KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE UYGULAMALARI

Nurettin AKKÖSE

EYLÜL 2015

Matematik Anabilim Dalı Nurettin AKKÖSE tarafından hazırlanan *KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE UYGULAMALARI* adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ

17 / 09 /2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE UYGULAMALARI

AKKÖSE, Nurettin
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ
EYLÜL 2015, 51 sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş, tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise ilerideki bölümlerde gerekli olacak temel kavramlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında kuaterniyonik eğrilerin genel tanımı yapıldıktan sonra kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise 4-boyutlu Öklid uzayında harmonik eğrilikler ve kuaterniyonik eğilim çizgileri için bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Beşinci bölümde ise 4-boyutlu Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin birinci tip harmonik eğrilikler ve genel helisler ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildi.

Altıncı bölümde ise 4-boyutlu Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin ikinci tip harmonik eğrilikler ve genel helisler ile ilgili tanım ve lemmalara yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Reel kuaterniyonlar, Serret-Frenet formülleri, 1-tip ve 2-tip harmonik eğrilikler, genel helisler.

ABSTRACT

THE QUATERNIONIC INCLINED CURVES AND THEIR APPLICATIONS

AKKÖSE, Nurettin
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ
September 2015, 51 pages

This thesis consists of six sections. In the first section, introduction, the aim of the study and the information about the references are given.

In the second section, fundamental concepts and theorems which will be necessary in the next sections are given.

In the third section, general definitions of the quaternionic curves in Euclidean 4-space followed by Serret-Frenet formulas for the quaternionic curves are given.

In the fourth section, some definition and theorems of the harmonic curvatures and quaternionic inclined curves in Euclidean 4-space are given.

In the fifth section, definition and theorems about the first type harmonic curvatures and general helices in the Euclidean 4-space are given.

In the sixth section, definition and lemmas about the second type harmonic curvatures and general helices in the Euclidean 4-space are given.

Key Words: Real quaternions, Serret-Frenet formulas, 1-type and 2-type harmonic curvatures, General helices

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar insani ilişkilerde de engin fikirleri katkıda bulunan değerli hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ'a en derin saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Çalışmalarım süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen eşim Gönül AKKÖSE, kızlarım Zehra, Esra ve Büşra'ya da en derin duygularım ile teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Öklid uzayında, eğrilerin geometrisi uzun süre önce geliştirildi, biz eğriler hakkında derinlemesine önemli bilgilere sahibiz. Eğriler teorisinde, regüler eğrilerin karakterizasyonları önemli problemlerden biridir [1 – 3].

Reel kuaterniyonlar, iki kompleks sayının kombinasyonundan oluşmuştur. Buna göre kompleks sayılar da kuaterniyonların bir alt kümesi olması sonucu, kuaterniyonların hem reel sayıları hem de kompleks sayıları kapsayan daha geniş bir sayı sistemi olduğunu göstermektedir. Kuaterniyonlar, son yıllarda artan bir hızla her alanda kullanılmaktadır. Hamilton'dan beri farklı yazarlar tarafından kuaterniyonlar çalışılmıştır.

3-boyutlu reel Öklid uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet formülleri uzay-kuaterniyonları yardımıyla K. Bharathi ve M. Nagaraj tarafından yeniden türetilmiştir. Bulunan bu formüller yardımıyla 4-boyutlu reel Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir. Şimdiye kadar yapılmış olan çalışmaların çoğu elde edilen bu formüller kullanılarak yayınlanmıştır.

Diferansiyel geometride önemli bir yeri olan genel helisler; tanjant vektörü, sabit bir vektör ile sabit bir açı yapan bir eğridir. Bu eğriler ile ilgili [8 – 10] de farklı yazarlar tarafından incelenmiştir. Helisler ile ilgili olarak 1845 yılında Saint Venant tarafından ispatlanmıştır. Bir eğrinin genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart birinci ve ikinci eğriliklerinin oranının sabit olmasıdır.

[11] de 4-boyutlu Öklid uzayında genel helis kavramı için karakterizasyonlar Mağden tarafından verilmiştir. Bir α eğrisinin genel helis olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\frac{k_1^2}{k_2^2} + \left[\frac{1}{k_3}\frac{d}{ds}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)\right]^2$$

sabit olmasıdır. Burada, k_1, k_2 ve k_3 sırası ile α nın birinci, ikinci ve üçüncü eğriliğidir.

[14] de n-boyutlu Öklid uzayında degenere olmayan eğrilerin harmonik eğrilikleri Özdamar ve Hacisalihoğlu tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada degenere olmayan α eğrisinin genel helis olması için harmonik eğrilikleri kullanarak bazı karekterizasyonları verilmiştir. Ayrıca 4 boyutlu Öklid uzayındaki eğriler için D genel Darboux vektörü incelenmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanmasında [1], [2], [3] ve [7] nolu kaynaklarda 4-boyutlu Öklid uzayında reel kuaterniyonlar ve kuaterniyonik eğriler ile ilgili bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca, kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilmiştir. [4], [6], [13] ve [14] nolu kaynaklarda harmonik eğrilikler ve eğilim çizgilerinin karekterizasyonundan yararlanarak dört boyutlu Öklid uzayında harmonik eğrilikler ve eğilim çizgileri verilmiştir. Diğer kaynaklarda ise genel helisler, harmonik eğrilikler ve konu ile ilgili çeşitli kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı, 4-boyutlu Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğilim çizgileri ve kuaterniyonik eğriler için Serret-Frenet formüllerinden faydalanarak, 4-boyutlu Öklid uzayındaki 1-tip ve 2-tip harmonik eğrilikler ile ilgili tanımları, teoremleri ve lemmalar verilerek bunların genel helis eğrilerinin karakterizasyonları olduğunu gösterdik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid Uzayları

Tanım 2.1. (Öklid Uzayı):

$\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere $\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n)\}$ eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

$\mathbb{R}^n$, vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i \, q_i \tag{2.1}$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(p, q) \to \langle p, q \rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir.

$p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, q \rangle} \tag{2.2}$$

olsun. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p \rightarrow \|p\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(p,q) = \|p-q\| \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir.

Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid Uzayı denir.

Tanım 2.2. (Dik Koordinat Sistemi):

$$x_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\ , \qquad x_j(\,p_1, p_2, \dots, p_n\,) = p_j$$

fonksiyonuna, $\mathbb{R}^n$ uzayında j inci dik koordinat fonksiyonu denir.

Koordinat fonksiyonlarının oluşturduğu $(\,x_1, x_2, \dots, x_n\,)$ sıralı n lisine, $\mathbb{R}^n$ üstünde dik koordinat sistemi (veya Öklidyen koordinat sistemi) denir.

2.2. Kısmi Türevler

Tanım 2.3. (Kısmi türev):

f, $\mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left[f(\,p_1, \dots, p_{j-1}, p_j + s, p_{j+1}, \dots, p_n\,) - f(\,p_1, \dots, p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, \dots, p_n\,)\right]$$

limiti varsa bu limite, f fonksiyonun j inci değişkene göre kısmi türevi denir ve

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \text{ veya } f_j'(p)$$

biçiminde gösterilir.

Bu tanıma göre $\mathbb{R}^2$ nin bir U açık alt kümesinden $\mathbb{R}$ ye giden bir f fonksiyonu için yukarıdaki limitlerden iki tane söz konusu olur. Bu limitler varsa iki tane kısmi türev vardır ve bunlar

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)$$

sayılarıdır. Genel olarak $\mathbb{R}^n$ uzayında dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olduğuna göre $1 \le i \le n$ için her $x_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonun k inci değişkene göre kısmi türevi vardır ve

$$1 \le i \le n \quad \text{ve} \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_k}(p) = \delta_{ik}\,. \tag{2.4}$$

Tanım 2.4. (C^∞ Sınıfından Fonksiyon):

f, $\mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}$ ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise “f fonksiyonu, C^0 sınıfından bir fonksiyondur” denir. $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}$ ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ nın her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli ise “f fonksiyonu, C^1 sınıfındandır” denir.

f fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ in her bir noktasında k ıncı basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise “f fonksiyonu, C^k sınıfındandır” denir. $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir.

$\mathbb{R}^n$ nın her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa "f fonksiyonu, C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur" denir. $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir.

$p \in \mathbb{R}^n$ için f fonksiyonu p noktasının en az bir açık komşuluğunda düzgün ise "f fonksiyonu, p noktasında C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur" denir.

