigma)\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Lemma 2.4.**

$f \in L_1$ olmak üzere $\lim\limits_{\sigma\to 0}\omega_{L_1}(f;\sigma) = 0$ dır.

**İspat 2.4.**

$f \in L_1$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists a \in R$ reel sayısı bulunabilir, öyleki

$$\int_{-\infty}^{-a} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad \int_{a}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

sağlanır.

Ayrıca her pozitif $\sigma$ sayısı için

$$\int_{-\infty}^{-a-\sigma} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad \int_{a+\sigma}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.2}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $|t| \le \sigma$ yani $-\sigma \le t \le \sigma$ için,

$$\int_{a+\sigma}^{\infty} |f(x+t)|dx = \int_{a+\sigma+t}^{\infty} |f(x)|dx < \int_{a}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.3}$$

dir. Çünkü $\sigma + t \ge 0$ ve $\sigma + t + a \ge a$ dır.

Benzer şekilde $t - \sigma \le 0$ ve $-a - \sigma + t \le -a$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{-a-\sigma} |f(x+t)|dx = \int_{-\infty}^{-a-\sigma+t} |f(x)|dx < \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.4}$$

olduğu görülür. 2.2, 2.3 ve 2.4 formüllerinden

$$\sup_{|t|\le\sigma} \left\{ \int_{-\infty}^{-a-\sigma} |f(x+t) - f(x)|dx + \int_{a+\sigma}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|dx \right\} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla

$$\sup_{|t|\le\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|dx \le \sup_{|t|\le\sigma} \int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |f(x+t) - f(x)|dx + \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat için $\sup_{|t|\le\sigma}\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|f(x+t)-f(x)|dx$ ifadesinin de $\varepsilon$ dan küçük kaldığını göstermek yeterlidir. Bunun için Lusin teoremini kullanalım.

Lusin teoremi gereğince $f\in L_1(a,b)$ için $\|f-\varphi\|_{L_1}<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\varphi$ fonksiyonu vardır. Dolayısıyla $[-a-2\sigma,a+2\sigma]$ aralığında sürekli bir $\varphi$ fonksiyonu bulunabilir, öyleki

$$\int_{-a-2\sigma}^{a+2\sigma}|f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon \tag{2.5}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|f(x+t)-f(x)|dx\le\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|f(x+t)-\varphi(x+t)|dx+\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx$$
$$+\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|\varphi(x)-f(x)|dx \tag{2.6}$$

eşitsizliği yazılabilir. 2.5'ten

$$\sup_{|t|\le\sigma}\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|f(x+t)-\varphi(x+t)|dx=\int_{-a-\sigma+t}^{a+\sigma+t}|f(x)-\varphi(x)|dx<\int_{-a-2\sigma}^{a+2\sigma}|f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon$$

elde edilir. 2.6'dan ise

$$\sup_{|t|\le\sigma}\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|f(x+t)-f(x)|dx\le 2\varepsilon+\sup_{|t|\le\sigma}\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx \tag{2.7}$$

şeklinde yazılır.

$\varphi$ sürekli bir fonksiyon olduğundan $|t|<\sigma$ şartını sağlayan $t$ ler için süreklilikten dolayı

$$\left|\varphi(x+t)-\varphi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(a+\sigma)}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sup_{|t|\leq\sigma}\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}\left|\varphi(x+t)-\varphi(x)\right|dx<\varepsilon$$

elde edilir. Bu eşitsizlik 2.7'de yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

### 2.3. Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Sonlu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ ile gösterilmektedir. $C[a,b]$ uzayı

$i.\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$ii.\ \lambda\in R$ olmak üzere $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$

işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır.

Weierstrass teoremine göre bu uzaydan olan her bir $f$ fonksiyonu için sonlu bir $\underset{a\leq x\leq b}{maks}\left|f(x)\right|$ sayısı vardır. $h=\max\left|f(x)\right|$ olarak tanımlanan fonksiyonun $C[a,b]$ üzerinde bir norm olduğu gösterilebilir.

$i.\ \underset{a\le x\le b}{maks}\left|f\left(x\right)\right|\ge 0$ dır.

$ii.$ Eğer $\left[a,b\right]$ aralığında $f\equiv 0$ ise o zaman bu fonksiyonun maksimumu aynı aralıkta sıfırdır. Diğer yandan eğer $\underset{a\le x\le b}{maks}\left|f\left(x\right)\right|=0$ ise o zaman $f\equiv 0$ olur.

$iii.$ $\lambda$ keyfi bir reel sayı olmak üzere $\underset{a\le x\le b}{maks}\left|\lambda f\left(x\right)\right|=\left|\lambda\right|\underset{a\le x\le b}{maks}\left|f\left(x\right)\right|$ dir.

$iv.$ $f$ ve $g$, $\left[a,b\right]$ de sürekli iki fonksiyon olmak üzere $\forall x\in\left[a,b\right]$ için

$$\left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right|\le\left|f\left(x\right)\right|+\left|g\left(x\right)\right|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\underset{a\le x\le b}{maks}\left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right| &\le \underset{a\le x\le b}{maks}\left(\left|f\left(x\right)\right|+\left|g\left(x\right)\right|\right)\\ &\le \underset{a\le x\le b}{maks}\left|f\left(x\right)\right|+\underset{a\le x\le b}{maks}\left|g\left(x\right)\right|\end{aligned}$$

dir.

Böylece norm aksiyomları sağlanır. $C\left[a,b\right]$ uzayında norm;

$$\left\|f\right\|_{C[a.b]}=\underset{a\le x\le b}{maks}\left|f\left(x\right)\right| \qquad (2.8)$$

ile gösterilir.

Bu uzayda yakınsaklığın düzgün yakınsaklık olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $C[a,b]$ de olan bir $(f_n(x))$ fonksiyonlar dizisi $[a,b]$ aralığında $f(x)$ e düzgün yakınsasın. Bu takdirde keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N = N(\varepsilon)$ bulunur ki her $n > N$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği $\forall x \in [a,b]$ için sağlanır.

$f(x) \in C[a,b]$ ve dolayısıyla $f_n(x) - f(x) \in C[a,b]$ dir. Weierstrass teoreminden öyle bir $x^* \in [a,b]$ vardır ki $f_n(x) - f(x)$ fark fonksiyonunun $x^*$ daki değeri $[a,b]$ nin diğer noktalarındaki değerinden büyüktür. Ayrıca $x^* \in [a,b]$ olduğundan

$$\left|f_n(x^*) - f(x^*)\right| = \underset{a \le x \le b}{maks}\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

sağlanır.

Dolayısıyla keyfi $\varepsilon > 0$ için $N(\varepsilon)$ vardır, öyleki $n > N$ olduğunda

$$\underset{a \le x \le b}{maks}\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

sağlanır ve

$$\|f_n - f\|_{C[a,b]} < \varepsilon \quad , \qquad\qquad (n > N(\varepsilon))$$

olur. $C[a,b]$ de olan $(f_n(x))$ dizisi $C[a,b]$ uzayının normunda yakınsasın. Bu durumda keyfi pozitif $\varepsilon$ sayısına göre öyle bir $N$ bulunabilir ki $n \ge N$ olan tüm $n$ ler için

$$\underset{a \le x \le b}{maks}\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

sağlanır.

Bundan dolayı $[a,b]$ de olan tüm $x$ ler için

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon \quad , \qquad\qquad n\geq N$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak, $C[a,b]$ uzayının normuna göre yakınsama, düzgün yakınsamadır. Düzgün yakınsama

$$f_n(x)\Rightarrow f(x)$$

ile gösterilir.

### 2.4. Lineer Pozitif Operatörler

$X$ ve $Y$ lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun.Eğer $X$ den alınan herhangi bir fonksiyonuna $Y$ de bir $g$ fonksiyonu karşılık getiren bir $L$ kuralı varsa bu durumda $X$ uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x)=L(f,x)$$

biçiminde gösterilir. $X$ uzayı $L$ operatörünün tanım bölgesidir ve genel olarak $X=D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f;x)=g(x)$, $Y$ uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki $g$ fonksiyonları kümesine $L$ operatörünün değer kümesi denir. Bu küme de genel olarak $R(L)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.16.**

$L: X\to Y$ bir operatör olsun. Her $f_1,f_2\in X$ ve $a_1,a_2\in R$ olmak üzere

$$L(a_1f_1+a_2f_2;x)=a_1L(f_1;x)+a_2L(f_2;x)$$

eşitliği sağlanıyor ise $L$ ye lineer operatör denir.

**Tanım 2.17.**

$L : X \to Y$ bir operatör olsun. $D(L) \subset X$ , $L$ nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f \in D(L)$ için

$$\left\| L(f;x) \right\|_Y \leq M \left\| f \right\|_X \tag{2.9}$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in R^+$ varsa $L$ ye $D(L)$ de sınırlı operatör denir.

$$\left\| L \right\|_{X \to Y} = \inf \left\{ M : \left\| L(f;x) \right\|_Y \leq M \left\| f \right\|_X \right\}$$

sayısına $L$ operatörünün normu denir.

**Lemma 2.5.**

$L : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü için

$$\left\| L \right\|_{X \to Y} = \sup_{\left\| f \right\|_X} \frac{\left\| L(f;x) \right\|_Y}{\left\| f \right\|_X}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat 2.5.**

$\left\| L \right\|_{X \to Y}$ tanımından

$$\frac{\left\| L(f;x) \right\|_Y}{\left\| f \right\|_X} \leq \left\| L \right\|_{L \to Y}$$

eşitsizliği sağlanır.

Buradan

$$\sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq \|L\|_{X \to Y} \tag{2.10}$$

eşitsizliği bulunur.

Diğer taraftan infimum tanımından her $\varepsilon > 0$ için en az bir $f_\varepsilon \in X$ vardır, öyleki

$$\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y \geq \left(\|L\|_{X \to Y} - \varepsilon\right)\|f_\varepsilon\|_X$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da

$$\frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \leq \|L\|_{X \to Y} - \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \frac{\|L(f_\varepsilon;x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X \to Y} - \varepsilon$$

elde edilir.

Sol taraf $\varepsilon -$a bağlı olmadığından $\varepsilon \to 0$ için eşitsizlik bozulmaz.

Böylece

$$\sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \|L\|_{X \to Y} \tag{2.11}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak 2.10 ve 2.11 eşitsizliklerinden

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

bulunur.

**Sonuç 2.2.**

$L: X \to Y$ sınırlı lineer operatörü için

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_x=1} \|L(f;x)\|_Y$$

eşitliği gerçeklenir.

**İspat 2.2.**

Lemma 2.5. den

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X} = \sup_{\|f\|_X} \left\| \frac{1}{\|f\|_X} L(f;x) \right\|_Y$$

$$= \sup_{\|f\|_X} \left\| L\left( \frac{f}{\|f\|_x}; x \right) \right\|_Y$$

yazılabilir. $g(x) = \dfrac{f}{\|f\|_X}$ denirse $\|g\|_X = 1$ olur.

Buradan

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_X=1} \|L(f;x)\|_Y$$

elde edilir.

**Tanım 2.18.**

$L: X \to Y$ bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|f - f_o\|_X < \delta$ olduğunda $\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta(\varepsilon, f_o) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $L$ operatörü $f_o \in X$ için süreklidir denir.

**Teorem 2.3.**

$X$, $Y$ normlu uzaylar, $L: X \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda $L$ operatörü için sınırlılık ve süreklilik birbirine denktir.

**Tanım 2.19.**

$X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0\}$ , $Y^+ = \{g \in Y : g(t) \geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını göz önüne alalım. Eğer $X$ uzayında tanımlanmış $L$ lineer operatörü $X^+$ kümesindeki her bir $f$ fonksiyonunu $Y^+$ kümesindeki bir fonksiyona dönüştürüyor ise $L$ operatörüne lineer pozitif operatör denir. $L$ lineer pozitif operatör ise $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur.

**Lemma 2.6.**

Lineer pozitif operatörler dizisi monotondur.

**İspat 2.6.**

Her $x$ için $g(x) \geq f(x)$ ise $g(x) - f(x) \geq 0$ dır. $L$ lineer pozitif operatör olduğundan

$$L(g - f; x) \geq 0$$

ve $L$ lineer olduğundan

$$L(g; x) - L(f; x) \geq 0$$

dır.

Dolayısıyla

$$L(g; x) \geq L(f; x)$$

dır.

Bu eşitsizlikte lineer pozitif $L$ operatörünün monoton olduğunu gösterir.
Ayrıca $L$ operatörünün monotonluğundan

$$-|f| \leq f \leq |f| \qquad \Rightarrow \qquad L(-|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x)$$

ve $L$ nin lineerliğinden

$$-L(|f|; x) \leq L(f; x) \leq L(|f|; x) \;\Rightarrow\; |L(f; x)| \leq L(|f|; x)$$

yazılabilir.

**Tanım 2.20.**

$n \in N$ olmak üzere $\left(L_n\left(f;x\right)\right)$ dizisine operatör dizisi denir.

**Tanım 2.21.**

$L_n\left(\left(t-x\right)^s;x\right)$, $\{s=0,1,2,...\}$ ifadesine $\left(L_n\right)$ operatör dizisinin $s-$yinci merkezi momenti denir.

## 2.5. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Yaklaşım teorisinin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Böyle bir gösterim fonksiyon hakkında bilgi elde etmenin daha basit bir yolunu verir.

1885 yılında Weierstrass $\left[a,b\right]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonuna bir polinomla yaklaşabileceğini ifade etmiştir.

**Teorem 2.4. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi):**

$f$ fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayının bir elemanı olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $\left|f\left(x\right)-P_n\left(x\right)\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $n$. dereceden bir $\left\{P_n\left(x\right)\right\}$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifade ile $\left[a,b\right]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonu için $f\left(x\right)$ e $\left[a,b\right]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\left\{P_n\left(x\right)\right\}$ polinomlar dizisi vardır.

Bu teoremin bir çok ispatı bulunmaktadır. Bu ispatlardan birini de 1912 yılında S.N.Bernstein (Bernstein, 1912) yaparak, lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan Bernstein polinomlarını tanımlamıştır.

1952 yılında H. Bohmann, toplam şeklinde lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. H. Bohmann (Bohmann, 1952) göstermiştir ki $x \in [0,1]$ , $0 \le a_{n,k} \le 1$ ve $k < r$ için $a_{n,k} < a_{n,r}$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_{n,k}) P_{n,k}(x) \quad , \qquad P_{n,k}(x) \ge 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $n \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul üç tanedir. Bunlar

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(t;x) - x \right\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(t^2;x) - x^2 \right\|_{C[0,1]} = 0$$

şeklindedir.