Teorem 2.1. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu C^r sınıfından olsun. Bu durumda $1 \leq k \leq r$ olmak üzere $(j_1, j_2, \dots, j_k)$ nin her $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ permütasyonu için

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(p) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(p). \qquad (2.5)$$

Tanım 2.5. (Teğet Uzay):

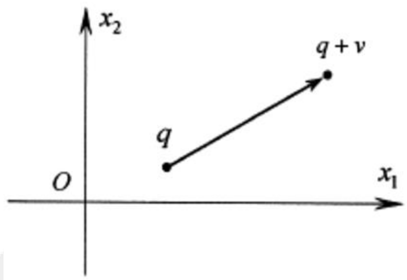
$q \in \mathbb{R}^n$ olsun. $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere q noktasından $q + v$ noktasına giden yönlü doğru parçasını, "q noktasında, v teğet vektörü" diye adlandıracağız ve v_q biçiminde göstereceğiz, şekil 2.1. de görülmektedir. q noktasındaki bütün teğet vektörlerin kümesi $T_q(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

$T_q(\mathbb{R}^n)$ kümesinde toplama işlemi $v_q + w_q = (v + w)_q$ eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda v_q = (\lambda v)_q$ eşitliği ile tanımlanır.

$v_q + w_q$ teğet vektörü, q noktasından $q + (v + w)$ noktasına giden yönlü doğru parçasıdır.

λv_q teğet vektörü, q noktasından $q + \lambda v$ noktasına giden yönlü doğru parçasıdır.

$T_q(\mathbb{R}^n)$ kümesi yukarıda tanımlanan işlemlere göre $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayıdır. Böylece elde edilen $T_q(\mathbb{R}^n)$ vektör uzayına, $\mathbb{R}^n$ uzayının q noktasındaki teğet uzayı denir.



Şekil 2.1. q noktasında, v teğet vektörü

Tanım 2.6. (Yöne Göre Türev):
$f \in C^\infty(q)$ ve $v_q \in T_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu,

$$\gamma(t) = q + tv$$

eşitliğiyle verilsin. $f \circ \gamma$ fonksiyonunun sıfır noktasındaki türevine, f fonksiyonunun v_q yönündeki türevi denir ve $v_q[f]$ biçiminde gösterilir.

Bu tanıma göre kısaca

$$v_q[f] = (f \circ \gamma)'(0) \tag{2.6}$$

dır.

Teorem 2.2 $f \in C^{\infty}(q)$ ve $v_q \in T_q(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere v_q vektörünün, $v_q = (\ v_1, v_2, \dots, v_n\ )_q$ eşitliğiyle verildiğini varsayalım. Bu durumda

$$v_q[f] = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(q)\ . \tag{2.7}$$

İspat: $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ise

$$\gamma(t) = q + tv = (\ q_1 + tv_1, q_2 + tv_2, \dots, q_n + tv_n\ )$$

olur. Buna göre

$$(\ f \circ \gamma)(t) = f(\ q_1 + tv_1, q_2 + tv_2, \dots, q_n + tv_n\ )$$

dır. $q_j + tv_j = \gamma_j(t)$ diyelim. $\gamma_j'(t) = v_j$ olur. Analiz derslerinden

$$(f \circ \gamma)'(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\gamma(0)\big).\gamma_j'(0)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$v_q[f] = (f \circ \gamma)'(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\gamma(0)\big).\gamma_j'(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(q).v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(q)$$

elde edilir.

Sonuç 2.1 $f \in C^{\infty}(q)$ olmak üzere $1 \le i \le n$ için

$$E_{iq}[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)$$

dır.

İspat:

$$v_q[f] = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(q)$$

eşitliğinde v_q yerine E_{iq} alındığında $v_j = \delta_{ij}$ olduğundan

$$E_{iq}[f] = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}(q) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(q).$$

2.3. n-Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.7 (Eğri):

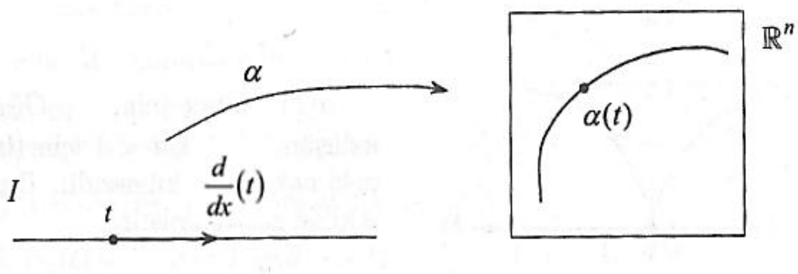
I , $\mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir eğri denir.

Tanım 2.8 (Bir Eğrinin Hız Vektörü):

$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. I aralığının bir t noktasındaki teğet uzayı olan $T_t(\mathbb{R}^1)$ uzayı 1 boyutlu bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^1$ deki dik koordinat fonksiyonu x olmak üzere $T_t(\mathbb{R}^1)$ uzayının tabanı

$$\left\{\frac{d}{dx}(t)\right\}$$

kümesidir. $\frac{d}{dx}$, $\mathbb{R}^1$ uzayının her bir t noktasına $\frac{d}{dx}(t)$ vektörüne karşılık getiren vektör alanıdır, şekil 2.2.



Şekil 2.2. $\mathbb{R}^1$ uzayının her bir t noktasına $\frac{d}{dx}(t)$ vektörüne karşılık getiren vektör alanı

Şimdi $\alpha_{*t}: T_t(\mathbb{R}^1) \to T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^n)$ türev dönüşümünün, $v\frac{d}{dx}(t)$ vektöründeki değerini bulacağız. Türev dönüşümünden

$$\left[\alpha_{*t}\left(v\frac{d}{dx}(t)\right)\right]_{e'} = (J\alpha)_t \, . \left[v\frac{d}{dx}(t)\right]_e$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \\ \vdots \\ \alpha_n'(t) \end{bmatrix}_{n\times 1} . [v]_{1\times 1} = \begin{bmatrix} v\alpha_1'(t) \\ v\alpha_2'(t) \\ \vdots \\ v\alpha_n'(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

olduğundan

$$\alpha_{*t}\left(v\frac{d}{dx}(t)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(v\,\alpha_j'(t)\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\alpha(t)\big)$$

olur. Bu eşitliğin

$$\alpha_{*t}\left(v\frac{d}{dx}(t)\right) = v\sum_{j=1}^{n}\alpha_j'(t)\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\alpha(t)\big) \tag{2.8}$$

biçiminde yazılabileceği de apaçıktır. Özel olarak $\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx}(t)\right)$ vektörü bulunmak istenirse bu durumda $v = 1$ olduğundan

$$\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx}(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j'(t)\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\alpha(t)\big) \tag{2.9}$$

olur. Bu eşitliğin

$$\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx}(t)\right) = \big(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \dots, \alpha_n'(t)\big)_{\alpha(t)} \tag{2.10}$$

biçiminde yazılabileceği de açıktır.

$\alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx}(t)\right)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir ve kısaca $\alpha'(t)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre,

$$\alpha'(t) = \alpha_{*t}\left(\frac{d}{dx}(t)\right) \tag{2.11}$$

dir. 2.10 eşitliğine göre,

$$\alpha'(t) = \big(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \dots, \alpha_n'(t)\big)_{\alpha(t)} \tag{2.12}$$

olur.

Sonuç 2.2 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\alpha(t+h) - \alpha(t)]$ limiti hesaplanarak

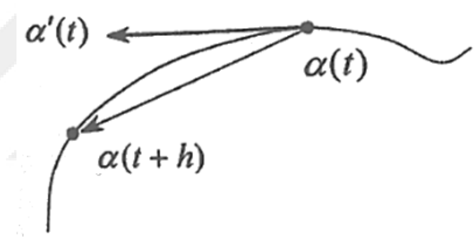
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\alpha(t+h)-\alpha(t)] = \left(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \dots, \alpha_n'(t)\right) \quad (2.13)$$

olduğu görülür. 2.12 eşitliği göz önüne alınarak

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\alpha(t+h)-\alpha(t)] = \alpha'(t) \quad (2.14)$$

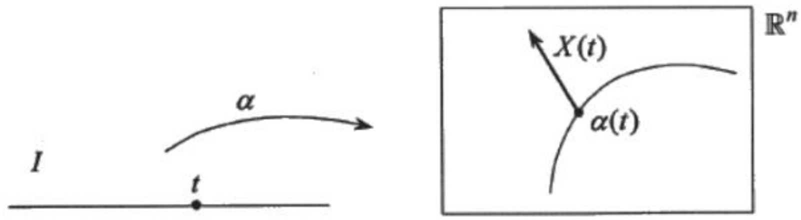
elde edilir.

Geometrik olarak $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\alpha(t+h)-\alpha(t)]$ vektörü düşünüldüğünde bu vektörün eğriye $\alpha(t)$ noktasında teğet bir vektör olduğu görülür, şekil 2.3.



Şekil 2.3. α' vektörünün eğriye $\alpha(t)$ noktasındaki teğet vektörü

Tanım 2.9. (Bir Eğri Üstünde Vektör Alanı):
$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verildiğinde I nın her bir t noktasına, $T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir $X(t)$ vektörünü karşılık getiren bir X fonksiyonuna, α eğrisi üstünde bir vektör alanı denir, şekil 2.4.



Şekil 2.4. X fonksiyonunun, α eğrisi üstündeki bir vektör alanı

Bu tanıma göre, α' fonksiyonu, α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanı, eğriye teğet bir vektör alanıdır. Genel olarak $X(t)$ vektörü eğriye teğet olmak zorunda değildir.

$\mathbb{R}^n$ uzayındaki dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, \dots, x_n,)$ olsun.

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\big(\alpha(t)\big), \frac{\partial}{\partial x_2}\big(\alpha(t)\big), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big(\alpha(t)\big)\right\}$$

kümesi $T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir tabanı olduğundan

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\alpha(t)\big) \tag{2.15}$$

biçimindedir. Burada X_j , I dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyondur. X_j fonksiyonlarına, X vektör alanının bileşenleri denir. Bu ifadeyi

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \alpha\right) \tag{2.16}$$

şeklinde de yazılabilir.

Örnek 2.1. $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ olsun.

$$X(t) = t^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\big(\alpha(t)\big) + 2t \frac{\partial}{\partial x_2}\big(\alpha(t)\big)$$

eşitliği ile verilen X dönüşümü α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanının bileşenleri

$$X_1(t) = t^2 \quad \text{ve} \quad X_2(t) = 2t$$

eşitliği ile verilen X_1 ve X_2 fonksiyonlarıdır.

Tanım 2.10. (Düzgün Vektör Alanı):

$\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi üstündeki X vektör alanının bileşenlerinin her biri düzgün fonksiyonlar ise X vektör alanı düzgün vektör alanıdır, denir.

Tanım 2.11. (Eğri Boyunca Türev):

X , α eğrisi üstünde düzgün bir vektör alanı olmak üzere

$$X'(t) = \sum_{j=1}^{n} \big(X_j\big)'(t) \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\alpha(t)\big) \tag{2.17}$$

eşitliği ile tanımlı $X'(t)$ vektörüne, X vektör alanının α eğrisi boyunca $\alpha(t)$ noktasındaki türevi denir.

Örnek 2.2. $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ olmak üzere

$$X(t) = t^2 \frac{\partial}{\partial x_1}\big(\alpha(t)\big) + 2t \frac{\partial}{\partial x_2}\big(\alpha(t)\big)$$

olsun.

$$X'(t) = 2t\frac{\partial}{\partial x_1}\big(\alpha(t)\big) + 2\frac{\partial}{\partial x_2}\big(\alpha(t)\big)$$

dir.

3. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA KUATERNİYONİK EĞRİLER

Tanım 3.1. Bir reel kuaterniyon sıralı dört sayının $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada, $+1$ bir reel birim olup diğer üç birim ise,

1) $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = -1;\ 1 \leq i \leq 3.$

2) $\mathbb{R}^4$, 4-boyutlu Öklid uzayında $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\vec{e}_j \times \vec{e}_i = \vec{e}_k$, burada, (ijk) (123) ün çift permütasyonudur.

Böylece bir reel kuaterniyon,

$$q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d$$

şeklindedir. Burada, a, b, c ve d reel sayılar ve $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ise 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörler olarak alınabilir. Dolayısıyla q kuaterniyonunu S_q ile gösterilen skalar kısım ve $\vec{V}_q$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılabilir.

$$S_q = d\,, \qquad \vec{V}_q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$
$$q = S_q + \vec{V}_q$$

Bundan sonra reel kuaterniyonların cümlesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilecektir.

$$\mathbb{Q} = \{\mathrm{q} | q = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d; a, b, c, d \in \mathbb{R}, \vec{e}_{1-3} \in \mathbb{R}^3\}$$

dır [7].

Tanım 3.2. İki reel kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı;

$\forall\, p, q \in \mathbb{Q}$ için

$$p \times q = S_p S_q - \langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \rangle + S_p \vec{V}_q + S_q \vec{V}_p + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q$$

şeklindedir. Burada $\langle\, ,\rangle$ ve $\wedge$ sırasıyla, $\mathbb{R}^3$ üzerindeki iç ve vektörel çarpımı göstermektedir.

Tanım 3.3. Bir $q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonun eşleniği diye

$$\alpha q = -a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3 + d = S_q - \vec{V}_q$$

ile tanımlanan αq kuaterniyonuna denir.

Tanım 3.4. $\forall p, q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonları için

$h: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(p, q) \longrightarrow h(p, q) = \frac{1}{2}[p \times \alpha q + q \times \alpha p] \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan h formuna reel kuaterniyon iç çarpımı adını alır. Bu h formu reel değerli, simetriklik ve bilineerlik özelliklerine sahiptir. Burada $\times$ kuaterniyon çarpımını göstermektedir.

Tanım 3.5. Bir $q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonunun normu

$$\|q\|^2 = h(q, q) = q \times \alpha q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{3.2}$$

eşitliğini sağlayan $\|q\|$ reel sayısına denir.

Tanım 3.6. Eğer $q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonu için

$$\|q\| = 1$$

oluyorsa q ‘ya bir reel birim kuaterniyon denir.

Tanım 3.7. Eğer $q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonu için

$$q + \alpha q = 0$$

oluyorsa q ‘ya bir reel uzaysal-kuaterniyonu denir. Eğer, $q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonu için $q - \alpha q = 0$ oluyorsa q bir temporal kuaterniyon adını alır.

Genel olarak, bir $q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonu

$$q = \frac{1}{2}[q + \alpha q] + \frac{1}{2}[q - \alpha q]\,.$$

Tanım 3.8. Eğer $p, q \in \mathbb{Q}$ reel kuaterniyonları için

$$h(q, q) = 0 \tag{3.3}$$

oluyorsa p ile q’ ya h-ortogonaldir denir.

Tanım 3.9. Reel tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlara kuaterniyonik eğri denir. Yani kuaterniyonik eğri ile, $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$\alpha: I \longrightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{4}}$$
$$s \longrightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(s)\vec{e}_i \;, \alpha_i(s) \in \mathbb{R}\,, (1 \leq i \leq 4)\,, e_4 = 1$$

şeklinde tanımlanır. Reel tek değişkenli, kuaterniyon değerli α dönüşümü altında I'nın $\alpha(I)$ resmi ifade edilmektedir.

Tanım 3.10. 4-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir kuaterniyonik eğri

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$s \longrightarrow \alpha(s) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(s)\vec{e}_i \ ,(1 \leq i \leq 4)\ , e_4 = 1,$$

parametrik denklemi ile verilsin.$\forall s \in I$ yay-parametresi olmak üzere; $\alpha'(s) = \ T$ olsun. $\{T, N_1, N_2, N_3\ \}$, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklıları olmak üzere, Frenet formülleri:

$$\begin{aligned} T' &= k_1 N_1 \\ N_1' &= -k_1 T + k_2 N_2 \\ N_2' &= -k_2 N_1 + k_3 N_3 \\ N_3' &= -k_3 N_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklindedir. Burada, $\{k_1, k_2, k_3\}$ sıfırdan farklı eğrilikleri sırasıyla, α eğrisinin birinci eğrilik, torsiyon ve üçüncü eğriliğidir.

Frenet formüllerinin matris gösterimi,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \\ N_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

4. HARMONİK EĞRİLİKLER VE KUATERNİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ

Tanım 4.1. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. X sabit birim kuaterniyon olmak üzere $\forall\ s \in I$ için

$$h(T, X) = cos\varphi = sbt\ , \varphi \neq \frac{\pi}{2} \tag{4.1}$$

ise, α eğrisine bir kuaterniyonik eğilim çizgisi denir [4].