Aşikardır ki Bohmann' ın araştırdığı operatörlerin değeri, $f$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır. 1953 yılında P. P. Korovkin, H. Bohmann' ın teoremini daha genel bir halde vermiştir.

**Teorem 2.5. (Korovkin Teoremi):**

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun.

$\alpha_n(x)$ , $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsıyan diziler olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x) \tag{2.12}$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x) \tag{2.13}$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x) \tag{2.14}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$ , $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsar. Burada $f$ , $[a,b]$ de sürekli, $a$ da sağdan, $b$ de soldan sürekli ve $R$ de sınırlı bir fonksiyondur.

**İspat 2.5.**

$f$ fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm $x$ ler için

$$|f(x)| \leq M \tag{2.15}$$

olacak şekilde $M$ pozitif sayısı vardır. $f \in C[a,b]$ olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $t \in R$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$f(t) - f(x) < \varepsilon \tag{2.16}$$

sağlanır.

$x,\ t\in[a,b]$ olduğunda 2.16 eşitsizliği $f$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında düzgün sürekli olmasından dolayı gerçeklenir.

$x\in[a,b]$, $t\notin[a,b]$ olduğunda ise 2.16 eşitsizliği $f$ fonksiyonu $a$ noktasında soldan $b$ noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir. 2.15 ve 2.16 eşitsizliklerinden dolayı her $t\in R$ ve $x\in[a,b]$ için

$$\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon+\frac{M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{2.17}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t-x|<\delta$ olduğunda $\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon$ ayrıca $\frac{M}{\delta^2}(t-x)^2$ sağlanır. $|t-x|\geq\delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2\geq 2M$ sağlanır. Bu durumda $\varepsilon>0$ için 2.15 eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left|f(t)-f(x)\right| &\leq \left|f(t)\right|+\left|f(x)\right|\\ &\leq 2M\\ &\leq \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2+\varepsilon \end{aligned}\tag{2.18}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned}\left\|L_n(f;x)-f(x)\right\|_{C[a,b]} &= \left\|L_n\left(f(t)-f(x);x\right)+f(x)L_n(1;x)-f(x)\right\|_{C[a,b]}\\ &\leq \left\|L_n\left(f(t)-f(x);x\right)\right\|_{C[a,b]}+\left\|f(x)\right\|_{C[a,b]}\left\|L_n(1;x)-1\right\|_{C[a,b]}\\ &\leq \left\|L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\right\|_{C[a,b]}+\left\|f(x)\right\|_{C[a,b]}\left\|L_n(1;x)-1\right\|_{C[a,b]}\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur.

Bu eşitsizlikteki ikinci terim 2.12’den dolayı sıfıra yakınsar.Yani;

$$\left\|f(x)\right\|_{C[a,b]}\left\|L_n(1;x)-1\right\|_{C[a,b]}\leq\varepsilon_n \qquad \left(n\to\infty \; iken \; \varepsilon_n\to 0\right)$$

eşitsizliğini sağlayan $\varepsilon_n$ dizisi vardır. O halde

$$\left\|L_n\left(f(t)-f(x);x\right)\right\|_{C[a,b]}\leq\left\|L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\right\|_{C[a,b]}+\varepsilon_n \qquad (2.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi birinci terimi hesaplayalım. 2.18 eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı

$$\left\|L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)\right\|_{C[a,b]}\leq L_n\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((t-x)^2;x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right)-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\right]$$

$$=\varepsilon\left[L_n(1;x)-1\right]+\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right]-2x\left[L_n(t;x)-x\right]\right.$$

$$\left.+x^2\left[L_n(1;x)-1\right]\right\}$$

$$=\varepsilon+\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right)\left[L_n(1;x)-1\right]+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right]$$

$$-\frac{4M}{\delta^2}x\left[L_n(t;x)-x\right]$$

elde edilir.

$x \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right) \le \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}b^2 \ , \left(\frac{4M}{\delta^2}x \le \frac{4M}{\delta^2}b\right)$$

dir. O halde

$$C_1 = \frac{2M}{\delta^2}b^2 \ C_2 = 2bC_1 \ , \ C_3 = \varepsilon + C_1 b^2$$

eşitlikleri kabul edilirse

$$\left\| L_n\left(\left| f(t) - f(x) \right|; x\right) \right\| \le \varepsilon + C_1 \left\| L_n\left(t^2; x\right) - x^2 \right\| + C_2 \left\| L_n(t; x) - x \right\| + C_3 \left\| L_n(1; x) - 1 \right\|$$

yazılabilir ve burada $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük seçilebilen bir sayıdır. 2.12, 2.13 ve 2.14 eşitsizliklerinden dolayı $n \to \infty$ için

$$\left\| L_n\left(\left| f(t) - f(x) \right|; x\right) \right\| \to 0$$

olur.

Bu sonuç ve 2.17 eşitsizliğinden yararlanılırsa

$$\left\| L_n(f; x) - f(x) \right\| \to 0$$

olduğu görülür.

Korovkin teoremindeki $1$, $x$, $x^2$ test fonksiyonları yerine $[a,b]$ aralığında lineer bağımsız herhangi üç fonksiyon alınamaz.

**Teorem 2.6.**

$f_0$, $f_1$, $f_2$ sürekli fonksiyonlarından oluşmuş $[a,b]$ aralığında ikiden fazla sıfır yeri olan bir $F(x)$ polinomu varsa, bu durumda öyle bir $L$ lineer pozitif operatörü bulunabilir ki $x \in [a,b]$ ve $k = 0,1,2$ için

$$L(f_k;x) = f_k(x)$$

koşulları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in [a,b]$ fonksiyonu vardır ki

$$L(f^*;x) \neq f^*(x)$$

dir.

Dolayısıyla Korovkin teoreminin koşullarındaki $1$, $x$, $x^2$ fonksiyonlarının yerine seçilecek fonksiyonlardan oluşmuş herhangi bir $F(x)$ polinimunun $[a,b]$ aralığında ikiden fazla sıfır yeri olmamalıdır.

## 2.6. K-Fonksiyoneli

Kabul edelim ki $X_i$ , $i = 0,1$ iki Banach uzayı olsun. Öyleki $X_1, X_0$ içine gömülü ve sürekli ; yani $X_1 \subset X_0$ olsun. Bu durumda $f \in X_0$ için
$K$ -fonksiyoneli

$$K(f,t) := K(f,t;X_0,X_1) := \inf_{g \in X_1} \left\{ \|f-g\|_{X_0} + t\|g\|_{X_1} \right\} \ , \ t > 0$$

şeklinde tanımlanır.

$X_0 = L_p$ ve $X_1 = W_p^r$ alınır ve bu uzaydaki yarı norm

$$|g|_{W_p^r} := \left\| g^{(r)} \right\|_p$$

alınırsa,

$$K\left(f : t; L_p, W_p^r\right) := \inf_{g \in W_p^r} \left\{ \left\| f - g \right\|_p + t \left\| g^{(r)} \right\|_p \right\}$$

olur.

$K-$fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) $t \geq 0$ için $K\left(f, t\right)$ fonksiyonu artan, sürekli, konveks ve alt toplamsaldır. Yani

$$K\left(f, t_1 + t_2\right) \leq K\left(f, t_1\right) + K\left(f, t_2\right)$$

dir.

2) $X_0, X_1$ birer Banach uzayı ise $K\left(f, t\right)$ , $X_0 + X_1$ üzerinde bir yarı normdur.

3) $X_0, X_1$ yarı normlu uzaylar ise $t > 0$ sabiti için $K\left(f, t\right)$ de yarı normdur ve herhangi $f, g \in X_0 + X_1$ için

$$K\left(f + g; t\right) \leq C\left(K\left(f, t\right) + K\left(g, t\right)\right)$$

dir.

**Tanım 2.22. (K-Fonksiyoneli ve Süreklilik Modülü):**

$K$ – fonksiyoneli ve $\omega$, $\omega_r$ süreklilik modülü arasında kapalı bir bağıntı vardır. $\overline{\omega}$, $\omega$ nın konkav majorantı olmak üzere

$$\omega(f,t) \leq K(f,t,C,Lip1) \leq \overline{\omega}(f,t) \leq 2\omega(f,t)$$

eşitsizliği vardır.

**Teorem 2.7. (Korneichuk 1961):**

$A=[a,b]$ ya da $A=T$ olmak üzere $f \in C(A)$ için

$$K(f,t,C,Lip1) = \frac{1}{2}\overline{\omega}(f,2t)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat 2.7.**

Keyfi $f \in C(A)$, $g \in Lip1$ ve $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \omega(f,2t) &= \omega(f-g+g,2t) \\ &= \omega(f-g,2t)+\omega(g,2t) \\ &\leq 2\|f-g\|_C + 2t|g|_{Lip1} \\ &\leq 2\inf\left\{\|f-g\|_c + t|g|_{Lip1}\right\} \end{aligned}$$

olur.

Bu ise

$$\omega(f,2t) \le 2K(f,t)$$

olduğunu gösterir. $K$ konkav olduğundan

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}(f,2t) \le K(f,t)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tersine eşitsizliği ispatlamak için $f \in C(A)$ ve $t > 0$ bir sabit olsun. $2t$ sabit noktası ve $\overline{\omega}$ fonksiyonu için

$$\ell(s) := \overline{\omega}(f,2t) + M(s-2t)$$

olarak tanımlayalım. Burada $M$ bir sabittir.

$s = 2t$ de $\overline{\omega}$ lineer fonksiyonunun destek fonksiyonu

$$\overline{\omega}(f,s) \le \ell(s) \;\; ; s \ge 0$$

olduğundan

$$\delta := \frac{1}{2}\sup_{s>0}\left[\overline{\omega}(f,s) - Ms\right] = \frac{1}{2}\left[\overline{\omega}(f,2t) - 2Mt\right]$$

alınırsa $f$ ye karşılık gelen $g \in Lip1$ fonksiyonunu bulmak için her bir $y \in A$ da

$$f_y(x) := f(y) - M|x-y| - \delta \,,\; x \in A$$

yazılabilir.

Açıkça $f_y \in Lip1$ ve $\left|f_y\right|_{Lip1} \le M$ dir.

$g(x) := \sup\limits_{y \in A} f_y(x)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$f_y(x_1) \le f_y(x_2) + M\left|x_1 - x_2\right|$$

eşitsizliği $g$ için düzenlenebilir.

Böylece

$$|g|_{Lip1} \le M$$

dir. Bu $g$ fonksiyonu için

$$g(x) - f(x) = \sup_y \left[ f(y) - f(x) - M|x-y| - \delta \right] \ge -\delta$$

yazılabilir. Diğer taraftan $\delta$ nın tanımından $x, y \in A$ için

$$f(y) - f(x) - M|x-y| \le \omega\left(f; |x-y|\right) - M|x-y| \le 2\delta$$

olup, buradan $g(x) - f(x) \le \delta$ olur. Böylece $\|f-g\|_C \le \delta$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} K(f,t) &\le \|f-g\|_C + t|g|_{Lip1} \le \delta + Mt \\ &= \frac{1}{2}\overline{\omega}(f,2t) \end{aligned}$$

olur.

**Teorem 2.8. (Johnen 1972):**

$A = R$ , $R_+$ , $T$ ya da $[a,b]$ kümelerinden biri olsun. $1 \le p < \infty$ ve $r = 1,2,...$ için sadece $r$ ye bağlı $c_1$ ve $c_2 > 0$ sabitleri vardır, öyleki tüm $f \in L_p$ için

$$c_1\omega_r(f,t)_p \le K(f,t^r,L_p,\omega_p^r) \le c_2\omega_r(f,t)_p \ , \ t > 0$$

dır.

**İspat 2.8.**

Keyfi $g \in W_p^r$ için süreklilik modülünün temel özelliklerinden dolayı

$$\omega_r(f+g,t)_p \le \omega_r(f;t)_p + \omega_r(g;t)_p$$

$$\omega_r(f,t)_p \le 2^{r-k}\omega_k(f,t)_p \quad , \quad 1 \le p \le \infty$$

$$\omega_r(f,t)_p \le 2^{r-k}\omega_k(f,t)_p^p \ , \ \ 0 < p < 1$$

$$\omega_r(f,t)_p \le t^r |f| W_p^r$$

özellikleri gereğince

$$\begin{aligned}\omega_r(f,t)_p &\le \omega_r(f-g,t)_p + \omega_r(g,t)_p \\ &\le 2^r \|f-g\|_p + t^r \left\|g^{(r)}\right\|\end{aligned}$$

yazılabilir.

Bu da yukarıdaki eşitsizliğin $c_1 = 2^{-r}$ için sağlandığını gösterir. Eşitsizliğin sağ tarafını elde etmek için $t > 0$ üzerinde $f$ fonksiyonuna bağlı

$$g(x) := f(x) + (-1)^{r+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{tu}^r(f,x) M(u)\,du$$

ifadesini tanımlayalım. Burada $M(u) = M(0,...,r,u)$ şeklindedir.

$g$ fonksiyonu $A$ üzerinde tanımlıdır. ($A = R, R_+$ ya da $T$)

Eğer $A = [a,b]$ ise $g$ tanımlıdır. Eğer

$$x \in I_1 := \left[a, b - \frac{b-a}{4}\right] \text{ ve } t \le t_0 := \frac{(b-a)}{4r^2}$$

ise yine tanımlıdır.

$A = [a,b]$ için

$$\begin{aligned} \|f-g\|_p(A) &\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\Delta_{tu}^r(f,.)\right\|_p(A) M(u)\,du \\ &\le \omega_r(f,rt)_p \le r^r \omega_r(f,t)_p \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $M$, $[0,r]$ aralığındadır.

$g^{(r)}$ yi belirlemek için, $f$ nin $A$ üzerinde $r-$yinci integralinden biri $F$ olsun. $g(x)$ ifadesinin sağ tarafındaki integralin lineer kombinasyonu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+jtu) M(u)\,du &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u) M\left((jt)^{-1}u\right)(jt)^{-1}\,du \\ &= (jt)^{-r} \Delta_{jt}^r(F,x) \quad ; \quad j = 1,2,...,r \end{aligned}$$

olur.