Tanım 4.2. α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. X sabit ve birim bir uzay-kuaterniyonu ve $\{T, N_1, N_2, N_3\}$, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı olsun. Bu takdirde T ile X arasındaki açı φ olmak üzere;

$H_i : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(N_{i+1}, X) = H_i\ cos\varphi \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonuna α kuaterniyonik eğrisinin X'e göre $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci harmonik eğriliği denir ve $H_0 = 0$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.1. Bir kuaterniyonik eğrinin harmonik eğrilikleri için

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2} = \frac{1.\,eğrilik}{2.\,eğrilik} \tag{4.3}$$

$$H_2 = \frac{1}{k_3} H_1' \tag{4.4}$$

dir [6].

Teorem 4.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$ s-yay parametresi ile verilen bir kuaterniyonik eğri olsun. $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklısı $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ve harmonik eğrilikleri H_1, H_2 olmak üzere;

$$\alpha \text{ } bir \text{ } eğilim \text{ } çizgisidir \iff H_1^2 + H_2^2 = sbt \tag{4.5}$$

İspat: $(\Longrightarrow)$ $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{Q}$ kuaterniyonik eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu kabul edelim. Öyleyse α eğrisi için 4.1 eşitliğini sağlayacak X sabit birim kuaterniyonu vardır. Bu kuaterniyonu α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki bazları cinsinden

$$X = h(T, X)\, T + \sum_{i=1}^{3} h(N_i, X)\, N_i \tag{4.6}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\|T\| = \|N_1\| = \|N_2\| = \|N_3\| = \|X\| = 1$ olduğunu gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} \|X\|^2 &= h(X, X) = X \times \alpha X \\ &= \left[h(T, X)\, T + \sum_{i=1}^{3} h(N_i, X)\, N_i\right] \times \alpha \left[h(T, X)\, T + \sum_{i=1}^{3} h(N_i, X)\, N_i\right] \end{aligned}$$

bulunur. 3.4 ve 4.2 eşitliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \|X\|^2 = {} & \cos^2\varphi\ T \times \alpha T + \cos^2\varphi\ H_1\, T \times \alpha N_2 + \cos^2\varphi\ H_2\, T \times \alpha N_3 \\ & + \cos^2\varphi\ H_1\, N_2 \times \alpha T + \cos^2\varphi\ H_1^2\, N_2 \times \alpha N_2 + \cos^2\varphi\ H_1 H_2\, N_2 \times \alpha N_3 \\ & + \cos^2\varphi\ H_2\, N_3 \times \alpha T + \cos^2\varphi\ H_1 H_2\, N_3 \times \alpha N_2 + \cos^2\varphi\ H_2^2\, N_3 \times \alpha N_3 \end{aligned}$$

buluruz. $\|X\| = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2\varphi + \cos^2\varphi\ H_1^2 + \cos^2\varphi\ H_2^2 \\ 1 - \cos^2\varphi &= \cos^2\varphi\ (H_1^2 + H_2^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = H_1^2 + H_2^2$$

buradan da,

$$H_1^2 + H_2^2 = \tan^2\varphi = sbt$$

elde edilir.

(⟸): $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{Q}$ kuaterniyon eğrisi için

$$H_1^2 + H_2^2 = a\ (\ sbt\ )$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\tan^2\varphi = a$ olacak şekilde bir φ açısı vardır.

Buna göre

$$X = \cos\varphi\ T + H_0\cos\varphi\, N_1 + H_1\cos\varphi\, N_2 + H_2\cos\varphi\, N_3 \tag{4.7}$$

biçiminde bir kuaterniyon tanımlayalım.

1) Gösterelim ki X sabittir. 4.7 eşitliğinin s'ye göre türevini alırsak,

$$\frac{1}{\cos\varphi}X' = T' + H_1'N_2 + H_2'N_3 + H_1\, N_2' + H_2\, N_3' \tag{4.8}$$

bulunur. Diğer taraftan, Tanım 4.2 de

$$h(N_3, X) = H_2\ cos\varphi$$

yazılıp bu eşitliğin s'ye göre türev alınmasıyla

$$h(N_3', X) + h(N_3, X') = H_2'\ cos\varphi + 0$$
$$h(N_3', X) = H_2'\ cos\varphi$$

$$h(-k_3 N_2, X) = H_2' \, cos\varphi$$
$$-k_3 \, h(N_2, X) = H_2' \, cos\varphi$$

$$H_2' = -k_3 \, H_1 \tag{4.9}$$

elde edilir. 3.4, 4.3, 4.4 ve 4.9 ifadelerinin göz önüne alınmasıyla;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\varphi} X' &= T' + H_1' N_2 + H_2' N_3 + H_1 \, N_2' + H_2 \, N_3' \\
&= k_1 N_1 + k_3 \, H_2 N_2 - k_3 \, H_1 \, N_3 + H_1(-k_2 N_1 + k_3 N_3) + H_2 \, (-k_3 N_2) \\
&= k_1 N_1 + k_3 \, H_2 N_2 - k_3 \, H_1 \, N_3 - k_2 H_1 N_1 + k_3 H_1 N_3 - k_3 H_2 N_2
\end{aligned}$$
$$\frac{1}{\cos\varphi} X' = 0$$

bulunur. O halde X sabittir.

2) X'in birim olduğunun gösterelim:

$$\begin{aligned}
\|X\|^2 \; &= \; h(X,X) = \; X \times \alpha X \\
&= \left[h(T,X) \, T + \sum_{i=1}^{3} h(N_i \, , X) \, N_i \right] \times \alpha \left[h(T,X) \, T + \sum_{i=1}^{3} h(N_i \, , X) \, N_i \right] \\
&= \cos^2\varphi + \cos^2\varphi \;\; H_1^2 + \cos^2\varphi \;\; H_2^2 \\
&= \cos^2\varphi \;\; (1 + H_1^2 + H_2^2) \\
&= \cos^2\varphi \;\; (1 + \tan^2\varphi) \\
&= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse,

$$\|X\| = 1$$

dir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
h(T, X) &= \frac{1}{2}(T \times \alpha X + X \times \alpha T) \\
&= \frac{1}{2}[T \times \alpha(\cos\varphi \; T + H_1 \cos\varphi \, N_2 + H_2 \cos\varphi \, N_3) \\
&\quad +(\cos\varphi \; T + H_1 \cos\varphi \, N_2 + H_2 \cos\varphi \, N_3) \times \alpha T] \\
&= \frac{1}{2}[\cos\varphi \, T \times \alpha \, T + H_1 \cos\varphi \, T \times \alpha N_2 + H_2 \cos\varphi \, T \times \alpha N_3 \\
&\quad + \cos\varphi \; T \times \alpha T + H_1 \cos\varphi \, N_2 \times \alpha T + H_2 \cos\varphi \, N_3 \times \alpha T \,]
\end{aligned}
$$

$$h(T, X) = \cos\varphi = sbt$$

bulunur. Bu ise α eğrisinin bir eğilim çizgisi olduğunu verir.

Sonuç: Kuaterniyonik eğriler için elde edilen harmonik eğriliklerin türev denklemleri 4.4 ve 4.9 eşitliklerinden yararlanarak matrisel ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_3 \\ -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}.$$

5. E^4 'DE HARMONİK EĞRİLİKLER VE GENEL HELİSLER

Bu kesimde, 4-boyutlu Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğrilerin Frenet 4-ayaklıları ve harmonik eğrilikler ile genel helis eğrisi arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Tanım 5.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^4$ regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. X sabit birim kuaterniyon olmak üzere $\forall\ s \in I$ için

$$h(T,X) = cos\varphi = sbt\ , \varphi \neq \frac{\pi}{2} \tag{5.1}$$

ise, α eğrisine bir genel helis denir [5].

Teorem 5.1. $\mathbb{E}^4$ de α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. X sabit birim kuaterniyon ve $\{T,\ N_1, N_2, N_3\}$, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklıları olsun. α , $\mathbb{E}^4$ de bir genel helis denklemi ise

$$h(N_{i+1}, X) = H_i\ cos\varphi\ (i = 1,2) \tag{5.2}$$

dir. H_i , α nın harmonik eğrilikleridir.

İspat: α bir genel helis denklemi olduğundan 5.1 denklemini sağlar. Bu denklemin s'ye göre türevini alalım.

$$(h(T,X))' = (cos\varphi)'$$
$$h(T',X) + h(T,X') = 0$$
$$h(T',X) = 0$$

Frenet formüllerini kullanırsak

$$h(k_1 N_1, X) = 0$$
$$k_1 h(N_1, X) = 0 \ , \ k_1 \neq 0$$

olduğundan

$$h(N_1, X) = 0$$

olur. Bu eşitliğin s’ye göre türevini alıp Frenet formüllerini kullanırsak

$$h(N_1', X) + h(N_1, X') = 0$$
$$h(N_1', X) = 0$$
$$h(-k_1 T + k_2 N_2, X) = 0$$
$$-k_1 h(T, X) + k_2 h(N_2, X) = 0$$
$$h(N_2, X) = \frac{k_1}{k_2} h(T, X)$$

4.3, 4.4 ve 5.1 eşitliklerinden

$$h(N_2, X) = H_1 cos\varphi$$

elde edilir. Bu denkleminde s’ye göre türevini alıp Frenet formüllerini kullanırsak

$$h(N_2', X) = H_1' \ cos\varphi + H_1 (cos\varphi)'$$
$$h(N_2', X) = H_1' \ cos\varphi$$
$$h(-k_2 N_1 + k_3 N_3, X) = H_1' \ cos\varphi$$
$$-k_2 h(N_1, X) + k_3 h(N_3, X) = H_1' \ cos\varphi$$
$$h(N_3, X) = \frac{1}{k_3} H_1' \ cos\varphi$$

4.3 ve 4.4 eşitliklerini kullanırsak

$$h(N_3, X) = H_2 \ cos\varphi$$

elde edilir.

Sonuç 5.1. $\mathbb{E}^4$ de α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin ekseni X olsun ve X sabit birim vektörü olmak üzere;

Eğer α bir genel helis ise

$$X = (T + H_1 N_2 + H_2 N_3) \cos \varphi \, .$$

İspat: α, $\mathbb{E}^4$ de bir genel helis olduğunu varsayalım ve α eğrisinin ekseni X birim vektörü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz

$$X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 + \lambda_4 N_4$$

ve Teorem 5.1. kullanırsak

$$\lambda_1 = h(T, X) = \cos \varphi$$
$$\lambda_2 = h(N_1, X) = H_0 \cos \varphi = 0$$
$$\lambda_3 = h(N_2, X) = H_1 \cos \varphi$$
$$\lambda_4 = h(N_3, X) = H_2 \cos \varphi$$

Böylece kolaylıkla X aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$X = (T + H_1 N_2 + H_2 N_3) \cos \varphi \, .$$

Teorem 5.2. $\mathbb{E}^4$ de α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. k_1 , k_2 , k_3 sıfırdan farklı eğrilikleri ve H_0 , H_1 , H_2 de harmonik eğrilikleri olmak üzere;

$$\alpha \; bir \; genel \; helisdir \iff H_1^2 + H_2^2 = sbt \tag{5.3}$$

İspat: (⟹); α bir genel helis ve X sabit birim vektör olsun. 5.1 denkleminin türevini alıp, Frenet formüllerini kullanırsak;

$$
\begin{aligned}
0 = \left(h(T,X)\right)' &= \frac{1}{2}(T \times \alpha X + X \times \alpha T)' \\
&= \tfrac{1}{2}(T' \times \alpha X + X \times \alpha T') \\
&= h(T', X) \\
&= k_1 h(N_1, X)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu yüzden, X birim vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$X = mT + nN_2 + pN_3 \tag{5.4}$$

Burada

$$m = h(T,X) = sbt\ ,\ n = h(N_2,X)\ ,\ p = h(N_3,X) \text{ ve } m^2 + n^2 + p^2 = 1 \tag{5.5}$$

dir. 5.4 denkleminin türevini alınırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= m'T + mT' + n'N_2 + nN_2{}' + p'N_3 + pN_3' \\
&= mk_1N_1 + n'N_2 + n(-k_2N_1 + k_3N_3) + p'N_3 + p(-k_3N_2) \\
&= mk_1N_1 + n'N_2 - nk_2N_1 + nk_3N_3 + p'N_3 - pk_3N_2 \\
&= (mk_1 - nk_2)N_1 + (n' - pk_3)N_2 + (nk_3 + p')N_3
\end{aligned}
$$

olması için

$$mk_1 - nk_2 = 0\ ,\ n' - pk_3 = 0\ ,\ nk_3 + p' = 0.$$

Buradan da

$$n = \frac{k_1}{k_2}m = -\frac{1}{k_3}p'\ ,\quad n' = k_3p \tag{5.6}$$

5.6 daki birinci denklemin türevini alıp ikinci denklemde yerine yazarsak

$$n' = -\frac{1}{k_3}p'' + \frac{k_3'}{k_3^2}p'$$

$$k_3 p = -\frac{1}{k_3}p'' + \frac{k_3'}{k_3^2}p'$$

İki tarafı k_3 ile çarpıp düzenlersek

$$p'' - \frac{k_3'}{k_3}p' + k_3^2 p = 0 \tag{5.7}$$

İkinci mertebeden lineer diferensiyel denklemi elde edilir. $t = \int_0^s k_3\, ds$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$\frac{dt}{ds} = k_3 \text{ ve } \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = k_3^2 \, .$$

5.7 eşitliğindeki değişkenleri değiştirilebilmek için $p = t(s)$ biçiminde bir değişken tanımlaması yapalım. Buna göre,

$$p' = \frac{dp}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dp}{dt}$$

$$p'' = \left(\frac{dt}{ds}\frac{dp}{dt}\right)' = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{d^2t}{ds^2}\frac{dp}{dt}$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu ifadeler 5.7 denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{d^2t}{ds^2}\frac{dp}{dt} - \frac{k_3'}{k_3}\frac{dt}{ds}\frac{dp}{dt} + k_3^2 p = 0$$

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2p}{dt^2} + \left[\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{k_3'}{k_3}\frac{dt}{ds}\right]\frac{dp}{dt} + k_3^2 p = 0$$

$$k_3^2\frac{d^2p}{dt^2} + \left[k_3' - \frac{k_3'}{k_3}k_3\right]\frac{dp}{dt} + k_3^2 p = 0$$

$$k_3^2\left(\frac{d^2p}{dt^2}+p\right)=0$$

$k_3 \neq 0$ olduğundan

$$\frac{d^2p}{dt^2}+p=0$$

$$p''+p=0 \tag{5.8}$$

lineer diferensiyel denklemi elde edilir. Bu lineer diferensiyel denklemin çözümü yapılırsa

$$p=A\cos t+B\sin t \tag{5.9}$$

elde edilir. Burada A ve B sabittir. 5.9 daki denklem ve harmonik eğriliğin tanımı, 5.6 daki denklemlerde yerlerine yazılıp düzenlendiğinde

$$n=H_1m=A\sin t-B\cos t \tag{5.10}$$

$$n'=(H_1m)'=(H_1)'m+H_1m'\ ,(\ m=sbt, m'=0\ )$$

$$n'=(H_1)'m=k_3\,p$$

$$p=\frac{1}{k_3}(H_1)'m=H_2\,m=A\cos t+B\sin t \tag{5.11}$$

5.10 ve 5.11 denklemleri bulunur. 5.10 denklemini $\sin t$ ile 5.11 denklemini de $\cos t$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$A=m[H_1\sin t+H_2\cos t]\ ,$$

5.10 denklemini $-\cos t$ ile 5.11 denklemini de $\sin t$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$B=m[-H_1\cos t+H_2\sin t]$$

ifadeleri elde edilir. Elde ettiğimiz bu A ve B ifadelerinin karelerini alıp taraf tarafa toplanırsa

$$A^2 + B^2 = m^2[H_1^2 + H_2^2]$$

elde edilir. Burada A, B ve m sabit olduğundan

$$H_1^2 + H_2^2 = sbt \tag{5.12}$$

ifadesi elde edilmiş olur.

(⟸); Eğer gerek ve yeter şart 5.3 sağlanıyor ise, o zaman α nın T teğet vektörü, bir X sabit birim vektörü ile sabit bir φ açısı yapıyor demektir. Yani,

$$h(T, X) = cos\varphi = sabittir.$$

Eşitlik 5.4, eşitlik 5.5, eşitlik 5.10 ve eşitlik 5.11 den

$$X = T + H_1N_2 + H_2N_3$$

yazabiliriz. X'in türevini bulalım

$$X' = T' + H_1'N_2 + H_1N_2' + H_2'N_3 + H_2N_3'$$
$$X' = k_1N_1 + H_1'N_2 + H_1(-k_2N_1 + k_3N_3) + H_2'N_3 + H_2(-k_3N_2)$$
$$X' = (k_1 - k_2H_1)N_1 + (H_1' - k_3H_2)N_2 + (k_3H_1 + H_2')N_3$$

5.12 eşitliğinin türevini alıp harmonik eğriliğin tanımını da kullandığımızda

$$k_1 - k_2H_1 = 0\,, \qquad H_1' - k_3H_2 = 0\,, \qquad k_3H_1 + H_2' = 0 \tag{5.13}$$

bulunur. Dolayısıyla $X' = 0$ bulunur. Bu ise X'in sabit vektör olmasını gerektirir. Sonuç olarak α bir genel helisdir.