Çünkü

$$M\left(\left(jt\right)^{-1}u\right)\left(jt\right)^{-1}=M\left(u;jt,...,rjt\right)$$

$$M\left(x\right):=M\left(x;x_0,...,x_r\right):=r\left[x_0,...,x_r\right]\left(.-x\right)^{r-1}$$

$$\left[x_0,...,x_r\right]f=\frac{1}{r!}\int_{-\infty}^{+\infty}f^{(r)}\left(t\right)M\left(t\right)dt$$

$f\left(t\right)=t^r$ olursa $\int_{-\infty}^{+\infty}M\left(t\right)dt=1$ dir. Bu ifadenin $r-$yinci türevi $\left(jt\right)^{-r}\Delta_{jt}^{r}\left(f;x\right)$ dir.

Bu durumda

$$g^{(r)}\left(x\right)=t^{-r}\sum_{j=1}^{r}\left(-1\right)^{jtr}\binom{r}{j}j^{-r}\Delta_{jt}^{r}\left(f;x\right)$$

olur.

$$\left\|\Delta_{jt}^{r}\left(f\right)\right\|\leq\omega_r\left(f;jt\right)\leq j^r\omega_r\left(f;t\right)$$

olduğundan

$$t^r\left\|g^{(r)}\right\|_p\left(A\right)\leq 2^r\omega_r\left(f;t\right)_p$$

$$\left\|f-g\right\|_p\left(A\right)+t^r\left\|g^{(r)}\right\|_p\left(A\right)\leq c\omega_r\left(f;t\right)_p$$

olduklarından teoremin sağ tarafının gerçeklendiği görülür.
(Benzer bir ispat Marchaud eşitsizliğinden yararlanılarak yapılmaktadır.)

**Teorem 2.9.**

Her bir $f \in L_p$ ve $1 \le p \le \infty$ , $r = 1,2,...$ için sadece $r$ ye bağlı öyle $c_1$ ve $c_2$ sabitleri vardır ki

$$c_1 \omega_r^{\varphi}\left(f,t\right)_p \le K\left(f,t^r,L_p,W_p^r\left(\varphi\right)\right) \le c_2 \omega_r^{\varphi}\left(f,t\right)_p \quad , \qquad 0 < t \le \left(2r\right)^{-1}$$

eşitsizliği sağlanır [26].

## 2.7. Baskakov Operatörü

$f \in C\left[0,\infty\right)$ ve her bir $n \in N$ için Baskakov operatörü

$$B_n\left(f;x\right) = \frac{1}{\left(1+x\right)^n}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^k} \tag{2.20}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k} x^k \left(1+x\right)^{-n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}\left(x\right) f\left(\frac{k}{n}\right)$$

biçiminde tanımlanır.

$$\left(1+x\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^k}$$

olduğundan

$$B_n\left(1;x\right) = \frac{1}{\left(1+x\right)^n}\sum_{k=0}^{\infty} 1 \binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^k} = 1$$

dir.

$$B_n(t;x)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(n+k-1)!}{n(n-1)!k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$=\frac{x}{(1+x)}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{k-1}}$$

$k\to k+1$ için

$$=\frac{x}{(1+x)}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$=\frac{x}{(1+x)}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$=\frac{x}{(1+x)}\frac{1}{(1+x)^n}(1+x)^{n+1}$$

$$B_n(t;x)=x \quad (\alpha_n(x)=0)$$

dir.

$$B_n(t^2;x)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{n^2}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-2)!}\frac{x^{k-2}}{(1+x)^{k-2}}+\frac{1}{n}B_n(t,x)$$

$$=\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!(k-2)!}\frac{x^{k-2}}{(1+x)^{k-2}}+\frac{x}{n}$$

$k \to k+2$ için

$$=\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{(n+1)!k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n}$$

$$=\frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}(1+x)^{n+2}+\frac{x}{n}$$

$$=x^2+\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}$$

$$B_n(t^2;x)=x^2+\frac{x(1+x)}{n}$$

dir.

Buradan görülmektedir ki $n \to \infty$ için

$$B_n(1;x) \to 1$$

$$B_n(t;x) \to x$$

$$B_n(t^2;x) \to x^2$$

dir.

**Not 2.4.**

Korovkin teoremi uygulandığında da Baskakov operatörünün sonlu aralıkta kendisini oluşturan $f$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu kolayca görülür.

**Teorem 2.10.**

$f \in C_{k_f}[0,\infty) = \left\{ f : f, [0,\infty) \text{ } sürekli \text{ } ve \text{ } \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{(1+x)^2} = k_f \right\}$ ise $R$ nin her kompakt alt aralığında

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x)$$

yakınsaması düzgündür ve

$$\left| B_n(f;x) - f(x) \right| \le m\omega\left( f; \sqrt{\frac{x(1+x)}{n}} \right)$$

eşitsizliği doğrudur.

**İspat 2.10.**

$$B_n(f;x)-f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}-f(x).1$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}-\sum_{k=0}^{\infty} f(x)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right\}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+k)^{n+k}}$$

Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa;

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right\}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{\left(1+x^{n+k}\right)}\right|$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{\substack{x\in[a,b]\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\delta}}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P_{n,k}(x)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)\,\omega\left(f;\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)\,\omega\left(f;\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)$$

$$\leq\omega(f;\delta)\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)\left(1+\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{\delta}\right)$$

$$=\omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|P_{n,k}(x)\right\}$$

olur.

Diğer taraftan Hölder eşitsizliğinden

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right| = \omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2 P_{n,k}(x)}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)}\right]\right\}$$

$$\leq \omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2 P_{n,k}(x)}\right\}$$

$$= \omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sqrt{B_n\left(\left(\frac{k}{n}-x\right)^2;x\right)}\right\}$$

$$\leq \omega(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

$$\times\left[\frac{1}{(1+n)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\right]^{1/2}$$

$$= \omega(f,\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{B_{n,1}(t^2,x)-2xB_{n,1}(t,x)+x^2}\right]$$

$$= \omega(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right\}$$

bulunur.

$\delta=\sqrt{\dfrac{x(1+x)}{n}}$ seçilir ve parantez içindeki sabit $m$ ile gösterilirse

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right| \leq m\omega\left(f;\sqrt{\frac{x(1+x)}{n}}\right)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Yukarıda verilen tek değişkenli Baskakov operatörü $n-$boyutlu uzayda da tanımlanmaktadır. Tezin ileriki kısımlarında bu tanımlama ve özellikleri açıklanacaktır. Ancak şimdi burada işlemlerin kolay anlaşılabilmesi için iki değişkenli Baskakov operatörünü tanımlayıp sağladığı bazı özellikleri gösterelim.

$$B_n\left(f,x_1,x_2\right)=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^k x_2^k}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

operatörü için $1,t,s,t^2,s^2,t^2+s^2$ ifadelerini hesaplayalım.

$$B_n\left(1,x_1,x_2\right)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1-k_2}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}=1$$

$$B_n\left(1,x_1,x_2\right)=1$$

dir.

$$B_n\left(t,x_1,x_2\right)=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_1}{n}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_1}{n}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n+k_1+k_2-1-k_1-k_2\right)!}$$

$$\times\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{\left(k_1-1\right)!k_2!n!}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{x_1}{\left(1+x_1+x_2\right)}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{\left(k_1-1\right)!k_2!n!}$$

$$\times\frac{x_1^{k_1-1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-1}}$$

$k_1 \to k_1+1$ için

$$=\frac{x_1}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+1}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2\right)!}{k_1!k_2!n!}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(x_1+x_2+1\right)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{x_1}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+1}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(x_1+x_2+1\right)^{k_1+k_2}}=x_1$$

$$B_n\left(t,x_1,x_2\right)=x_1$$

dir.

$$B_n\left(s,x_1,x_2\right)=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_2}{n}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_2}{n}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n+k_1+k_2-1-k_1-k_2\right)!}$$

$$\times\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{\left(k_2-1\right)!k_1!n!}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{x_2}{\left(1+x_1+x_2\right)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{\left(k_2-1\right)!k_1!n!}$$

$$\times\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2-1}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-1}}$$

$k_2 \to k_2+1$ için

$$=\frac{x_2}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+1}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2\right)!}{k_1!k_2!n!}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(x_1+x_2+1\right)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{x_2}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+1}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(x_1+x_2+1\right)^{k_1+k_2}}=x_2$$

$$B_n\left(s,x_1,x_2\right)=x_2$$

dir.

$$B\left(t^2,x_1,x_2\right)=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_1^2}{n^2}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_1\left(k_1-1\right)}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_1}{n}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n}}\frac{1}{n}\frac{x_1^2}{\left(1+x_1+x_2\right)}\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-2}}$$

$$\times\frac{k_1\left(k_1-1\right)}{n}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n+k_1+k_2-1-k_2-k_2\right)!}+\frac{1}{n}B\left(t,x_1,x_2\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n}}\frac{x_1^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^2}\frac{1}{n}\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{\left(k_1-2\right)!k_2!n!}$$

$$\times\frac{x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-2}}+\frac{x_1}{n}$$

$k_1 \rightarrow k_1 + 2$ için

$$= \frac{x_1^2}{(1+x_1+x_2)^{n+2}} \frac{1}{n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(n+k_1+k_2+1)!}{k_1! k_2! n!} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} + \frac{x_1}{n}$$

$$= \frac{x_1^2}{(1+x_1+x_2)^{n+2}} \frac{n+1}{n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2+1}{k} \frac{x_1^{k} x_2^{k}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} + \frac{x_1}{n}$$

$$= x_1^2 \frac{n+1}{n} + \frac{x_1}{n}$$

$$= \frac{nx_1^2 + x_1^2 + x_1}{n}$$

$$= x_1^2 + \frac{x_1(x_1+1)}{n}$$

$$B(t^2, x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{x_1(x_1+1)}{n}$$

dir.

$$B(s^2, x_1, x_2) = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} \frac{k_2^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} \frac{k_2(k_2-1)}{n^2}$$

$$+ \frac{1}{n} \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} \frac{k_2}{n}$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \frac{1}{n} \frac{x_2^2}{(1+x_1+x_2)} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=2}^{\infty} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2-2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2-2}}$$

$$\times \frac{k_2(k_2-1)}{n} \frac{(n+k_1+k_2-1)!}{k_1! k_2! (n+k_1+k_2-1-k_2-k_2)!} + \frac{1}{n} B(s, x_1, x_2)$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{x_2^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^2}\frac{1}{n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{\left(k_2-2\right)!k_1!n!}$$

$$\times\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2-2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-2}}+\frac{x_2}{n}$$

$k_2 \to k_2+1$ için

$$=\frac{x_2^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+2}}\frac{1}{n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2+1\right)!}{k_1!k_2!n!}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}+\frac{x_2}{n}$$

$$=\frac{x_2^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+2}}\frac{n+1}{n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2+1}{k}\frac{x_1^{k}x_2^{k}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}+\frac{x_2}{n}$$

$$=x_2^2\frac{n+1}{n}+\frac{x_2}{n}$$

$$=\frac{nx_2^2+x_2^2+x_2}{n}$$

$$=x_2^2+\frac{x_2\left(x_2+1\right)}{n}$$

$$B\left(s^2,x_1,x_2\right)=x_2^2+\frac{x_2\left(x_2+1\right)}{n}$$

dir.

$$B\left(t^2+s^2,x_1,x_2\right)=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_1^2+k_2^2}{n^2}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_1^2}{n^2}$$

$$+\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_2^2}{n^2}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_1\left(k\ -1\right)}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_1}{n}$$

$$+\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_2\left(k_2-1\right)}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}\frac{k_2}{n}$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{1}{n}\frac{x_1^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^2}\sum_{k_1=2}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_1\left(k_1-1\right)}{n}$$

$$\times\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n+k_1+k_2-1-k_1-k_2\right)!}\frac{x_1^{k_1}-x_2^{k_2}.1}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-2}}$$

$$+\frac{1}{n}B\left(t,x_1,x_2\right)+\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{1}{n}\frac{x_2^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^2}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_2\left(k_2-1\right)}{n}$$

$$\times\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n+k_1+k_2-1-k_1-k_2\right)!}\frac{x_1^{k_2}x_2^{k_2-2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-2}}$$

$$+\frac{1}{n}B\left(s,x_1,x_2\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{x_1^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{1}{n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{\left(k_1-2\right)!k_2!n!}$$

$$\times\frac{x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-2}}+\frac{x_1}{n}$$

$$+\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{x_2^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^n}\frac{1}{n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=2}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{\left(k_2-2\right)!k_1!n!}$$

$$\times \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2-2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2-2}}+\frac{x_2}{n}$$

$k_2 \rightarrow k_2+2$ için

$$=\frac{x_1^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+2}} \frac{1}{n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\left(n+k_1+k_2+1\right)!}{k_1!k_2!n!} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}$$

$$+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+2}} \frac{1}{n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\left(n+k_1+k_2+1\right)!}{k_1!k_2!n!}$$

$$\times \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}+\frac{x_2}{n}$$

$$=\frac{x_1^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+2}} \frac{n+1}{n} \sum_{k\ =0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2+1}{k}$$

$$\times \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2^2}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+2}} \frac{n+1}{n} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{k_1+k_2}}+\frac{x_2}{n}$$

$$=x_1^2 \frac{n+1}{n}+\frac{x_1}{n}+x_2^2 \frac{n+1}{n}+\frac{x_2}{n}$$

$$=\frac{n x_1^2+x_1^2+x_1}{n}+\frac{x_2^2 n+x_2^2+x_2}{n}$$

$$=x_1^2+\frac{x_1\left(x_1+1\right)}{n}+x_2^2+\frac{x_2\left(x_2+1\right)}{n}$$

$$B\left(t^2+s^2, x_1, x_2\right)=x_1^2+x_2^2+\frac{x_1\left(x_1+1\right)}{n}+\frac{x_2\left(x_2+1\right)}{n}$$

dir.

$n \rightarrow \infty$ için verilen operatörün Korovkin teoremini sağladığı görülmektedir.

**Teorem 2.11.**

$f \in C_{k_f}\left[0,\infty\right) = \left\{ f : f, \left[0,\infty\right) \; da \; sürekli \; ve \quad \lim\limits_{(x_1,x_2)\to\infty} \dfrac{f\left(x_1,x_2\right)}{\left(1+x_1+x_2\right)^2} = k_f \right\}$ ise

$D \subset R^2$ kompakt bölgesinde

$$\lim_{n\to\infty} B_n^2\left(f;x_1,x_2\right) = f\left(x_1,x_2\right)$$

yakınsaması düzgündür ve

$$\left|B_n^2\left(f;x_1,x_2\right) - f\left(x_1,x_2\right)\right| \le m\omega\left(f;\sqrt{\frac{x_1\left(1+x_1\right)+x_2\left(1+x_2\right)}{n}}\right)$$

eşitliği doğrudur.

**İspat 2.11.**

$B_n^2\left(f,x_1,x_2\right) - f\left(x_1,x_2\right)$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) - f\left(x_1,x_2\right).1$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}} - \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(x_1,x_2\right)$$

$$\times\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left\{ f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) - f\left(x_1,x_2\right)\right\}$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left\{f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)\right\}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|B_n\left(f,x_1,x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left\{f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)\right\}\right|$$

$$=\left|\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left\{f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left\{f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)\right\}\right|$$

$$\leq\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left|f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)\right|$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left|f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)\right|$$

eşitliği elde edilir.

Sağ toplamlara sırası ile $\mathrm{I}_1$ ve $\mathrm{I}_2$ denirse;

$$\left|B_n\left(f,x_1,x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)\right|\le \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2$$

$$\mathrm{I}_1=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left|f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)\right|$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n,k}\left(x_1,x_2\right)\sup_{\substack{x_2\in[a,b]\\ \left|\frac{k_2}{n}-x_2\right|\le\delta}}\left|f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)\right|$$

$$\mathrm{I}_1\le\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\omega\left(f;\left|\frac{k_2}{n}-x_2\right|\right)$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\omega\left(f;\left|\frac{k_2}{n}-x_2\right|\frac{\delta}{\delta}\right)$$

$$\le\omega\left(f;\delta\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n,k}\left(x_1,x_2\right)\left(1+\frac{\left|\frac{k_2}{n}-x_2\right|}{\delta}\right)$$

$$=\omega\left(f,\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{k_2}{n}-x_2\right|P_{n,k_1,k_2}\right\}$$

Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$I_1\le\omega\left(f,\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left(\frac{k_2}{n}-x_2\right)^2\right]^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\right]^{1/2}\right\}$$

$$=\omega(f,\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{B_n\left(s^2;x_1,x_2\right)-2x_2B_n\left(s,x_1,x_2\right)+x_2^2}\right]$$

$$=\omega(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\left(x_2^2+\frac{(1+x_2)x_2}{n}-2x_2^2+x_2^2\right)^{1/2}\right]$$

$$=\omega(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\frac{\sqrt{x_2(1+x_2)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$\delta=\sqrt{\dfrac{x_2(1+x_2)}{n}}$ seçilir ve parantez içindeki sabit $m$ ile gösterilirse

$$I_1\leq\omega\left(f;\sqrt{\frac{(x_2+1)x_2}{n}}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{x_2(1+x_2)}}\frac{\sqrt{x_2(1+x_2)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$=m\omega\left(f;\sqrt{\frac{x_2(1+x_2)}{n}}\right)$$

olur.

$$\mathrm{I}_2=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{n+k_1+k_2}}\left|f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)-f(x_1,x_2)\right|$$

$$\leq\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{n+k_1+k_2}}\sup_{\substack{x_1\in[a,b]\\ \left|\frac{k_1}{n}-x_1\right|\leq\delta}}\left|f\left(\frac{k_1}{n},x_2\right)-f(x_1,x_2)\right|$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{n+k_1+k_2}}\omega\left(f,\left|\frac{k_1}{n}-x_1\right|\right)$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\omega\left(f;\left|\frac{k_1}{n}-x_1\right|\frac{\delta}{\delta}\right)$$

$$\leq\omega\left(f;\delta\right)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n,k_1,k_2}\left(1+\frac{\left|\frac{k_1}{n}-x_1\right|}{\delta}\right)$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\frac{k_1}{n}-x_1\right|P_{n,k_1,k_2}\right\}$$

olur.

Bu ifadeye Hölder eşitsizliği uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$I_2\leq\omega\left(f;\delta\right)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\left(\frac{k_1}{n}-x_1\right)^2\right]^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{n+k_1+k_2}}\right]^{1/2}\right\}$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{B_n\left(t^2,x_1,x_2\right)-2x_1B\left(t,x_1,x_2\right)+x_1^2}\right]$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left[1+\frac{1}{\delta}\left[x_1^2+\frac{\left(1+x_1\right)x_1}{n}-2x_1^2+x_1^2\right]^{1/2}\right]$$

$$=\omega\left(f;\delta\right)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x_1\left(1+x_1\right)}{n}}\right]$$

$\delta=\sqrt{\dfrac{x_1\left(1+x_1\right)}{n}}$ seçilir ve parantez içindeki sabit $m$ ile gösterilirse

$$I_2 \ \le m\omega\left(f;\sqrt{\frac{x_1\left(1+x_1\right)}{n}}\right)$$

olur.

$I_1$ ve $I_2$ yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}B_n\left(f,x_1,x_2\right)-f\left(x_1,x_2\right)&\le m_1\omega\left(f;\sqrt{\frac{x_2\left(1+x_2\right)}{n}}\right)+m_2\omega\left(f;\sqrt{\frac{x_1\left(1+x_1\right)}{n}}\right)\\&\le m\omega\left(f;\sqrt{\frac{x_1\left(1+x_1\right)+x_2\left(1+x_2\right)}{n}}\right)\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

# 3. ÇOK DEĞİŞKENLİ BASKAKOV OPERATÖRÜ

Tezin bu kısmında daha önce verilen tek değişkenli ve iki değişkenli Baskakov operatörünün $d-$boyutlu uzaydaki tanımı yapılacaktır.

Bu operatörün monoton, alt toplamsal ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için bazı özellikleri ile beraber $K-$fonksiyoneli ve süreklilik modülü ile yakınsaklık hızları incelenecektir.

Bu çalışma boyunca

$$\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,...,x_d\right)\in R^d \quad , \quad \left|\mathbf{x}\right|=\sum_{i=1}^{d} x_i$$

$$\mathbf{x}\in R^d\ ,\ \mathbf{k}=\left(k_1,k_2,...,k_d\right)\in N_0^d \text{ ve } n\in N$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}}=x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_d^{k_d}\ ,\ \mathbf{k}!=k_1!k_2!...k_d!\ ,\ \left|\mathbf{k}\right|=\sum_{i=1}^{d} k_i$$

$$\binom{n}{\mathbf{k}}=\frac{n!}{\mathbf{k}!\left(n-\left|\mathbf{k}\right|\right)!} \quad , \quad \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty}=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_d=0}^{\infty}$$

şeklinde standart gösterimler kullanılacaktır.

$T\subset R^d\left(d\in N\right)$ olsun. Buradaki $T$

$$T=T_d=\left\{\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,...,x_d\right)\in R^d:0\le x_i\le\infty,1\le i\le d\right\}$$

şeklindedir.

$T$ de tanımlı $f$ fonksiyonu için çok değişkenli Baskakov operatörü

$$B_{n,d}f = B_{n,d}\left(f,\mathbf{x}\right) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} P_{n,\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}\right) f\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki

$$P_{n,\mathbf{k}}\left(\mathbf{x}\right) = \binom{n+|\mathbf{k}|-1}{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \left(1+|\mathbf{x}|\right)^{-n-|\mathbf{k}|}$$

dir.

Bu operatör, doğal olarak 2.20'de verilen tek değişkenli Baskakov operatörü için tensörsüz çarpımın genellemesidir. [18] de verilen çok değişkenli operatör için benzer tanım yapılabilir.

Tezin bu kısmında 3.1'deki çok değişkenli Baskakov operatörü için incelemeler yapılacaktır. Operatörün monoton, alt toplamsal ve Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar için bazı özellikler ispatlanacaktır. [7,9,16] daki operatörlerden biri olan Bernstein operatörleri için bu sonuçlar benzerdir. Ayrıca fonksiyonun konveksliği koşulu altında Baskakov operatörünün monotonluğu ile ilgilenilecektir.

## 3.1. Çok Değişkenli Baskakov Operatörü İçin Bazı Özellikler

$B_n^* f$ klasik Bernstein operatörü için eğer,

$$f \in Lip_A\left(\mu,[0,1]\right) \Rightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{n}}^* f \in Lip_A\left(\mu,[0,1]\right) \tag{3.2}$$

olduğu bilinir.

Burada $Lip_A(\mu, S)$ , $S$ de

$$\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right| \le A\sum_{i=1}^{d}\left|x_i - y_i\right|^{\mu} \tag{3.3}$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_d) \in S$, $A > 0$ ve $0 < \mu < 1$ , $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ nin bağımsız olduğu, reel değerli sürekli $f$ fonksiyonların sınıfıdır.

Bazı tanımlar ve notasyonlar verelim.

$f \in C(T)$ fonksiyonu için süreklilik modülü

$$\Omega(f, \mathbf{u}) = \sup\left\{ \left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right| : \left|x_i - y_i\right| \le u_i,\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in T, \mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_d) \in T_d \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Düzlemsel bir $D$ bölgesi için $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ olduğunda

$$f\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\right) \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Benzer olarak $T$ de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$ değişkenleri ve $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d$ reel sayıları için $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m = 1$ olmak üzere

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \le \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(\mathbf{x}_i) \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlayan $f$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

$T$ de tanımlı negatif olmayan ve sürekli bir $\omega(\mathbf{u})$ fonksiyonu eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa süreklilik modülü olarak adlandırılır.

i. $\omega(\mathbf{0})=0$ öyleki $\mathbf{0}=(0,0,...,0)$ dır.

ii. $\mathbf{u}$ ya göre $\omega(\mathbf{u})$ azalmayan fonksiyondur. Yani $\mathbf{u}\geq\mathbf{v}$ için $\omega(\mathbf{u})\geq\omega(\mathbf{v})$ olur. Burada her $1\leq i\leq d$ için $\mathbf{u}\geq\mathbf{v}$ olması $u_i\geq v_i$ olmasıdır. Ayrıca $\mathbf{u}=(u_1,u_2,...,u_d)$ , $\mathbf{v}=(v_1,v_2,...,v_d)\in T_d$ dir.

iii. $\omega(\mathbf{u})$ alt toplamsaldır. Yani $\omega(\mathbf{u}+\mathbf{v})\leq\omega(\mathbf{u})+\omega(\mathbf{v})$ dir.

**Teorem 3.1.**

3.1'de verilen $B_{n,d}(f,\mathbf{x})$ çok değişkenli Baskakov operatörü için eğer $B_{n,d}(\omega,\mathbf{u})$ için, $\omega(\mathbf{u})$ süreklilik modülü fonksiyonu ise

$$B_{n,d}(\omega,\mathbf{u})\leq 2d\omega(\mathbf{u})$$

eşitsizliği sağlanır.

Teoremin ispatı için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

**Lemma 3.1.**

Her bir $\omega(\mathbf{u})$ süreklilik modülü fonksiyonu için bir $\omega^*(\mathbf{u})$ süreklilik modülü konveks fonksiyonu vardır. Öyleki

$$\omega(\mathbf{u})\leq\omega^*(\mathbf{u})\leq 2d\omega(\mathbf{u})$$

eşitsizliği sağlanır.

İlk önce Lemma 3.1 in ispatını yapalım.

**İspat 3.1.**

$R$ deki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri için iç çarpım

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{d}x_i y_i$$

dir.

Bu durumda $\mathbf{u}=(u_1,u_2,...,u_d)\in R^d$ için $\mathbf{e}_i$ $(i=1,2,...,d)$ ile $i-$yinci bileşeni $1$ diğer bileşeni $0$ olan birim vektör olmak üzere

$$\max_{1\le i\le d}\left\{\Omega(f,\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u})\right\}\le\omega(\mathbf{u})\le\sum_{i=1}^{d}\Omega(f,\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u})\le d\Omega(f,\mathbf{u})$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

Şimdi $f(\mathbf{u})=\omega(\mathbf{u})$ alalım. Bu durumda $\Omega(f,\mathbf{u})=\omega(\mathbf{u})$ olup

$$\omega(\mathbf{u})\le\sum_{i=1}^{d}\Omega(f,\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u})\le d\omega(\mathbf{u})$$

eşitsizliği sağlanır.

Her bir $\omega(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u})$ için $\delta(u_i)$ şeklinde konveks bir süreklilik modülü fonksiyonu vardır. Öyleki

$$\omega(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u})\le\delta(u_i)\le 2\omega(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{u})$$

eşitsizliği sağlanır.

$\omega^*(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{d} \delta(u_i)$ olarak tanımlanırsa bu fonksiyon süreklilik modülünün konveks bir fonksiyonu olur. Bu durumda

$$\omega(\mathbf{u}) \le \sum_{i=1}^{d} \omega(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) \le \sum_{i=1}^{d} \delta(u_i) = \omega^*(\mathbf{u}) \le 2\sum_{i=1}^{d} \omega(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) \le 2d\omega(\mathbf{u})$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece Lemma 3.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi Teorem 3.1 in ispatına başlayalım.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ , $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_d) \in T$ ve $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ olsun.

$\mathbf{i} = (i_1, i_2, ..., i_d) \in N_0^d$ için

$$B_{n,d}(f, \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + |\mathbf{k}| - 1}{\mathbf{k}} (\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}))^{\mathbf{k}} (1 + |\mathbf{y}|)^{-n-|\mathbf{k}|} f\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} ... \sum_{k_d=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} ... \sum_{i_d=0}^{\infty} \frac{(n + |\mathbf{k}| - 1)!}{(n-1)!\mathbf{i}!(\mathbf{k} - \mathbf{i})!}$$

$$\times \mathbf{x}^{\mathbf{i}} (\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\mathbf{k}-\mathbf{i}} (1 + |\mathbf{y}|)^{-n-|\mathbf{k}|} f\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)$$

operatöründe

$\mathbf{j} = (j_1, j_2, ..., j_d) \in N_0^d$ olmak üzere $i_1 + j_1 = k_1$, $i_2 + j_2 = k_2$, . . . , $i_d + j_d = k_d$ değişken değiştirmesi yapılıp yerlerine yazılırsa

$$B_{n,d}(f, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{j}=0}^{\infty} \frac{(n + |\mathbf{i} + \mathbf{j}| - 1)!}{\mathbf{i}!\mathbf{j}!(n-1)!} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} (\mathbf{y} - \mathbf{x})^{\mathbf{j}} (1 + |\mathbf{y}|)^{-n-|\mathbf{i}+\mathbf{j}|} f\left(\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{n}\right)$$

olur.