Tanım 5.2. $\mathbb{E}^4$ de α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklıları $\{T,\ N_1, N_2, N_3\}$ ve harmonik eğrilikleri fonksiyonları da $\{H_1, H_2\}$ olsun. Bu durumda

$$D = T + H_1 N_2 + H_2 N_3$$

şeklinde tanımlanan vektöre α genel helisinin Darboux vektörü denir [12].

Teorem 5.3. $\mathbb{E}^4$ de α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklıları $\{T,\ N_1, N_2, N_3\}$ ve harmonik eğrilikleri fonksiyonları da $\{H_1, H_2\}$ olsun.

α'nın bir genel helis olması için gerek ve yeter şart D Darboux vektörünün sabit olmasıdır.

İspat: α, $\mathbb{E}^4$ de bir genel helis olsun. Bu durumda 4.3, 4.4 ve 5.3 eşitliklerinden

$$H_1^2 + \left(\frac{1}{k_3} H_1{}'\right)^2 = sbt$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklemin türevini alırsak

$$H_1 H_1' + \frac{1}{k_3} H_1' \left(\frac{1}{k_3} H_1'\right)' = 0$$

elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitliği ve 4.3, 4.4 eşitliklerini de kullanarak

$$\left(\frac{1}{k_3}H_1'\right)' = H_2' = -k_3H_1 \tag{5.14}$$

denklemini elde etmiş oluruz. Sonuç 5.1 den

$$X = (T + H_1N_2 + H_2N_3)\cos\varphi = D\cos\varphi \tag{5.15}$$

yazabiliriz. Burada $\cos\varphi$ sabit ve aynı zamanda X'de sabit birim vektördür. D nin s'ye göre türevini aldığımızda

$$D' = T' + H_1'N_2 + H_1N_2' + H_2'N_3 + H_2N_3'$$
$$D' = k_1N_1 + H_1'N_2 + H_1(-k_2N_1 + k_3N_3) + H_2'N_3 + H_2(-k_3N_2)$$
$$D' = (k_1 - k_2H_1)N_1 + (H_1' - k_3H_2)N_2 + (k_3H_1 + H_2')N_3$$

5.13 eşitliklerinden de

$$D' = 0$$

elde edilir. Böylece D bir sabit vektördür.

Tersine, kabul edelim ki D sabit bir vektör olsun. Tanım 5.2 ve sonuç 5.1 den

$$X = D\cos\varphi$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} h(T,X) &= h(T,D)cos\varphi \\ &= h(T, T + H_1N_2 + H_2N_3)cos\varphi \\ &= h(T,T)cos\varphi \\ &= cos\varphi = sbt. \end{aligned}$$

Sonuç 5.2. $\mathbb{E}^4$ de α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 4-ayaklıları $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ve harmonik eğrilikleri fonksiyonları da $\{H_1, H_2\}$ olsun. α eğrisinin ekseni de D sabit birim vektörü

$$D = T + H_1N_2 + H_2N_3$$

şeklindedir. Eğer, α eğrisinin k_1, k_2, k_3 eğrilikleri ve H_1 birinci harmonik eğriliği sabit ise α eğrisine bir W-eğri denir. Dolayısıyla

$$D = T + H_1N_2$$

yazılabilir. Bu denklemin de türevini aldığımızda

$$\begin{aligned} D' &= T' + H_1'N_2 + H_1N_2' \\ &= k_1N_1 - H_1k_2N_1 + H_1k_3N_3 \\ &= H_1k_3N_3 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, kolaylıkla D' nün sıfırdan farklı olduğunu görürüz. Bu ise D nin sabit vektör olmadığını gösterir. Bu durumda Teorem 5.3 e göre bu eğri bir helis değildir. Bu ise ispatımızı tamamlar.

Teorem 5.4. $\mathbb{E}^4$ de α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. H_1, H_2 harmonik eğrilikler ve k_3 sıfırdan farklı üçüncü eğriliği olmak üzere, α'nın bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$k_3\,\gamma = H_1',\ \gamma' = -k_3H_1 \tag{5.16}$$

olacak şekilde C^2-sınıfından bir γ fonksiyonunun var olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$); α bir genel helis denklemi olsun. Teorem 5.2 den $H_1^2 + H_2^2 = sbt$ olduğunu biliyoruz. 4.4 eşitliğini bu denklemde yerine yazalım

$$(H_1)^2 + \frac{1}{k_3^2}((H_1)')^2 = sbt\,.$$

Bu ifadenin türevini alırsak

$$2(H_1)'(H_1) - 2\frac{k_3'}{k_3^3}((H_1)')^2 + 2\frac{1}{k_3^2}(H_1)'(H_1)'' = 0$$

$$(H_1)'(H_1) + \frac{1}{k_3}(H_1)'\left[-\frac{k_3'}{k_3^2}(H_1)' + \frac{1}{k_3}(H_1)''\right] = 0$$

$$(H_1)'(H_1) + \frac{1}{k_3}(H_1)'\left(\frac{1}{k_3}(H_1)'\right)' = 0 \tag{5.17}$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{1}{k_3}(H_1)' = -\frac{(H_1)'(H_1)}{\left(\frac{1}{k_3}(H_1)'\right)'} \tag{5.18}$$

yazabiliriz. Eğer γ için

$$\gamma = -\frac{(H_1)'(H_1)}{(H_2)'}$$

aldığımızda. 5.18 deki eşitlikten

$$k_3\,\gamma = H_1' \tag{5.19}$$

bulunur. 5.18 eşitliğinden

$$\frac{1}{k_3}(H_1)'\left(\frac{1}{k_3}(H_1)'\right)' = -(H_1)'(H_1)$$

$$\left(\frac{1}{k_3}(H_1)'\right)' = -k_3(H_1) \tag{5.20}$$

yazabiliriz. 5.19 eşitliğinde γ'yi yalnız bırakıp 5.20 eşitliğinde yerine yazarsak

$$\gamma' = -k_3(H_1)\ . \tag{5.21}$$

($\Leftarrow$); Eğer gerek ve yeter şart (5.16) sağlanıyor ise, 5.5, 5.10, 5.11 ve 5.19 eşitliklerinden, X'i sabit birim vektör olarak tanımlayabiliriz.

$$X = T + H_1N_2 + \gamma N_3\ .$$

Buradan da $h(T, X) = sbt$ bulunur. Bu ise α'nın bir genel helis olduğunu gösterir.

Teorem 5.5. α, birim hızlı kuaterniyonik eğri olsun. H_1, H_2 harmonik eğrilikler ve k_3 sıfırdan farklı üçüncü eğriliği olmak üzere, α'nın bir genel helis olması için gerek ve yeter şart

$$H_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t\ . \tag{5.22}$$

Burada C_1 ve C_2 sabit, $t = \int_0^s k_3\, ds$ dir [13].

İspat: ($\Longrightarrow$); α, bir genel helis olsun.

$$t = \int_0^s k_3\, ds \tag{5.23}$$

C^2-sınıfından bir fonksiyon ve

$$m = H_1 \cos t - \gamma \sin t \ \ , \ n = H_1 \sin t + \gamma \cos t \ . \tag{5.24}$$

Burada m ve n C^1-sınıfından fonksiyonlar olup, bunların sabit olduğunu göstermeliyiz. Bunun içinde m ve n fonksiyonlarının s' ye göre türevi alalım

$$m' = (H_1)' \cos t - H_1 \, t' \sin t - \gamma' \sin t - \gamma \, t' \cos t$$
$$m' = (H_1)' \cos t - H_1 \, k_3 \sin t - \gamma' \sin t - \gamma k_3 \cos t$$

5.19 ve 5.21 eşitliklerinden

$$m' = (H_1)' \cos t + \gamma' \sin t - \gamma' \sin t - (H_1)' \cos t$$
$$m' = 0$$

bulunur.

$$n' = (H_1)' \sin t + H_1 \, t' \cos t + \gamma' \cos t - \gamma \, t' \sin t$$
$$n' = (H_1)' \sin t + H_1 \, k_3 \cos t + \gamma' \cos t - \gamma \, k_3 \sin t$$

5.19 ve 5.21 eşitliklerinden

$$n' = (H_1)' \sin t - \gamma' \cos t + \gamma' \cos t - (H_1)' \sin t$$
$$n' = 0$$

bulunur.