Diğer taraftan

$$B_{n,d}\left(f,\mathbf{x}\right)=\sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty}\binom{n+|\mathbf{i}|-1}{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}\left(1+|\mathbf{y}|-\left(|\mathbf{y}|-|\mathbf{x}|\right)\right)^{-n-|\mathbf{i}|}f\left(\frac{\mathbf{i}}{n}\right)$$

$$=\sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j}=0}^{\infty}\frac{\left(n+|\mathbf{i}+\mathbf{j}|-1\right)!}{\mathbf{i}!\,\mathbf{j}!\left(n-1\right)!}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}\left(\mathbf{y}-\mathbf{x}\right)^{\mathbf{j}}\left(1+|\mathbf{y}|\right)^{-n-|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}f\left(\frac{\mathbf{i}}{n}\right)$$

olarak yazılabileceğinden

$$B_{n,d}\left(f,\mathbf{y}\right)-B_{n,d}\left(f,\mathbf{x}\right)=\sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j}=0}^{\infty}\frac{\left(n+|\mathbf{i}+\mathbf{j}|-1\right)!}{\mathbf{i}!\,\mathbf{j}!\left(n-1\right)!}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}\left(\mathbf{y}-\mathbf{x}\right)^{\mathbf{j}}\left(1+|\mathbf{y}|\right)^{-n-|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}\left(f\left(\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{n}\right)-f\left(\frac{\mathbf{i}}{n}\right)\right)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece görülür ki $f$ nin konveks fonksiyon olmasından dolayı $\mathbf{y}\geq\mathbf{x}$ için

$$B_{n,d}\left(\omega,\mathbf{y}\right)-B_{n,d}\left(\omega,\mathbf{x}\right)\geq 0$$

ve

$$B_{n,d}\left(\omega,\mathbf{y}\right)-B_{n,d}\left(\omega,\mathbf{x}\right)\leq\sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j}=0}^{\infty}\frac{\left(n+|\mathbf{i}+\mathbf{j}|-1\right)!}{\mathbf{i}!\,\mathbf{j}!\left(n-1\right)!}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}\left(\mathbf{y}-\mathbf{x}\right)^{\mathbf{j}}\left(1+|\mathbf{y}|\right)^{-n-|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}\omega\left(\frac{\mathbf{j}}{n}\right)$$

$$=\sum_{\mathbf{j}=0}^{\infty}\frac{\left(n+|\mathbf{j}|-1\right)!}{\mathbf{j}!\left(n-1\right)!}\left(\mathbf{y}-\mathbf{x}\right)^{\mathbf{j}}\left(1+|\mathbf{y}-\mathbf{x}|\right)^{-n-|\mathbf{j}|}\omega\left(\frac{\mathbf{j}}{n}\right)$$

$$=B_{n,d}\left(\omega,\mathbf{y}-\mathbf{x}\right)$$

dir.

Böylelikle $B_{n,d}(\omega,\mathbf{x})$ alt toplamsal olduğu da görülmüş olur. Ayrıca kolaylıkla görülüyor ki $B_{n,d}(\omega,\mathbf{0})=\omega(\mathbf{0})=0$ dır. Bu durumda $B_{n,d}(\omega,\mathbf{x})$ süreklilik modülü fonksiyonudur.

Lemma 3.1 den bilinir ki her $\omega(\mathbf{u})$ süreklilik modülü fonksiyonu için $\omega^*(\mathbf{u})$ süreklilik modülü konveks fonksiyonu vardır. Yani

$$\omega(\mathbf{u})\le\omega^*(\mathbf{u})\le 2d\omega(\mathbf{u})$$

eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla

$$B_{n,d}(\omega,\mathbf{u})\le B_{n,d}(\omega^*,\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{d}B_{n,d}(\delta(t_i),\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{d}B_{n,1}(\delta(t_i),u_i)$$

olur. Böylece Teorem 3.1 in ispatı için sadece

$$B_{n,1}(\delta(t_i),u_i)\le\delta(u_i)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu da demek oluyor ki

$$B_{n,d}(\omega,\mathbf{u})\le\sum_{i=1}^{d}\delta(u_i)=\omega^*(\mathbf{u})\le 2d\omega(\mathbf{u})$$

olmasıdır.

Gerçekten $f(x)$ , $[0,\infty)$ aralığında tanımlı konveks bir fonksiyon olsun.

Bu durumda

$$m_i \geq 0 \text{ , } \sum_{i=0}^{\infty} m_i = 1 \text{ ve } x_i \in [0,\infty)$$

dir.

Dolayısıyla

$$f\left(\sum_{i=0}^{\infty} m_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} m_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır.

$B_{n,1}(t;x) = x$ durumu kullanılırsa

$$f(x) = f\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) = B_{n,1}(f,x)$$

olduğunu verir. O halde $f(u) = -\delta(u_i)$ alırsak $\delta(u_i) \geq B_{n,1}(\delta,u_i)$ olduğu elde edilir.

Böylece Teorem 3.1 in ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 3.2.**

3.1'de tanımlı $B_{n,d}(f,\mathbf{x})$ çok değişkenli Baskakov operatörü için, $f \in Lip_A(\mu,T)$ $0 < \mu \leq 1$ ise o taktirde

$$B_{n,d} f \in Lip_A(\mu,T)$$

dir.

**İspat 3.2.**

İspat basitlik açısından $d=2$ alarak yapılacaktır.

Eğer $\mathbf{x}\le\mathbf{y}$ $(x_1\le y_1, x_2\le y_2)$ ise bu durumda bir önceki teoremin ispatını göz önüne alındığında $f$ Lipschitz sınıfından olduğundan

$$\left|B_{n,d}(f,\mathbf{x})-B_{n,d}(f,\mathbf{y})\right|\le\sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j}=0}^{\infty}\frac{(n+|\mathbf{i}+\mathbf{j}|-1)!}{\mathbf{i}!\mathbf{j}!(n-j)!}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathbf{j}}(1+|\mathbf{y}|)^{-n-|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}\left|f\left(\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{n}\right)-f\left(\frac{\mathbf{i}}{n}\right)\right|$$

$$\le A\sum_{\mathbf{i}=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j}=0}^{\infty}\frac{(n+|\mathbf{i}+\mathbf{j}|-1)!}{\mathbf{i}!\mathbf{j}!(n-j)!}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathbf{j}}(1+|\mathbf{y}|)^{-n-|\mathbf{i}+\mathbf{j}|}$$

$$\times\left(\left(\frac{j_1}{n}\right)^{\mu}+\left(\frac{j_2}{n}\right)^{\mu}\right)$$

$$=AB_{n,2}\left(u_1^{\mu}+u_2^{\mu},\mathbf{y}-\mathbf{x}\right)$$

$$=A\left(B_{n,1}\left(u_1^{\mu},y_1-x_1\right)+B_{n,1}\left(u_2^{\mu},y_2-x_2\right)\right)$$

yazılabilir.

İlerleyen kısımda verilecek Teorem 3.4 ün sonucu göz önüne alındığında

$$x^{\mu}\ge B_{n,1}\left(u_1^{\mu},x\right)$$

olduğu görülür. Bu da demek oluyor ki

$$\left|B_{n,d}(f,\mathbf{x})-B_{n,d}(f,\mathbf{y})\right|\le A\left(\left|y_1-x_1\right|^{\mu}+\left|y_2-x_2\right|^{\mu}\right)$$

dir.

Bu nedenle

$$B_{n,d}\, f \in Lip_A\left(\mu,T\right)$$

dir.

$x_1 \geq y_1$, $x_2 \leq y_2$ ise $\left(y_1,x_2\right)\in T_2$ olur. Yukarıdaki ispattan anlaşılıyor ki

$$\begin{aligned}\left|B_{n,2}\left(f,\mathbf{x}\right)-B_{n,2}\left(f,\mathbf{y}\right)\right| &\leq \left|B_{n,2}\left(f,\left(x_1,x_2\right)\right)-B_{n,2}\left(f,\left(y_1,x_2\right)\right)\right| \\ &\quad+\left|B_{n,2}\left(f,\left(y_1,y_2\right)\right)-B_{n,2}\left(f,\left(y_1,x_2\right)\right)\right| \\ &\leq A\sum_{t=1}^{2}\left|x_t-y_t\right|^{\mu}\end{aligned}$$

dir.

Benzer şekilde $x_1 \geq y_1$, $x_2 \geq y_2$ durumunun ispatı da tamamlanmış olur. Dolayısıyla Teorem 3.2 nin ispatı tamamlanır.

Şimdi çok değişkenli Baskakov operatörünün monotonluk durumunu inceleyelim.

**Teorem 3.3.**

Kabul edelim ki $f\left(\mathbf{x}\right)$, $T$ üzerinde tanımlı ve $f\left(\mathbf{x}\right)\geq 0$ olsun. Eğer $\dfrac{f\left(\mathbf{x}\right)}{x_i}$ $\left(i=1,2,...,d\right)$, $\left(0,\infty\right)$ aralığındaki $x_i$ ler için artmayansa, o taktirde $\dfrac{B_{n,d}\left(f;\mathbf{x}\right)}{x_i}$ $\left(i=1,2,...,d\right)$ lerde $\left(0,\infty\right)$ aralığındaki $x_i$ ler için artmayandır.

**İspat 3.3.**

İspat için $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B_{2,d}\left(f,x_1,x_2\right)}{x_1}\right)\le 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $n\ge 1$ için doğrudan hesaplamaları yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B_{2,d}\left(f,x_1,x_2\right)}{x_1}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}}{x_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_2-1}{k_2}\frac{x_2^{k_2}}{x_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{x_1^{k_1}}{x_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\right]$$

$$=\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_2-1}{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{x_2^{k_2}}{x_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)\right]$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1^{k_1-1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)}\right]f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\left[\frac{(n+k_2-1)!}{k_2!(n-1)!}\frac{x_2^{k_2}}{x_1^2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{(n+k_2-1)!}{k_2!(n-1)!}\frac{x_2^{k_2}}{x_1}\left(n+k_2\right)\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2-1}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)\right]$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\left(k_1-1\right)x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2}\left(-n-\left(k_1+k_2\right)\right)\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\left[\frac{\left(n+k_1+k_2-k_1-1\right)!\left(1+x_1+x_2\right)}{k_2!\left(n-1\right)!\left(1+x_1+x_2\right)}\frac{x_2^{k_2}}{x_1^2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2+k_1-k_1}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\left(n+k_1+k_2-k_1-1\right)!}{k_2!\left(n-1\right)!}\frac{x_2^{k_2}}{x_1}\frac{x_1}{x_1}\left(n+k_2\right)\frac{\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2+k_1-k_1}}{\left(1+x_1+x_2\right)}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)\right]$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\left(k_1-1\right)x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}x_1^{k_1-1}x_2^{k_2}\left(-n-\left(k_1+k_2\right)\right)\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+\left|k_1+k_2\right|-k_1-1\right)!}{k_2!\left(n-1\right)!}\left[\frac{\left(1+x_1+x_2\right)+\left(n+k_2\right)x_1}{x_1^2\left(1+x_1+x_2\right)}\right]x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left|k_1+k_2\right|+k_1}$$

$$\times f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n-1\right)!}\left[\left(k_1-1\right)\left(1+x_1+x_2\right)+x_1\left(-n-\left(k_1+k_2\right)\right)\right]$$

$$\times f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1}$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+\left|k_1+k_2\right|-k_1-1\right)!}{k_2!\left(n-1\right)!}\left[\frac{\left(1+x_1+x_2\right)+\left(n+k_2\right)x_1}{x_1^2\left(1+x_1+x_2\right)}\right]f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)$$

$$\times x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left|k_1+k_2\right|+k_1}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n-1\right)!}\left(k_1-1\right)\left(1+x_1+x_2\right)$$

$$\times x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n-1\right)!}$$

$$\times x_1\left(-n-k_1-k_2\right)x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+\left|k_1+k_2\right|-k_1-1\right)!}{k_2!\left(n-1\right)!}\left[\frac{\left(1+x_1+x_2\right)+\left(n+k_2\right)x_1}{x_1^2\left(1+x_1+x_2\right)}\right]x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left|k_1+k_2\right|+k_1}$$

$$\times f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1\left(k_1-1\right)\left(k_1-2\right)!k_2!\left(n-1\right)!}\left(k_1-1\right)\left(1+x_1+x_2\right)$$

$k_1 \to k_1+1$ için

$$\times x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2-1\right)!}{k_1!k_2!\left(n-1\right)!}\frac{n}{n}x_1$$

$$\times\left(-n-k_1-k_2\right)x_1^{k_1-2}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+\left|k_1+k_2\right|-k_1-1\right)!}{k_2!\left(n-1\right)!}\left[\frac{\left(1+x_1+x_2\right)+\left(n+k_2\right)x_1}{x_1^2\left(1+x_1+x_2\right)}\right]f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)$$

$$\times x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left|k_1+k_2\right|+k_1}+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2\right)!k_1 n}{\left(k_1+1\right)\left(k_1-1\right)!k_2!\left(n-1\right)!k_1 n}\left(1+x_1+x_2\right)$$

$$\times x_1^{k_1-1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-2} f\left(\frac{k_1+1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2\right)!}{k_1!k_2!n!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\frac{k_1}{k_1}$$

$$\times x_1 n\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+\left|k_1+k_2\right|-k_1-1\right)!}{k_2!\left(n-1\right)!}\left[\frac{\left(1+x_1+x_2\right)+\left(n+k_2\right)x_1}{x_1^2\left(1+x_1+x_2\right)}\right]f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)$$

$$\times x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left|k_1+k_2\right|+k_1}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\left(n+k_1+k_2\right)!}{k_1!k_2!n!}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1}$$

$$\times\frac{n}{k_1+1}f\left(\frac{k_1+1}{n},\frac{k_2}{n}\right)k_1x_1^{-1}-\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{n}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)k_1x_1^{-1}P_{n+1,k}(x)$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+|k_1+k_2|-k_1-1}{k_2}\left[\frac{(1+x_1+x_2)+(n+k_2)x_1}{x_1^2(1+x_1+x_2)}\right]f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)$$

$$\times x_2^{k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-|k_1+k_2|+k_1}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{n}{k_1+1}f\left(\frac{k_1+1}{n},\frac{k_2}{n}\right)k_1x_1^{-1}P_{n+1,k}(x)$$

$$-\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{n}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)k_1x_1^{-1}P_{n+1,k}(x)$$

$$=-\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+|k_1+k_2|-k_1-1}{k_2}\left[\frac{(1+x_1+x_2)+(n+k_2)x_1}{x_1^2(1+x_1+x_2)}\right](1+x_1+x_2)^{-n-|k_1+k_2|+k_1}$$

$$\times f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)x_2^{k_2}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left[\frac{n}{k_1+1}f\left(\frac{k_1+1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-\frac{n}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\right]k_1x_1^{-1}P_{n+1,k}(x)$$

olarak elde edilir.