Böylece $m = C_1$ ve $n = C_2$ sabittir.

5.24 deki eşitliklerden birincisini $\cos t$, ikincisini $\sin t$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$C_1 \cos t = H_1 \cos^2 t - \gamma \sin t \ \cos t$$

$$C_2 \sin t = H_1 \sin^2 t + \gamma \cos t \, \sin t$$
$$H_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t \, .$$

(⟸); 5.22 koşulu sağlansın. O halde 5.24 deki eşitliklerden birincisini $-\sin t$ ve ikincisini de $\cos t$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$\gamma(s) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \, . \tag{5.25}$$

5.25 eşitliğinin s' ye göre türevi alırsak

$$\gamma' = -k_3(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

5.16 eşitliğinden,

$$\gamma' = -k_3 H_1$$

olduğunu biliyoruz. 5.25 eşitliğinin Teorem 5.4 deki koşulları sağladığına göre α bir genel helistir.

Teorem 5.6. $\mathbb{E}^4$ de α, regüler kuaterniyonik eğrisi s yay-parametresi ile verilsin. α eğrisinin Frenet 4-ayaklıları $\{T, N_1, N_2, N_3\}$, harmonik eğrilik fonksiyonları $\{H_1, H_2\}$ ve k_3 üçüncü eğrilik olmak üzere

$$\alpha \text{ bir genel helistir } \Leftrightarrow \mathrm{H}_2' + k_3 H_1 = 0 \, .$$

İspat: Kabul edelim ki α, $\mathbb{E}^4$ de genel bir helis olsun. Bu durumda

$$D = T + H_1 N_2 + H_2 N_3 = sbt$$

vardır. α eğrisinin D boyunca türevini aldığımızda

$$D' = (k_1 - k_2 H_1) N_1 + (H_1' - k_3 H_2) N_2 + (k_3 H_1 + H_2') N_3$$

elde ederiz. Burada $D' = 0$ ve N_1, N_2, N_3 sıfırdan farklı olduğundan

$$H_2' + k_3 H_1 = 0$$

elde edilir.

Tersine, $H_2' + k_3 H_1 = 0$ olduğunu kabul edilim. $D' = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece D sabit bir vektördür. Teorem 5.3. den de α nın $\mathbb{E}^4$ de bir genel helis olduğunu gösterir.

6. E^4 'DE 2-TİP HARMONİK EĞRİLİKLER VE GENEL HELİSLER

Tanım 6.1. (Genel Helis İçin 2-Tip Harmonik Eğrilikler):

$\mathbb{E}^4$ de α birim hızlı bir kuaterniyonik eğri olsun, s yay-parametresi olmak üzere; G_i de α eğrisinin 2-Tip harmonik eğrilikleri

$$G_i : I \to \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq 4$$

$$G_i = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i = 2 \\ \dfrac{k_1}{k_2} & i = 3 \\ \dfrac{1}{k_3} G_3' & i = 4 \end{cases} \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 6.1. $\mathbb{E}^4$ de α birim hızlı bir kuaterniyonik eğri ve s yay-parametresi olsun. α eğrisinin Frenet 4-ayaklıları $\{T,\ N_1, N_2, N_3\}$, 2-tip harmonik eğrilik fonksiyonları da $\{G_1, G_2,\ G_3, G_4\}$ olmak üzere;

$$\alpha \ bir \ genel \ helistir \ \Leftrightarrow \ G_3^2 + G_4^2 = C = sbt\,. \tag{6.2}$$

İspat: Kabul edelim ki α, $\mathbb{E}^4$ de genel bir helis olsun. X sabit birim vektörü ile T arasındaki açı φ olmak üzere aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$h(X,X) = 1 \ \text{ ve } \ h(T,X) = \cos\varphi$$
$$X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 + \lambda_4 N_3 \tag{6.3}$$

Buradan da

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= h(T,X) = \cos\varphi \\ \lambda_2 &= h(N_1,X) \\ \lambda_3 &= h(N_2,X) \\ \lambda_4 &= h(N_3,X)\end{aligned} \tag{6.4}$$

yazabiliriz.

6.4 deki eşitliklerden birincisinin s parametresine göre türevini alıp Frenet formüllerini uyguladığımızda

$$\lambda_1' = k_1\, h(N_1,X) = k_1\lambda_2 = 0$$

elde edilir. Bu durumda $k_1 \neq 0$ olduğundan $\lambda_2 = 0$ olduğu görülmektedir. Böylece X vektörü

$$X = \lambda_1 T + \lambda_3 N_2 + \lambda_4 N_3 \tag{6.5}$$

şeklindedir. 6.5 eşitliğinin türevini aldığımızda,

$$X' = \lambda_1' T + \lambda_1 T' + \lambda_3' N_2 + \lambda_3 N_2' + \lambda_4' N_3 + \lambda_4 N_3' = 0$$
$$\lambda_1' T + \lambda_1(k_1 N_1) + \lambda_3' N_2 + \lambda_3(-k_2 N_1 + k_3 N_3) + \lambda_4' N_3 + \lambda_4(-k_3 N_2) = 0$$
$$(k_1\lambda_1 - k_2\lambda_3)N_1 + (\lambda_3' - k_3\lambda_4)N_2 + (\lambda_4' + k_3\lambda_3)N_3 = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}k_1\lambda_1 - k_2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3' - k_3\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_4' + k_3\lambda_3 &= 0\end{aligned} \tag{6.6}$$

olduğu görülür. $G_i = G_i(s)$ fonksiyonun tanımından

$$\lambda_i(s) = G_i(s)\lambda_1\,, 3 \leq i \leq 4 \tag{6.7}$$

şeklindedir.

Burada $\lambda_1 \neq 0$ olduğuna işaret edilmektedir. Aksine, 6.6 eşitliklerinden $\lambda_i = 0$, $3 \leq i \leq 4$ için verir ve bu yüzden $X = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir.

6.1 denkleminden

$$G_3 = \frac{k_1}{k_2}$$
$$G_4 = \frac{1}{k_3} G_3' \tag{6.8}$$

olduğunu biliyoruz. 6.6 eşitliklerinin sonuncu ifadesinden ve 6.7 eşitliğinden yararlanarak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$G_4' + k_3 G_3 = 0\,. \tag{6.9}$$

Özellikle 6.8 deki son denklemden

$$G_3' = k_3 G_4 \tag{6.10}$$

yazabiliriz. Eğer 6.9 denkleminin türevini alıp ve sonrada 6.9 ve 6.10 denklemlerini kullandığımızda ikinci dereceden bir diferensiyel denklem elde edilir.

$$G_4'' + k_3' G_3 + k_3 G_3' = 0$$
$$G_4'' + k_3'\left(-\frac{1}{k_3} G_4'\right) + k_3(k_3 G_4) = 0$$

$$G_4'' - \frac{k_3'}{k_3} G_4' + k_3^2 G_4 = 0 \tag{6.11}$$

Burada $t = \int_0^s k_3 \, ds$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$\frac{dt}{ds} = k_3 \text{ ve } \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = k_3^2 \, .$$

6.11 denklemine bu dönüşümler uygulandığında denklem

$$G_4''(t) + G_4(t) = 0$$

şekline dönüşür. Bu denklemin genel çözümünde ise

$$G_4 = A\cos t + B\sin t \tag{6.12}$$

elde edilir. Burada A ve B sabittir.

6.12 denkleminin türevini alıp 6.9 da yerine yazdığımızda

$$G_3 = -\frac{1}{k_3} G_4' = -\frac{1}{k_3}(-A\, k_3 \sin t + B\, k_3 \cos t)$$
$$G_3 = A\sin t + B\cos t \tag{6.13}$$

denklemini elde ederiz.

6.12 ve 6.13 eşitliklerinin kareleri alınıp taraf tarafa toplanırsa

$$G_3^2 + G_4^2 = A^2 + B^2 = C$$

elde edilir.