$f(\mathbf{x})\geq 0$ ve $\dfrac{f(\mathbf{x})}{x_i}$ ler $(0,\infty)$ aralığındaki $x_i$ ler için artmayan olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{B_{n,d}(f,\mathbf{x})}{x_i}\right)\leq 0$$

olduğu görülmüş olur.

Dolayısıyla $\dfrac{B_{n,d}(f,\mathbf{x})}{x_i}$ de $(0,\infty)$ aralığındaki $x_i$ ler için artmayandır.

Böylece ispat tamamlanır.

## 3.2. Çok Değişkenli Baskakov Operatörünün Dizisi İçin Monotonluk

Bu kısımda çok değişkenli Baskakov operatör dizisi için monotonluğu ele alalım.

**Teorem 3.4.**

Eğer $f(\mathbf{x})$, $T$ üzerinde tanımlı konveks fonksiyon ise o taktirde 3.1 ile tanımlanan $B_{n,d}(f,\mathbf{x})$ Baskakov operatörü $f$ lineer fonksiyon olmadıkça $n$ ye göre kesinlikle monoton bir şekilde artmayandır.
(Bu durumda bütün $n$ ler için $B_{n,d}(f;\mathbf{x}) \le B_{n+1,d}(f,\mathbf{x})$ dir.)

**İspat 3.4.**

İspatı yine iki boyutlu uzayda verelim. (yani $d=1,2$ )

Çünkü ikiden daha çok boyutlu durumların ispatı benzerdir. Buna göre

$$B_{n,d}(f,\mathbf{x}) - B_{n+1,d}(f,\mathbf{x})$$

$$= \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)$$

$$-\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)-1} f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\binom{n+k_1-1}{k_1} x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1} f\left(\frac{k_1}{n},0\right) - \sum_{k_1=0}^{\infty}\binom{n+k_1}{k_1} x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1-1}$$

$$\times f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right) + \sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_2-1}{k_2} x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)$$

$$-\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_2}{k_2}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2-1}f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)+\binom{n-1}{0}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n}f\left(0,0\right)$$

$$-\binom{n}{0}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-1}f\left(0,0\right)$$

$$=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1+k_2-1}{k}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)}\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}$$

$$\times x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1-1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n},0\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)}\binom{n+k_1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1}\right.$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_2-1}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)-\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)}\binom{n+k_2}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}$$

$$\times x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}+\left(f\left(0,0\right)-\frac{1}{\left(1+x_1+x_2\right)}f\left(0,0\right)\right)\left(1+x_1+x_2\right)^{-n}$$

$$=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1+k_2-1}{k}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}$$

$$\times x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)$$

$$\times x_1^{k_1+1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)x_1^{k_1}x_2^{k_2+1}$$

$$\times\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1-1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n},0\right)-\binom{n+k_1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)\right\}$$

$$\times x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\binom{n+k_1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)x_1^{k_1+1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1-1}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\binom{n+k_1}{k_1} f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right) x_1^{k_1} x_2 \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1-1}$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_2-1}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_2}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)\right\} x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_2}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right) x_2^{k_2+1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}+\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_2}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right) x_1 x_2^{k_2+1}$$

$$\times\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2-1}+\left(x_1+x_2\right) f\left(0,0\right)\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-1}$$

olarak yazılabilir.

Burada aşağıdaki şekilde düzenlemeler yapılırsa;

$$B_{n,d}\left(f,\mathbf{x}\right)-\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k} x_1^{k_1+1} x_2^{k_2}$$

$$\times\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)}\frac{\left(1+x_1+x_2\right)^{-1}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{-1}} f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1} f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right) x_1$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k} x_1^{k_1} x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)-1} f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right) x_2$$

$$\Rightarrow\ B_{n,d}\left(f,\mathbf{x}\right)-\left(1+x_1+x_2\right) B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)+x_1 B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)+x_2 B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)$$

$$=B_{n,d}\left(f,\mathbf{x}\right)-B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)-x_1 B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)$$

$$-x_2 B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)+x_1 B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)+x_2 B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)$$

$$=B_{n,d}\left(f,\mathbf{x}\right)-B_{n+1,d}\left(f,\mathbf{x}\right)$$

yazılabilir.

Buna benzer olarak

$$A_n = \sum_{k_1=1}^{\infty} \binom{n+k_1-1}{k_1} f\left(\frac{k_1}{n},0\right) x_1^{k_1} \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1} \text{ olarak seçilirse}$$

$$A_n - \sum_{k_1=1}^{\infty} \binom{n+k_1}{k_1} x_1^{k_1} \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1} \frac{\left(1+x_1+x_2\right)^{-1}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{-1}} f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty} \binom{n+k_1}{k_1} x_1^{k_1} \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1-1} f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right) x_1$$

$$\times\sum_{k_1=1}^{\infty} \binom{n+k_1}{k_1} x_1^{k_1} \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1-1} f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right) x_2$$

$$\Rightarrow A_n - A_{n+1}\left(1+x_1+x_2\right) + x_1 A_{n+1} + x_2 A_{n+1}$$
$$= A_n - A_{n+1} - x_1 A_{n+1} + x_2 A_{n+1} + x_1 A_{n+1} - x_2 A_{n+1}$$

$$= A_n - A_{n+1}$$

olarak yazılabilir. Aynı yol ile

$$C_n = \sum_{k_2=1}^{\infty} \binom{n+k_2-1}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n}\right) x_2^{k_2} \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2} \text{ olarak seçilirse}$$

$$C_n - \sum_{k_2=1}^{\infty} \binom{n+k_2}{k_2} x_2^{k_2} \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2} \frac{\left(1+x_1+x_2\right)^{-1}}{\left(1+x_1+x_2\right)^{-1}} f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty} \binom{n+k_2}{k_2} x_2^{k_2} \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2-1} f\left(0,\frac{k_2}{n}\right) x_2$$

$$\times\sum_{k_2=1}^{\infty} \binom{n+k_2}{k_2} x_2^{k_2} \left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k-1_2} f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right) x_1$$

$$\Rightarrow C_n - C_{n+1}\left(1+x_1+x_2\right) + C_{n+1} x_2 + C_{n+1} x_1$$

$$= C_n - C_{n+1} - x_1 C_{n+1} - x_2 C_{n+1} + x_2 C_n + x_1 C_{n+1}$$

$$= C_n - C_{n+1}$$

elde edilir.

Son olarak ise

$$\left( f(0,0) - \frac{1}{(1+x_1+x_2)} f(0,0) \right)(1+x_1+x_2)^{-n} = f(0,0)\left[1 - \frac{1}{1+x_1+x_2}\right](1+x_1+x_2)^{-n}$$

$$= f(0,0)\frac{x_1+x_2}{1+x_1+x_2}(1+x_1+x_2)^{-n}$$

$$= (x_1+x_2) f(0,0)(1+x_1+x_2)^{-n-1}$$

$$\Rightarrow x_1 f(0,0)(1+x_1+x_2)^{-n-1} + x_2 f(0,0)(1+x_1+x_2)^{-n-1}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi ispata geri dönelim. Yukarıda elde edilenler ispatta kullanılırsa

$$= \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{ \binom{n+k_1+k_2-1}{k} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) - \binom{n+k_1+k_2}{k} f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}$$

$$\times x_1^{k_1} x_2^{k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-(k_1+k_2)} + \sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_2}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right) x_1 x_2^{k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-k_2-1}$$

$$+ \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k} f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right) x_1^{k_1+1} x_2^{k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-(k_1+k_2)-1}$$

$$+ \sum_{k_1=1}^{\infty}\binom{n+k_1}{k_1} f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right) x_1^{k_1} x_2 (1+x_1+x_2)^{-n-k_1-1}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)x_1^{k_1}x_2^{k_2+1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)-1}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1-1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n},0\right)-\binom{n+k_1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)\right\}x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1}$$

$$+f\left(0,0\right)x_1\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-1}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\binom{n+k_1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)x_1^{k_1+1}\left(1+x_2+x_2\right)^{-n-k_1-1}$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_2-1}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_2}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}$$

$$+f\left(0,0\right)x_2\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-1}+\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_2}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)x_2^{k_2+1}\left(1+x_2+x_2\right)^{-n-k_2-1}$$

$$=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1+k_2-1}{k}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}$$

$$\times x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)}$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)x_1^{k_1+1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)-1}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)x_1^{k_1}x_2^{k_2+1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)-1}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1-1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n},0\right)-\binom{n+k_1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)\right\}x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1}$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}\binom{n+k_1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)x_1^{k_1+1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1-1}$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_2-1}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_2}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}$$

$$+\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_2}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)x_2^{k_2+1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2-1}$$

$$=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1+k_2-1}{k}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}$$

$$\times x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k-e_1}f\left(\frac{k_1-1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k-e_2}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2-1}{n+1}\right)x_1^{k_1}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-(k_1+k_2)}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1-1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n},0\right)-\binom{n+k_1}{k_1}f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)\right\}x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\binom{n+k_1-1}{k_1-1}f\left(\frac{k_1-1}{n+1},0\right)x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1}$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_2-1}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_2}{k_2}f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)\right\}x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty}\binom{n+k_2-1}{k_2-1}f\left(0,\frac{k_2-1}{n+1}\right)x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}$$

$$=\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1+k_2-1}{k}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_1+k_2}{k}f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)\right.$$

$$+\binom{n+k_1+k_2-1}{k-e_1} f\left(\frac{k-e_1}{n+1}\right)+\binom{n+k_1+k_2-1}{k-e_2} f\left(\frac{k-e_2}{n+1}\right)\Bigg\}$$

$$\times x_1^{k_1} x_2^{k_2}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-\left(k_1+k_2\right)}$$

$$+\sum_{k_1=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_1-1}{k_1} f\left(\frac{k_1}{n},0\right)-\binom{n+k_1}{k_1} f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)+\binom{n+k_1-1}{k_1-1} f\left(\frac{k_1-1}{n+1},0\right)\right\}$$

$$\times x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_1}$$

$$+\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\binom{n+k_2-1}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_2}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)+\binom{n+k_2-1}{k_2-1} f\left(0,\frac{k_2-1}{n+1}\right)\right\}$$

$$\times x_1^{k_1}\left(1+x_1+x_2\right)^{-n-k_2}$$

yazılabilir.

İşlemlerde kolaylık olması bakımından aşağıdaki gösterimleri kullanalım.

$$I_1=\binom{n+k_1+k_2-1}{k} f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_1+k_2}{k} f\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)$$

$$+\binom{n+k_1+k_2-1}{k-e_1} f\left(\frac{k-e_1}{n+1}\right)+\binom{n+k_1+k_2-1}{k-e_2} f\left(\frac{k-e_2}{n+1}\right)$$

$$I_2=\binom{n+k_1-1}{k_1} f\left(\frac{k_1}{n},0\right)-\binom{n+k_1}{k_1} f\left(\frac{k_1}{n+1},0\right)+\binom{n+k_1-1}{k_1-1} f\left(\frac{k_1-1}{n+1},0\right)$$

$$I_3=\binom{n+k_2-1}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n}\right)-\binom{n+k_2}{k_2} f\left(0,\frac{k_2}{n+1}\right)+\binom{n+k_2-1}{k_2-1} f\left(0,\frac{k_2-1}{n+1}\right)$$

olsun.

Aşağıda sırasıyla $I_1, I_2, I_3$ ü hesaplayalım. $I_1$ için

$$\alpha_1 = \frac{\binom{n+|\mathbf{k}|-1}{\mathbf{k}}}{\binom{n+|\mathbf{k}|}{\mathbf{k}}} = \frac{n}{n+|\mathbf{k}|}$$

$$\alpha_2 = \frac{\binom{n+|\mathbf{k}|-1}{\mathbf{k}-e_1}}{\binom{n+|\mathbf{k}|}{\mathbf{k}}} = \frac{k_1}{n+|\mathbf{k}|}$$

$$\alpha_3 = \frac{\binom{n+|\mathbf{k}|-1}{\mathbf{k}-e_2}}{\binom{n+|\mathbf{k}|}{\mathbf{k}}} = \frac{k_2}{n+|\mathbf{k}|}$$

olsun.

O halde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ negatif olmayan sayılardır ve

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{n}{n+k_1+k_2} + \frac{k_1}{n+k_1+k_2} + \frac{k_2}{n+k_1+k_2} = \frac{n+k_1+k_2}{n+k_1+k_2} = 1$$

dir.

Eğer

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{k}}{n} \ , \ \mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{k}-\mathbf{e}_1}{n+1} \ , \ \mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{k}-\mathbf{e}_2}{n+1}$$

Yani

$$x_1=\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\ ,\ x_2=\left(\frac{k_1-1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)\ ,\ x_3=\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2-1}{n+1}\right)$$

alınırsa

$$\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2+\alpha_3\mathbf{x}_3=\frac{n}{n+k_1+k_2}\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\frac{k_1}{n+k_1+k_2}\left(\frac{k_1-1}{n+1},\frac{k_2}{n+1}\right)$$

$$+\frac{k_2}{n+k_1+k_2}\left(\frac{k_1}{n+1},\frac{k_2-1}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{(n+1)k_1+k_1^2-k_1+k_1k_2}{(n+k_1+k_2)(n+1)},\frac{(n+1)k_2+k_2^2-k_2+k_1k_2}{(n+k_1+k_2)(n+1)}\right)$$

$$=\left(\frac{(n+k_1+k_2)k_1}{(n+k_1+k_2)(n+1)},\frac{(n+k_1+k_2)k_2}{(n+k_1+k_2)(n+1)}\right)$$

$$=\left(\frac{k_1}{(n+1)},\frac{k_2}{(n+1)}\right)$$

$$=\frac{\mathbf{k}}{n+1}$$

olur.

Bu sebeple 3.4'deki konveks fonksiyon tanımı gereğince $I_1\le 0$ olur.

Şimdi $I_2$ için

$$\alpha_1=\frac{\binom{n+k_1-1}{k_1}}{\binom{n+k_1}{k_1}}=\frac{n}{n+k_1}\ ,\ \alpha_2=\frac{\binom{n+k_1-1}{k_1-1}}{\binom{n+k_1}{k_1}}=\frac{k_1}{n+k_1}\ge 0$$

ve

$$\mathbf{y}_1=\left(\frac{k_1}{n},0\right),\ \mathbf{y}_2=\left(\frac{k_1-1}{n+1},0\right)$$

olsun.

Bu durumda

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{n}{n+k_1}+\frac{k_1}{n+k_1}=1$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha_1\mathbf{y}_1+\alpha_2\mathbf{y}_2&=\frac{n}{n+k_1}\left(\frac{k_1}{n},0\right)+\frac{k_1}{n+k_1}\left(\frac{k_1-1}{n+1},0\right)\\&=\left(\frac{nk_1+k_1^2-k_1}{n(n+k_1)},0\right)\\&=\left(\frac{k_1(n+k_1-k_1)}{n(n+k_1)},0\right)\\&=\left(\frac{k_1}{n+k_1},0\right)\end{aligned}$$

olurlar.

Bu yüzden $f$ konveks fonksiyonu için $I_2\le 0$ sonucu elde edilir. Benzer şekilde $I_3\le 0$ elde edilir. Böylece her $n\in N$ için $B_{n,d}(f,\mathbf{x})\le B_{n+1,d}(f,\mathbf{x})$ olduğu görülür. Yani $B_{n,d}(f,\mathbf{x})$ operatörü monoton artmayan bir operatördür.

## 3.3. K-Fonksiyoneli ve Düzgünlük Modülü

$1 \le p < \infty$ için $L^p(T)$ ile $T$ üzerinde Lebesque ölçülebilir fonksiyonlar uzayını gösterelim. Bu uzayda norm

$$\|f\|_p^p = \int_T |f|^p$$

ile gösterilir ve sonludur. $L^\infty(T) = C_B(T)$ ise $T$ üzerinde sınırlı ve sürekli fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda norm

$$\|f\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in T} |f(\mathbf{x})|$$

olur ve sonludur.

Şimdi $\mathbf{x} \in T$ için ağırlık fonksiyonlarını

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \sqrt{x_i(1 + |\mathbf{x}|)} \quad , \qquad 1 \le i \le d$$

şeklinde tanımlayalım.

$$D_i^r = \frac{\partial^r}{\partial x_i^r} \ , \ r \in N \ , \ D^{\mathbf{k}} = D_1^{k_1} D_2^{k_2} \ldots D_d^{k_d} \ , \ \mathbf{k} \in N_0^d$$

diferansiyel operatörü göstersin.

$1 \le p < \infty$ aralığı için ağırlıklı Sobolev uzayı

$$W_\varphi^{r,p}(T) = \left\{ f \in L^p(T) : D^{\mathbf{k}} f \in L_{loc}\left(\overset{o}{T}\right) ve\ \varphi_i D_i^r f \in L^p(T) \right\}$$

olarak tanımlanır.

Burada $|\mathbf{k}|\le r$ , $\mathbf{k}\in N_0^d$ ve $\overset{o}{T}$ , $T$ nin içidir. $C_B(T)$ uzayı ise

$$C_\varphi^r(T)=\left\{f\in C_{\mathbf{B}}(T): f\in C_B^r\left(\overset{o}{T}\right) ve\ \varphi_i^r D_i^r f\in C_B(T)\ , 1\le i\le d\right\}$$

olarak tanımlanır.

$1\le p<\infty$ için $L^p(T)$ üzerinde ve $p=\infty$ için $C_B(T)$ üzerinde Peetre-K fonksiyoneli

$$K_\varphi^r\left(f,t^r\right)_p=\inf\left\{\|f-g\|_p+t^r\sum_{i=1}^d\left\|\varphi_i^r D_i^r g\right\|_p\right\}\ ,\ t>0$$

şeklinde tanımlanır.

Burada infimum sırasıyla $1\le p<\infty$ için bütün $g\in W_\varphi^{r,p}(T)$ler üzerinden, $p=\infty$ için $g\in C_B^r(T)$ ler üzerinden alınmaktadır. $R^d$ deki her $\mathbf{e}$ vektörü için $\mathbf{e}$ nin doğrultusunda $f$ fonksiyonunun $r-$yinci ileri farkı

$$\Delta_{h\mathbf{e}}^r f(\mathbf{x})=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^r\binom{r}{i}(-1)^i f(\mathbf{x}+ih\mathbf{e})\ , & \mathbf{x},\mathbf{x}+rh\mathbf{e}\in T\\ 0 & ,\ diğer\ yerlerde\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $1\le p\le\infty$ için $f\in L^p(T)$ nin düzgünlük modülü

$$\omega_\varphi^r(f,t)_p=\sup_{0<h\le t}\sum_{i=1}^d\left\|\Delta_{h\varphi_i\mathbf{e}_i}^r f\right\|_p\quad ,\qquad 1\le p\le\infty$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 3.5.**

$1 \leq p \leq \infty$ için her $f \in L^p(T)$ olmak üzere sadece $p$ ve $r$ ye bağlı pozitif sabit vardır. Öyleki

$$\frac{1}{const.}\omega_\varphi^r(f,t)_p \leq K_\varphi^r(f,t^r)_p \leq const.\omega_\varphi^r(f,t)_p$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat 3.5.**

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d) \in T_d$ için $\mathbf{x}^* = (x_2, ..., x_d)$ $ve$ $T^* = \{\mathbf{x}^* : \mathbf{x} = (x_1, x^*) \in T_d\}$ yazalım.

$x_1 = (1+|\mathbf{x}^*|)z$ , $0 \leq z < \infty$ $ve$ $F(z) = F(z,\mathbf{x}^*) = f((1+|\mathbf{x}^*|)z, \mathbf{x}^*)$ olsun.

O taktirde

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = (1+|\mathbf{x}^*|)\varphi(z)$$

$$D_1^r f(\mathbf{x}) = (1+|\mathbf{x}^*|)^{-r} F^{(r)}(z)$$

ve

$$\Delta_{h\varphi_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1}^r f(\mathbf{x}) = \Delta_{h\varphi(z)}^r F(z)$$

dir.

Sonuç olarak $1 \le p < \infty$ için tanımları göz önüne alınırsa,

$$\left\|\Delta_{h\varphi_1\mathbf{e}_1}^r f\right\|_p^p = \int_{T^*} d\mathbf{x}^* \int_0^\infty \left|\Delta_{h\varphi_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1}^r f(\mathbf{x})\right|^p dx_1$$

$$= \int_{T^*} \left(1+\left|\mathbf{x}^*\right|\right) \int_0^\infty \left|\Delta_{h\varphi(z)}^r F(z)\right|^p dz d\mathbf{x}^*$$

yazılabilir. Tek değişkenli durumdaki ispat ve tanımlar göz önüne alındığında

$$\left\|\Delta_{h\varphi_1\mathbf{e}_1}^r f\right\|_p^p \le const. \int_{T^*} \left(1+\left|\mathbf{x}^*\right|\right) \int_0^\infty \left|F(z)\right|^p dz d\mathbf{x}^*$$

$$= const. \int_{T^*} \int_0^\infty \left|f\left(x_1, \mathbf{x}^*\right)\right|^p dx_1 d\mathbf{x}^*$$

$$= const. \left\|f\right\|_p^p$$

ve

$$\left\|\Delta_{h\varphi_1\mathbf{e}_1}^r f\right\|_p^p \le const. \int_{T^*} \left(1+\left|\mathbf{x}^*\right|\right) h^{rp} \int_0^\infty \left|\varphi^r(z) F^{(r)}(z)\right|^p dz d\mathbf{x}^*$$

$$= const. h^{rp} \int_{T^*} \int_0^\infty \left|\left(\varphi_1^r D_1^r\right) f\left(x_1, \mathbf{x}^*\right)\right|^p dx_1 d\mathbf{x}^*$$

$$= const. h^{rp} \left\|\varphi_1^r D_1^r f\right\|_p^p$$

yazılabilir.

Benzer şekilde $i = 2, 3, ..., d$ için aynı eşitsizlikler geçerlidir.

Bu yüzden $1 \le p < \infty$ , $1 \le i \le d$ için

$$\left\|\Delta^r_{h\varphi_i \mathbf{e}_i} f\right\|_p \le const. \begin{cases} \|f\|_p & , \ f \in L^p(T) \\ h^r \left\|\varphi_i^r D_i^r f\right\|_p & , \ f \in w_\varphi^{p,r}(T) \end{cases}$$

yazılabilir.

$p = \infty$ olması durumunda da aynı eşitsizlikler elde edilebilmektedir. İkinci bir kestirim için tekrar bir boyutlu duruma dönülmelidir. İlk olarak gösterilmeli ki sabit bir $\mathbf{x}^*$ için bir $G_t \in W_\varphi^{r,p}(T_1)$ , $t > 0$ fonksiyonu vardır. Öyleki

$$\|F - G_t\|_p^p \ , \ t^{rp} \left\|\varphi^r G_t^{(r)}\right\|_p^p \le \frac{const.}{t} \int_0^t \left\|\Delta^r_{u\varphi} f\right\|_p^p du$$

dir.

Çünkü $G_t$ nin yapısı $F$ nin sürekliliğine bağlıdır.

$$F(z) = F\left(z, \mathbf{x}^*\right)$$

için

$$G_t(z) = G_t\left(z, \mathbf{x}^*\right)$$

yazılabilir.

Şimdi $g_t(\mathbf{x}) \in W_\varphi^{r,p}(T)$ tanımlayalım.

Öyleki

$$g_t(\mathbf{x}) = G_t\left(\frac{x_1}{1+|\mathbf{x}^*|}, \mathbf{x}^*\right) \quad , \quad \mathbf{x} \in T$$

olsun. O taktirde tanımlar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\|f - g_t\|_p^p &= \int_{T^*} \left(1+|\mathbf{x}^*|\right) \int_0^\infty |F(z) - G_t(z)|^p \, dz d\mathbf{x}^* \\
&\leq \frac{const.}{t} \int_{T^*} \left(1+|\mathbf{x}^*|\right) \int_0^t \int_0^\infty \left|\Delta_{u\varphi(z)}^r F(z)\right|^p dz du d\mathbf{x}^* \\
&= \frac{const.}{t} \int_0^t \int_{T^*} \int_0^\infty \left|\Delta_{u\varphi_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1}^r f(\mathbf{x})\right|^p dx_1 d\mathbf{x}^* du \\
&= \frac{const.}{t} \int_0^t \left\|\Delta_{u\varphi_1\mathbf{e}_1}^r f\right\|^p du
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
t^{rp} \left\|\varphi_1^r D_1^r g_t\right\|_p^p &= t^{rp} \int_{T^*} \left(1+|\mathbf{x}^*|\right) \int_0^\infty \left|\varphi^r(z) G_t^{(r)}(z)\right|^p dz d\mathbf{x}^* \\
&\leq const. \int_{T^*} \left(1+|\mathbf{x}^*|\right) \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^\infty \left|\Delta_{u\varphi(z)}^r F(z)\right|^p dz du d\mathbf{x}^* \\
&= \frac{const.}{t} \int_0^t \left\|\Delta_{u\varphi_1\mathbf{e}_1}^r f\right\|_p^p du
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde her bir $i$ için benzer ispat yapılabilir. Yani $g_t \in W_\varphi^{r,p}(T)$ , $t > 0$ fonksiyonları vardır.

Öyleki

$$\left\| f - g_t \right\|_p^p , \qquad t^{rp} \left\| \varphi_i^r D_1^r g_t \right\|_p^p \le \frac{const.}{t} \int_0^t \left\| \Delta_{u\varphi_i \mathbf{e}_i}^r f \right\|_p^p du$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu da göstermek istenilendir.

Şimdi burada daha önce tanımlanan düzgünlük modülü ve $K-$fonksiyoneli yardımıyla $f \in C_B\left(T\right)$ fonksiyonları için bir yaklaşım teoremi verelim. Bu durum daha büyük boyutlara da genişletilebilir.

Bu teorem için

$$\omega_\varphi^2(f,t)_\infty := \sup_{0<h\le t} \left\| f\left(. + 2h\varphi(.)\right) - 2f\left(. + h\varphi(.)\right) + f\left(.\right) \right\|_\infty$$

şeklinde tanımlanan Ditzian ve Totik ikinci dereceden süreklilik modülü verilsin. Burada $\varphi\left(x\right) = \sqrt{x\left(1+x\right)}$ olarak alınmıştır.

Sürekli ve $\left[0,\infty\right)$ aralığında sınırlı herhangi bir $f$ fonksiyonu için,

$$\left\| B_{n,1} f - f \right\|_\infty \le const. \omega_\varphi^2 \left( f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_\infty \tag{3.6}$$

eşitliği sağlanacak şekilde sabit mevcuttur. Tersine olarak Totik

$$\omega_\varphi^2 \left( f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_\infty \le const. \left\| B_{n,1} f - f \right\|_\infty \tag{3.7}$$

eşitsizliğinin varlığını göstermiştir [12,23].

**Teorem 3.6.**

$f \in C_B(T)$ ise o halde $n$ ve $f$ den bağımsız pozitif sabit vardır. Öyleki $B_{n,d}(f;x)$ operatörü için

$$\left\|B_{n,d}f - f\right\|_\infty \le const.\omega_\varphi^2\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_\infty$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat 3.6.**

$d-$boyutlu uzay için ispatın temeli tümevarım metoduna dayanmaktadır. Burada Baskakov operatörü için bir dekompozisyon formülü kullanılacaktır ve bir önceki teoremin ispatında elde edilen

$$\left\|B_{n,d}f - f\right\|_\infty \le const.\begin{cases} \left\|f\right\|_\infty & , \ f \in C_B(T) \\ n^{-1}\sum_{i=1}^{d}\left\|\varphi_i^2 D_i^2 f\right\|_\infty & , \ f \in C_\varphi^2(T) \end{cases} \tag{3.8}$$

ifadesinden faydalanılacaktır. Ayrıca bilinir ki

$$\left\|B_{n,1}f - f\right\| \le const.\frac{\left\|\varphi^2 f''\right\|_\infty}{n} \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Şimdi

$$B_{n,d}(f;\mathbf{x}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1)\sum_{\mathbf{k}^*=0}^{\infty} f\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)P_{n+k_1,\mathbf{k}^*}\left(\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right) \tag{3.10}$$

ifadesini göz önüne alalım.

Burada

$\mathbf{x}^* = (x_2, x_3, ..., x_d)$ , $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}^*) \in T$ , $\mathbf{k}^* = (k_2, k_3, ..., k_d)$ , $\mathbf{k} = (k_1, k^*) \in N$ ve

$\sum_{\mathbf{k}^*=0}^{\infty} = \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_3=0}^{\infty} ... \sum_{k_d=0}^{\infty}$ dir.

$$g_{k_1}(\mathbf{u}) = f\left(\frac{k_1}{n}, \left(1+\frac{k_1}{n}\right)\mathbf{u}\right) \quad , \quad \mathbf{u} \in T_{d-1}$$

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, ..., z_{d-1}) = \left(\frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_3}{1+x_1}, ..., \frac{x_d}{1+x_1}\right) = \frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}$$

olsun.