Tersine, α eğrisi için $G_3^2 + G_4^2 = C$ olduğunu kabul edelim. X birim vektörünü

$$X = (T + G_3 N_2 + G_4 N_3)\cos\varphi$$

şeklinde tanımlayalım. X birim vektörünün türevini alıp 6.8, 6.9 ve 6.10 eşitliklerini de kullanırsak

$$X' = [(k_1 - k_2 G_3)N_1 + (G_3' - k_3 G_4)N_2 + (G_4' + k_3 G_3)N_3]\cos\varphi = 0$$

elde edilir. Bu ise X in bir sabit vektör olduğunu gösterir. Diğer yandan T tanjant birim vektörü ile X vektörü arasında iç çarpım uygulanırsa

$$h(T, X) = \cos\varphi$$

elde edilir. Bu da α eğrisinin bir helis olduğunu gösterir. Böylece ispatı tamamlamış oluruz.

Tanım 6.2. (2-tip Darboux vektörü):

$\mathbb{E}^4$ de α, birim hızlı eğri olsun. $\{T,\ N_1, N_2, N_3\}$ ve $\{G_1, G_2,\ G_3, G_4\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet 4-ayaklıları ve 2-tip harmonik eğrilikleri olmak üzere

$$D = G_1 T + G_2 N_1 + G_3 N_2 + G_4 N_3 \tag{6.14}$$

şeklinde tanımlanan D vektörüne α eğrisinin 2-tip Darboux vektörü denir.

Lemma 6.1. $\mathbb{E}^4$ de α birim hızlı bir helis olsun. $\{T,\ N_1, N_2, N_3\}$ ve $\{G_1, G_2,\ G_3, G_4\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet 4-ayaklıları ve 2-tip harmonik eğrilikleri olmak üzere aşağıdaki denklemler sağlanır

$$\begin{aligned} h(T,X) &= G_1\, h(T,X) \\ h(N_1,X) &= G_2\, h(T,X) \\ h(N_2,X) &= G_3\, h(T,X) \\ h(N_3,X) &= G_4\, h(T,X)\,. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Burada X, α genel helisinin eksenidir.

Sonuç 6.1. Eğer X, α genel helisinin ekseni ise

$$X = (G_1T + G_3N_2 + G_4N_3)\cos\varphi$$

şeklinde yazabiliriz. Lemma 6.1. den

$$D = G_1T + G_3N_2 + G_4N_3$$

vektörüde α genel helisinin bir eksenidir.

Lemma 6.2. $\mathbb{E}^4$ de α, birim hızlı eğri olsun. $\{T,\ N_1, N_2, N_3\}$ ve $\{G_1, G_2,\ G_3, G_4\}$ sırasıyla α eğrisinin Frenet 4-ayaklıları ve 2-tip harmonik eğrilikleri olmak üzere; α bir genel helistir ancak ve ancak D sabit bir vektördür.

İspat: α, $\mathbb{E}^4$ de bir genel helis olsun. Sonuç 6.1 den

$$D = G_1T + G_3N_2 + G_4N_3$$

mevcuttur. D vektörünün türevini alıp Frenet vektörlerini kullandığımızda

$$D' = (k_1 - G_3k_2)N_1 + (G_3' - G_4k_3)N_2 + (G_4' - G_3k_3)N_3$$

yazabiliriz. 6.8, 6.9 ve 6.10 denklemlerini kullandığımızda

$$D' = 0$$

bulunur. Böylece D sabit bir vektördür.

Tersine, D sabit bir vektör olsun. Bu durumda

$$h(D,T) = h(T + G_3N_2 + G_4N_3\,, T) = h(T,T) = 1$$

olduğu görülür. Böylece

$$\cos\varphi = \frac{h(D,T)}{\|D\|\|T\|} = \frac{1}{\|D\|}$$

bunu yazabiliriz. Burada φ, D ile T arasındaki sabit açıdır. Bu durumda, genel helisin birim eksenini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$X = D\cos\varphi\,.$$

Bu denklemden de

$$h(X,T) = h(D,T)\cos\varphi = \cos\varphi = sbt\,.$$

Böylece, X sabittir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 6.3. α üç boyutlu Öklid uzayında, degenere olmayan bir eğri olsun. Bu eğrinin eksenini (6.14) denklemini kullanarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} D &= G_1t + G_2n_1 + G_3n_2 \\ &= G_1t + G_3n_2 \\ &= t + G_3n_2\,. \end{aligned}$$

Burada G_3 eğrinin 2-tip harmonik eğriliğidir. Eğer eğri boyunca D’nin türevini alıp düzenlersek

$$\begin{aligned} D' &= t' + G_3' n_2 + G_3 n_2' \\ &= k_1 n_1 + G_3' n_2 + G_3(-k_2 n_1) \\ &= G_3' n_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Eğer eğri bir genel helis ise Lemma 6.2. den $D' = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla yukarıda elde ettiğimiz eşitliğin sıfır olması gerekir. Yani

$$G_3' = 0$$

olmasıdır. Bu ifadenin sıfır olması da G_3'ün sabit olduğunu gösterir. Böylece eğri bir genel helisdir.

Lemma 6.4. $\mathbb{E}^4$ de sıfırdan farklı sabit eğriliklere sahip ve genel helis olmayan eğriler vardır. (W-eğrileri gibi)

İspat: $\mathbb{E}^4$ de (6.14) denklemini göz önüne alalım

$$D = G_1 T + G_2 N_1 + G_3 N_2 + G_4 N_3$$

6.1 eşitliklerini kullanarak

$$D = T + G_3 N_2 + \frac{1}{k_3} G_3' N_3$$

yazabiliriz. Burada k_3 eğrisinin eğriliği ve G_3'de 2-tip hormonik eğriliğidir. Eğer buradaki k_3 eğriliği ve G_3'de 2-tip hormonik eğriliği sabit ve sıfırdan farklı ise bu eğri bir W-eğridir. Dolayısıyla

$$D = T + G_3 N_2 \tag{6.16}$$

yazılabilir. Eğer 6.16 denklemin de türevini aldığımızda

$$
\begin{aligned}
D' &= T' + G_3' N_2 + G_3 N_2' \\
&= k_1 N_1 - G_3 k_2 N_1 + G_3 k_3 N_3 \\
&= G_3 k_3 N_3
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Dolayısıyla, kolaylıkla D' nün sıfırdan farklı olduğunu görürüz. Bu ise D nin sabit vektör olmadığını gösterir. Bu durumda Lemma 6.2 gereğince bu eğri bir genel helis değildir.

7. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada 4-boyutlu Öklid uzayındaki kuaterniyonik eğriler amaçlandı ve daha sonra bu kuaterniyonik eğriler için tanımlanan kuaterniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri ile ilişkileri verildi ve bu kuaterniyonik eğriler için harmonik eğriler ve genel helisler tanımlandı. Bu çalışmadaki tanımlar, teoremler ve lemmaların matematiksel açıdan oldukça faydalı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H. H. Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi yayınları, Malatya, 1983.

[2] Sabuncuoğlu, A. Diferensiyel Geometri, Nobel yayınları, 4. baskı, Ankara, 2010.

[3] Bharathi, K., Nagaraj, M., Quaternion valued function of a real variable Serret-Frenet formulae, Indian J. Pure appl. Math. 16, 741-756, 1985.

[4] Karadağ, M. ve Sivridağ, A. İ. Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri, Erc. Ünv. Fen Bil. Derg. 13, 1-2, 23-36, 1997.

[5] Barros, M. General helices and a theorem of Lancert, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 1503-1509, 1997.

[6] Karadağ, M. ve Sivridağ, Ali İhsan. Kuaterniyonik eğilim çizgileri için karakterizasyonlar, Erc. Ünv. Fen Bil. Derg. 13, 37-53, 1997.

[7] Hacısalihoğlu,H.H. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniv. Fen-Edb. Fak. Yayınları, 1983.

[8] Gluck, H. Higher curvatures of curves in Euclidean space, Amer. Math. Monthly 73, 699-704, 1966.

[9] Scofield, P.D. Curves of constant precession, Amer. Math. Monthly 102, 531-537, 1995

[10] Milman, R.S. and Parker, G.D. Elements of differential geometry, Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

[11] Mağden, A. On the curves of constant slope, YYÜ Fen Bilimleri Dergisi, Vol. 4, 103-109, 1993.

[12] Struik, D. J. Lectures on Classical Differential Geometry, Dover, New-York;MR 89b:53002, 1988.

[13] Camci, C., Ilarslan, K., Kula, L. and Hacısalihoglu, H. H. Harmonic curvatures and generalized helices in $\mathbb{E}^n$, Chaos, Solitons and Fractals 40, 1-7, 2007.

[14] Özdamar, E. and Hacısalihoğlu, H. H. A characterization of inclined curves in Euclidean n-space, Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, Ser. A1 24, 15-23, 1975.