3.10 formülünden

$$B_{n,d}(f,\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1)\left[\sum_{k_1=0}^{\infty} f\left(\frac{k_1}{n}\left(1+\frac{k_1}{n}\right)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right) - f\left(\frac{k_1}{n}\left(1+\frac{k_1}{n}\right)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right)\right.$$

$$\left. + f\left(\frac{k_1}{n}\left(1+\frac{k_1}{n}\right)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right) - f\left(\frac{k_1}{n}\left(1+\frac{k_1}{n}\right)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right)\right]$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1)\left(B_{n+k_1,d-1}\left(g_{k_1}\left(\frac{k_1}{n}\right), \mathbf{z}\right) - g_{k_1}(\mathbf{z})\right)$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1)\left[f\left(\frac{k_1}{n}\left(1+\frac{k_1}{n}\right)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right) - f\left(\frac{k_1}{n}\left(1+\frac{k_1}{n}\right)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right)\right]$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1)\left(B_{n+k_1,d-1}\left(g_{k_1}\left(\frac{k_1}{n}\right), \mathbf{z}\right) - g_{k_1}(\mathbf{z})\right)$$

$$+ \left(B_{n,1}\left(h\left(\frac{k_1}{n}\right), x_1\right) - h(x_1)\right)$$

$$= J + L$$

yazılabilir.

Burada

$$h(u)=h(u,\mathbf{x})=f\left(u,(1+u)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right) \quad , \qquad 0\le u<\infty$$

şeklinde bir fonksiyondur.

$r\ge 1$ için 3.8'in ikinci ifadesini hesaplamak için $d=r$ alalım. Yani

$$\left\|B_{n,d}f-f\right\|_\infty \le const.n^{-1}\sum_{i=1}^{r}\left\|\varphi_i^2 D_i^2 f\right\|_\infty$$

olsun.

Bu durumda $d=r+1$ için

$$\left|J\right|\le const.\sum_{k_1=0}^{\infty}P_{n,k_1}\left(x_1\right)\frac{1}{n+k_1}\sum_{i=1}^{r}\left\|\varphi_i^2 D_i^2 f\right\|_\infty$$

yazılabilir. Bununla beraber tanımdan

$$\begin{aligned}\varphi_i^2(\mathbf{u})D_i^2 g_{k_1}(\mathbf{u}) &= u_i\left(1+|\mathbf{u}|\right)\left(1+\frac{k_1}{n}\right)D_{i+1}^2 f\left(\frac{k_1}{n},\left(1+\frac{k_1}{n}\right)\mathbf{u}\right)\\ &=\left(\varphi_{i+1}^2 D_{i+1}^2 f\right)\left(\frac{k_1}{n},\left(1+\frac{k_1}{n}\right)\mathbf{u}\right)\end{aligned}$$

olmaktadır. Böylece

$$\left|J\right|\le\frac{const.}{n}\sum_{i=1}^{r+1}\left\|\varphi_i^2 D_i^2 f\right\|_\infty$$

yazılabilir.

İkinci terim $L$ yi hesaplamak için 3.9'dan faydalanılacaktır ve gösterilecektir ki

$$\left|L\right| \le \frac{const.}{n}\left\|\varphi^2 h''\right\|_\infty$$

dir. Bunun için

$$\varphi(u) = \sqrt{u(1+u)} \quad , \qquad g_{k_1}(u) = f\left(\frac{k_1}{n}, \left(1+\frac{k_1}{n}\right)\mathbf{u}\right)$$

$$\mathbf{z} = \left(z_1, z_2, \ldots, z_{d-1}\right) = \left(\frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_3}{1+x_1}, \ldots, \frac{x_d}{1+x_1}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1} = \frac{\left(x_2, x_3, \ldots, x_d\right)}{1+x_1}$$

$$h(u) = h(u,\mathbf{x}) = f\left(u, (1+u)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right)$$

olarak alalım. Böylece

$$\left\|\varphi^2 h''\right\|_\infty = \max_{0\le u<\infty}\left|u(1+u)\left(D_1^2 f + \sum_{i=2}^{d}\frac{x_i}{1+x_1}D_{1i}^2 f + \sum_{i=2}^{d}\frac{x_i}{1+x_1}D_{i1}^2 f\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=2}^{d}\sum_{j=2}^{d}\frac{x_i x_j}{\left(1+x_1\right)^2}D_{ij}^2 f\right)\times\left(u, (1+u)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right)\right|$$

ifadesi için $f\left(u, (1+u)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right)$ ifadesinde birinci bileşen $u$ olup yerine $x_1$ alınırsa

$\varphi_i = \sqrt{x_i\left(1+|\mathbf{x}|\right)}$ den $\varphi_1^2 = x_1\left(1+|\mathbf{x}|\right)$ için

$$\frac{1+x_1}{1+|\mathbf{x}|}\varphi_1^2 = \frac{1+x_1}{1+|\mathbf{x}|}x_1\left(1+|\mathbf{x}|\right) = x_1\left(1+x_1\right) = u\left(1+u\right)$$

olur.

$$\varphi_{ij} = \sqrt{x_i x_j} \Rightarrow \varphi_{ij}^2 = x_i x_j \ , \ \varphi_{1i}^2 = x_1 x_j \ , \ \varphi_{i1}^2 = x_i x_1$$

olup

$x_1\left(1+x_1\right)\dfrac{x_i}{1+x_1} = x_1 x_i = \varphi_{1i}^2$ $, i = j$ için $x_1\left(1+x_1\right)\dfrac{x_i}{1+x_1} = x_1 x_i = \varphi_{1i}^2$

$i, j \geq 2$ için bileşenler $\dfrac{\left(1+u\right)x_i}{1+x_1} \Rightarrow \dfrac{\left(1+u\right)^2 x_i^2}{\left(1+x_1\right)^2}$ olduğundan ve $i = j$ olduğundan $2 \leq i \leq d$ için $i = j$ yinci bileşenin karesi

$$x_i^2 \rightarrow \frac{\left(1+u\right)^2 x_i^2}{\left(1+x_1\right)^2} \Rightarrow \frac{x_i^2\left(1+x_1\right)^2}{\left(1+u\right)^2} = x_i^2$$

olur.

Bu ifade $u\left(1+u\right)\dfrac{x_i^2}{\left(1+x_1\right)^2}$ için yazılırsa

$$\frac{u\left(1+u\right)}{\left(1+x_1\right)^2}\frac{x_i^2\left(1+x_1\right)^2}{\left(1+u\right)^2} = \frac{u}{1+u}x_i^2 = \frac{u}{1+u}\frac{x_i}{\left(1+|\mathbf{x}|\right)}\underbrace{x_i\left(1+|\mathbf{x}|\right)}_{\varphi_i^2}$$

$$= \frac{u}{1+u}\frac{x_i}{\left(1+|\mathbf{x}|\right)}\varphi_i^2$$

olur.

$i \neq j$ için

$$x_i \rightarrow \frac{x_i\left(1+x_1\right)}{\left(1+u\right)} \ , \ x_j \rightarrow \frac{x_j\left(1+x_1\right)}{\left(1+u\right)}$$

$$\Rightarrow u\left(1+u\right)\frac{x_i x_j}{\left(1+x_1\right)^2} = \frac{u\left(1+u\right)}{\left(1+x_1\right)^2}\frac{\left(1+x_1\right)x_i}{1+u}\frac{\left(1+x_1\right)x_j}{1+u}$$

$$= \frac{u}{1+u}\underbrace{x_i x_j}_{\varphi_{ij}^2} = \frac{u}{1+u}\varphi_{ij}^2$$

olarak elde edilir.

Yani

$\varphi_{ij}\left(\mathbf{x}\right) = \sqrt{x_i x_j}$ , $1 \leq i < j \leq d$ ve $D_{ij}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i x_j}$ için

$$\left\|\varphi^2 h''\right\|_\infty = \max_{0\leq u<\infty}\left|u\left(1+u\right)\left(D_1^2 f + \sum_{i=2}^{d}\frac{x_i}{1+x_1}D_{1i}^2 f + \sum_{i=2}^{d}\frac{x_i}{1+x_1}D_{i1}^2 f\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=2}^{d}\sum_{j=2}^{d}\frac{x_i x_j}{\left(1+x_1\right)^2}D_{ij}^2 f\right)\left(u,\left(1+u\right)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right)\right|$$

$$= \max_{0\leq u<\infty}\left|\left(\frac{1+x_1}{1+\left|\mathbf{x}\right|}\varphi_1^2 D_1^2 f + \sum_{i=2}^{d}\varphi_{1i}^2 D_{1i}^2 f + \sum_{i=2}^{d}\varphi_{i1}^2 D_{i1}^2 f\right.\right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{d}\frac{u}{1+u}\frac{x_i}{1+\left|\mathbf{x}\right|}\varphi_i^2 D_i^2 f + \sum_{i,j=2,i\neq j}^{d}\frac{u}{1+u}\varphi_{ij}^2 D_{ij}^2 f\right)$$

$$\left.\times\left(u,\left(1+u\right)\frac{\mathbf{x}^*}{1+x_1}\right)\right|$$

dir.

Bilinir ki

$$\left|D_{ij}^2 f\left(\mathbf{x}\right)\right| \leq \sup_{1\leq i\leq d}\left|D_i^2 f\left(\mathbf{x}\right)\right|$$

dir. O halde

$$\left\|L\right\|_\infty \leq \frac{const.}{n}\sum_{i=1}^{d}\left\|\varphi_i^2 D_i^2 f\right\|_\infty$$

elde edilir.

Dolayısıyla 3.8'in ikinci eşitsizliği her $d \in N$ için ispatlanmıştır.

Böylelikle Teorem 3.6 nın ispatı tamamlanmış olur.

# 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yaklaşımlar teorisi Matematik Analizin oldukça geniş ve yoğun olarak çalışılan bir alanıdır. Bu teoride şimdiye kadar bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalara belirgin temellere dayalı bilinen operatörler üzerinden farklı genişletilmeler yapılarak devam edilmektedir. Baskakov operatörü de bu temel operatörlerden birisidir ve bir çok genişlemesi çalışılmıştır.

Bu tezde Feilong Cao, Chunmei Ding ve Zongben Xu tarafından yazılan On Multivariate Baskakov Operator isimli makale incelenmiştir. Bu makalede çok değişkenli Baskakov operatörü için süreklilik modülü ve $K-$fonksiyoneli yardımı ile yakınsama özellikleri ve yakınsama hızı incelenmiştir.

Amacımız çok değişkenli operatörlerde incelemenin yapılma şeklini açıklayan bir türkçe kaynak oluşturmaktı. Bu sebeple ortaya çıkan çalışmanın bu anlamda yararlı olacağı kanaatindeyiz.

## KAYNAKLAR


[1] Adell, J.A., Badia, F.G., de la Cal, J., J. Math. Anal. Appl. 209. On the iterates of some Bernstein type operators. 529-541, 1997.

[2] Baskakov, V.A., Dokl. Akad. Nauk SSSR 113. An example of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions. 249-251,1957.

[3] Becker, M., Indiana Univ. Math. J. 27. Global approximation theorems for Szász-Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weight spaces. 127-142, 1978.

[4] Berens, H., Xu, Y., Indag. Math. (N.S.) 2. *K*-moduli, moduli of smoothness, and Bernstein polynomials on a simplex. 411–421, 1991.

[5] Bloom, W.R., Elliott, D., J. Approx. Theory 31. The modulus of continuity of remainder in the approximation of Lipschitz functions. 59–66, 1982.

[6] Brown, B.M., Elliott, D., Paget, D.F., J. Approx. Theory 49. Lipschitz constants for the Bernstein polynomials of a Lipschitz continuous function. 196–199, 1987.

[7] Chang, G.Z., Dvais, P.J., J. Approx. Theory 40. The convexity of Bernstein polynomials over triangles. 11–28, 1984.

[8] Chen, W., Ditzian, Z., Proc. Amer. Math. Soc. 108. Mixed and directional derivatives. 178–185, 1990.

[9] Davis, P.D., Interpolation and Approximation. Dover, New York, 1975.

[10] Ditzian, Z., Canad. J. Math. 2. On global inverse theorems for Szász and Baskakov operators. 255–263, 1979.

[11] Ditzian, Z., Ivanov, K.G., J. Anal. Math. 61. Strong converse inequalities. 61–111, 1993.

[12] Ditzian, Z., Totik, V., Moduli of Smoothness. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[13] Hajek, O., Amer. Math. Monthly 72. Uniform polynomial approximation. 681–688, 1965.

[14] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G., Inequalities. Cambridge Univ. Press, London, 1934.

[15] Heimann, H., Approx. Theory Appl. 5. Direct and converse results for operators of Baskakov–Durrmeyer type. 105–127, 1989.

[16] Li, Z. K., J. Approx. Theory 102. Bernstein polynomials and modulus of continuity. 171–174, 2000.

[17] Lindvail, T., Math. Sci. 7. Bernstein polynomials and the law of large numbers. 127–139, 1982.

[18] Lopez Moreno, A.J., Jodar, J., Munoz Delgado, F.J., Int. J. Differ. Equations Appl. 6. Exponential type moments and localization results for multivariate Baskakov–Schurer operators. 53–67, 2002.

[19] Sahai, A., Prasad, G., J. Approx. Theory 45. On simultaneous approximation by modified Lupas operators. 122–128, 1985.

[20] Sun, Y.S., Theory of Approximation of Functions. Beijing Normal University Press, Beijing (in Chinese), 1989.

[21] Timan, A.P., The Theory of Approximation of the Functions of Real Variables. Phizmatgiz, 1960.

[22] Totik, V., Period. Math. Hung. 14. Uniform approximation by Baskakov and Meyer–Köing and Zeller operators. 209–228, 1984.

[23] Totik, V., Pacific J. Math. 111. An interpolation theorem and its applications to positive operators. 447–481, 1984.

[24] Totik, V., J. Math. Anal. Appl. 132. Uniform approximation by exponential-type operators. 238–246, 1988.

[25] Totik, V., Amer. J. Math. 116. Approximation by Bernstein polynomials. 995–1018, 1994.

[26] DeVore, Ronald A., Lorentz, George G., Constructive Approximation. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.

[27] T. Acar, Durrmeyer Tipli Operatörlerin Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2011.

[28] E. Deniz, q-Baskakov Operatörünün Yakınsaklık Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2011.

[29] M. Köksal, Çok Boyutlu Baskakov-Kantorovich Operatörlerinin $L_p$-de Yakınsaması. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2015.

[30] E. Turan Atagün, $L_p$ Uzayında Yakınsaklık Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2005.